4

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

А.В.Буров, Я.С.Дербенёв

ЭФФЕКТ КОНЕЧНОСТИ ПОПЕРЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ ВСТРЕЧНЫХ ПУЧКОВ В ТОРМОЗНОМ ИЗЛУЧЕНИИ

ПРЕПРИНТ 82-07

Новосибирск

ЭФФЕКТ КОНЕЧНОСТИ ПОПЕРЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ
ВСТРЕЧНЫХ ПУЧКОВ В ТОРМОЗНОМ ИЗЛУЧЕНИИ

А.В.Буров, Я.С.Дербенев

А Н Н О Т А Ц И Я

С квазиклассической точностью производится коррекция формул для вероятностей процессов при столкновениях ультрарелятивистских частиц, явным образом принимающая во внимание конечность поперечных размеров пучков. Проведен конкретный расчет для однократного тормозного излучения в случаях прямолинейного движения пучков и движения по плоской траектории постоянной кривизны в области встречи.

Введение

В экспериментах по однократному электрон-позитронному тормозному излучению, проведенных в ИЯФ СО АН [I], было обнаружено уменьшение эффективного сечения (отношения числа процессов к светимости) по сравнению с известным результатом квантовой электродинамики [2,3]. Это уменьшение может вызываться теми или иными макроскопическими факторами (например, геометрическими ограничениями, эффектами плотности пучков). Ранее в работах [4-7] был поставлен и изучался вопрос о влиянии внешних геометрических факторов (кривизна траектории в магнитном поле) на тормозное излучение. В дискуссиях о возможной причине наблюдавшего эффекта Ю.А.Тихоновым и независимо одним из авторов было обращено внимание на важность такого ограничения, как конечность поперечных размеров пучков. В условиях проводившихся экспериментов это ограничение является определяющим.

В данной работе в низшем порядке теории возмущений находятся сечения электродинамических процессов, вызванных столкновением ультрарелятивистских пучков конечных поперечных размеров. Проведен конкретный расчет для однократного тормозного излучения в случае прямолинейного движения и движения по плоским траекториям постоянной кривизны в области встречи. Результаты расчета совпадают с соответствующими результатами работы [8], где поправка к сечению однократного тормозного излучения в случае прямолинейного движения получена другим способом.

Основные формулы для сечений

При расчете вероятностей событий, происходящих в процессах столкновений частиц, традиционным является приближение, в котором пренебрегается ограниченностью поперечных размеров пучков. Такое допущение, очевидно, оправдано, пока рассматриваются поперечные передачи импульса, большие по сравнению с квантовой неопределенностью, отвечающей локализации частиц на размерах пучков:

$$q_{\perp min}\, a \gg 1 \qquad \text{Ia)}$$

где $q_{\perp min}$ – минимальная поперечная компонента волнового вектора промежуточного фотона ($\hbar q_{\perp min}$ – минимальная поперечная передача импульса), a – поперечный размер пучка.

В случае тормозного излучения мягких квантов $q_{\perp min} \simeq \frac{\omega}{\gamma^3}$, где ω – частота излучения.

Соотношение Iа) не содержит постоянной Планка и поэтому может быть получено из классических соображений. Действительно, излучение на частоте ω формируется при столкновении частиц с прицельными параметрами в интервале

$$0 < \rho \lesssim \rho_0 = \frac{\gamma^3}{\omega}$$

где γ – релятивистский фактор.

Вклад области $\rho \gg \rho_0$ экспоненциально мал. При расчете интенсивности излучения ограниченностью поперечных размеров пучков можно пренебречь, если

$$\frac{\gamma^3}{\omega} \ll a \quad ; \qquad \text{Iб)}$$

в обратном случае интенсивность излучения на данной частоте будет, очевидно, уменьшена.

При достигнутых энергиях в методе встречных пучков для достаточно широкого класса процессов может стать существенным вклад событий, для которых условие I) не выполняется. Например, для типичных значений энергии электрона и фотона в экспериментах [I] $\mathcal{E}$ = 2 ГэВ, ω = 3 МэВ, получаем $\rho_0 \cong$ I см, в то время, как размеры пучков $a \simeq 3 \cdot 10^{-3}$ см.

В подобных ситуациях при вычислении амплитуд рассеяния следует, вообще говоря, описывать состояние частиц перед взаимодействием не плоскими волнами, а матрицей плотности, отвечающей классической функции распределения. В действительности правильные с высокой точностью формулы можно получать, оперируя непосредственно с вероятностями, если учесть, что эффекты неоднородности практически сказываются только на расстояниях, для которых задача о столкновениях может рассматриваться в квазиклассическом приближении, т.е. методом прицельных параметров. Эту область нужно сшить с областью малых расстояний, где неоднородностью потока встречных частиц можно пренебречь и использовать известную точную вероятность процесса.

Упомянутую сшивку можно осуществить следующим образом*).

---

*) Идея способа сшивки предложена авторам А.И.Вайнштейном.

Разобьем всю область прицельных параметров на 2 части:

$$\text{I)}\ 0 \le \rho \le \rho_1 \qquad\qquad 2)\ \rho \ge \rho_1$$

где $\lambda_\kappa \ll \rho_1 \ll a$; λ_κ – комптоновская длина волны электрона, a – поперечный размер встречного пучка.

Если бы плотность позитронного пучка не менялась в поперечных направлениях, то искомая величина определялась бы просто как $dN = d\sigma_0 \cdot n_+$, где $d\sigma_0$ – точное квантовоэлектродинамическое сечение тормозного излучения, n_+ – поперечная плотность (полное число позитронов в пучке $= \int d^2 r\, n_+(\vec r)$). С другой стороны, $dN = dN_1 + dN_2$ а вклад 2 области $dN_2 = n_+ \int d^2\rho\, dW_0(\rho)$; $dW_0(\rho)$ – вероятность интересующего процесса за все время взаимодействия электрона с отдельным позитроном, пролетающим на прицельном расстоянии ρ от него; $n_+ d^2\rho$ – число позитронов в элементе $d^2\rho$. Следовательно, вклад I области в этом случае

$$dN_1 = n_+ d\sigma_0 - n_+ \int_2 d^2\rho\, dW_0(\rho)$$

При непостоянной плотности позитронного пучка вклад I области будет таким же, как и в случае однородного пучка, плотность которого равна плотности в I области

$$dN_1(\vec r) = n_+(\vec r)\, d\sigma_0 - n_+(\vec r) \int_2 d^2\rho\, dW_0(\rho)$$

Вклад 2 области

$$dN_2(\vec r) = \int_2 d^2\rho\, n_+(\vec r + \vec\rho)\, dW_0(\rho)$$

так что

$$dN(\vec r) = d\sigma_0\, n_+(\vec r) + \int d^2\rho\, dW_0(\rho) \left[n_+(\vec r + \vec\rho) - n_+(\vec r) \right]$$

Полное число событий за все время взаимодействия пучков:

$$dN_\Sigma = \int dN(\vec r)\, n_-(\vec r)\, d^2 r \equiv L\, d\sigma_{eff} \quad ,$$

$$L = \int d^2 r\, n_-(r)\, n_+(\vec r) \ ; \quad g(\vec\rho) = 1 - \frac{\int d^2 r\, n_-(\vec r)\, n_+(\vec r + \vec\rho)}{\int d^2 r\, n_-(\vec r)\, n_+(\vec r)} \ ;$$

$$d\sigma_{eff} = d\sigma_0 - \int d^2\rho\, g(\vec\rho)\, dW_0(\rho)$$

Область интегрирования по прицельным параметрам распространена вплоть до $\rho = 0$ из-за быстрой сходимости интеграла на нижнем пределе. Погрешность, связанная с таким распространением, имеет порядок λ_κ^2 / a^2, где λ_κ – комптоновская длина, a – размер пучка, т.е. ничтожно мала в любом реальном случае. Последняя формула определяет поправку к сечению, связанную с неоднородной плотностью пучка, когда движение позитронов на расстояниях $\lesssim \gamma \rho_{max}$ от места встречи является прямолинейным. Однако, нетрудно ее обобщить на случай произвольного криволинейного движения. Для этого заметим, что вклад I) области не меняется в связи с учетом криволинейности траекторий, т.е. на столь малых расстояниях движение частиц можно считать прямолинейным.

$$dN_1(\vec{z}) = n_+(\vec{z})\left[d\sigma_0 - \int_2 d^2\rho\, dW_0(\rho)\right]$$

При определении вклада области 2 величину $dW_0(\rho)$ нужно заменить на $dW(\vec{\rho})$, явно учитывающую криволинейность. Таким образом, в этом случае имеем:

$$\underset{\sim}{d\sigma}_{eff} = d\sigma_0 + \int d^2\rho\left[L(\vec{\rho})\, dW(\vec{\rho}) - dW_0(\rho)\right] =$$

$$= \underline{d\sigma}_{eff} + \int d^2\rho\, L(\vec{\rho})\left[dW(\vec{\rho}) - dW_0(\rho)\right]; \quad L(\vec{\rho}) = 1 - g(\vec{\rho})$$

$\underset{\sim}{d\sigma}_{eff}$ и $\underline{d\sigma}_{eff}$ означают эффективные сечения в криволинейном и прямолинейном случаях.

Вычисление $dW(\rho)$ существенно облегчается тем, что в лабораторной системе частицы являются ультрарелятивистскими. Кроме того, заметим, что вдали от жесткого края спектра $\varepsilon - \omega \gg m$ можно пренебречь изменением переданного электрону 4-импульса, связанным с учетом отдачи позитрона, т.е. поле последнего можно считать "внешним", с точностью до величин $\sim \frac{m}{\varepsilon - \omega}$ [2]. Учет отличия этого поля от потока эквивалентных фотонов, движущихся навстречу электрону, был бы превышением точности. С учетом вышесказанного вероятность можно записать в виде

$$dW(\rho, \omega) = \int dn(q_0; \rho)\, d\sigma_\gamma(\omega, q_0) \quad , \quad \text{где } d\sigma_\gamma(\omega; q_0)$$

– сечение соответствующего фотопроцесса, q_0 – частота эквивалентного фотона, $dn(q_0)$ – плотность потока эквивалентных фотонов.

Последнюю величину можно связать с классическим полем, действующим на электрон.

Поток импульса поля через неподвижную единичную площадку, расположенную на траектории электрона с нормалью, параллельной скорости электрона в этой точке, за все время взаимодействия:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi} \vec{E}^2(t)\, dt = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} |\vec{E}(q_0)|^2 dq_0 ; \quad \vec{E}(q_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(t) e^{iq_0 t} dt;$$

$$\Longrightarrow dP(q_0) = \frac{dq_0}{4\pi^2} |\vec{E}(q_0)|^2 = q_0\, dn(q_0)$$

Подставляя полученное выражение для $dW(\rho)$ в формулу для сечения, находим:

$$\underset{\sim}{d\sigma}_{eff} = d\sigma_0 + \int d^2\rho \left\{ L(\vec{\rho}) \int_{q_{min}}^{\infty} dn(q_0, \vec{\rho})\, d\sigma_\gamma(q_0) - \int_{q_{min}}^{\infty} dn_0(q_0, \rho)\, d\sigma_\gamma(q_0) \right\}$$

Заметим, что сечение можно представить также и в несколько ином виде:

$$\underset{\sim}{d\sigma}_{eff} = d\sigma_0 + \frac{1}{L} \int d^2 z\, n_-(\vec{z}) \int_{q_{min}}^{\infty} \left[dN(q_0, \vec{r}) - dN_0(q_0, \vec{r})\right] d\sigma_\gamma(q_0)$$

Здесь $dN(q_0, \vec{z})$ – полная плотность потока эквивалентных фотонов на заданной электронной траектории, характеризующейся поперечной координатой $\vec{z}$ (мы рассматриваем такие внешние поля, что за время взаимодействия можно пренебречь кривизной электронной траектории, т.е. $\rho \ll R_0$ = радиус кривизны. В реальных ситуациях это требование выполняется с большим запасом), $dN_0(q_0, \vec{r})$ – плотность потока для движущегося прямолинейного безграничного позитронного пучка с хаотически расположенными частицами. Последняя формула дает возможность учесть такие эффекты, как взаимодействие электрона с коллективными флуктуациями плотности позитронного пучка, влияние корреляций в расположении позитронов на вероятность процесса.

Ниже мы рассмотрим случай однократного тормозного излучения электрона в поле позитронного пучка сначала для прямолинейного, а затем для криволинейного движения по плоским траекториям постоянной кривизны.

Эффективное сечение в случае прямолинейного движения

Из условия сохранения энергии – импульса $q_0 = \frac{(pk)}{2(\varepsilon - \omega)}$ где $(pk) = \varepsilon\omega - \vec{p}\vec{k} \simeq \frac{m^2\omega}{\varepsilon}$; $\varepsilon, \vec{p}$ – энергия и импульс электрона, $\omega, \vec{k}$ – частота и волновой вектор тормозного фотона.

$$|\vec{E}(q_0)| = \frac{2eq_0}{\gamma} K_1\left(\frac{q_0\rho}{\gamma}\right)$$

Отсюда получаем окончательный ответ

$$dn(q_0) = \frac{1}{4\pi^2 q_0} |\vec{E}(q_0)|^2 dq_0 = \frac{\alpha q_0}{\pi^2 \gamma^2} K_1^2\left(\frac{q_0\rho}{\gamma}\right) dq_0 ;$$

$$dW_0(\rho) = \int \frac{\alpha q_0}{\pi^2 \gamma^2} K_1^2\left(\frac{q_0\rho}{\gamma}\right) d\sigma_\gamma(q_0)\, dq_0$$

После интегрирования по азимутальному углу вылета тормозного кванта зависимость от поляризации эквивалентного фотона в сечении $d\sigma_r$ выпадает:

$$d\sigma_r = d\sigma_r \Big|_{\substack{\text{неполяризованных}\\ \text{фотонов}}} = \frac{\pi r_e^2}{2}\,\frac{m^2 d\omega}{\varepsilon^2 q_0}\left\{v + 4\frac{q_{min}^2}{q_0^2} - 4\frac{q_{min}}{q_0}\right\};$$

$$v = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\,;\quad \varepsilon' = \varepsilon - \omega\,,\quad q_{min} = \frac{m^2\omega}{4\varepsilon(\varepsilon-\omega)}$$

Интегрируя по частотам эквивалентных фотонов, находим:

$$dW_0 = \frac{\alpha r_e^2}{2\pi}\,\frac{m^4 d\omega}{\varepsilon^4}\int\limits_{q_{min}}^{\infty} K_1^2\!\left(\frac{q_0\rho}{\gamma}\right)\left\{v + 4\frac{q_{min}^2}{q_0^2} - 4\frac{q_{min}}{q_0}\right\} dq_0\ .$$

Из-за быстрой сходимости интеграла верхний предел интегрирования взят за бесконечность. В случае $q_{min}a/\gamma \ll 1$ становится несущественным конкретный вид функции $g(\vec{\rho})$, т.к. при интегрировании по прицельным параметрам основной вклад дают $a < \rho < \gamma/q_{min}$ и поправку к сечению можно вычислить с логарифмической точностью:

$$\Delta\sigma = \frac{4\alpha r_e^2 d\omega}{\omega}\,\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\left(v - \frac{2}{3}\right)\ln\left(\frac{\gamma}{q_{min}a}\right)\ .$$

Эффективное сечение:

$$d\sigma_{eff} = \frac{4\alpha r_e^2 d\omega}{\omega}\,\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\left(v - \frac{2}{3}\right)\ln(ma)\ .$$

Поскольку логарифм в эффективном сечении не может быть очень большим ($\lesssim 20$), интересен следующий за ним член разложения по $\frac{q_{min}a}{\gamma}$ – константа. Однако величина этой константы зависит от распределения частиц в пучках (от $g(\vec{\rho})$). Для гауссовского распределения $n_\perp(\vec{r}) \propto n_-(\vec{r}) \sim e^{-\frac{x^2}{2\Delta_x^2} - \frac{z^2}{2\Delta_z^2}}$ получаем

$$d\sigma_{eff} = \frac{4\alpha r_e^2 d\omega}{\omega}\,\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\left(v - \frac{2}{3}\right)\left\{\ln\left(\frac{m\Delta_x\Delta_z}{\Delta_x + \Delta_z}\right) + \ln 2 + \frac{C}{2} + \frac{v - 5/9}{v - 2/3}\right\},$$

где $C = 0{,}557\ldots$ – константа Эйлера (Подробности вычисления в Приложении).

Эффективное сечение в случае движения по криволинейным траекториям

Выше было найдено эффективное сечение для прямолинейно движущихся пучков. Рассмотрим теперь случай движения по плоским траекториям постоянной кривизны. Заметим сразу же, что в самой общей постановке задача о нахождении эффективного сечения в этом случае вычислительно нетривиальна, поскольку для ее разрешения нужно брать интегралы по прицельным параметрам и частотам от выражений, содержащих квадрат временно́го Фурье-образа поля заряда, движущегося по окружности. Для этой величины существуют обозримые аналитические формулы лишь на предельно малых (кулоновское поле) и предельно больших (синхротронное излучение) прицельных расстояниях. В соответствии с этим ниже будут найдены оценки вкладов в эффективное сечение от предельно малых, промежуточных и предельно больших расстояний по отдельности. Для начала размеры пучков в x- и z- направлениях будем считать примерно равными. Численные факторы будут, как правило, опускаться.

Для эффективного сечения справедлива квазиклассическая оценка:

$$d\sigma_{eff} \simeq d\Sigma \int\limits_{\lambda_k}^{a} E_q^2(\rho,\varphi)\,\rho\, d\rho\, d\varphi$$

здесь $d\Sigma = \alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega}\,,\quad q = \frac{\omega}{\gamma^2}\ ;\quad \lambda_k = \frac{1}{m}$

$E_q^2(\rho,\varphi)$ – упомянутый выше квадрат Фурье-образа поля.

Приведем оценки для $E_q^2(\rho,\varphi)$ на малых и больших расстояниях.

I. Малые расстояния (кулоновское поле)

$$E_q^2(\rho,\varphi) \simeq \begin{cases} \frac{1}{\rho^2} & \text{при} \quad q < \gamma/\rho \\ \text{экспоненциально мало}, \approx 0 & \text{и} \quad q > \frac{\gamma}{\rho} \end{cases}$$

2. Большие расстояния (СИ)

Искомый квадрат поля связан с интенсивностью синхротронного излучения (СИ):

$$E_q^2 = \frac{2\pi^2}{\rho}\,\frac{dI}{dq\,d\vartheta} \qquad \text{(точное выражение)}$$

$$\frac{dI}{dq\,d\beta} = \frac{q^2\mu^2 R_0}{3\pi^2}\left[\beta^2 K^2_{1/3}(\eta) + \mu^2 K^2_{2/3}(\eta)\right]$$

Здесь R_0 – радиус кривизны траектории, β – угол между плоскостью движения позитрона и направлением СИ: $\beta = \frac{z}{\sqrt{2\rho R_0}} = \varphi\sqrt{\frac{\rho}{2R_0}}$

z – расстояние по вертикали между частицами ;

$\mu^2 = \beta^2 + \frac{1}{\gamma^2}$; $\eta = \frac{qR_0}{3}\mu^3$; $\omega_c = \frac{\gamma^3}{R_0}$

Используя приведенные выражения, получаем оценку для поля:

$$E_q^2(\rho,\varphi) \begin{cases} \frac{\gamma^2}{\rho R_0}\left(\frac{q}{\omega_c}\right)^{2/3} & \text{при } q \lesssim \omega_c,\ \varphi < \varphi_0 = \sqrt{\frac{R_0}{\gamma^2\rho}}\left(\frac{\omega_c}{q}\right)^{1/3} \\ \text{экспоненциально мало, } \approx 0 \text{ в других случаях.} \end{cases}$$

Здесь φ_0 – фактор угловой анизотропии поля СИ, $\varphi_0 = \frac{l_{ког}}{R}$

где R – запаздывающее расстояние до точки наблюдения (электрона): $R = \sqrt{2\rho R_0}$; $l_{ког} = \frac{R_0}{\gamma}\left(\frac{\omega_c}{q}\right)^{1/3}$ – расстояние от позитрона до границы "волновой зоны". Отсюда видно, что случаю больших расстояний соответствует $\varphi_0 \ll 1$, малых – $\varphi_0 \gg 1$, промежуточных – $\varphi_0 \sim 1$.

Заметим, что в той области, где поля не являются экспоненциально малыми, справедливо соотношение

$$\frac{E^2_{си}}{E^2_{кулон}} \simeq \frac{R^2}{l^2_{ког}} = \frac{1}{\varphi_0^2}$$

(кулоновское поле по отношению к синхротронному имеет лишнюю степень R в знаменателе). Это выражение согласуется с приведенной выше классификацией масштабов расстояний. Итак, параметром, определяющим степень влияния кривизны на поле частицы в данной точке, является $\varphi_0^2 = \frac{\rho_H}{\rho}$,

где $\rho_H \equiv \frac{R_0}{\gamma^2}\left(\frac{\omega_c}{q}\right)^{2/3}$

При $\rho \ll \rho_H(q)$ влиянием кривизны можно пренебречь и считать поле кулоновским; для $\rho \gg \rho_H$ для поля справедливы формулы СИ. Очевидно, что при $\rho_H > \rho_0 = \frac{\gamma}{q}$ или $\rho_H > a$ поправка к сечению за счет кривизны будет степенным образом мала (с параметром малости ρ_0/ρ_H или a/ρ_H соответственно). Влияние магнитного поля становится существенным, как только выполнено условие относительной малости ρ_H : $\rho_H \lesssim \min\{a, \rho_0\}$

В этом случае квазиклассическую оценку сечения запишем в виде, явным образом учитывающем вклад малых и больших (по сравнению с ρ_H) расстояний:

$$d\sigma_{eff} \simeq d\Sigma\left[\int_{\lambda_K}^{\rho_H} E_q^2(\vec\rho)\rho\, d\rho\, d\varphi + \int_{\rho_H}^{a} E_q^2(\vec\rho)\rho\, d\rho\, d\varphi\right];$$

$$\int_{\lambda_K}^{\rho_H} E^2 d^2\rho \simeq \int_{\lambda_K}^{\rho_H}\frac{d\rho}{\rho} = \ln(m\rho_H)$$

При $\rho_H \ll a$ основной вклад во второй интеграл дают расстояния, на которых применимо представление о СИ. В этом случае

$$\int_{\rho_H}^{a} E_q^2(\rho,\varphi)\rho\, d\rho\, d\varphi \simeq \sqrt{\frac{a}{\rho_H}} \simeq \frac{1}{\varphi_0} \simeq \frac{R}{l_{ког}}$$

Итак, в случае $\rho_H < \min\{a, \rho_0\}$ сечение можно записать в виде

$$d\sigma_{eff} = d\sigma_{кул} + d\sigma_{си} + d\sigma_{пр}$$

$$d\sigma_{кул} \simeq d\Sigma \ln\frac{\rho_H}{\lambda_K}$$

$$d\sigma_{си} \simeq d\Sigma\sqrt{\frac{a}{\rho_H}}$$

Так как $d\sigma_{пр}$ не содержит большого логарифма и при больших a/ρ_H мало по сравнению с $d\sigma_{си}$, для него справедлива оценка:

$$d\sigma_{пр} \simeq d\Sigma\left(\frac{a}{\rho_H}\right)^{\delta} \qquad \text{где } 0 \le \delta < \frac{1}{2}$$

Вычисление сечения с точностью, более высокой, чем константа (т.е. $\sim d\Sigma \cdot 1$) в этом случае является весьма трудоемкой задачей по причине, указанной в начале этого раздела.

Часть экспериментов из упоминавшейся серии [I] проводились в магнитном поле, таком, что

$$a_z < \rho_H \ll a_x$$

Оценивая сечение в этом случае с помощью тех же формул, что и для круглого пучка, получим:

$$d\sigma_{кул} \simeq d\Sigma \ln(m a_z)$$

$$d\sigma_{си} \simeq d\Sigma \frac{a_z}{\rho_H}\ln\frac{a_x}{\rho_H}$$

$$d\sigma_{пр} \simeq d\Sigma \cdot \frac{a_z}{\rho_H}$$

В заключение этого раздела еще раз отметим тот факт, что резкой границы, отделяющей большие прицельные расстояния от малых ("реальные" промежуточные фотоны от"виртуальных") – не существует. Поэтому точность формул, представляющих сечение в виде суммы отдельных вкладов полей виртуальных и реальных промежуточных фотонов,определяется пренебрегаемым в таком подходе вкладом полей частиц, летящих на промежуточных ($\sim \rho_H$) прицельных расстояниях.

К вопросу об эффектах среды

Сделаем несколько замечаний об эффектах среды. Выше полное число испущенных данным электроном тормозных квантов вычислялось путем суммирования независимых вкладов от полей позитронов, движущихся по заданным тракториям. В действительности, однако, электрон излучает в полном поле встречного пучка; кроме того, это поле деформируется взаимодействием позитронов с электронами. Определим условия, при которых интерференцией полей отдельных позитронов, т.е. корреляциями в позитронном пучке, можно пренебречь. Пусть λ_{min} – минимальная длина корреляций в системе покоя позитронного пучка. Очевидно, что при $\lambda_{min} > \frac{\gamma}{q_{min}} \sim \frac{\gamma^3}{\omega}$ (где q_{min} и ω взяты в лаб. системе) корреляции несущественны. Однако, даже если это условие не выполнено, но $\lambda_{min} > a$, то корреляционная поправка к сечению не содержит логарифма и пропорциональна a/λ_{min}(для плоского пучка в этом случае a – минимальный размер). При $\lambda_{min} < \min\{a, \gamma/q_{min}\}$ корреляции важны. В этом случае логарифм в сечении обрезается на λ_{min} . Если на интересующих длинах волн частицы взаимодействуют в основном кулоновским образом, то корреляционной длиной является дебаевский радиус: $\lambda_{min} = r_D = \sqrt{\frac{T_\parallel}{4\pi n e^2}}$ Здесь $T_\parallel$ – продольная температура, n – плотность в системе покоя пучка. Для $\frac{T_\parallel}{m} = \left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma}\right)^2 = 10^{-7}$, $n = \frac{n_л}{\gamma} = 10^7$ см$^{-3}$, $\gamma = 3 \cdot 10^3$, $a = 10^{-2}$ см $\frac{a}{r_D} = 0{,}1$, что дает поправку к сечению $\sim 1\%$.

Пусть корреляции несущественны. В этом случае полная интенсивность излучения данным электроном есть сумма интенсивностей излучения на отдельных позитронах. Однако, из-за взаимодействия

позитронов с электронами поле позитрона, строго говоря, отличается от поля частицы, движущейся по заданной траектории. Оценим этот эффект плотности в системе покоя позитронного пучка. Время, в течение которого на данный электрон действует поле данного позитрона $\tau \sim \rho \lesssim a$. Поле позитрона за это время успеет заметно измениться, если заметно изменится прицельный параметр: $\Delta\rho \gtrsim \rho$, т.е. если позитрон наберет релятивистскую скорость. Для этой скорости Δv справедлива известная оценка: $\Delta v \simeq (2\pi\gamma n_л r_e^2 a L_0)^{1/2}$; где L_0 – кулоновский логарифм, релятивистский фактор γ и плотность $n_л$ взяты в лаб.системе.

При $\gamma = 10^4$, $n_л = 10^{10}$см$^{-3}$, a = I см, $L_0 = 20$, $\Delta v \simeq 10^{-5} \ll 1$, т.е. рассматриваемый эффект ничтожно мал. Из-за разреженности пучков несущественны и все другие эффекты среды.

Пользуемся случаем поблагодарить за полезные обсуждения Ю.А.Тихонова и А.П.Онучина, по просьбе которого была выполнена эта работа. Мы особо благодарны А.И.Вайнштейну за ценный совет на этапе постановки задачи.

Приложение

Вычисление константы в эффективном сечении для прямолинейно движущихся пучков с гауссовским распределением частиц

Для пучков с плотностями $n_+(\vec{r}) \sim n_-(\vec{r}) \sim \exp\left\{-\frac{x^2}{2\Delta_x}-\frac{z^2}{2\Delta_z}\right\}$ поправка к сечению

$$\Delta\sigma \sim \alpha^2 \int_0^1 dy\,(v-4y+4y^2)\int_0^\infty \rho\, d\rho\, K_1^2(\alpha\rho)\left[1-e^{-\rho^2y^2(1+\beta)}I_0(\rho^2y^2(1-\beta))\right]=$$

$$=\int_0^s \frac{d\rho}{\rho}G(\rho)+G(\infty)\int_{\alpha s}^\infty K_1^2(x)\,x\,dx \equiv Int$$

Здесь $\alpha^2 = 8q_{min}^2\Delta_{min}^2$; $\beta=\frac{\Delta_{min}^2}{\Delta_{max}^2}$; $v=\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}+\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$

$$G(\rho) = \int_0^1 dy\,(v-4y+4y^2)\left[1-e^{-\rho^2y^2(1+\beta)}I_0(\rho^2y^2(1-\beta))\right];$$

$$G(\infty)=v-2/3$$

s – произвольное число, удовлетворяющее условию $1 \ll s \ll \frac{1}{\alpha}$

$K_1(x)$ – функция Макдональда, I_0 – функция Бесселя от мнимого аргумента.

$$Int \approx \left(v-\tfrac{2}{3}\right)\left[\ln\tfrac{1}{\alpha}-C+\ln 2-\tfrac{1}{2}\right]-\int_0^\infty \ln\rho\, G'(\rho)\,d\rho \;;$$

$$\int_0^\infty \ln\rho\, G'(\rho)\,d\rho = v-5/9+\tfrac{1}{2}\left(v-\tfrac{2}{3}\right)\left(In+\ln\frac{1}{1-\beta}\right)$$

где $$In=\int_0^\infty dt\,\ln t\, e^{-t\frac{1+\beta}{1-\beta}}\left[I_0(t)\frac{1+\beta}{1-\beta}-I_1(t)\right]\equiv$$

$$\equiv\frac{1+\beta}{1-\beta}In_0-In_1$$

$$In_{0,1}=\frac{\partial}{\partial v}\int_0^\infty dt\, t^v e^{-t\frac{1+\beta}{1-\beta}}I_{0,1}(t)\Big|_{v=0}$$

$$In_0=\frac{\partial}{\partial v}\left[\Gamma(v+1)(z^2-1)^{\frac{v+1}{2}}P_v(z)\right]\Big|_{v=0}$$

$$In_1=\frac{\partial}{\partial v}\left[\Gamma(v+2)(z^2-1)^{\frac{v+1}{2}}P_v^{-1}(z)\right]\Big|_{v=0} \;;\quad z=\frac{1+\beta}{2\sqrt{\beta}}$$

(Интегралы $In_{0,1}$ см. [9]).

Подставляя вычисленные интегралы в формулу для сечения, получим приведенный в тексте ответ.

Литература

I. Ю.А.Тихонов. Доклад на сессии ОЯФ, октябрь (I980).

2. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.С.Фадин. Излучение релятивистских электронов. Атомиздат. Москва, I973.

3. В.Б.Берестецкий, Е.С.Лифшиц, Л.Н.Питаевский. Квантовая электродинамика. Наука, Москва, I980.

4. В.Н.Байер, В.М.Катков.ДАН СССР 207, 68, I972.

5. В.М.Катков, В.М.Страховенко. ДАН СССР 23I, 582, I976.

6. В.М.Катков, В.М.Страховенко. ЯФ, 25, I245, I977.

7. В.М.Катков, В.М.Страховенко. ЯФ, 32, I067, I980.

8. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко. Препринт ИЯФ СО АН 8I-59 (I98I).

9. И.С.Градштейн, И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Наука, Москва, I97I.

Работа поступила - 24 декабря 1981г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати 22.I-1982г. МН 03050
Усл. I,0 печ.л., 0,8 учетно-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно
Заказ № 7.

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР