

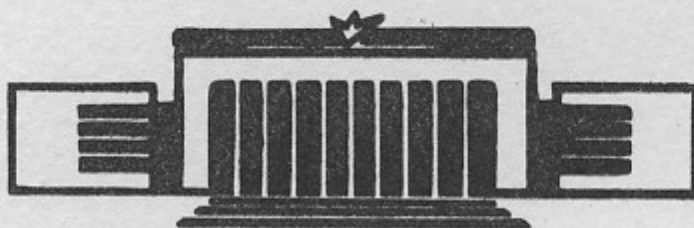
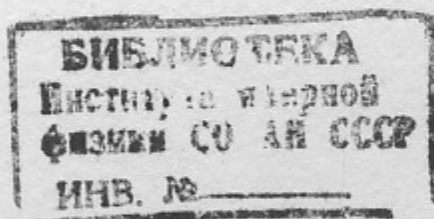


В.39  
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

В.В.Вечеславов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК И  
СВЯЗАННЫХ С НИМИ ХАРАКТЕРИСТИК  
НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ, II

ПРЕПРИНТ 83—64



✓  
НОВОСИБИРСК

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК И СВЯЗАННЫХ С НИМИ  
ХАРАКТЕРИСТИК НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ, II

В.В.Вечеславов

А Н Н О Т А Ц И Я

Описывается многомерный вариант предложенного в работе [I] метода отыскания периодических траекторий в колебательных динамических системах. Обсуждаемые представления и приемы используются для изучения последовательностей бифуркаций удвоения периода конкретного четырехмерного гамильтонова отображения. Показано, что процесс накопления таких бифуркаций, протекающий при изменении одного из параметров, не подчиняется закономерностям, обнаруженным сравнительно недавно в двумерных отображениях [2,3].

## 1. В в е д е н и е

Значительная доля информации о нелинейных колебательных гамильтоновых системах добыта к настоящему времени путем изучения движения в окрестности резонансных состояний [4]. Как правило, однако, детально обследовались лишь системы с малым числом степеней свободы, что в определенной мере обусловлено трудностями отыскания многомерных периодических траекторий. Но существуют важные физические явления, которые могут быть изучены и поняты только в многомерном фазовом пространстве, так как не имеют аналогов при малой размерности. Один из примеров такого рода — диффузия Арнольда, очень тонкий механизм неустойчивости сколь угодно слабо возмущенных гамильтоновых систем с числом степеней свободы больше двух [4]. Исследование этой диффузии связано с необходимостью размещать начальные состояния внутри стохастического слоя, что проще всего сделать, отыскав принадлежащую слою неустойчивую периодическую траекторию [5].

В последние годы особую роль приобрело изучение последовательностей бифуркаций удвоения периода, связанное с поиском таких состояний, при которых периодическая траектория теряет устойчивость и одновременно возникает устойчивая траектория двойного периода. Широкий размах эти исследования приняли в отношении диссипативных систем, для которых разработаны эффективные алгоритмы поиска многомерных периодических траекторий, построения бифуркационных кривых и т.п. (см., например, [6] и другие выпуски этой серии). Процессы накопления указанных бифуркаций, протекающие при изменении параметра в физических, химических, биологических и т.д. системах обнаруживают замечательную универсальность и допускают масштабно-инвариантное описание [7]. Что касается гамильтоновых систем, то для них аналогичные закономерности установлены пока что лишь в двумерных отображениях [2,3]. Более того, оказалось, что многомерные диссипативные системы (если диссипация не мала) ведут себя в таких процессах, по существу, как одномерные [8]. Это важное обстоятельство позволяет "на законном основании" вместо сложного движения изучать простое и, как отмечалось в работе [2], было бы неплохо найти что-нибудь подобное для гамильтоновых систем.



Решение перечисленных и других задач сильно тормозится из-за отсутствия практического алгоритма поиска периодических траекторий многомерных гамильтоновых систем общего вида. Единственный известный автору подход к этой проблеме, содержащийся в работах [9, 10], на деле приводит к успеху только в тех случаях, когда гамильтониан составлен из невысоких степеней динамических переменных (изложение и обсуждение этого метода имеется во второй главе книги [II]).

Ниже описывается многомерный вариант предложенного в [I] способа, основанного на представлениях о частично периодических многообразиях и их пересечениях. В качестве конкретного примера (см. п. 3) рассматривается четырехмерное гамильтоново отображение, для которого определяются начальные участки цепочек бифуркаций удвоения периода. Оказывается, что при изменении одного из параметров такие бифуркации не подчиняются закономерностям, обнаруженным сравнительно недавно в двумерных отображениях [2, 3].

## 2. Поиск неподвижных точек в многомерном фазовом пространстве методом пересечений

Рассмотрим колебательную динамическую систему с  $2m$  степенями свободы, подверженную внешнему периодическому воздействию с периодом  $T_S$ . Положение этой системы в фазовом пространстве определяется вектором

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_{2m}) = (q_1, p_1, q_2, p_2, \dots, q_m, p_m), \quad (1)$$

где  $(q_1, q_2, \dots, q_m) = Q$ ,  $(p_1, p_2, \dots, p_m) = P$  - обобщенные координаты и импульсы.

Задача отыскания периодической с периодом  $T_0$  траектории оказывается решена, если в начальный момент времени  $t_0$  удастся указать такое состояние системы, для которого равенства

$$y_j(t_0) = y_j(t_0 + T_0) \quad (2)$$

выполняются сразу по всем переменным  $j = 1, 2, \dots, 2m$ . Назовем проходящую через точку  $y(t_0)$  траекторию частично периодической по некоторой динамической переменной  $y_k$ , если

равенство (2) выполнено для  $j = k$ , причем поведение остальных переменных во внимание не принимается. Для очень широкого класса динамических систем множество всех траекторий, частично периодических по  $n$  переменным образует в расширенном фазовом пространстве  $(2m - n + 1)$ -мерную поверхность  $S_n$ . Данное обстоятельство удается использовать для построения весьма простого по своей идее способа практического отыскания периодических траекторий. Легче всего "попасть" на самую обширную поверхность  $S_1$ , что мы и делаем, обеспечив при этом частичную периодичность по переменной  $y_1$ . Не теряя этого качества, переходим на поверхность  $S_2 \subset S_1$ , что добавляет периодичность по  $y_2$  и т.д. Такой процесс выглядит как движение по цепочке  $S_1 \supset S_2 \supset \dots \supset S_{2m-1} \supset S_{2m}$  вложенных друг в друга подмножеств убывающей размерности, в результате которого достигается разыскиваемая периодическая траектория  $S_{2m}$ . Этот "метод пересечений" подробно описан в работе [I] для случая фазовой плоскости; ниже дается его обобщение на  $2m$ -мерное фазовое пространство.

Дальнейшее изложение удобнее вести на языке точечных отображений фазового пространства на себя. Такие отображения естественным образом возникают при изучении непрерывных систем методом поверхности сечения Пуанкаре [II]; кроме того, многие проблемы нелинейной динамики с самого начала формулируются в виде отображений (см., например, [5]). Предположим, что период возврата на поверхность сечения и период траектории  $T_0$  кратны периоду внешних сил  $T_S$ . В этом случае образом периодической траектории будет одна или несколько неподвижных точек отображения и вместо периода  $T_0$  говорят о минимальном числе итераций  $N_0$ , после которого фазовая точка отображается сама в себя  $y(0) = y(N_0)$ . Условие частичной периодичности до переменной  $y_j$  заменяется теперь условием частичной неподвижности  $y_j(0) = y_j(N_0)$ .

Выделим в фазовом пространстве рабочую область - пусть это будет  $2m$ -мерный гиперкуб  $\mathcal{D}$ , одномерные грани которого (ребра) ориентированы вдоль координатных осей. Требуется отыскать принадлежащие  $\mathcal{D}$  неподвижные с периодом  $N_0$  точки некоторого определенного отображения. Множество всех фазовых точек, частично неподвижных по  $n$  переменным



$y_1, y_2, \dots, y_n$  образует в фазовом пространстве  $(2m-n)$ -мерную поверхность  $\mathcal{P}_n$ . Отсюда следует, что 1) пересечение  $\mathcal{P}_n$  с  $(n+1)$ -мерной гранью  $\mathcal{D}$ , если оно не пусто, есть линия - назовем его  $n$ -линией; 2) пересечение  $\mathcal{P}_n$  с  $n$ -мерной гранью  $\mathcal{D}$ , если оно не пусто, есть точка - назовем его  $n$ -точкой. С учетом этих обозначений можно сказать, что задача заключается в отыскании принадлежащих гиперкубу  $2m$ -точек и ниже описан один из вариантов поиска.

Начиная с вершины гиперкуба  $\mathcal{D}$ , движемся вдоль его первого ребра  $\{y_1\}, y_i = \text{const}, i = 2, 3, \dots, 2m$  и отыскиваем лежащую на нем 1-точку. Начиная с этой точки, движемся вдоль содержащей ее 1-линии в плоскости  $\{y_1, y_2\}, y_i = \text{const}, i = 3, 4, \dots, 2m$  и отыскиваем на ней 2-точку. Это дает возможность перенести поиск на 2-линию, расположенную в трехмерной грани  $\{y_1, y_2, y_3\}, y_i = \text{const}, i = 4, 5, \dots, 2m$  и т.д. Последним этапом будет движение в  $\mathcal{D}$  вдоль  $(2m-1)$ -линии и отыскание на ней искомой неподвижной  $2m$ -точки. Основным элементом поиска является движение вдоль  $n$ -линии в  $(n+1)$ -мерной грани гиперкуба  $\{y_1, y_2, \dots, y_{n+1}\}, y_i = \text{const}, i = n+2, \dots, 2m$  и здесь необходимо пояснить некоторые детали.

Свяжем с каждой точкой рабочей области  $y \in \mathcal{D}$  вектор  $f(y, N_0) = \{f_i\}$  и матрицу  $G(y, N_0) = \{g_{ij}\}$ :

$$f_i(y, N_0) = y_i^* - y_i, \quad (3)$$

$$g_{ij}(y, N_0) = \frac{\partial f_i}{\partial y_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 2m, \quad (4)$$

где  $y^*$  - образ точки  $y$  после выполнения  $N_0$  итераций отображения. Обозначим через  $\mathcal{M}(y, N_0)$  матрицу линеаризации векторного поля в точке  $y$ , описывающую малые отклонения от этой точки после  $N_0$  итераций (см. формулу (12)). Легко проверить равенство

$$G(y, N_0) = \mathcal{M}(y, N_0) - I, \quad (5)$$

здесь  $I$  - единичная матрица. Точность, с которой обеспечена частичная неподвижность по  $n$  переменным (то есть точ-

ность в определении  $n$ -точки) удобно находить с помощью величины

$$Q_n = \sum_{i=1}^n \text{abs} [f_i(y, N_0)]. \quad (6)$$

Пусть  $y^{(1)}$  принадлежит  $n$ -линии, вдоль которой требуется переместиться на один шаг длиной  $d$  и занять новое положение  $y^{(2)}$ . Точность попадания на  $n$ -линию, найденная по формуле (6), должна быть не хуже заданной величины  $Q^*$ . Необходимо отыскать  $n+1$  первых компонент вектора сдвига  $\delta y^{(1)} = y^{(2)} - y^{(1)}$  (остальные компоненты  $\delta y$  равны нулю, так как движение происходит в  $(n+1)$ -мерной грани гиперкуба  $\mathcal{D}$ ). С этой целью решим систему линейных уравнений (здесь и далее предполагается суммирование по дважды встречающимся индексам)

$$g_{i\alpha}(y^{(1)}, N_0) \cdot \delta y_{\alpha}^{(1)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \alpha = 1, 2, \dots, n+1. \quad (7)$$

с последующей нормировкой решения  $\delta y^{(1)}$  на величину шага  $d$ . Смысл системы (7) простой: мы требуем, чтобы движение шло по касательной к  $n$ -линии, то есть ортогонально градиентам  $n$  первых компонент вектора  $f$ . Найденная таким образом точка  $y^{(3)} = y^{(1)} + \delta y^{(1)}$  оказывается, вообще говоря, в стороне от  $n$ -линии и требуемая точность  $Q^*$  может не обеспечиваться. Для компенсации такого ухода следует найти поправки  $\delta y^{(3)}$  к значению  $y^{(3)}$  из решения второй системы уравнений

$$\begin{aligned} f_i(y^{(3)}, N_0) + g_{i\alpha}(y^{(3)}, N_0) \cdot \delta y_{\alpha}^{(3)} &= 0, \\ (y_{\alpha}^{(3)} - y_{\alpha}^{(1)}) \cdot \delta y_{\alpha}^{(3)} &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$i = 1, 2, \dots, n; \quad \alpha = 1, 2, \dots, n+1.$$

Первые  $n$  уравнений этой системы гарантируют в линейном приближении частичную неподвижность по переменным  $y_1, \dots, y_n$ , а последнее заставляет точку приближаться к  $n$ -линии перпендикулярно направлению касательной. Остается выяснить, не лежит ли на участке  $y^{(1)} < y < y^{(3)} + \delta y^{(3)}$  обследуемой  $n$ -линии неподвижная  $(n+1)$ -точка. Для этого достаточно сравнить между собой величины  $f_{n+1}(y^{(1)}, N_0)$  и  $f_{n+1}(y^{(3)} + \delta y^{(3)}, N_0)$ : если они



имеют разные знаки, то  $(n+1)$ -точка действительно содержится на этом участке и за счет дробления шага  $d$  может быть локализована с нужной точностью.

Любой этап поиска может закончиться неудачей: при движении вдоль  $n$ -линии в пределах рабочей области неподвижная  $(n+1)$ -точка не обнаруживается. В этом случае следует изменить порядок вхождения динамических переменных  $q_i, p_i$  в фазовый вектор  $y$ , определяемый по формуле (I). Если все возможные варианты упорядочения  $q_i, p_i$  не приводят к цели, то остается заключить, что неподвижных точек периода  $N_0$  в рабочей области нет.

Поиск в гиперкубе при больших периодах  $N_0$  оказывается достаточно трудоемким делом. Некоторые практические приемы, используемые на плоскости и описанные в [1] (разбиение рабочей области на подобласти, запоминание "хвостов" уже обследованных линий и т.п.) оказываются полезны и в многомерном случае. Значительному ускорению процесса может способствовать слежение за поведением функций  $f_j, j > n$  при движении вдоль  $n$ -линии.

При анализе нелинейных динамических систем бывает важно выяснить, что происходит с неподвижными точками и их устойчивостью при изменении входящих в систему параметров  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ . Можно было бы, изменив совокупность параметров, всякий раз заново обращаться к глобальному поиску в гиперкубе, но имеется более простое решение этой задачи.

Допустим, что при  $\alpha = \alpha^{(0)}$  неподвижная  $2m$ -точка уже известна и требуется определить ее положение при  $\alpha = \alpha^{(1)}$ , достаточно близком к  $\alpha^{(0)}$ . Напомним, что  $2m$ -точка была найдена при движении вдоль  $(2m-1)$ -линии, причем сама эта линия однозначно определялась указанием совокупности параметров  $\alpha^{(0)}$ . Естественно считать, что переход к новой совокупности  $\alpha^{(1)}$  также однозначно определит "свою"  $(2m-1)$ -линию, расположенную в фазовом пространстве "где-то рядом" с уже найденной. Это позволяет рассматривать отвечающую  $\alpha^{(0)}$  неподвижную  $2m$ -точку как "неточное попадание" на отвечающую  $\alpha^{(1)}$   $(2m-1)$ -линию и использовать корректирующий алгоритм (8). Выход на новую  $(2m-1)$ -линию и движение по ней в сторону убывания величины  $abs(f_{2m})$  позволяет найти новую

$2m$ -точку.

Дальнейшее применение введенных здесь представлений удобнее проследить на конкретном примере.

### 3. Бифуркации удвоения периода дискретной гамильтоновой системы связанных осцилляторов

В качестве конкретного примера рассмотрим неавтономную динамическую систему с двумя степенями свободы, имеющую гамильтониан

$$H = \frac{1}{2}(P_1^2 + P_2^2) + \delta_1 \left[ \frac{\alpha}{4}(x_1^4 + x_2^4) - \mu x_1 x_2 - \varepsilon x_1 f(t) \right] \quad (9)$$

здесь  $\delta_1$  - периодическая с периодом единица дельта-функция. Эта система является дискретным аналогом двух связанных нелинейных осцилляторов, на один из которых действует внешняя сила [4,5]. Введем, согласно (I), фазовый вектор  $y = (x_1, p_1, x_2, p_2)$  и выпишем явно порождаемое гамильтонианом (9) отображение  $T: y \rightarrow \bar{y}$

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= P_1 - \alpha x_1^3 + \mu x_2 + \varepsilon \cdot f(t), \\ \bar{x}_1 &= x_1 + \bar{P}_1, \\ \bar{P}_2 &= P_2 - \alpha x_2^3 + \mu x_1, \\ \bar{x}_2 &= x_2 + \bar{P}_2. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Заметим попутно, что именно отображение (10) подверглось наиболее полному численному обследованию в отношении диффузии Арнольда [5].

Матрица малых отклонений за одну итерацию в точке  $y$  равна

$$M_1(y) = \begin{pmatrix} 1 - 3\alpha x_1^2 & 1 & \mu & 0 \\ -3\alpha x_1^2 & 1 & \mu & 0 \\ \mu & 0 & 1 - 3\alpha x_2^2 & 1 \\ \mu & 0 & -3\alpha x_2^2 & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Матрица малых отклонений в той же точке за  $N_0$  итераций определяется произведением вида



$$M(y, N_0) = M_1(y(N_0-1)) \cdot \dots \cdot M_1(y(1)) \cdot M_1(y(0)), \quad (12)$$

где  $y \equiv y(0) \rightarrow y(1) \rightarrow \dots \rightarrow y(N_0)$  — последовательность фазовых точек, производимая отображением  $T$ . Нас будут интересовать неподвижные точки  $y(0) = y(N_0)$  периода  $N_0$ , устойчивость малых колебаний, вокруг которых определяется собственными числами  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  матриц  $M(y, N_0)$ , найденных по формуле (12). Напомним, что для гамильтоновых систем в силу сохранения фазового объема и симплектичности собственные числа попарно комплексно сопряжены и попарно взаимно обратны. Поэтому возможно всего пять качественно различных размещений этих чисел на комплексной плоскости, из которых лишь одно (на единичной окружности) отвечает устойчивым малым колебаниям [12]. Таким образом, после потери устойчивости неподвижной точкой могут возникать различные ситуации, но рождение неподвижных точек двойного периода наблюдается только тогда, когда два собственных числа через значение  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$  переходят на вещественную ось, в то время как два других остаются на единичной окружности.

Отображение (10) содержит два внутренних параметра  $\alpha$ ,  $\mu$  и при  $\mu = 0$  вырождается, по существу, в систему с одной степенью свободы  $\{x_1, p_1\}$ , которая демонстрирует цепочку бифуркаций удвоения периода (см. Приложение А). В этом процессе хорошо подтверждаются закономерности, сравнительно недавно обнаруженные для неавтономных гамильтоновых систем с двумерным фазовым пространством (см., например, [2, 3]). В частности, бифуркационные значения  $\alpha_k$  имеют точку конденсации, при приближении к которой переменная Фейгенбаума [7]

$$\delta_k = \frac{\alpha_{k-2} - \alpha_{k-1}}{\alpha_{k-1} - \alpha_k}, \quad k = \lg_2 N_0, \quad (13)$$

стремится к пределу  $\delta_\infty = 8.721097$  [2, 3]. Отметим, что в работах [2, 3] изучались отображения, обладающие некоторой специальной симметрией, наличие которой качественно облегчало отыскание неподвижных точек на фазовой плоскости.

При  $\mu = \text{const} \neq 0$  и изменении параметра  $\alpha$  в четырехмерном фазовом пространстве системы (10) также наблюдаются последовательности бифуркаций удвоения периода; два примера начальной стадии таких процессов приведены в Приложении А для значений  $\mu = 0.001$  и  $0.002$ . Из этих результатов видно, что исследуемая система с двумя степенями свободы при изменении одного из входящих в нее параметров ведет себя не так, как в случае одной степени свободы. Нет даже уверенности в том, что описанные в Приложении А при  $\mu \neq 0$  цепочки бифуркаций "доходят до конца". Для  $\mu = 0.005$ , например, такая цепочка порвалась уже при  $N_0 = 16$ , так как вместо бифуркации удвоения возникла другая, при которой все четыре собственных числа, оставаясь величинами комплексными, одновременно сошли с единичной окружности (одновременность здесь также является следствием сохранения фазового объема и симплектичности).

При получении содержащихся в Приложении А численных результатов использовались достаточно общие представления и приемы, изложенные в предыдущем разделе. Вместе с тем, бифуркации удвоения периода обнаруживают специфические свойства, учет которых облегчает их исследование. В Приложении Б рассмотрен простой пример первой бифуркации двумерного отображения, соответствующего системе (10) при  $\mu = 0$ . Там показано, что при этой бифуркации а) точки двойного периода разлетаются от места своего рождения вдоль собственного направления; б) сразу после своего возникновения эти точки и "породившие" их точки одинарного периода связаны линиями частичной неподвижности. Оба эти факта имеют, по-видимому, достаточно общий характер, поскольку наблюдаются для всех приведенных в Приложении А бифуркаций как в двумерном ( $\mu = 0$ ), так и в четырехмерном ( $\mu \neq 0$ ) фазовом пространстве. Первый факт резко уменьшает неопределенность в выборе размеров гиперкуба, внутри которого организуется глобальный поиск. Второй позволяет находить точки двойного периода с помощью простого движения вдоль (любой из четырех) 3-линии, проходящей через неустойчивую точку одинарного периода. Правда, при этом отыскиваются "только что родившиеся" точки и их приходится еще довольно долго продвигать по параметру (см. конец п. 2.), пока они сами породят очередную бифуркацию. Однако, при больших значениях периода  $N_0$  это оказывается выгоднее, чем применение трудоемкого поиска в гиперкубе.



#### 4. Заключение

Описанный выше метод поиска периодических траекторий (неподвижных точек) имеет, по нашему мнению, определенные положительные качества: 1) отсутствие принципиальных ограничений на размерность фазового пространства; 2) независимость хода поиска от характера устойчивости разыскиваемой траектории; 3) применимость к дискретным и непрерывным, гамильтоновым и диссипативным системам общего вида. Для последних, как отмечалось, уже имеются хорошие способы вычислений, но они чаще всего используют итеративную процедуру Ньютона (см., например, [6]) и успех их работы зависит от наличия "хорошего" начального приближения. Если такого приближения нет, то следует испытать метод пересечений, который способен начать поиск "издалека".

Вместе с тем, этот метод нуждается в улучшениях, особенно в случае большого числа степеней свободы  $M$  и больших величин периода  $N_0$ . Некоторые из обнаруженных в начале поиска частично неподвижных точек впоследствии исключаются, так как их связь с периодической траекторией требуемого периода  $N_0$  не подтверждается. Число таких точек (и потраченное на них время вычислений) сильно возрастает с увеличением  $M$  и  $N_0$  и желательно иметь критерий их быстрого распознавания. Хорошо было бы также научиться быстро определять, содержится ли разыскиваемый объект в рабочей области и т.д.

Во введении отмечалось, что процесс накопления бифуркаций удвоения периода при изменении одного из параметров в многомерных и одномерных диссипативных системах протекает, по существу, одинаково [8]. Результаты п.3 заставляют предположить, что для гамильтоновых систем это, по-видимому, не имеет места. Не исключено, однако, что при одновременном изменении обоих внутренних параметров ( $\alpha$  и  $\mu$ ) гамильтоново отображение (10) может продемонстрировать последовательность бифуркаций, подобную обнаруженной в двумерных отображениях [2,3]. Эта задача требует специального рассмотрения.

Автор благодарен Б.В.Чирикову за внимание и интерес к работе.

#### Приложение А.

Бифуркационные значения параметра  $\alpha$  системы (10) при  $\varepsilon \cdot f(t) = 1$  и  $\mu = 0.; = 0.001; 0.002$ .

Эти данные помещены в Таблицу, при рассмотрении которой необходимо иметь ввиду следующее:

1. В Таблице зафиксированы значения  $\alpha$ , при которых неподвижная точка периода  $N_0$  теряет устойчивость и рождаются неподвижные точки периода  $2N_0$ , т.е. происходит бифуркация удвоения периода.

2. При такой бифуркации на комплексной плоскости два собственных числа матрицы малых колебаний переходят через точку  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$  на вещественную ось, а два других остаются на единичной окружности. Значение параметра  $\alpha$  считалось бифуркационным, если наименьшее из двух вещественных собственных чисел попадало в интервал  $-1.001 < \lambda_{\min} < -1.000$ .

3. Неподвижная точка считалась локализованной, если определенная по формуле (6) точность отображения ее в себя оказывалась не хуже  $10^{-15}$ .

4. Переменная Фейгенбаума  $\delta$  определялась по формуле (13).



Первая бифуркация удвоения периода отображения (10)  
при  $\varphi(t) \equiv 1$  и  $\mu = 0$

При  $\mu = 0$  достаточно исследовать двумерное отображение (вместо  $x_1, p_1$  мы используем ниже более простые обозначения  $x, p$ ):

$$\begin{aligned} \bar{p} &= p - \alpha x^3 + \varepsilon \\ \bar{x} &= x + \bar{p} \end{aligned} \quad (\text{Б-1})$$

Координаты неподвижной точки периода  $N_0 = 1$  на плоскости  $\{x, p\}$  и собственные числа  $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = \lambda^{-1}$  матрицы малых отклонений от нее равны

$$x_{01} = \left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^{1/3}, \quad p_{01} = 0; \quad (\text{Б-2})$$

$$\lambda = 1 + \frac{3}{2} \alpha x_{01}^2 \left( \sqrt{1 - \frac{4}{3\alpha x_{01}^2}} - 1 \right). \quad (\text{Б-3})$$

Бифуркация происходит при критическом значении  $\lambda = \lambda_{кр} = -1$ , которому отвечают следующие значения параметра  $\alpha$  и координат

$$\alpha_{кр} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot \varepsilon^{-2}, \quad (\text{Б-4})$$

$$x_{кр} = \frac{3}{4} \varepsilon, \quad p_{кр} = 0. \quad (\text{Б-5})$$

Собственный вектор при  $\lambda = \lambda_{кр}$  направлен вдоль прямой, задаваемой уравнением

$$p - p_{кр} = \frac{3}{2} \alpha_{кр} x_{кр}^2 (x - x_{кр}) = 2(x - x_{кр}) \quad (\text{Б-6})$$

Координаты рождающихся неподвижных точек двойного периода  $N_0 = 2$  для любого  $\alpha > \alpha_{кр}$  можно найти из соотношения

$$x_{02} = p_{02} + \left(\frac{\varepsilon - 2p_{02}}{\alpha}\right)^{1/3} = \left(\frac{2p_{02} + \varepsilon}{\alpha}\right)^{1/3}. \quad (\text{Б-7})$$

Если ограничить рассмотрение условием  $\delta\alpha = \alpha - \alpha_{кр} \ll 1$ , то имеем

$$\varepsilon \cdot \varphi(t) \equiv 1.$$

Таблица

$N_0 = 2^k$	$\mu = 0$		$\mu = .001$		$\mu = .002$	
	$\alpha_k$	$\delta_k$	$\alpha_k$	$\delta_k$	$\alpha_k$	$\delta_k$
1	2.370370370370370	-	2.370047607421875	-	2.369556250000000	
2	3.372727748379688	-	3.372343750000000	-	3.371760351562500	
4	3.509168261718750	7.346479	3.508776214599609	7.346463	3.508180048007812	7.346477
8	3.525084649658203	8.572329	3.524691786193848	8.572263	3.524094434925781	8.572099
16	3.526914030761719	8.700422	3.526520958709717	8.700969	3.525923831467041	8.699254
32	3.527123843383789	8.719118	3.526730719604492	8.720274	3.526133731735596	8.715551
64	3.527147902197266	8.720821	3.526754785897827	8.715962	3.526157729800781	8.746550
128	3.527150660902405	8.721051	3.526757544002897	8.725662	3.526160459800781	8.790500
256	3.527150977227295	8.721113	3.526757859548889	8.740738	3.526160759374258	9.112956
512	3.527151013498535	8.721094	3.526757895440722	8.791582		



$$\delta p_{02} = p_{02} - p_{кр} = \pm \frac{9}{4\sqrt{5}} \varepsilon^{5/6} \sqrt{d_{кр}^{1/3} - d_{кр}^{1/3}} + O(\delta p_{02}^5) =$$

$$= \pm \frac{3}{4} \sqrt{\frac{3}{5}} \varepsilon^{5/6} d_{кр}^{-1/6} \left( \frac{\delta d}{d_{кр}} \right)^{1/3} + O\left[ \left( \frac{\delta d}{d_{кр}} \right)^{3/2} \right],$$

$$\delta x_{02} = x_{02} - x_{кр} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{d_{кр} x_{кр}^2} \cdot \delta p_{02} = \frac{1}{2} \delta p_{02}. \quad (Б-9)$$

Выделим особо два факта:

а) Сопоставляя равенства (Б-9) и (Б-6) замечаем, что непосредственно после своего рождения точки двойного периода  $(x_{02}, \pm p_{02})$  разлетаются от "породившей" их точки  $(x_{кр}, p_{кр})$  в разные стороны вдоль прямой, содержащей критический собственный вектор.

б) Зафиксируем какое-либо близкое к  $d_{кр}$  значение параметра  $d \neq d_{кр}$ , определим по (Б-1) координаты  $(x_{01}, p_{01})$  неустойчивой точки одинарного периода и построим проходящие через эту точку  $x$ -линию (периодичность только по  $x$ ) и  $p$ -линию (периодичность только по  $p$ ) периода  $N_0 = 2$ . Оказывается, что каждая из этих линий проходит также через обе "дочерние" точки  $(x_{02}, p_{02})$  двойного периода.

Оба отмеченных здесь факта наблюдаются во всех последующих бифуркациях отображения (Б-1) (см. Приложение А и обсуждение в п.3).

## Литература

1. V.V. Vecheslavov; *Physica* 5D (1982) 387.
2. J.M. Green et al.; *Physica* 3D (1981) 468.
3. T.C. Bountis; *Physica* 3D (1981) 577.
4. B.V. Chirikov; *Physics Reports* 52 (1979) 265.
5. B.V. Chirikov, J. Ford, K. Vivaldi; *AIP Conference Proceedings*, 57, (1979) 323.
6. А.И. Хибник; Периодические решения системы  $n$ -уравнений. - Пушкино, 1972, 72 с. (Алгоритмы и программы на ФОРТРАНе, Матем.обеспечение ЭВМ, вып.5)
7. M.J. Feigenbaum; *J. Stat. Phys.* 19 (1978) 25, 21 (1979) 669.
8. P. Collet, J.P. Eckmann, H. Koch; *J. Stat. Phys.* 25 (1981) 1.
9. C.R. Emlinizer, R.H.G. Helleman, E.W. Montzoll; *J. Math. Phys.* 17 (1976) 121.
10. R.H.G. Helleman, T.C. Bountis; In: *Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems* (Eds. Casati, Ford), *Lecture Notes in Physics*, 93, Springer-Verlag, New York (1979), 353.
11. A.J. Lichtenberg, M.A. Leiberman; *Regular and Stochastic Motion*, Springer-Verlag, 1983.
12. А.А. Коломенский, А.Н. Лебедев. Теория циклических ускорителей, ГИФМЛ, 1962.



В.В.Вечеславов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК И СВЯЗАННЫХ  
С НИМИ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЛИНЕЙНЫХ  
СИСТЕМ. II.

Препринт  
№ 83- 64

Работа поступила - 13 июня 1983 г.

---

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов

Подписано к печати 17.06-1983 г. МН 17594

Формат бумаги 60x90 1/16 усл.1,0 печ.л., 0,8 учетно-изд.л.

Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 64.

---

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90