

44

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

А.М.Кондратенко, Е.Л.Салдин

УСКОРЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ ЭЛЕКТРО-
МАГНИТНОЙ ВОЛНОЙ В ОНДУЛЯТОРЕ

ПРЕПРИНТ 82-58



УСКОРЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ
ВОЛНОЙ В ОНДУЛЯТОРЕ

А.М.Кондратенко, Е.Л.Салдин

АННОТАЦИЯ

Детально изучено ускорение электронов, движущихся в поперечном периодическом статическом магнитном поле, электромагнитной волной, распространяющейся с фазовой скоростью большей, либо равной скорости света. Исследуется устойчивость продольного и поперечного движения электронов и допустимая погрешность исполнения магнитной структуры. При ускорении сопутствующей волной предлагается использовать слабозатухающую TE_{01} моду в цилиндрическом резонаторе с поперечным размером много большим длины волны. Режим синхронных продольных мод позволяет дополнительно уменьшить мощность потерь в стенках резонатора. В области больших длин волн для ускорения предлагается использовать встречную TEM волну в двусвязном резонаторе с поперечным размером значительно меньшим длины волны. Результаты численно иллюстрируются.

I. Введение

В основе каждого метода ускорения лежит определенный способ организации синхронизма между частицей и электромагнитной волной. Синхронизм предполагает наличие средней по времени проекции электрического поля волны на скорость частицы. В данной работе изучается ускорение электронов в направлении (или против) распространения волны, движущейся с фазовой скоростью, равной или большей скорости света. Синхронизм при этом возможен, если электрон движется, например, по винтовой траектории так, чтобы через период изменения поля волны за счет проскальзывания (из-за разницы скоростей частицы и волны) поперечная компонента скорости совершила полный оборот. Винтовая траектория частиц реализуется при движении вдоль оси спирального ондулятора (поперечного периодического стационарного магнитного поля). Рассматриваемый механизм ускорения предложен в работе /1/. Такой способ организации резонанса лежит сегодня в основе генераторов когерентного излучения, так называемых лазеров на свободных электронах (см., например, обзор /2/).

Для многократного увеличения энергии электронов необходимо изменять поле или период ондулятора вдоль его оси так, чтобы не нарушить условие синхронизма. В рассматриваемом нами приближении, когда поперечное движение электронов управляется полем ондулятора (а не полем волны) изменение энергии происходит адиабатически на временах порядка периода вращения в ондуляторе. Наличие автофазировки в рассматриваемом способе ускорения позволяет в определенных условиях захватывать частицы в режим ускорения в интервале фаз порядка единицы. В спиральном ондуляторе поперечное движение частицы является устойчивым и его можно представить как медленные свободные колебания около быстрого вынужденного движения по винтовой траектории. При использовании внешних фокусирующих элементов период свободных колебаний становится независимым параметром.

Рассматриваемый способ ускорения позволяет для приготовления электромагнитной волны использовать предельно простые типы резонаторов. Например, имеется возможность применять цилиндрический резонатор с продольным размером, значительно превышающим длину ускоряющей электромагнитной волны. При длине волны много меньшей диаметра резонатора можно ускорять на слабозату-

хающей TE_{01} моде и тем самым практически исключить потери в боковых стенках. Кроме этого, работа в режиме синхронизации продольных мод резонатора (т.е. ускорение цугом волн, движущимся туда и обратно между торцевыми стенками), позволяет "выключать" ускоряющее поле там, где нет ускоряемой частицы, и тем самым, снизить мощность потерь в резонаторе.

В области больших длин волн может быть целесообразной замена цилиндрического резонатора коаксиальным (двухсвязным), с использованием TEM моды. При этом дополнительно открывается возможность применения коаксиального резонатора с поперечными размерами много меньшими длины волны, если ускорять частицы на встречной компоненте стоячей TEM волны.

2. Описание продольного движения электронов

Для определенности рассмотрим движение электронов по спиральной траектории со скоростью v , с шагом λ_0 и радиусом вращения r_s . Пусть электрон взаимодействует с электромагнитной волной, распространяющейся вдоль оси спирали (вдоль оси z):

$$\hat{A}_x + i \hat{A}_y = \frac{E}{i\omega} \exp - [i\omega(t \mp z)] \quad (2.1)$$

где \hat{A}_x и \hat{A}_y - компоненты векторного потенциала волны, $\omega = 2\pi/\lambda$ - частота волны, знаки (\mp) соответствуют распространению волны вдоль и против направления движения электронов ($C = I$). Среднее изменение энергии \mathcal{E} в поле волны будет отлично от нуля ($\langle \dot{\mathcal{E}} \rangle = e \langle \vec{v} \vec{E} \rangle \neq 0$), если выполнено следующее условие резонанса:

$$\frac{\lambda}{1 \mp v_2} = \frac{\lambda_0}{v_2}$$

где $v_2(\mathcal{E}, z)$ - компонента скорости движения электрона вдоль оси спирали.

Движение электронов по спиральной траектории можно реализовать в спиральном ондуляторе, поперечное поле которого периодически с периодом¹⁾ $\lambda_0 = 2\pi/\alpha$:

$$H_x + i H_y = H_1 \exp \left\{ -i \int_0^z \alpha dz \right\}$$

Угол θ_s между направлением скорости и осью z , который для простоты будем считать малым ($\theta_s \ll 1$), равен:

¹⁾ Частота ондулятора α может адиабатически изменяться в процессе ускорения.

$$\theta_s = v_x/v_z = e H_1 (\gamma m v \alpha)^{-1} \equiv Q (\gamma v)^{-1}$$

где $\gamma = (1-v^2)^{-1/2}$ - релятивистский фактор; Q - параметр ондуляторности. Величина радиуса вращения траектории выражается через угол θ_s :

$$r_s = \theta_s/\alpha = e H_1 (\alpha^2 \gamma m v)^{-1}$$

Начнем с изучения продольного движения электронов, пренебрегая пока свободными поперечными колебаниями. Уравнение, описывающее изменение энергии частицы \mathcal{E} с координатой вдоль оси ондулятора z (играющей роль времени), можно получить из гамильтониана \mathcal{H} , записанного в переменных энергии \mathcal{E} и сопряженной ей продольной фазы

$$S_2 = \int_0^z \frac{dz}{v_2(\mathcal{E}, z)} - t \quad (2.2)$$

При отсутствии электромагнитной волны энергия \mathcal{E} и фаза S_2 не меняются ($\mathcal{E}' \equiv d\mathcal{E}/dz = 0$, $S_2' = 0$). Поэтому гамильтониан $\mathcal{H}(\mathcal{E}, S_2, z)$ пропорционален в первом приближении векторному потенциалу волны \hat{A} и равен (см. приложение):

$$\mathcal{H}(\mathcal{E}, S_2, z) = -\frac{e \vec{v} \hat{A}}{v_2} = -e \left(\frac{\vec{v}_1 \hat{A}_1}{v_2} + \hat{A}_z \right) \quad (2.3)$$

Следующими приближениями по \hat{A} можно пренебречь, если поле ондулятора достаточно велико:

$$H_1 \gg E (1 \mp v_2)/v_2 \quad (2.4)$$

Удобно ввести вместо переменной S_2 (2.2) медленную фазу

$$\Psi = \int_0^z \alpha dz - \omega(t \mp z)$$

Тогда гамильтониан \mathcal{H} , описывающий движение частицы в переменных (\mathcal{E}, Ψ, z) в волне (2.1), запишется в виде:

$$\mathcal{H} = \int_{\mathcal{E}} \varepsilon(\mathcal{E}, z) d\mathcal{E} - U \sin \Psi \quad (2.5)$$

где $\varepsilon = \alpha - \omega(v_2^{-1} \mp 1)$ - отстройка от резонанса и $U = e \theta_s E$ - амплитуда потенциала. Соответствующие гамильтониану (2.5) уравнения запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi' &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi} = U \cos \psi, \\ \psi' &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi} = \varepsilon - \frac{\partial U}{\partial \xi} \sin \psi \end{aligned} \quad (2.6)$$

Практический интерес представляют устойчивые решения уравнений (2.6). Для этого достаточно изменение параметров ондулятора выбрать таким, чтобы существовала равновесная траектория с постоянной фазой

$$\psi = \psi_s = \text{const}$$

Условие постоянства фазы позволяет из уравнений движения найти изменение энергии равновесной частицы ξ_s вдоль оси z . Функция $\xi_s(z)$ и значение ψ_s должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\xi_s, z) &= \varepsilon - \omega(v_z^{-1} - 1) = 0, \\ \xi_s' &= U_s \cos \psi_s \end{aligned} \quad (2.7)$$

где U_s значение U при равновесной энергии $\xi = \xi_s(z)$. В первом уравнении $\varepsilon = 0$ мы пренебрегли слагаемым $\partial U / \partial \xi_s$, что оправдано ввиду предполагаемой малости поля волны (см. условие (2.4)).

Исследуем устойчивость равновесного движения. При малых отклонениях энергии от равновесной $P = \xi - \xi_s(z)$ ($|P| \ll \xi_s$) гамильтониан $\mathcal{H}(P, \psi, z) = \mathcal{H}(\xi, \psi, z) + \xi_s'(\psi - \psi_s)$ принимает вид:

$$\mathcal{H}(P, \psi, z) = \frac{P^2}{2\mu} - U_s [\sin \psi - (\psi - \psi_s) \cos \psi_s], \quad (2.8)$$

где

$$\mu = \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi_s} \right]^{-1} = \left[\frac{\omega}{v_z^2} \frac{\partial v_z}{\partial \xi} \right]^{-1}$$

эффективная масса продольного движения. В случае движения в спиральном ондуляторе

$$\mu^{-1} = \frac{\omega}{v_z^3 \xi} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta_s^2 \right). \quad (2.9)$$

Рассмотрим важный случай адиабатически медленного изменения параметров μ и U_s . Гамильтониан такого типа в этом приближении подробно исследован в теории синхротронных колебаний энергии в циклических ускорителях [3].

Малые отклонения $\Delta \psi = \psi - \psi_s$, описываемые гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \frac{P^2}{2\mu} + (U_s \sin \psi_s) \frac{(\Delta \psi)^2}{2}, \quad (2.10)$$

не нарастают со временем, т.е. равновесное движение становится устойчивым, если

$$\sin \psi_s > 0.$$

Частота фазовых колебаний около ψ_s равна

$$\Omega = [(U_s \sin \psi_s) / \mu]^{1/2}.$$

Адиабатическое приближение применимо при малом изменении μ и U_s на периоде фазовых колебаний:

$$|\mu'/\mu| \ll \Omega, \quad |U_s'/U_s| \ll \Omega. \quad (2.11)$$

Адиабатическим инвариантом малых фазовых колебаний является

$$I = \frac{\mathcal{H}}{\Omega} = \frac{\mu \Omega}{2} |\Delta \psi|_0^2 = \frac{P_0^2}{2\mu \Omega},$$

где $|\Delta \psi|_0$ и P_0 — амплитуда колебаний фазы и энергии.

В частности при ускорении в сопутствующей волне, задавая линейное возрастание поля ондулятора и постоянный период λ_0 ($dQ/dz = \text{const}$), имеем из (2.7) для $Q^2 \gg I$, $\gamma^2 \gg I$:

$$\xi_s = m Q \sqrt{\frac{\omega}{2\varepsilon}}, \quad \cos \psi_s = \frac{m Q' \omega}{2e E \varepsilon} \quad (2.12)$$

При этом, из сохранения I имеем:

$$|\Delta \psi|_0 \sim \varepsilon^{-1/4}, \quad P_0 / \varepsilon \sim \varepsilon^{-3/4}$$

Границы устойчивого движения частиц (области автофазировки) по фазе и по энергии можно найти из гамильтониана (2.8).

Доля фаз, попадающая в область устойчивости $\eta = (\psi_{\max} - \psi_{\min}) / 2\pi$ удовлетворяет трансцендентному уравнению:

$$\cos \psi_s (2\pi \eta - \sin 2\pi \eta) - 2 \sin^2 \pi \eta \cdot \sin \psi_s = 0 \quad (2.13)$$

Формула

$$\eta = 3\psi_s / (2\pi)$$

дает хорошее приближение во всей области устойчивых фаз

$$0 < \psi_s < \pi/2$$

Аналогично для максимального отклонения энергии получаем:

$$|P|_{\max} = 2 [\mu U_s (\sin \psi_s - \psi_s \cos \psi_s)]^{1/2} \approx \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\mu U_s \psi_s^3}. \quad (2.14)$$

Фазовый объем пучка A , захватываемый в режим ускорения, $A = \int dP d\psi = 2\sqrt{2\mu U_s} \int_{2\pi\eta} [\cos\psi_s (\psi - \sin\psi) - 2\sin^2\frac{\psi}{2} \sin\psi_s]^{1/2} d\psi \approx 5.4 (\mu U_s)^{1/2} \psi_s^{5/2}$.

где η определена уравнением (2.13).

Следует подчеркнуть, что класс устойчивых решений гамильтониана (2.5) не ограничивается адиабатическим случаем. Наличие двух задаваемых параметров ондулятора (период и поле) дает возможность, не нарушая условие резонанса $\xi = 0$, например, скачком изменять параметры μ, U_s, ψ_s , что открывает дополнительные возможности управления процессом ускорения.

Темп ускорения в нашем рассмотрении ограничен условием малости поля волны (2.4), из которого следует, что в спиральном ондуляторе

$$\frac{\xi'}{\xi - m} \ll \approx \frac{\theta_s^2}{1 - v_z}$$

Например, при ускорении сопутствующей волной в ондуляторе с $Q^2 \gg 1$, в ультрарелятивистском случае имеем:

$$\xi' \ll \approx \xi,$$

что означает относительно малый прирост энергии на периоде ондулятора.

В рассматриваемом методе вынужденное движение в ондуляторе приводит к потере энергии на излучение. Для осуществления ускорения необходимо, чтобы темп ускорения превышал мощность магнито-тормозного излучения $W = \frac{2}{3} z_e^2 \gamma^2 H_1^2$, ($z_e = e^2/m$):

$$\xi'_s > W.$$

Из этого условия получается, что излучением можно пренебречь, если

$$E \gg \gamma^3 z_e \approx H_1.$$

Другим эффектом излучения является увеличение энергетического разброса вследствие квантовых флуктуаций магнито-тормозного излучения. Это увеличение не приводит к выходу ускоряемых частиц из сепаратрисы, если

$$P^2 \sim \left\langle \frac{d}{dz} (\delta\xi)^2 \right\rangle L \ll \mu^2 \Omega^2, \quad (2.15)$$

где $\left\langle \frac{d}{dz} (\delta\xi)^2 \right\rangle = \frac{55}{24\sqrt{3}} \gamma^4 \frac{e\hbar}{m} z_e^2 H_1^3$ - скорость

диффузии энергии. Условие (2.15) можно переписать в виде:

$$\frac{137}{\gamma\theta_s} \frac{W}{\xi'_s} \ll 1.$$

В заключение этого раздела подчеркнем, что все приведенные выше результаты останутся в силе и при использовании других (неспиральных) ондуляторов. Вводя медленную фазу ψ и усредняя по быстрым осцилляциям на периоде ондулятора, мы получим гамильтониан такого же вида, что и приведенный выше (2.8). Например, в линейном ондуляторе с полем

$$H_y = 0, \quad H_x = H_1 \cos \alpha z$$

имеем вместо (2.9)

$$\mu^{-1} = \frac{\omega}{v^3 \xi} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \langle \theta^2 \rangle \right)$$

где $\langle \theta^2 \rangle = \langle \theta_0^2 \cos^2 \alpha z \rangle = \theta_0^2 / 2$

По этой же причине не обязательно использовать циркулярно-поляризованную электромагнитную волну. В частности, при использовании спирального ондулятора и линейно-поляризованной волны

$$\vec{E} = E_0 \sin[\omega(t+z)] \vec{e}_x$$

имеем:

$$\xi'_s = e \langle \vec{E} \vec{v}_1 / v_z \rangle = \frac{e}{2} E_0 \theta_s \cos \psi_s,$$

откуда

$$U_s = e E_0 \theta_s / 2.$$

3. Поперечное движение электронов

В общем случае движение частиц в ондуляторе можно представить как свободные колебания в поперечной плоскости возле вынужденной периодически искривленной траектории $\vec{z} = \vec{z}_s(\xi, z) + z \vec{e}_z$. Периодическая с периодом λ_0 траектория \vec{z}_s описывается уравнениями

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}} \right] = \frac{e}{v\xi} [-H_y + y' H_z], \quad (3.1)$$

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{y'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}} \right] = \frac{e}{v\xi} [H_x - x' H_z],$$

где $\vec{H}(x, y, z)$ - поле ондулятора (в общем случае вместе с фокусирующей системой).

Пусть $\vec{s}_1 = \vec{z}_1 - \vec{z}_s$ - обозначает отклонение в поперечном направлении от вынужденной траектории. Тогда в линейном приближении уравнения свободных колебаний при $\theta_s \ll 1$ можно за-

писать следующим образом:

$$S_x'' + g_x S_x = \frac{e}{v \epsilon} \left[S_y' H_z + S_y \left(y_s' \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial y} \right) \right], \quad (3.2)$$

$$S_y'' + g_y S_y = \frac{e}{v \epsilon} \left[-S_x' H_z + S_x \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} - x_s' \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \right],$$

где

$$g_x = \frac{e}{v \epsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - y_s' \frac{\partial H_z}{\partial x} \right),$$

$$g_y = \frac{e}{v \epsilon} \left(-\frac{\partial H_x}{\partial y} + x_s' \frac{\partial H_z}{\partial y} \right).$$

Для устойчивости поперечного движения частота свободных колебаний Ω_b не должна совпадать с частотами вынужденного движения. Это можно обеспечить выбором фокусирующей системы.

Приведем пример спирального ондулятора, образованного двумя диаметрально противоположными спиралями из линейного провода, по которым течет ток в разных направлениях. Компоненты магнитного поля в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) в такой схеме равны [4]:

$$H_\rho = 2 H_0 \sum_{m=1,3,\dots} m \Gamma_m'(m \alpha \rho) \frac{K_m'(m \alpha a)}{K_m'(m \alpha a)} \sin[m(\varphi - \alpha z)]$$

$$H_\varphi = \frac{2 H_0}{\alpha \rho} \sum_{m=1,3,\dots} m I_m(m \alpha \rho) \frac{K_m'(m \alpha a)}{K_m'(m \alpha a)} \cos[m(\varphi - \alpha z)]$$

$$H_z = -\alpha \rho H_\varphi$$

где a — радиус спирали; I_m и K_m — модифицированные функции Бесселя m -го порядка; I_m' и K_m' — производные этих функций по аргументу. На оси ондулятора $H_z = 0$, $H_y + i H_x = H_0 \exp(-i \alpha z)$. Для малых углов $\theta_s = \frac{e H_0}{\alpha \epsilon v}$ имеем:

$$x_s + i y_s = \frac{\theta_s}{\alpha} \exp(i \alpha z)$$

Усредняя по быстрому периоду αe^{-i} уравнения (3.2) свободных колебаний, получаем:

$$S_x'' + \frac{\alpha^2 \theta_s^2}{2} S_x = 0, \quad (3.3)$$

$$S_y'' + \frac{\alpha^2 \theta_s^2}{2} S_y = 0.$$

Здесь использованы соотношения:

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial H_y}{\partial y} = \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0,$$

$$\overline{y_s' \frac{\partial H_z}{\partial y}} = \overline{x_s' \frac{\partial H_z}{\partial x}} = 0, \quad -\overline{y_s' \frac{\partial H_z}{\partial x}} = \overline{x_s' \frac{\partial H_z}{\partial y}} = \left(\frac{e}{v \epsilon} \right)^{-1} \frac{\alpha^2 \theta_s^2}{2}$$

Значением H_z ($e H_z / v \epsilon = -\alpha \theta_s^2$) при $\theta_s \ll 1$ можно пренебречь.

Из уравнений (3.3) следует, что частота свободных колебаний $\Omega_b = \alpha \theta_s / \sqrt{2}$.

Свободные колебания из-за эффектов связи могут изменять условие синхронизма продольного движения с волной. Так как $v_z^{-1} = v^{-1} \sqrt{1 + \theta^2} \approx v^{-1} \left(1 + \frac{\theta_s^2 + \theta_b^2}{2} + \vec{\theta}_s \vec{\theta}_b \right)$, $\vec{\theta}_s = \vec{z}_s'$, $\vec{\theta}_b = \vec{z}_b'$, имеем вместо (2.7) следующие усредненные уравнения продольного движения²⁾:

$$\alpha = \omega (v_z^{-1} - 1) + \frac{\omega \theta_b^2}{2v}, \quad \epsilon' = v_s \cos \psi_s.$$

Добавочный член $\omega \theta_b^2 / 2v$ в расстройке ϵ изменяет положение резонанса.

Например, при ускорении в сопутствующей волне, задавая линейное возрастание поля ондулятора и постоянный период имеем вместо (2.12) следующие выражения:

$$\epsilon_s = m Q \left(2 \frac{\alpha}{\omega} - \theta_b^2 \right)^{-1}, \quad \cos \psi_s = \frac{m Q'}{e E} \left(2 \frac{\alpha}{\omega} - \theta_b^2 \right)^{-1}$$

В практически важном случае малого угла свободных колебаний ($\theta_s^2 \gg \theta_b^2$) уравнения фазовых колебаний и размеры области автофазировки останутся прежними, так как изменением массы продольного движения m и ускоряющей фазы ψ_s можно пренебречь.

Выпишем размер области автофазировки по углу свободных колебаний. Для пучка с дельта-образным распределением по фазе и энергии ($|\Delta \psi|_0 = 1$, $\frac{P_0}{\sqrt{m} U_s} \ll 1$) из формулы (2.14) получаем

$$\frac{\theta_b^2}{\theta_s^2} < \frac{4 \sqrt{m} U_s}{\epsilon} \sqrt{\sin \psi_s - \psi_s \cos \psi_s}. \quad (3.4)$$

Представляет интерес проследить как условие захвата частиц по углу θ_b изменяется с ростом энергии. При адиабатическом изменении параметров имеем

$$\theta_b^2 \sim \Omega_b / \epsilon$$

2) Подразумеваем, что частота свободных колебаний значительно выше фазовой ($\Omega_b \gg \Omega$).

Для примера ускорения при релятивистских энергиях сопутствующей волной и при использовании собственной фокусировки спиральным ондулятором получаем $\Omega_b = \text{const}$ и $\theta_b^2 \sim \xi^{-1}$. Следовательно, максимальный угол захвата свободных колебаний (3.4) изменяется как ($\mu \sim \xi$):

$$(\theta_b^2)_{\text{max}} / \theta_s^2 \sim \xi^{1/2}$$

4. Учет погрешностей магнитной структуры ондулятора

Сформулируем требования на точность исполнения магнитной системы ускорителя. Основным эффектом, влияющим на процесс ускорения, являются флуктуации (вдоль оси ондулятора) отстройки ξ , которые могут вызываться флуктуациями периода и поля ондулятора, а также неточностями выставки фокусирующих линз. Переменная действия фазового движения равна

$$I = \frac{(P - \mu \xi_0)^2}{2\mu\Omega} + \frac{U_s \sin \psi_s (\Delta\psi)^2}{2\Omega}$$

где ξ_0 - отстройка резонанса из-за погрешностей. Поэтому при скачке $\delta\xi_0$ имеем

$$\delta I = \frac{1}{\Omega} (P - \mu \xi_0) \delta \xi_0$$

Используя это соотношение получаем, что скорость диффузии действия I выражается через диффузию отстройки следующим образом:

$$\frac{dI}{dz} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial I} \frac{\partial}{\partial z} (\delta I)^2 = \frac{\mu}{2\Omega} \frac{d}{dz} (\delta \xi_0)^2$$

Рост амплитуды фазовых колебаний ограничивается размерами сепаратрисы

$$I_{\text{max}} \lesssim \mu \Omega$$

откуда следует, что длина ускорителя, на которой погрешностями магнитной системы можно пренебречь, не превышает следующей величины:

$$L \lesssim L_{\text{хар}} = 2\Omega^2 / \frac{d}{dz} (\delta \xi_0)^2 \quad (4.1)$$

Эта формула справедлива при условии

$$\Omega L_{\text{хар}} \gg 1$$

В обратном случае, ускорение происходит до тех пор, пока

$$\Delta\psi \sim \int_0^L \xi_0 dz \sim \left[\frac{d}{dz} (\delta \xi_0)^2 \right]^{1/2} L^{3/2} \lesssim 1,$$

и таким образом $L_{\text{хар}}$ становится равной

$$L_{\text{хар}} \approx \left[\frac{d}{dz} (\delta \xi_0)^2 \right]^{-1/3}$$

Приведем численный пример. Пусть ондулятор длины 20 м с периодом 50 см состоит из 40 отдельных элементов (периодов). Частоту фазовых колебаний примем равной $\Omega \approx 15/L$. Сформулируем требование на допустимое нарушение периодичности ондулятора $\Delta x/x$. В нашем случае $\frac{d}{dz} (\delta \xi_0)^2 = (\Delta x)^2/l$, где l - длина отдельного элемента. Из формулы (4.1) получаем, что

$$\frac{\Delta x}{x} \ll 10^{-2},$$

т.е. флуктуация длин элементов должна быть меньше³⁾ 0,5 см.

Раскачку когерентных фазовых колебаний можно устранить введением скачкообразного изменения вдоль оси Z расстройки ξ , подбираемой по эффекту. Такая коррекция фазового движения позволит использовать ускоритель с длиной, превышающей $L_{\text{хар}}$.

5. Использование резонаторов

Рассматриваемый способ ускорения можно практически реализовать, поместив в ондулятор резонатор для формирования электромагнитной волны. При этом может быть использован резонатор однородный в направлении ускорения частиц с длиной l_z много большей периода ондулятора λ_0 . Условие синхронизма, из-за того, что фазовая скорость в таких резонаторах может быть больше скорости света, становится следующим:

$$\omega = k_z v_z = \omega$$

где k_z - проекция волнового вектора на ось Z .

Независимо от вида резонатора его поперечные размеры d удовлетворяют определенным общим соотношениям. При вынужденном движении в полях ондулятора ускоряемая частица не должна выходить за пределы резонатора, т.е. $d > 2z_s = 2\lambda_0 \theta_s$. Из-за экспонен-

³⁾ Здесь мы выписали ограничения на $\Delta x/x$ с точки зрения фазового движения. Возникающая раскачка поперечных колебаний может также ограничиваться поперечной апертурой ускорителя.

циальной зависимости поля ондулятора на его оси от апертуры d ($H_1 \sim \exp(-\alpha a)$) размер резонатора d практически не может значительно превосходить λ_0 . В частности в релятивистской области для сопутствующей ($\lambda \approx \lambda_0 \theta_s^2/2$) и встречной ($\lambda \approx 2\lambda_0$) волн, соответственно, имеем:

$$2 \frac{\lambda}{\theta_s^2} \approx d > \frac{4\lambda}{\theta_s}, \quad \frac{\lambda}{2} \approx d > \lambda \theta_s. \quad (5.1)$$

Следовательно, поперечные размеры резонатора при ускорении в сопутствующей волне могут значительно превышать длину волны ($d \gg \lambda$). Именно в этой области в цилиндрическом резонаторе можно воспользоваться уникальной особенностью моды волны $TE_{0,1}$, которая, как известно, имеет аномально малое поглощение в боковых стенках. Параметром отношения потерь волны $TE_{0,1}$ в боковых стенках к потерям в торцевых является величина $0,19 \lambda^2 l_2 / R^2$, где R — радиус резонатора.

С другой стороны, условие (5.1) при ускорении на встречной волне не запрещает использования резонаторов с поперечными размерами много меньшими длины волны. Такую возможность предоставляет TEM мода в двусвязном резонаторе, в котором поперечные размеры вообще не связаны с длиной возбуждаемой в нем волны. Таким образом рассматриваемый способ ускорения позволяет продвигаться и в область больших длин волн.

Характерной особенностью однородных резонаторов с длиной l_2 много большей длины волны является возможность пространственной концентрации электромагнитных волн путем синхронизации продольных мод. Это позволяет ускорять цугом волн сопутствующим частице и тем самым, уменьшить мощность в $2l_2/l_b$ раз (l_b — длина цуга). При ускорении сопутствующей TEM волной принципиальным ограничением длины цуга является эффект проскальзывания волны относительно частицы: на длине резонатора l_2 частица не должна выходить за пределы цуга длины l_b :

$$l_2 (1 - v_z) < l_b \quad (5.2)$$

Одним из способов организации режима синхронных мод является использование для накачки $2N+1$ внешних генераторов электромагнитных волн, частоты которых Ω_i настроены на собственные частоты резонатора

$$\Omega_i = \omega_i = \frac{\pi}{l_2} (M+i), \quad -N \leq i \leq N.$$

Время расплывания цуга τ определяется лишь точностью настройки частот генераторов: $\tau \sim \Delta^{-1} = |\Omega_i - \omega_i|^{-1}$. Если точность настройки Δ много меньше декремента затухания моды в резонаторе, для получения цуга можно использовать $2N+1$ одинаковых генераторов, сфазированных в момент их включения. Длина цуга волн при этом равна

$$l_b \approx l_2 / N.$$

В случае использования $TE_{0,1}$ моды волны в цилиндрическом резонаторе групповая скорость цуга $v_{gp} = d\omega/dk_z$ меньше скорости света, вследствие чего условие (5.2) модифицируется следующим образом

$$l_2 (v_{gp} - v_z) < l_b \quad (5.3)$$

Для организации цуга в простейшей ситуации можно (так же как и в случае TEM моды) использовать $2N+1$ одинаковых генераторов, сфазированных в момент включения, с частотами

$$\Omega_i - \Omega_0 = \frac{\pi i}{l_2 v_{gp}}, \quad -N \leq i \leq N,$$

где Ω_0 — одна из собственных частот $TE_{0,1}$ моды. Возможное число генераторов может дополнительно ограничиваться дисперсией мод:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial k_z^2} \left(\frac{\pi N}{l_2} \right)^2 \lesssim 1 \quad (5.4)$$

Рассмотрим вопрос о мощности потерь в резонаторах, затрачиваемой на ускорение частиц. Взаимно ортогональные собственные функции резонатора

$$\vec{A} \sim \vec{A}_\lambda(\vec{z}) \exp(i\omega t), \quad \int \vec{A}_\lambda \vec{A}_{\lambda'} d\vec{z} = \delta_{\lambda, \lambda'}$$

являются решениями уравнения

$$\Delta \vec{A}_\lambda + k_\lambda^2 \vec{A}_\lambda = 0$$

с собственными значениями k_λ и удовлетворяют следующим граничным условиям на стенках резонатора

$$i\omega [\vec{e}_r \vec{A}_\lambda] = \frac{1}{n} [\vec{e}_r [\vec{e}_r \text{rot} \vec{A}_\lambda]],$$

где n — показатель преломления материала стенок (вообще говоря комплексный), который полагается большим ($|n| \gg 1$),

\vec{e}_r — нормаль к поверхности стенок.

Для коаксиального резонатора решение \vec{A}_λ имеет вид

$$\vec{A}_\lambda = \sqrt{\frac{2}{\ell_2}} \frac{\sin k_2 z}{\sqrt{2\pi \ln R_2/R_1}} \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y}{x^2 + y^2}$$

где $k_2 = m\pi/\ell_2$, R_2 и R_1 — максимальный и минимальный радиусы коаксиала, координаты x, y отсчитываются от оси резонатора. Декремент затухания TEM моды в коаксиальном резонаторе ($\vec{A} \sim e^{-\Lambda t}$) равен:

$$\Lambda = \frac{\eta}{2} \left(\frac{1}{\ell_2} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) (\ln \frac{R_2}{R_1})^{-1} \right)$$

где $\eta = 4Re\kappa^{-1}$ — коэффициент поглощения в стенках.

Поместим центр ондулятора на расстоянии $(R_1 + R_2)/2$ от оси коаксиала. Тогда из условия (5.1) получаем, что в оптимальном случае

$$R_2 - R_1 \approx 2\lambda_0 \theta_s$$

Ускоряющее электрическое поле TEM моды можно выразить через амплитуду C собственной моды:

$$\vec{E} = i\omega C \vec{A}_\lambda \exp(i\omega t) + \text{к.с.}$$

Темп ускорения \mathcal{E}'_s определяется амплитудой электрического поля на оси ондулятора и равен

$$\mathcal{E}'_s = U_s \cos \psi_s = \frac{e E_0 \theta_s \cos \psi_s}{2} = \frac{e\omega/c |\theta_s \cos \psi_s|}{[2\pi \ell_2 \ln R_2/R_1]^{1/2} (R_1 + R_2)}$$

При ускорении в одномодовом режиме мощность потерь в стенках резонатора P_1 будет определяться следующей формулой

$$P_1 = \frac{\Lambda}{4} E_0^2 (R_1 + R_2)^2 \ell_2 \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Нетрудно получить, что мощность потерь в стенках резонатора в режиме синхронных мод при использовании $2N + 1$ одинаковых генераторов (при ускорении сопутствующей TEM волной) будет в $2N + 1$ раз меньше, чем мощность потерь в одномодовом режиме

$$P_{2N+1} = P_1 / (2N + 1)$$

Обсудим параметрическую зависимость мощности потерь в стенках от длины волны λ ускоряющего поля и от угла вращения в ондуляторе θ_s при заданном темпе ускорения. При ускорении в одномодовом режиме встречной компонентой TEM волны при оптимальном выборе поперечных размеров коаксиала

$$(R_2 - R_1 \sim R_1 + R_2 \sim \lambda_0 \theta_s)$$

имеем:

$$P_1 \sim \ell_2 \sqrt{\lambda} / \theta_s$$

Такую же зависимость имеем и для мощности потерь при ускорении сопутствующей волной в режиме синхронных мод, при условии, что длина цуга ограничена только проскальзыванием ($2N + 1 \lesssim \theta_s^{-2}$):

$$P_{2N+1} \sim \ell_2 \sqrt{\lambda} / \theta_s$$

Приведем численный пример. При ускорении электронов встречной TEM волной с длиной $\lambda = 30$ см от энергии $\mathcal{E}_{in} = 1$ МэВ ($\gamma_{in} = 2$) до $\mathcal{E}_f = 6$ МэВ с углом вращения в ондуляторе $\theta_s = 0,3$ период ондулятора примерно равен $\lambda_0 \approx 15$ см. Амплитуда поля ондулятора увеличивается от 0,5 кГс в начале до 2,5 кГс — в конце ондулятора. Размеры коаксиала примем равными $R_1 = 0,5$ см, $R_2 = 2$ см, $\ell_2 = 10$ м. Ускоряющую фазу выберем $\psi_s = 30^\circ$. Тогда для резонатора из меди мощность потерь⁴⁾ P_1 составит ≈ 2 МВт. Стабильность частоты внешнего генератора определяется шириной линии резонатора и должна быть лучше $\Delta/\omega \approx 10^{-5}$.

Для цилиндрического резонатора собственное решение в случае TE_{01} моды имеет вид:

$$\vec{A}_\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi \ell_2}} \frac{J_1(k_1 \rho)}{J_0(k_1 R)} \frac{[z\vec{e}_z]}{R \rho} \sin k_2 z$$

где J_1, J_0 — функции Бесселя; $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, R — радиус резонатора, k_1 находится из уравнения $J_1(k_1 R) = 0$ и равно $k_1 = 3,84/R$. Декремент затухания TE_{01} моды равен

$$\Lambda = \frac{\eta}{2} \left[\frac{1}{\ell_2} + 0,19 \frac{\lambda^2}{R^3} \right]$$

Поместим центр ондулятора на расстоянии $\rho_0 \approx 0,5R$, где амплитуда электрического поля максимальна. Темп ускорения, при условии, что радиус вращения $r_s \ll R$, равен

$$\mathcal{E}'_s = \frac{e}{2} E_0 \theta_s \cos \psi_s \approx 3,64 \frac{e \theta_s / c |\cos \psi_s|}{\lambda R \sqrt{\ell_2}}$$

Мощность потерь в одномодовом режиме равна

$$P_1 \approx 0,2 E_0^2 R^2 \ell_2 \Lambda$$

⁴⁾ Отметим, что использование двусвязных резонаторов любых других видов, дает дополнительную возможность оптимизации параметров.

В режиме синхронных мод мощность потерь в стенках будет уменьшена в $2N + 1$ раз. Число генераторов $(2N + 1)$ при использовании TE_{01} волны ограничивается сверху условиями (5.3) и (5.4).

Обсудим параметрическую зависимость мощности потерь в стенках в режиме синхронных мод при заданном темпе ускорения. Если число генераторов ограничено эффектом проскальзывания (условием (5.3)), то при оптимальном выборе радиуса резонатора (величина $R^2 \lambda$ минимальна при $R \approx (0.1 \ell_z \lambda^2)^{1/3}$) имеем

$$P_{2N+1} \sim \ell_z^{2/3} \lambda^{11/6}$$

При ограничении числа генераторов дисперсией продольных мод (условие (5.4)) получаем, что

$$P_{2N+1} \sim \ell_z^{-1/6} \lambda^{8/3} \theta_s^{-2}$$

Приведем для иллюстрации численный пример для TE_{01} моды. При ускорении волной с длиной $\lambda = 3$ см от энергии 5 МэВ до 100 МэВ с углом вращения в ондуляторе $\theta_s = 0,3$, период ондулятора равен $\lambda_c \approx 50$ см. Амплитуда поля ондулятора увеличивается от 0,5 кГс до 12 кГс. Размеры резонатора примем следующими: $R = 12$ см, $\ell_z = 20$ м. Ускоряющую фазу ψ_s выберем равной 30° . Возможное число генераторов ограничено условием (5.4) и примерно равно 10. Тогда для резонатора из меди мощность потерь в стенках составит примерно

$$P_{2N+1} \approx 4 \text{ МВт.}$$

Стабильность частоты внешних генераторов должна быть лучше $\lambda/\omega \approx 10^{-7}$. Заметим, что селекция моды TE_{01} , несмотря на вырождение с модой TH_{11} легко осуществляется благодаря сильной разнице добротностей этих мод (добротности отличаются в $\omega^2/\kappa_1^2 \approx 40$ раз).

В заключение следует отметить, что продвижение в область коротких длин волн позволяет сильно выиграть в мощности потерь. Однако использовать традиционные генераторы для накачки резонаторов становится затруднительным. Перспективным при этом представляется применение в качестве генератора лазеров на свободных электронах (ЛСЭ). Общность принципа синхронизма позволяет совмещать генератор ЛСЭ с ускорителем. Такое совмещение можно реализовать, делая общим резонатор и используя последова-

тельно два ондулятора: в одном осуществляется генерация излучения, пропусканием через него электронного пучка сравнительно малой энергии и большого тока, в другом осуществляется ускорение малого тока до высокой энергии (трансформатор энергии). Организация режима синхронных мод в такой схеме автоматически реализуется, если для генерации излучения использовать электронные ступки, следующие друг за другом через время $2\ell_z/v_{gr}$

Пользуемся случаем выразить благодарность В.Н.Пакину за ряд ценных советов, в частности, за указание на возможность использования в рассматриваемом методе ТЕМ моды. Нам приятно также поблагодарить Я.С.Дербенева за обсуждения.

1. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев. ЖЭТФ 50, 1101 (1966).
2. М.В.Федоров. УФН 135, 213 (1981).
3. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев. "Теория циклических ускорителей" Ф.М. Москва, 1962. Глава IV.
4. Г.Бухгольц. "Расчет электрических и магнитных полей". М. Изд. иностр.лит. 1961. Глава VI § I.

Проведем преобразование гамильтониана

$$\mathcal{H}_0(\vec{p}, \vec{z}, t) = \sqrt{(\vec{p} - e\vec{A})^2 + m^2}$$

от переменных \vec{p}, \vec{z}, t к переменным удобным для описания процесса ускорения. Выберем в качестве времени координату z . Энергию \mathcal{E} будем считать новым обобщенным импульсом $P_2 = \mathcal{E}$. Новую поперечную координату будем отсчитывать от вынужденной траектории

$$\vec{s}_1 = \vec{z}_1 - \vec{z}_s(\mathcal{E}, z)$$

Вариации действия в старых и новых переменных связаны производящей функцией преобразования $F(\vec{s}_1, \mathcal{E}, \vec{P}_1, z)$:

$$-\mathcal{E}\delta t + P_2\delta z + \vec{P}_1\delta\vec{z}_1 = -\mathcal{H}\delta z + P_2\delta s_1 + dF,$$

где $\mathcal{H}(s_2, \vec{s}_1, \vec{P}_1, z)$ - новый гамильтониан; s_2 - координата канонически сопряженная \mathcal{E} . \vec{P}_1 - новый обобщенный импульс, сопряженный \vec{s}_1 . Полагая

$$s_2 = \int_0^z \frac{dz}{v_2(\mathcal{E}, z)} - t - \alpha(\vec{s}_1, z, \vec{P}_1, \mathcal{E})$$

($v_2 = v/\sqrt{1+\vec{z}'_s{}^2}$), из условия каноничности преобразования (dF - полный дифференциал) получаем следующие соотношения:

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{P}_1} = \mathcal{E} \frac{\partial \alpha}{\partial \vec{P}_1}, \quad \frac{\partial F}{\partial \mathcal{E}} = \vec{P}_1 \frac{\partial \alpha}{\partial \mathcal{E}} + \mathcal{E} \frac{\partial \alpha}{\partial \mathcal{E}} - \mathcal{E} \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} \int_0^z \frac{dz}{v_2},$$

$$P_2 = \mathcal{E}, \quad \vec{P}_1 = \vec{P}_1 + \mathcal{E} \frac{\partial \alpha}{\partial \vec{s}_1} - \frac{\partial F}{\partial \vec{s}_1}$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{E}/v_2 - P_2 - \vec{P}_1 \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \mathcal{E} \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial z}$$

Введем функцию $\tilde{F} = F - \alpha \mathcal{E}$. Тогда

$$\vec{P}_1 = \vec{P}_1 - \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \vec{s}_1}, \quad \mathcal{H} = \frac{\mathcal{E}}{v_2} - P_2 - \vec{P}_1 \frac{\partial \tilde{F}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial z}$$

Выберем функцию \tilde{F} в виде

$$\tilde{F} = \int_0^z d\mathcal{E} \left\{ -\mathcal{E} \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} \int_0^z \frac{dz}{v_2} + \frac{\partial \tilde{z}'_s}{\partial \mathcal{E}} [e A_1^0(\vec{z}_s, z) + \vec{P}_1^s] \right\} + \\ + \vec{s}_1 [e A_1^0(\vec{z}_s, z) + \vec{P}_1^s]$$

где

$$\vec{P}_1^s(\mathcal{E}, z) = \gamma m v \vec{z}'_s / \sqrt{1+(\vec{z}'_s)^2}, \quad \vec{A}_1^0(\vec{z}_s, z) -$$

импульс частицы в поле ондулятора на вынужденной траектории. Тогда преобразованные переменные и гамильтониан равны:

$$\vec{P}_1 = \vec{P}_1 - e \vec{A}_1^0(\vec{z}_s, z) - \vec{P}_1^s,$$

$$\alpha = \vec{P}_1 \frac{\partial \vec{z}_s}{\partial \xi} - \vec{S}_1 \frac{\partial}{\partial \xi} (e \vec{A}_1^0(\vec{z}_s, z) + \vec{P}_1^s)$$

$$\mathcal{H} = \sqrt{\xi^2 - m^2 - (\vec{P}_1^s)^2} - \sqrt{\xi^2 - m^2 - (\vec{P}_1^s + \vec{P}_1 - e \vec{A}_1 + e \vec{A}_1^0(\vec{z}_s, \xi))^2} -$$

$$- e A_2 + e A_2^0(\vec{z}_s, z) - \vec{P}_1 \frac{\partial \vec{z}_s}{\partial \xi} + \vec{S}_1 \frac{\partial}{\partial z} [e \vec{A}_1^0(\vec{z}_s, z) + \vec{P}_1^s]$$

В линейном приближении по полю волны \hat{A} и малых углах $\theta_s = |\vec{z}_s'|$ гамильтониан принимает вид:

$$\mathcal{H} \approx -e \hat{A}_2 - e (\vec{z}_s' + \frac{\vec{P}_1 - e \Delta \vec{A}_1^0}{\xi}) \hat{A}_1 +$$

$$+ \frac{(\vec{P}_1 - e \Delta \vec{A}_1^0)^2}{2 \xi} - \frac{e}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 S_1^\alpha S_1^\beta \left(\frac{\partial^2 \vec{A}_1^0}{\partial z_s^\alpha \partial z_s^\beta} \frac{\partial \vec{z}_s}{\partial z} + \frac{\partial^2 A_2^0}{\partial z_s^\alpha \partial z_s^\beta} \right),$$

где $\Delta \vec{A}_1^0 = \vec{A}_1^0(\vec{z}_s + \vec{S}_1, z) - \vec{A}_1^0(\vec{z}_s, z)$. При движении

по вынужденной траектории полученный гамильтониан переходит в (2.3). Из гамильтониана \mathcal{H} нетрудно также получить уравнения (3.2), описывающие поперечные свободные колебания.

А.М.Кондратенко, Е.Л.Салдин

УСКОРЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНОЙ
В ОНДУЛЯТОРЕ

Препринт
№ 82 - 58

Работа поступила - 2 марта 1982 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати 12.5-1982 г. МН 03285
Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.1,3 печ.л., 1,1 учетно-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 58.

Ротапринте ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90