5

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

В.М.Малкин

КИНЕТИКА ЛЕНГМЮРОВСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

ПРЕПРИНТ 82 - 08

Новосибирск

КИНЕТИКА ЛЕНГМЮРОВСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

В.М.Малкин

АННОТАЦИЯ

Столкновительный член кинетического уравнения для ленгмюровских волн найден прямым расчетом с точностью до слагаемых третьего порядка по энергии волн включительно, - при достаточно широком ленгмюровском спектре структура кубичных слагаемых отличается от общепризнанной, что влияет на кинетику турбулентности в заметном интервале энергий.

KINETICS OF LANGMUIR TURBULENCE

V.M.Malkin

Institute of Nuclear Physics
630090, Novosibirsk 90, USSR

A b s t r a c t

The collisional term of the kinetic equation for Langmuir waves is found via the direct calculation with an accuracy up to the quantities of third order in wave energy. For a quite broad Langmuir spectrum the structure of the cubic terms differs from the well-known one. This influences the kinetics of turbulence in a noticeable energy range.

КИНЕТИКА ЛЕНГМЮРОВСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

В.М.Малкин

В кинетических уравнениях, описывающих слабую ленгмюровскую турбулентность, наибольший интерес представляют члены первых трех порядков по энергии волн. Эти члены вычислялись во многих работах (см., например, [I] и имеющиеся там ссылки). Кубичный член искался в виде

$$\left(\frac{\partial N_{\vec{k}}}{\partial t}\right)_3 = \int d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3\, \delta(\vec{k}-\vec{k}_1+\vec{k}_2-\vec{k}_3)\,\delta(\omega_k-\omega_{\vec{k}_1}+\omega_{\vec{k}_2}-\omega_{\vec{k}_3}) \quad (I)$$

$$\times P_{\vec{k}\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3}\left(N_{\vec{k}_1}N_{\vec{k}_2}N_{\vec{k}_3} - N_{\vec{k}}N_{\vec{k}_1}N_{\vec{k}_2} + N_{\vec{k}}N_{\vec{k}_1}N_{\vec{k}_3} - N_{\vec{k}}N_{\vec{k}_2}N_{\vec{k}_3}\right).$$

Фигурирующая в правой части (I) комбинация спектральных плотностей (или чисел заполнения) ленгмюровских волн – $N_{\vec{k}}$ – выписывалась на основе квантовой аналогии. Вероятность четырехволнового процесса (I) – $P_{\vec{k}\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3}$ – определялась по спонтанному излучению. В статьях [2-4] для нее были найдены согласующиеся друг с другом формулы. Этот результат позволяет признать вероятность спонтанного процесса надежно установленной, но не имеет отношения к вопросу о ее равенстве вероятностям индуцированных процессов. Сомнения в таком равенстве возникают по следующей причине. Использовавшийся при выводе (I) "полуквантовый" метод расчета непригоден для описания той части взаимодействия между слабо затухающими коллективными возбуждениями – квазичастицами, – которая обусловлена сильно затухающими коллективными возбуждениями. Предположение о малости этой части и, следовательно, законности полуквантового метода было явно сформулировано в статье [5], где утверждалось, что сильно затухающие моды не влияют на взаимодействие квазичастиц, если количество последних намного превосходит термодинамически равновесное. Применительно к ленгмюровской турбулентности это утверждение можно переформулировать так: наличие сильно затухающей ионно-звуковой ветви не влияет на взаимодействие существенно надтепловых ленгмюровских шумов. Между тем при достаточно широком ленгмюровском спектре эта ветвь, несомненно, возбуждается: низкочастотные биения электрического поля порождают ионно-звуковые флуктуации с амплитудой, квадратичной по полю. Рассеяние ленгмюровских волн на этих флуктуациях плотности является процессом третьего порядка по энергии волн и, независимо от ее величины, может конкурировать с процессом (I). Совпадение этих двух процессов невозможно, поскольку первый из них, в отличие от второго, не сохраняет импульс ленгмюровских волн: часть импульса передается вынужденным флуктуациям плотности и поглощается резонансными ионами и электронами (которыми обусловлено затухание ионно-звуковых колебаний). Таким образом, результаты, полученные полуквантовым методом, нуждаются в проверке.

Цель настоящей работы состоит в корректном вычислении кубичного столкновительного члена для ленгмюровских волн. Исходными являются динамические уравнения статьи [6], полученные в пренебрежении электронными нелинейностями. В представлении Фурье по координатам и времени эти уравнения имеют следующий вид:

$$a^s_{\vec k\omega} = g^{0s}_{\vec k\omega}\left[\int d^4k_1 d^4q\,\delta^4(ks-k_1s-q)\,V_{\vec k\vec k_1} n_{\vec q\Omega}\, a^s_{\vec k_1\omega_1} + \alpha^s_{\vec k\omega}\right], \tag{2}$$

$$n_{\vec q\Omega} = G^0_{\vec q\Omega}\left[\frac{1}{2}\sum_s \int d^4k\, d^4k_1\,\delta^4(ks-k_1s-q)\,V_{\vec k\vec k_1} a^s_{\vec k\omega}\, a^{-s}_{\vec k_1\omega_1} + \beta_{\vec q\Omega}\right]. \tag{3}$$

Здесь

$$a^s_{\vec k\omega} = \frac{k}{\sqrt{8\pi\omega_p}}\begin{cases}\varphi_{\vec k\omega} & (s=1)\\ \varphi^*_{\vec k\omega} & (s=-1)\end{cases}, \tag{4}$$

$\varphi_{\vec k\omega}$, $n_{\vec q\Omega}$ – преобразования Фурье амплитуды высокочастотного электрического потенциала (φ) и возмущения концентрации ионов (n);

$$V_{\vec k\vec k_1} = \frac{\omega_p}{2n_0}\,\frac{\vec k\vec k_1}{k k_1}; \tag{5}$$

$$g^{0s}_{\vec k\omega} = (\omega - \omega_k + is0)^{-1}, \tag{6}$$

$$\omega_k = \omega_p + \frac{3}{2}\omega_p k^2 r_D^2; \tag{7}$$

$$G^0_{\vec q\Omega} = -\frac{\rho^{(i)}_{\vec q\Omega}\,\rho^{(e)}_{\vec q\Omega}}{\rho^{(i)}_{\vec q\Omega} + \rho^{(e)}_{\vec q\Omega}}, \tag{8}$$

$$\rho^{(i,e)}_{\vec q\Omega} = \frac{1}{m_{i,e}}\int d^3v\,\frac{\vec q\,\dfrac{\partial f_{i,e}(\vec v)}{\partial\vec v}}{\Omega - \vec q\vec v + i0}; \tag{9}$$

$f_{i,e}$ – невозмущенные функции распределения, $m_{i,e}$ – массы ионов и электронов; $\alpha^s_{\vec k\omega}$ и $\beta_{\vec q\Omega}$ – малые случайные величины, введение которых оправдывается обычным для диаграммной техники Уайльда [7,8] способом. Усредненные по независимым случайным величинам $\alpha^s_{\vec k\omega}$, $\beta_{\vec q\Omega}$ функции Грина и парные корреляционные функции в пространственно однородном случае диагональны по волновому вектору:

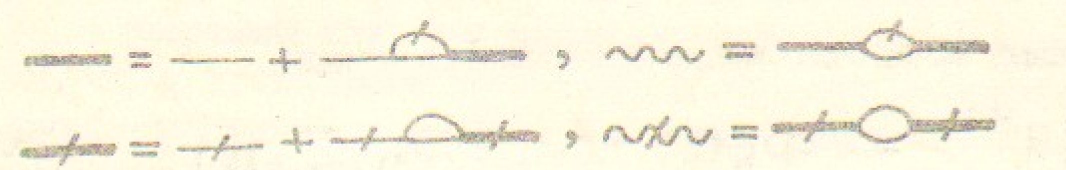
$$\left\langle \frac{\delta a^s_{\vec k\omega}}{\delta\alpha^{s'}_{\vec k'\omega'}}\right\rangle = \delta_{ss'}\,\delta(\vec k-\vec k')\,g^s_{\vec k\omega\omega'},$$

$$\left\langle \frac{\delta n_{\vec q\Omega}}{\delta\beta_{\vec q'\Omega'}}\right\rangle = \delta(\vec q-\vec q')\,G_{\vec q\Omega\Omega'}, \tag{10}$$

$$\left\langle a^s_{\vec k\omega}\, a^{-s'}_{\vec k'\omega'}\right\rangle = \delta_{ss'}\,\delta(\vec k-\vec k')\,N^s_{\vec k\omega\omega'},$$

$$\left\langle n_{\vec q\Omega}\, n_{-\vec q'-\Omega'}\right\rangle = \delta(\vec q-\vec q')\,F_{\vec q\Omega\Omega'}.$$

Изображая корреляционные функции волнистыми линиями, точные функции Грина – жирными прямыми, невозмущенные – тонкими и перечеркивая для отличия линии, соответствующие флуктуациям плотности, можно представить основные уравнения уайльдовской техники в виде графиков

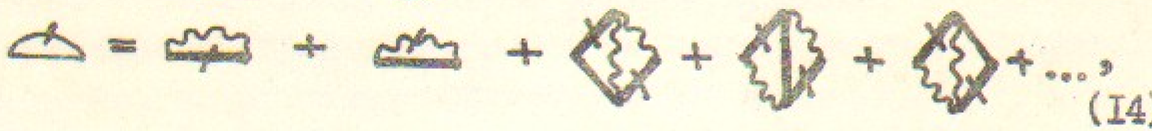

(II)

Здесь

 $= \Sigma^s_{\vec k\omega\omega'}$,  $= \Phi^s_{\vec k\omega\omega'}$ – (I2)

массовый оператор и компактная часть корреляционной функции ленгмюровских волн, и – флуктуаций плотности. Эти величины, как известно, даются бесконечными рядами компактных диаграмм:

(I3)



(I4)

(I5)

(I6)

Диаграммы для компактных частей корреляционных функций соответствуют спонтанным, а для массовых операторов – индуцированным процессам. Каждая диаграмма второго типа может быть получена из некоторой диаграммы первого типа заменой одной волнистой линии основного сечения на соответствующую ей прямую линию. При не слишком большой энергии ленгмюровских волн обратное время нелинейного взаимодействия меньше декремента затухания флуктуаций плотности :

$$\gamma_{н} \ll \nu_s \, , - \tag{I7}$$

последние являются чисто вынужденными и их корреляционная функция квадратична по энергии волн. В этом случае для вычисления ◠ с точностью до третьего и ◠ до второго порядка включительно по энергии волн достаточно диаграмм, явно выписанных в (I3–I6). Искомое кинетическое уравнение для спектральной плотности волн –

$$N_{\vec{k}}(t) = \int d\omega\, df\, N_{\vec{k},\omega+\frac{f}{2},\omega-\frac{f}{2}}\, e^{-ift} \; - \tag{I8}$$

с достаточной точностью можно представить в виде

$$\frac{\partial N_{\vec{k}}(t)}{\partial t} = 2\pi\,\Phi_{\vec{k}}(t) + 2N_{\vec{k}}(t)\,\mathrm{Im}\,\Sigma_{\vec{k}}(t)\,, \tag{I9}$$

где

$$\Phi_{\vec{k}}(t) = \int df\, \Phi_{\vec{k},\omega_k+\frac{f}{2},\omega_k-\frac{f}{2}}\, e^{-ift}\,,$$

$$\Sigma_{\vec{k}}(t) = \int df\, \Sigma_{\vec{k},\omega_k+\frac{f}{2},\omega_k-\frac{f}{2}}\, e^{-ift}\,. \tag{20}$$

Несложный расчет дает:

$$\left(\frac{\partial N_{\vec{k}}}{\partial t}\right)_{нел.} = St_{\vec{k}} = \left[\gamma^{(1)}_{\vec{k}} + \gamma^{(2)}_{\vec{k}}\right] N_{\vec{k}} + I_{\vec{k}} + J_{\vec{k}}\,, \tag{21}$$

$$\gamma^{(1)}_{\vec{k}} = 2\,\mathrm{Im}\int d^3k_1\, V^2_{\vec{k}\vec{k}_1}\, G^0_{\vec{k}-\vec{k}_1,\,\omega_k-\omega_{k_1}}\, N_{\vec{k}_1}\,, \tag{22}$$

$$\gamma^{(2)}_{\vec{k}} = 2\,\mathrm{Im}\int d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3\, \delta(\vec{k}-\vec{k}_1+\vec{k}_2-\vec{k}_3)\, V^2_{\vec{k}\vec{k}_1} V^2_{\vec{k}_2\vec{k}_3} \times$$
$$\times \frac{G^{0\,2}_{\vec{k}-\vec{k}_1,\,\omega_k-\omega_{k_1}}}{\omega_k-\omega_{k_1}+\omega_{k_2}-\omega_{k_3}+i0}\, N_{\vec{k}_1}\left(N_{\vec{k}_2}-N_{\vec{k}_3}\right), \tag{23}$$

$$I_{\vec{k}} = 2\pi\int d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3\, \delta(\vec{k}-\vec{k}_1+\vec{k}_2-\vec{k}_3)\,\delta(\omega_k-\omega_{k_1}+\omega_{k_2}-\omega_{k_3}) \times \tag{24}$$
$$\times V^2_{\vec{k}\vec{k}_1} V^2_{\vec{k}_2\vec{k}_3} \left| G^0_{\vec{k}-\vec{k}_1,\,\omega_k-\omega_{k_1}}\right|^2 N_{\vec{k}_2} N_{\vec{k}_3}\left(N_{\vec{k}_1}-N_{\vec{k}}\right)$$

и $J_{\vec{k}}$ вида (I) с вероятностью

$$P_{\vec{k}\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3} = 2\pi\, V_{\vec{k}\vec{k}_1} V_{\vec{k}_1\vec{k}_2} V_{\vec{k}_2\vec{k}_3} V_{\vec{k}_3\vec{k}}\, \mathrm{Re}\left(G^0_{\vec{k}-\vec{k}_1,\,\omega_k-\omega_{k_1}} G^0_{\vec{k}_2-\vec{k}_1,\,\omega_{k_2}-\omega_{k_1}}\right). \tag{25}$$

Слагаемые $\gamma^{(1)}_{\vec{k}}$ и $\gamma^{(2)}_{\vec{k}}$ порождаются первой из диаграмм (I4), $I_{\vec{k}}$ – первой из (I3) и второй из (I4), $J_{\vec{k}}$ – второй из (I3) и последними тремя из (I4). Величина $\gamma^{(1)}_{\vec{k}}$ описывает индуцированное рассеяние ленгмюровских волн на ионах, $\gamma^{(2)}_{\vec{k}}$ – поправку к этому процессу, учитывающую влияние ленгмюровской турбулентности на функцию Грина флуктуаций плотности, $I_{\vec{k}}$ – рассеяние ленгмюровских волн на вынужденных флуктуациях плотности, $J_{\vec{k}}$ – рассеяние двух ленгмюровских волн в две. Поскольку оба последних члена имеют спонтанную часть, при получении (I) полуквантовым методом вычислялась сумма вероятностей соответствующих процессов. В случае широкого спектра вероятность первого из них оказывается гораздо больше вероятности второго, и кубичный столкновительный член сильно отличается от (I).

"Широким" мы называем спектр, в котором разброс групповых скоростей ленгмюровских волн $(\Delta\omega/k_0)$ велик по сравнению с

$$c_s = \left(\frac{T}{m_i}\right)^{1/2}, \tag{26}$$

где T – есть сумма электронной и ионной температур:

$$T = T_i + T_e \ . \tag{27}$$

Условие

$$\Delta\omega \gg k_0 c_s \tag{28}$$

позволяет заметно упростить столкновительный член (2I). Величины $\gamma^{(1)}_{\vec k}$, $\gamma^{(2)}_{\vec k}$, $J_{\vec k}$ легко оценить, сместив путь интегрирования по $\omega_k - \omega_{k_2}$ в верхнюю полуплоскость и воспользовавшись разложением функции $G^0_{q\Omega}$ по $\frac{q c_s}{|\Omega|} \ll 1$ при $\operatorname{Im}\Omega > 0$:

$$G^0_{q\Omega} \approx \frac{n_0 q^2}{m_i \Omega^2} \ . \tag{29}$$

Сделав это, находим:

$$\gamma^{(1)}_{\vec k} \sim \omega_p \frac{W}{n_0 T}\left(\frac{k_0 c_s}{\Delta\omega}\right)^2, \tag{30}$$

$$\gamma^{(2)}_{\vec k} \sim \omega_p \left(\frac{W}{n_0 T}\right)^2 \left(\frac{k_0 c_s}{\Delta\omega}\right)^4 \frac{\omega_p}{\Delta\omega} \sim \frac{J_{\vec k}}{N_{\vec k}} \ . \tag{31}$$

Здесь W – плотность энергии ленгмюровских волн. В силу (28), $\gamma^{(2)}_{\vec k}$ и $J_{\vec k}/N_{\vec k}$ пренебрежимо малы по сравнению с $\gamma^{(1)}_{\vec k}$ во всей области применимости теории слабой турбулентности, а в формулах для $\gamma^{(1)}_{\vec k}$ и $I_{\vec k}$ можно перейти к так называемому дифференциальному приближению, хорошо известному для индуцированного рассеяния на ионах. Этот переход осуществляется заменами

$$\operatorname{Im} G^0_{q\Omega} \to \frac{\pi n_0}{m_i}\delta'\left(\frac{\Omega}{q}\right), \tag{32}$$

$$|G^0_{q\Omega}|^2 \to \delta\left(\frac{\Omega}{q}\right)\int d\frac{\Omega}{q}\,|G^0_{q\Omega}|^2 = \frac{\alpha\pi n_0}{m_i^2 c_s^3}\,\delta\left(\frac{\Omega}{q}\right), \tag{33}$$

где $\alpha \gtrsim 1$ – безразмерный коэффициент, оценочно равный отношению частоты $\Omega_s = k_0 c_s$ ионно-звуковых колебаний к их

затуханию ν_s :

$$\alpha = \begin{cases} \dfrac{\Omega_s}{\nu_s} & (T_e \gg T_i) \\ \sqrt{\pi} & (T_i \gg T_e) \ . \end{cases} \tag{34}$$

После замен (32), (33) столкновительный член (2I) принимает вид

$$St_{\vec k} = \frac{2\pi n_0}{m_i}\int d^3k_1\,\delta'(\omega_k - \omega_{k_1}) V^2_{\vec k\vec k_1} |\vec k - \vec k_1|^2 N_{\vec k} N_{\vec k_1} +$$

$$+ \frac{2\pi^2 \alpha n_0^2}{m_i^2 c_s^3}\int d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3\,\delta(\vec k - \vec k_1 + \vec k_2 - \vec k_3)\,\delta(\omega_k - \omega_{k_1})\,\delta(\omega_{k_2} - \omega_{k_3}) \times$$

$$\times V^2_{\vec k\vec k_1} V^2_{\vec k_2\vec k_3} |\vec k - \vec k_1| N_{\vec k_2} N_{\vec k_3} (N_{\vec k_1} - N_{\vec k}) \ . \tag{35}$$

Обратное время рассеяния на вынужденных флуктуациях плотности оценочно равно

$$\frac{I_{\vec k}}{N_{\vec k}} \sim \omega_p \left(\frac{W}{n_0 T}\right)^2 \left(\frac{k_0 c_s}{\Delta\omega}\right)^2 \frac{\omega_p}{\nu_s} \ . \tag{36}$$

При

$$\frac{W}{n_0 T} \ll \frac{\nu_s}{\omega_p} \tag{37}$$

оно меньше $\gamma^{(1)}_{\vec k}$, но в области

$$\frac{\nu_s}{\omega_p} \ll \frac{W}{n_0 T} \ll \frac{\nu_s\,\Delta\omega}{\Omega_s\,\omega_p} \tag{38}$$

кубичный член становится главным. Второе неравенство в (38) следует из условия "статичности" флуктуаций плотности – (I7). При $T_i \gtrsim T_e$ (когда $\nu_s \sim \Omega_s$) это неравенство совпадает с условием применимости теории слабой турбулентности; при $T_e \gg T_i$ имеется область

$$\frac{\nu_s\,\Delta\omega}{\Omega_s\,\omega_p} \lesssim \frac{W}{n_0 T} \ll \left(\frac{\nu_s}{\Omega_s}\right)^{1/2} \frac{\Delta\omega}{\omega_p} \ , \tag{39}$$

в которой турбулентность еще слаба, но звук уже не статичен.

Данная область описывается стандартными кинетическими уравнениями для трехволнового распадного взаимодействия ленгмюровских и ионно-звуковых волн.

Заметим, что эти уравнения применимы в более широкой области

$$\nu_s ,\ \gamma_H \ll \Omega_s , \qquad (40)$$

пересекающейся с (I7). В случае статичного звука они сводятся к одному кинетическому уравнению для ленгмюровских волн [9]. Отличие соответствующего столкновительного члена от (I) послужило основанием для возражений против [9] : утверждалось, например, что условие применимости (40) должно быть дополнено неравенством, противоположным (I7). В действительности верно (40), а не (I): найденный выше столкновительный член согласуется с использовавшимся в [9]. Более того, структура столкновительного члена (35) не зависит от соотношения между электронной и ионной температурами, что позволяет непосредственно перенести результаты проведенного в [9] исследования ленгмюровских спектров с энергиями из интервала (38) со случая $T_e \gg T_i$ на случай произвольных T_e / T_i .

В заключение покажем, как упрощается столкновительный член (2I) для узкого ленгмюровского спектра:

$$\Delta\omega \ll k_0 c_s . \qquad (4I)$$

В этом случае ионно-звуковая ветвь практически не возбуждается, и кубичный столкновительный член должен иметь вид (I). Прямой расчет подтверждает данный вывод: при выполнении (4I) в формулах (23)-(25) можно положить

$$G^{0}_{q,\Omega} = - \frac{n_0}{T} \qquad (42)$$

после чего сумма всех кубичных слагаемых в (2I) приобретает вид (I) с вероятностью

$$P_{kk_1k_2k_3} = \frac{\pi n_0^2}{T^2} \left(V_{kk_1} V_{k_2k_3} + V_{k_1k_2} V_{k_3k} \right)^2 . \qquad (43)$$

Литература:

I. Цытович В.Н. Теория турбулентной плазмы. - М.: Атомиздат, I97I. - 423 с.
2. Коврижных Л.М. - ЖЭТФ, I965, 49, 237;
ЖЭТФ, I965, 49, I376.
3. Липеровский В.А., Цытович В.Н. - Изв.ВУЗов, Радиофизика, I969, I2, 823.
4. Брейзман Б.Н., Захаров В.Е., Мушер С.Л. - ЖЭТФ, I973, 64, I297.
5. Коврижных Л.М. - ЖЭТФ, I965, 48, III4.
6. Захаров В.Е. - ЖЭТФ, I972, 62, I745.
7. Wyld H.W. - Ann. of Phys., 1961, 14, 143.
8. Захаров В.Е., Львов В.С. - Изв. ВУЗов, Радиофизика, I975, I8, I470.
9. Малкин В.М. - Новосибирск, I98I. - Препринт ИЯФ: 8I-I07.

Работа поступила - 7 января 1982 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати 22.I-1982 г. МН 0305I
Усл. 0,6 печ.л., 0,5 учетно-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно
Заказ №8.

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР