

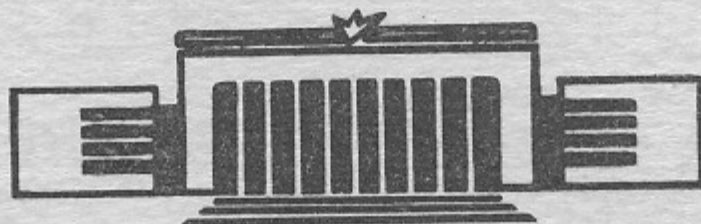
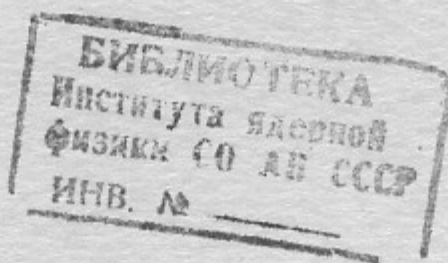
Д. 45

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР



Н.С.Диканский, Д.В.Пестриков  
К ТЕОРИИ СТОХАСТИЧЕСКОГО ОХЛАЖДЕНИЯ

ПРЕПРИНТ 83—65



НОВОСИБИРСК

К ТЕОРИИ СТОХАСТИЧЕСКОГО ОХЛАЖДЕНИЯ  
Н. С. Диканский, Д. В. Пестриков

А Н Н О Т А Ц И Я

В работе изучаются особенности кинетики стохастического охлаждения пучка в условиях, когда взаимодействие частиц через демифирующую систему является преобладающим. При этом благодаря макроскопически большому размеру области взаимодействия частиц экранирование в такой системе может наступить раньше, чем частицы покидают область взаимодействия. Это приводит к асимптотическому уменьшению декрементов в процессе охлаждения. Изменение параметров цепи обратной связи не улучшает скорость охлаждения. В работе обсуждаются особенности построения кинетического уравнения для пучка, взаимодействующего с системой стохастического охлаждения.

I. Одним из разработанных к настоящему времени методов охлаждения пучков тяжелых частиц является, предложенный С. ван-дер Меером [1], метод стохастического охлаждения. В этом методе сигнал с пикап-электрода, пропорциональный отклонению частицы от равновесной орбиты, через цепь широкополосной обратной связи подается на элемент, корректирующий это отклонение (киккер) [1,2]. При правильном подборе фазовых соотношений в цепи обратной связи взаимодействие частиц с такой системой приводит к охлаждению пучка. Как и в других методах, эффект охлаждения связан с диссипативностью элементов демпфирующей системы [3].

Сравнительная низкочастотность элементов, которые могут быть использованы в таком методе, существенно осложняет описание кинетики процесса из-за необходимости учета взаимного влияния охлаждаемых частиц. Сигнал, наведенный данной частицей, существует на киккере в течение времени  $\sim W^{-2}$ , определяемого полосой пропускания системы  $W$ . Поэтому частицы, отстоящие по азимуту на расстояние  $\Delta\theta \leq \omega_0/W$  ( $\omega_0$  - частота обращения), взаимодействуют друг с другом через систему охлаждения. По мере охлаждения пучка длительность такого взаимодействия возрастает. Поэтому, вообще говоря, взаимное влияние частиц усиливается.

Теоретический анализ метода выполнялся различными авторами [2+6]. В работах [3+5], в рамках традиционного подхода, получено кинетическое уравнение, учитывающее взаимодействие частиц через систему охлаждения. Было выяснено, что кинетика процесса описывается очень сложным, нелинейным кинетическим уравнением. В работе [3], на основе полученного уравнения, проведено качественное исследование особенностей охлаждения, связанных эффектам взаимного влияния частиц.

В работе [6] особенности процесса охлаждения исследовались на основе простой решаемой модели, а также численным моделированием движения частиц на ЭВМ. Этот метод в определенном смысле альтернативен методу работ [2+5], так как при численном моделировании нет необходимости использовать предположения, используемые при построении кинетических уравнений. Результаты работ [6] и [2+5] отличаются предсказанием асимптотического поведения декрементов охлаждения при увеличении фазовой плотности пучка ( $\sim N/\Delta\omega$ , где  $N$  - число частиц в пучке,  $\Delta\omega$  - раз-

брос частот обращения). Таким образом, различие попадает именно в ту область, где взаимное влияние частиц пучка является определяющим. Причина такого различия существенным образом связана с процедурой построения самого кинетического уравнения. Поэтому исследование этого вопроса представляет заметный интерес.

Целью нашей работы является построение кинетического уравнения для наиболее простого случая стохастического охлаждения по импульсам азимутально-однородного пучка.

2. Прежде чем строить кинетическое уравнение рассмотрим простую модель, использовавшуюся при вычислениях в работе [6]. Пусть пучок разбит на группы (образцы) азимутальной протяженности  $\theta_0$ . Среднее число частиц, приходящееся на группу равно  $\bar{N} = N\theta_0/2\pi$ . В соответствии с основной идеей метода [1] положим, что сила, действующая на частицы данной группы пропорциональна "дипольному" моменту группы:

$$\dot{p}_a = -\lambda_0 \bar{N} \varphi(t), \quad \varphi(t) = \frac{1}{\bar{N}} \sum_{a=1}^{\bar{N}} p_a(t), \quad (1)$$

$$\dot{\theta}_a = \omega'_a p_a$$

Здесь  $\omega_a = \omega_0(p_a)$  частота обращения частицы  $a$ ,  $\omega'_a = d\omega_0/dp$ ; импульс частицы  $p_a$  отсчитывается от равновесного значения. Постоянная  $\lambda_0$  имеет смысл декремента затухания одной частицы. Выбор силы в форме (1) отвечает такой задержке в цепи обратной связи, чтобы самодействие частицы было максимальным.

Как видно из (1), пока ни одна из частиц группы не покинула интервал  $\theta_0$ , дипольный момент  $\varphi$  экспоненциально затухает с декрементом  $\Delta = \lambda_0 \bar{N}$ , а движение частиц описывается выражениями

$$p_a(t) = p_{a0} - \varphi_0 (1 - e^{-\Delta t}), \quad (2)$$

$$\theta_a(t) \approx \omega'_a p_{a0} t,$$

$p_{a0}$  и  $\varphi_0$  — начальные значения импульсов и дипольного момента группы. Заметим, что дисперсия по импульсам частиц в группах при таком движении постоянна:

$$\sum_a (p_a - \varphi)^2 = \sum_a (p_{a0} - \varphi_0)^2. \quad (3)$$

Уравнения (2) показывают каким образом происходит уменьшение дипольного момента группы. Пусть, например,  $p_{10} = p_0$ , а  $p_{a0} = 0$  ( $a = 2 \dots \bar{N}$ ). Тогда (2) дает

$$p_1(t \gg \Delta^{-1}) = p_0 \left(1 - \frac{t}{\bar{N}}\right), \quad p_a = -\frac{p_0}{\bar{N}};$$

то есть затухание дипольного момента связано с нарастанием коллективного отклика группы. В результате такого нарастания, через  $t > \Delta^{-1}$  сила, действующая на частицы группы, практически обращается в нуль. Другими словами, поле, наведенное частицей 1 экранируется остальными частицами за время, порядка  $1/\Delta$ . Это само по себе не удивительно, однако в отличие от задач с недиссипативным взаимодействием частиц, время установления экранировки здесь зависит не от разброса импульсов, а от интенсивности взаимодействия с демпфирующей системой.

Переходы частиц из группы в группу вызывают изменение начальных условий в уравнениях (2). Среднее время нахождения частицы в данной группе, очевидно, равно  $\bar{z}_0 = \theta_0/\Delta\omega$ . Поэтому средняя частота смены начальных условий в (2) порядка  $\Delta\omega/\theta_0$ .

Используя (2), можно вычислить скорость изменения разброса по импульсам в пучке:

$$\sum_{a=1}^{\bar{N}} \Delta p_a^2 = \sum_{\alpha=1}^{n_{zp}} \sum_{a=1}^{\bar{N}} \Delta p_a^2 = - \sum_{\alpha=1}^{n_{zp}} \bar{N} \varphi_{\alpha 0}^2 (1 - e^{-2\Delta t}).$$

Выполнив здесь статистическое усреднение ( $\sum_a \Delta p_a^2 = N\Delta^2$ ,  $\overline{\varphi_{\alpha 0}^2} = 0$ ,  $\overline{\varphi_{\alpha 0}^2} = \Delta^2/\bar{N}$ ) и поделив на среднее время пребывания частицы в заданной группе  $\bar{z}_0$ , получим

$$\frac{d\Delta^2}{dt} = - \frac{\Delta^2}{\bar{N} \bar{z}_0} (1 - e^{-2\Delta \bar{z}_0}). \quad (4)$$

Уравнению (4) отвечает декремент охлаждения:

$$\lambda = - \frac{1}{2\Delta^2} \frac{d\Delta^2}{dt} = \lambda_0 \frac{1 - e^{-2\Delta \bar{z}_0}}{2\Delta \bar{z}_0}, \quad (5)$$

или

$$\lambda = \frac{2\pi \Delta\omega}{N\theta_0^2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{N\theta_0^2 \lambda_0}{\pi \Delta\omega}\right) \right]. \quad (5a)$$

Хотя выражение (5a) формально и отличается от результата оценок проводившихся в [6], оно приводит к тому же поведению декремента при охлаждении пучка ( $\Delta\omega \rightarrow 0$ ). Можно проверить, что

(5а) согласуется и с результатами численного счета [6] для линейной зависимости силы трения от импульсов.

В отличие от работ [2+5], предсказывающих падение декремента как  $1/N^2$  при большой фазовой плотности, формулы (5), (5а) дают монотонное уменьшение декремента до

$$\lambda_{min} = \frac{2\tilde{\tau} \Delta\omega}{N\theta_0^2}.$$

Причем такое уменьшение связано с экранированием поля данной частицы остальными за время  $< \tilde{\tau}_0$  нахождения частицы в группе.

Эвристическая ценность описанной модели определяется тем, что в ней явным образом учитывается регенерация начальных условий по флуктуациям (в среднем через время  $\tilde{\tau}_0$ ).

3. Для построения кинетического уравнения воспользуемся формализмом микроскопической фазовой плотности [7]. В этом методе различные функции распределения образуются статистическим усреднением степеней микроскопической плотности пучка в фазовом пространстве:

$$F(\rho, \theta, t) = \sum_{a=1}^N \delta(\theta - \theta_a(t)) \delta(\rho - \rho_a(t)). \quad (7)$$

Здесь  $a$  — нумерует частицы,  $N$  — число частиц в пучке,  $\theta = \theta_a(t)$ ,  $\rho = \rho_a(t)$  — траектория частицы  $a$ , импульс  $\rho$  отсчитывается от равновесного значения. Одночастичная функция распределения определяется средним значением  $F$ :

$$f(\rho, t) = \langle F \rangle \quad (8)$$

При этом

$$\delta F = F - f \quad (9)$$

определяет флуктуации  $F$  относительно среднего значения. По определению,  $f$  нормировано на число частиц в пучке:

$$\int dp f(\rho, t) = N.$$

Ниже нас будет интересовать эволюция  $f$  на больших временах. Поэтому можно считать, что  $f$  в (8) не зависит от азимута частиц  $\theta$ . Такое предположение эквивалентно требованию выполнения условий устойчивости когерентных колебаний пучка. Исследование этого вопроса само по себе является замкнутой задачей и здесь проводиться не будет.

Как известно [7], кинетическое уравнение для  $f$  строится выделением из уравнения Лиувилля

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \omega_0(\rho) \frac{\partial F}{\partial \theta} + eE(\theta, t) \frac{\partial F}{\partial \rho} = 0 \quad (10)$$

флуктуационной части. Здесь  $\omega_0$  — частота обращения,  $E$  — продольная компонента поля, наведенная пучком. Возможность использования уравнения Лиувилля вместо обычного уравнения непрерывности связана с тем, что, в интересующих нас задачах, диссипативными фактически являются переменные поля, тогда как переменные частицы формально удовлетворяют гамильтоновым уравнениям.

Предполагая выполнение требуемой иерархии времен, в приближении парных корреляторов получим:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial \rho} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \langle e \delta E(\theta, t) \delta F(\rho, \theta, t) \rangle, \quad (11)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \omega_0(\rho) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \delta F(\rho, \theta, t) = - e \delta E(\theta, t) \frac{\partial f}{\partial \rho}. \quad (12)$$

В соответствии с общим методом [7], интеграл столкновений в (11) определяется одновременным коррелятором  $\delta E$  и  $\delta F$ . Динамика самих флуктуаций определяется уравнением (12) и уравнениями поля.

Важным элементом построения интеграла столкновений является выполнение операции усреднения. Строго говоря, среднее в (8), (11) следует понимать, как среднее по достаточно длительному интервалу времени:

$$\langle \dots \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_0^T dt (\dots) \quad (13)$$

Причем интервал усреднения должен выбираться в соответствии с иерархией времен

$$\tau_{ct} \ll T \ll \tau_p,$$

где  $\tau_p$  — время релаксации  $f$ ,  $\tau_{ct}$  — время корреляции ("столкновения"). Входящий в (11) коррелятор посредством уравнений поля выражается через (неодновременный) коррелятор  $\langle \delta F(\rho_1, \theta_1, t_1) \delta F(\rho, \theta, t) \rangle$ . Ясно, что в последний дают вклад только те частицы, которые отстоят друг от друга не дальше радиуса действия сил  $\theta_0$ . Среднее время жизни таких флуктуаций оп-

ределяется средним временем выхода частиц из области взаимодействия ( $\tilde{z}_0 = \theta_0 / \Delta\omega$ ,  $\Delta\omega$  — разброс частот в пучке). На интервале  $\tilde{z}_0$  развитие флуктуации определяется уравнением (I2) и начальным значением  $\delta F(\rho, \theta, t = t_0)$ . В среднем, по истечении  $\tilde{z}_0$  часть частиц покидает область взаимодействия и начальное значение  $\delta F$  меняется. Поэтому при вычислении коррелятора в (II) использование решений (I2) с определенными начальными условиями законно лишь на интервалах времени, порядка  $\tilde{z}_0$ . Если предположить, что флуктуации в пучке рождаются статистически независимо, то среднее в (I3) можно переписать в виде

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt (\dots) = \frac{1}{\tilde{z}_0} \int_0^{\tilde{z}_0} dt \langle \langle \dots \rangle \rangle, \quad (I3a)$$

где  $\langle \langle \dots \rangle \rangle$  — означает усреднение по начальным флуктуациям  $\delta F$ .

Таким образом, (II) переходит в уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial \rho} \int_0^{\tilde{z}_0} \frac{dt}{\tilde{z}_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \langle \langle e^{\delta E(\theta, t)} \delta F(\rho, \theta, t) \rangle \rangle. \quad (I4)$$

Построение кинетического уравнения завершается подстановкой в (I4) решения (I2) и усреднением по начальным флуктуациям. При статистически независимом рождении флуктуаций такое усреднение проводится по формуле [7]:

$$\langle \langle \delta F_n(\rho, 0) \delta F_{n'}^*(\rho', 0) \rangle \rangle = \delta_{n, n'} \delta(\rho - \rho') f \quad (I5)$$

где  $\delta F_n$  — Фурье-гармоника  $\delta F$  по азимуту:

$$\delta F(\rho, \theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta F_n(\rho, t) e^{in\theta}. \quad (I6)$$

Важным отличием уравнения (I4) от уравнений, полученных в работах [3+5] является то, что в интеграле столкновений появляются дополнительные слагаемые, обусловленные вкладом коллективного спектра пучка. Вклад этих слагаемых становится существенным, если коллективное движение успевает развиться за время  $\tilde{z}_k$  меньше (либо порядка)  $\tilde{z}_0$ . В задаче о стохастическом охлаждении пучка, как и в других задачах о взаимодействии пучка с окружающими электродами, выполнение этого условия облегчается тем, что размер области взаимодействия  $\theta_0$  макроскопически велик. Наоборот, в задачах с микроскопически малым размером области взаимодействия, почти всегда  $\tilde{z}_k \gg \tilde{z}_0$ . При этом интегрирование по  $t$  в (I4) фактически снимается и уравнение

переходит в хорошо известное кинетическое уравнение [5,7], которое может быть сведено к уравнению типа уравнения Леннарда-Балеску:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial \rho} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \langle \langle e^{\delta E(\theta, t)} \delta F(\rho, \theta, t) \rangle \rangle.$$

4. Само по себе уравнение (I4) является столь же сложным, нелинейным уравнением, как и уравнения в работах [3+5]. Однако зависимость декрементов охлаждения от числа частиц в пучке  $N$  может быть исследована с помощью более простых уравнений Ланжевена. Умножив (I4) на  $\rho^2$  и проинтегрировав по импульсам, получим:

$$\frac{d\Delta^2}{dt} = - \frac{ge}{N} \int_0^{\tilde{z}_0} \frac{dt}{\tilde{z}_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \langle \delta E_n^*(t) \int_{-\infty}^{\infty} d\rho \rho \delta F_n(\rho, t) \rangle \rangle \quad (I7)$$

Здесь проведено разложение  $\delta E$  и  $\delta F$  по Фурье-гармоникам согласно (I6); а

$$\Delta^2 = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho \rho^2 f(\rho, t)$$

разброс по импульсам в пучке.

Для дальнейшего вычисления необходимо указать связь  $\delta E_n$  с  $\delta F_n(\rho, t)$  и найти решение уравнения (I2). Например, модели рассмотренной в предыдущем пункте отвечает

$$e^{\delta E_n(t)} = - \lambda_0 g_n \int_{-\infty}^{\infty} d\rho \rho \delta F_n(\rho, t) \quad (I8)$$

где  $g_n$  — Фурье-образ ступенчатой функции

$$g(\theta) = \begin{cases} 1 & , \quad |\theta| \leq \theta_0/2, \\ 0 & , \quad |\theta| > \theta_0/2. \end{cases}$$

Если говорить о системе обратной связи, форм-фактор  $g_n$  содержит информацию об отклике пикап-электрода и киккера, а также о частотной зависимости коэффициента усиления. Как уже говорилось, запись поля в форме (I8) отвечает такому выбору задержки в цепи обратной связи, чтобы самодействие частиц было максимальным. Легко проверить, что конкретизация демпфирующей системы, например, как в [8], несколько меняющая прединтегральный множитель, не меняет сути дела.

Выполняя в (I2) одностороннее преобразование Фурье по времени:

$$\delta F_n(p, \omega) = \int_0^{\infty} dt \delta F_n(p, t) e^{i\omega t} \quad (19)$$

и воспользовавшись (18), получим

$$\delta \Phi_{n\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} dp p \delta F_n(p, \omega), \quad (20)$$

$$\delta \Phi_{n\omega} = \frac{i}{\varepsilon_n(\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{p \delta F_n(p, 0)}{\omega - n\omega_0(p) + i\Delta}$$

$\delta F_n(p, 0)$  — начальное значение флуктуации;  $\Delta \rightarrow +0$  определяет правило обхода полюсов. Входящая в (20) величина

$$\varepsilon = 1 - i \frac{\lambda_0 g_n \Delta \omega}{n \omega_0'} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{f'}{\Delta \omega - n \omega_0' p}, \quad (21)$$

$\Delta \omega = \omega - n\omega_s$ ,  $\omega_0 = \omega_s + \omega_0' p$ , как и в теории плазмы, имеет смысл диэлектрической проницаемости пучка и, посредством дисперсионного уравнения

$$\varepsilon_n(\omega) = 0 \quad (22)$$

определяет спектр коллективных колебаний. Например, в отсутствие разброса частот обращения

$$f(p) = N \delta(p)$$

собственные частоты (22) равны

$$\omega = n\omega_s - i N \lambda_0 g_n \quad (23)$$

Поэтому условие устойчивости когерентных колебаний пучка выполнено для основных гармоник  $n\theta_0 < 2\pi$ . Для пучка с конечным разбросом частот устойчивость более высоких гармоник может обеспечиваться затуханием Ландау<sup>ж)</sup>.

Характер зависимости флуктуации дипольного момента (20) от времени определяется соотношением вносимого демпфирующей системой декремента когерентных колебаний (23) и разброса частот обращения. Если разброс частот в пучке велик ( $|n\Delta\omega| \gg \Delta_n = N\lambda_0 g_n$ ), то

$$\delta \Phi_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \delta \Phi_{n\omega} e^{-i\omega t} \approx \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{p \delta F_n(p, 0)}{\varepsilon_n(n\omega_0(p))} e^{-in\omega_0(p)t}, \quad (24)$$

$$\varepsilon_n(n\omega_0(p)) \approx 1.$$

<sup>ж)</sup> Впрочем, для более высоких гармоник, в реальных случаях, запись поля в форме (18) может терять смысл.

В обратном предельном случае ( $\Delta_n \gg |n\Delta\omega|$ ),

$$\varepsilon_n(\omega)(\omega - n\omega_0) \approx \omega - n\omega_0 + i\Delta_n \quad (25)$$

$$\delta \Phi_n(t) \approx e^{-\Delta_n t} \int_{-\infty}^{\infty} dp p \delta F_n(p, 0).$$

Подставив эти выражения в (17) и выполнив усреднение по начальным флуктуациям (15), получим:

$$\frac{d\Delta^2}{dt} = -2\lambda \Delta^2, \quad (26)$$

$$\lambda = \lambda_0 \sum_n g_n \begin{cases} 1, & \Delta_n \ll |n\Delta\omega| \\ \frac{1 - e^{-2\Delta_n \tau_0}}{2\Delta_n \tau_0}, & \Delta_n \gg |n\Delta\omega|. \end{cases}$$

Или

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_0, & \frac{N\lambda_0\theta_0^2}{2\pi} < \Delta\omega \\ \frac{\kappa_{max}^2 \Delta\omega}{2\pi N}, & \frac{N\lambda_0\theta_0^2}{2\pi} \gg \Delta\omega, \kappa_{max} = \frac{\theta_0}{\theta_0}. \end{cases} \quad (27)$$

Таким образом, в согласии с результатами численного моделирования [6], уравнение (14) приводит к асимптотическому ограничению декрементов стохастического охлаждения величиной

$$\lambda_{min} = \frac{\kappa_{max}^2 \Delta\omega}{2\pi N}. \quad (28)$$

Такое поведение декрементов пучка при охлаждении связано с диссипативностью демпфирующего элемента. Наличие быстрого когерентного затухания, связанного взаимодействием с демпфирующей системой, приводит к возможности установления экранирования раньше, чем частицы покинут область взаимодействия ( $\tau_0 \sim \theta_0/\Delta\omega$ ). Фактически на каждом отрезке  $\tau_0$  частица охлаждается лишь в течение времени нарастания коллективного отклика ( $\sim \Delta_n^{-1}$ ) после чего взаимодействие с системой эффективно прекращается. В результате декременты охлаждения уменьшаются в  $\Delta\tau_0$  раз:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\Delta\tau_0} \approx \lambda_{min}$$

Отсюда, в частности, следует, что изменение коэффициента усиления в цепи обратной связи ( $\lambda_0$ ) не может дать выигрыша в скорости охлаждения. Этим уравнение (14) отличается от предсказаний работ [2+5], дающих оптимум по охлаждению при  $\Delta\tau_0 \approx 1$ .

Измерения, проводившиеся на НАП-М [8], также указывают на асимптотический характер ограничения декрементов при охлаждении пучка.

Выражение (27), при условии  $\Lambda z_0 \gg 1$ , можно рассматривать как первый член разложения декремента охлаждения в ряд по степеням малого параметра  $(\Lambda z_0)^{-1}$ . В этом смысле результаты работ [2+5] отвечают вычислению второго члена такого разложения.

Легко видеть, что замена "линейной" силы трения более сложным выражением

$$e \delta F_n = -\lambda_0 \int_{-\infty}^{\infty} dp g_n(p) \delta F_n(p, t) \quad (28a)$$

не меняет асимптотического выражения (28). При такой замене одновременно меняются одночастичный декремент  $\lambda_0$  и декремент затухания когерентных колебаний  $\Lambda$ , тогда как  $\lambda_{min} \sim (\lambda_0/\Lambda)$  остается неизменным. По существу, это является следствием установленной в [9] теоремы о сумме декрементов когерентных мод.

5. Другим применением изложенного здесь формализма может быть вычисление мощности шума пучка, взаимодействующего с демпфирующей системой. Аналогично [10] определим:

$$Q_n = \frac{1}{T} \int_0^T dt p_n^2(t), \quad (29)$$

где  $p_n(t)$  — Фурье гармоника по азимуту флуктуации плотности:

$$p(\theta, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \delta F(p, \theta, t) \quad (30)$$

Подставив сюда решение уравнения (12) и выполнив в (29) усреднение, получим

$$Q_n = \int_0^{z_0} \frac{dt}{z_0} \left\langle \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega e^{-i\omega t}}{\varepsilon_n(\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{\delta F_n(p, 0)}{\omega - n\omega_0(p)} \right|^2 \right\rangle. \quad (31)$$

Воспользовавшись (23) и (15), в пределе  $\Lambda z_0 \gg 1$  получим

$$Q_n \approx \frac{N}{2\Lambda_n z_0} (1 - e^{-2\Lambda_n z_0}). \quad (32)$$

Как видно из (31), последнее соотношение фактически можно продолжить и в область  $\Lambda z_0 < 1$  (поскольку в этой области  $\varepsilon$  мало отличается от 1). В результате для мощности шума  $Q_n$  можем на-

писать:

$$Q_n \approx \begin{cases} N, & \Lambda z_0 \ll 1 \\ \frac{\pi \Delta \omega}{\lambda_0 \theta_0^2}, & \Lambda z_0 \gg 1 \end{cases} \quad (33)$$

Полученные формулы описывают подавление шума пучка, взаимодействующего с демпфирующей системой. Ранее аналогичный результат был получен в работе [10] для случая, когда пучок взаимодействует с бездиссипативным элементом. Видно, что (33) и результат работы [10]

$$Q_n \approx N \frac{(n\Delta\omega)^2}{\Omega_n^2}, \quad \left| \frac{\Omega_n}{n\Delta\omega} \right| \gg 1 \quad (34)$$

совпадают. Для демпфирующей системы квадрат когерентного сдвига частоты  $\Omega_n^2$  может быть заменен на  $\Lambda_n n\Delta\omega$  — прединтегральный множитель в  $\varepsilon_n(\omega)$ . При этом (34) переходит в (33).

6. Проведенный анализ показывает, что в условиях, когда коллективный отклик пучка успевает развиться за время нахождения частиц в области взаимодействия ( $\sim z_0$ ), кинетическое уравнение вообще говоря не сводится к уравнению типа Леннарда-Балеску. Отличие от этого уравнения тем сильнее, чем больше радиус действия сил в системе и чем холоднее пучок ( $\Delta\omega \rightarrow 0$ ). Выполнение этих условий в методе стохастического охлаждения приводит к тому, что при охлаждении пучка декременты асимптотически уменьшаются до  $\lambda_{min}$ , определяемого формулой (28), а мощность шумов пучка до

$$Q_n^{min} = \frac{\tilde{n} \Delta \omega}{\lambda_0 \theta_0^2}$$

Усложнение цепи обратной связи может несколько отодвинуть пороги выхода на асимптотику, но не меняет асимптотического поведения декрементов. То, что коллективные эффекты влияют на кинетику охлаждения не только через  $\varepsilon_n(\omega)$ , но и через  $d\varepsilon/d\omega$  может представлять определенный интерес для антипротонных проектов, где поведение пучка при накоплении прогнозируется численным решением соответствующего кинетического уравнения (см., например [11]).

Авторы благодарны Я.С.Дербеневу, И.Н.Мешкову и В.В.Пархомчуку за обсуждение затронутых здесь вопросов.



Литература

1. S. van der Meer. CERN/ISR-PO/72-31, 1972.
2. F. Saeheneh. CERN-ISR-TH/78-11, 1978; D. Möhl, et al. Phys. Reports, 58, N2, 76, 1980.
3. Я.С.Дербенев, С.А.Хейфец. ЖТФ, 49, № 2, 352, 1979; там же, стр. 363.
4. J. J. Bisognano. Proc of the XI Intern. Conf. on High-Energy Accelerators, CERN, Geneva, 772, 1980.
5. Н.И.Зиневич, М.М.Карлинер. ИЯФ СО АН СССР, Препринт 82-43, Новосибирск 1982.
6. В.В.Пархомчук, Д.В.Пестриков. ИЯФ СО АН СССР, Препринт 80-170, Новосибирск 1980.
7. Ю.Л.Климонтович. Статистическая теория неравновесных процессов в плазме. Издательство МГУ, 1964.
8. Е.Н.Дементьев и др. ЖТФ, 52, № 10, 1993, 1982.
9. Я.С.Дербенев, Н.С.Диканский, Д.В.Пестриков. Труды II Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Москва. 1970.
10. В.В.Пархомчук, Д.В.Пестриков. ЖТФ, 50, № 7, 1411, 1980.
11. THE FERMILAB ANTIPROTON SOURCE DESIGN REPORT. FNAL, 1982.

Н.С.Диканский, Д.В.Пестриков

К ТЕОРИИ СТОХАСТИЧЕСКОГО ОХЛАЖДЕНИЯ

Препринт  
№ 83-65

Работа поступила - I июня 1983 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов

Подписано к печати 17.6-1983 г. МН 17595

Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.0,8 печ.л., 0,6 учетно-изд.л.

Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ №65.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90