ИЯФ

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

В.П.Нагорный, Г.В.Ступаков

О ПРИМЕНЕНИИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ПРИНЦИПА К ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ПЛАЗМЫ

ПРЕПРИНТ 83-102

НОВОСИБИРСК

I. ВВЕДЕНИЕ

При исследовании МГД-устойчивости плазменных конфигураций обычно предполагается, что плазма находится в состоянии статического равновесия. Исследование этого - практически наиболее важного - случая облегчается наличием энергетического принципа [I,2], позволяющего свести задачу об определении устойчивости к вычислению знака минимального значения функционала потенциальной энергии возмущения.

Существуют, однако, ситуации, когда при анализе устойчивости необходимо принимать во внимание макроскопическое течение плазмы. При этом, как было показано в работе [3], обобщить энергетический принцип на системы с течением не удается. Это обстоятельство легко понять, если учесть, что при наличии течения переход через границу устойчивости, вообще говоря, осуществляется при отличной от нуля частоте возмущения ω, в то время как из энергетического принципа следует, что на границе устойчивости $\omega = 0$. Некоторым аналогом энергетического принципа для систем с течением является утверждение о том, что положительная определенность функционала потенциальной энергии является достаточным критерием для устойчивости [3]. Хотя в общем случае этот критерий не дает необходимого условия устойчивости, для отдельных конфигураций и определенных классов возмущений может оказаться, что он, в действительности, является и необходимым (см., например, работу [4]).

Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы показать, что для желобковой неустойчивости потока плазмы в периодической системе пробкотронов, рассмотренной ранее в работе [5], сформулированный выше критерий является как необходимым, так и достаточным для устойчивости. В этом смысле к рассматриваемой задаче применим энергетический принцип в такой же мере, как и для статических равновесий [I,2], со всеми вытекающими отсюда следствиями. Настоящая работа является логическим завершением [5], в которой необходимость достаточного критерия была установлена только для параксиального магнитного поля и пробкотронов с короткими магнитными пробками.

Дальнейшее расположение материала следующее. В разделе П изучаются свойства уравнения, описывающего эволюцию малых возмущений, и находятся требования, которым должна удовлетворять система с течением, чтобы к ней можно было применить энергетический принцип. В разделах Ш и IУ в пределе малого давления плазмы показывается, что система связанных пробкотронов удовлетворяет необходимым требованиям и для нее формулируется критерий устойчивости относительно желобковых возмущений. В Заключении проводится обсуждение полученных результатов.

П. УРАВНЕНИЕ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ И ЕГО СВОЙСТВА. ФОРМУЛИРОВКА ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ПРИНЦИПА

В терминах вектора лагранжева смещения $\vec{\xi}(\vec{r},t)$ уравнение малых МГД-колебаний плазмы имеет вид [3] :

$$\rho\frac{\partial^2\vec{\xi}}{\partial t^2}+2\rho(\vec{v}\nabla)\frac{\partial\vec{\xi}}{\partial t}-\hat{\vec{F}}\{\vec{\xi}\}=0. \qquad (I)$$

Входящий в (2) оператор $\hat{\vec{F}}$ задается выражением

$$\hat{\vec{F}}\{\vec{\xi}\}=\nabla(\gamma p\,\mathrm{div}\,\vec{\xi}+\vec{\xi}\nabla p)+(\vec{v}\nabla)\vec{v}\cdot\mathrm{div}\,\rho\vec{\xi}+\rho(\vec{\xi}\nabla)(\vec{v}\nabla)\vec{v}-$$
$$-\rho(\vec{v}\nabla)(\vec{v}\nabla)\vec{\xi}+\frac{1}{4\pi}\left\{-\nabla(\vec{B}\,\delta\vec{B})+(\vec{B}\nabla)\delta\vec{B}+(\delta\vec{B}\nabla)\vec{B}\right\}, \qquad (2)$$

где γ - показатель адиабаты, а через $\delta\vec{B}$ обозначено возмущение магнитного поля:

$$\delta\vec{B}=\mathrm{rot}\,[\vec{\xi}\vec{B}]. \qquad (3)$$

Принципиальное отличие уравнения (2) от его статического аналога (соответствующего пределу $V = 0$), заключается во втором слагаемом, содержащем первую производную по времени от $\vec{\xi}$. Именно его наличие не позволяет в общем случае сформулировать энергетический принцип для уравнения (2), хотя, как показано в [3] , оператор $\hat{\vec{F}}\{\vec{\xi}\}$ является симметричным. Нетрудно проверить, что из симметричности $\hat{\vec{F}}$ (в предположении, что скорость $\vec{V}$ на ограничивающих плазму поверхностях имеет только тангенциальную составляющую) следует постоянство во времени полной энергии колебаний, $dE/dt = 0$, где

$$E=\frac{1}{2}\int\rho\left(\frac{\partial\vec{\xi}}{\partial t}\right)^2 dV-\frac{1}{2}\int\vec{\xi}\,\hat{\vec{F}}\{\vec{\xi}\}\,dV.$$

Второй интеграл в этой формуле можно рассматривать как эффективную потенциальную энергию колебаний. Как будет видно из дальнейшего, он играет важную роль при выводе критерия устойчивости.

В ω -представлении уравнение (2) принимает вид

$$\hat{H}(\omega)\vec{\xi}=\omega^2\rho\vec{\xi}+2i\omega\rho(\vec{v}\nabla)\vec{\xi}+\hat{\vec{F}}\{\vec{\xi}\}=0. \qquad (4)$$

Поскольку в это уравнение явно входит мнимая единица, то его собственные функции в общем случае будут комплексными. На классе комплексных смещений $\vec{\xi}$ оператор $\hat{\vec{F}}$ является самосопряженным, а роль потенциальной энергии играет действительный функционал W :

$$W=-\frac{1}{2}\int\vec{\xi}^{*}\hat{\vec{F}}\{\vec{\xi}\}\,dV \qquad (5)$$

Относительно оператора $\hat{H}(\omega)$ и функционала (5) в работах [3,6] был доказан ряд свойств, которые мы перечислим ниже.

I) Оператор $\hat{H}(\omega)$ при действительных ω эрмитов, а при комплексных ω он удовлетворяет соотношению

$$\hat{H}^{+}(\omega)=\hat{H}(\omega^{*})$$

где $\hat{H}^{+}(\omega)$ - оператор, эрмитово сопряженный $H(\omega)$, а символ "$*$", как обычно, обозначает комплексное сопряжение. Отсюда следует, что если существует решение уравнения (2) для значения ω , то существуют также решения с $-\omega$, ω^* и $-\omega^*$. Таким образом система устойчива относительно малых возмущений тогда и только тогда, когда все собственные значения ω - действительны.

2) Если для всех допустимых смещений $W \geq 0$, то у уравнения (4) нет комплексных собственных значений ω . Другими словами, условие положительной определенности W является достаточным для устойчивости.

3) Утверждение 2 можно усилить [6] , сформулировав его следующим образом. Будем рассматривать $\min W$ на классе не-

которым образом нормированных функций $\vec{\xi}$ и представим, что параметры течения меняются таким образом, что из области, где выполняется достаточное условие устойчивости $\min W > 0$, система переходит в область $\min W < 0$, где это условие нарушается. Если собственная функция оператора $\hat{\vec{F}}$, соответствующая наименьшему собственному значению (предполагается, что $\hat{\vec{F}}$ обладает дискретным спектром), в момент перехода $\min W$ через нуль не вырождена, то переход сопровождается потерей устойчивости, причем на самой границе $\omega = 0$. Это свойство, однако, не гарантирует того, что при дальнейшем уменьшении $\min W$ не произойдет возврата к устойчивому состоянию.

Изучение расположения корней уравнения (4) в комплексной плоскости значительно облегчается, если воспользоваться следующим графическим построением. Рассмотрим вспомогательную задачу на собственные значения λ :

$$-2i\omega\rho(\vec{v}\nabla)\vec{\xi} - \hat{F}\{\vec{\xi}\} = \rho\lambda(\omega)\vec{\xi}, \qquad (6)$$

считая ω действительным параметром. Оператор $i\rho(\vec{v}\nabla)$, как и $\hat{F}$, является самосопряженным, поэтому λ принимает действительные значения; при $\omega = 0$ получаем спектр оператора $\hat{F}$. Будем предполагать, что $\hat{F}$ обладает дискретным спектром и построим зависимости соответствующих значений λ от ω (см. рис.I). При этом удобно занумеровать каждую ветвь так, чтобы было $\lambda_1(0) \leq \lambda_2(0) \leq \ldots \leq \lambda_i(0) \leq \ldots$. Как следует из свойства I, λ_i являются четными функциями ω . При больших значениях $|\omega|$, в операторе, стоящем в левой части (6), главным является первое слагаемое и, следовательно, $\lambda_i \backsim \omega$. Можно доказать, что если минимальное собственное значение оператора $\hat{F}$, $\lambda_1(0)$, не вырождено, то $d^2\lambda_1/d\omega^2|_{\omega=0} \leq 0$, то есть кривая $\lambda_1(\omega)$ выпукла вверх в точке $\omega = 0$ (фактически это свойство является следствием известной из квантовой механики теоремы, что во втором порядке теории возмущений поправка к основному уровню отрицательна [7]).

Поскольку на собственных функциях $\vec{\xi}_i$ оператора $\hat{\vec{F}}$, соответствующих собственным значениям $\lambda_i(0)$, функционал W равен

$$W = \frac{1}{2}\lambda_i(0)\int\rho|\xi_i|^2 dV,$$

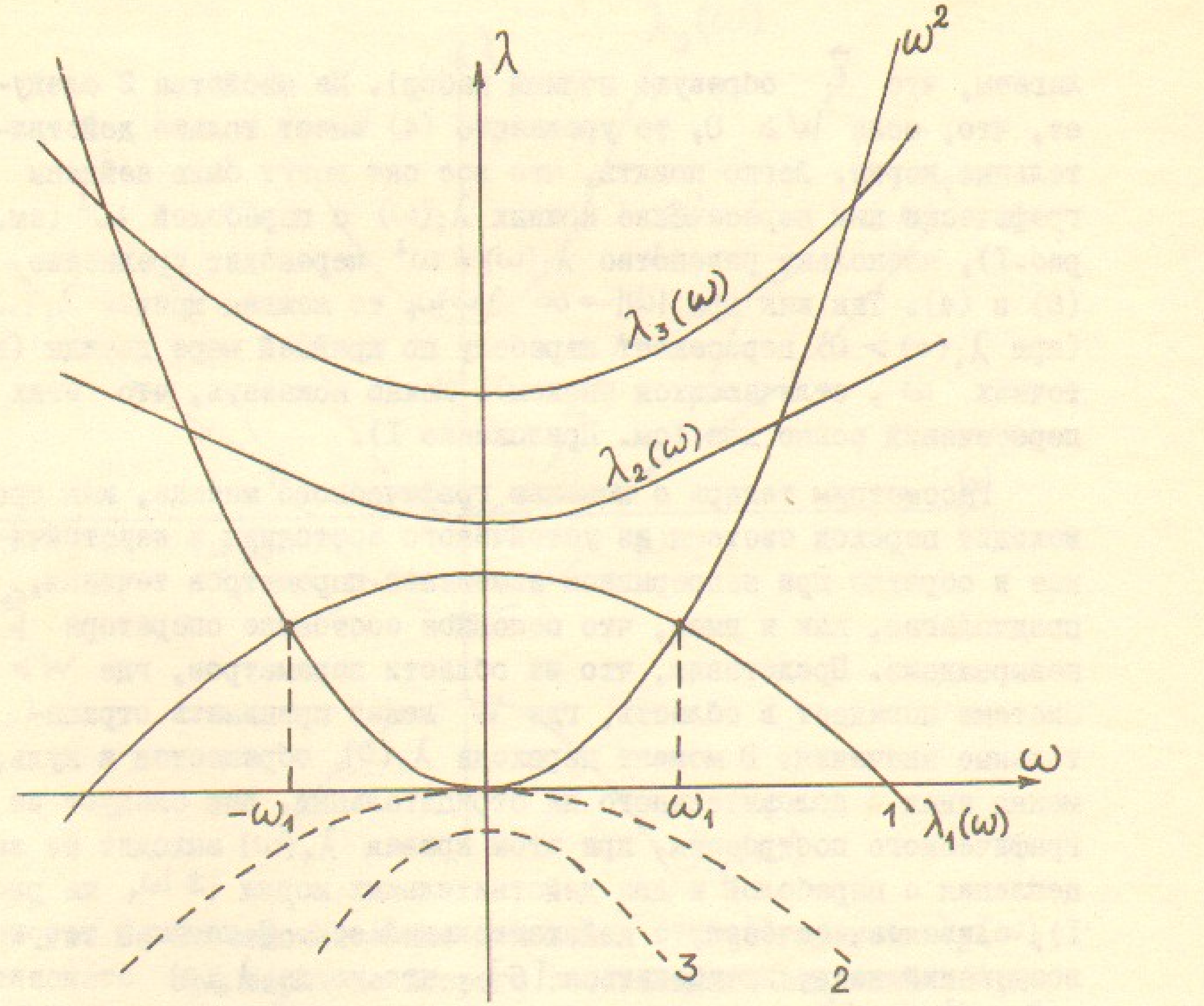

Рис.I. Собственные значения λ уравнения (6) как функции ω при действительных значениях ω (сплошные линии). Абсциссы точек пересечения ветвей $\lambda_i(\omega)$ с параболой ω^2 дают корни уравнения (4) при $\min W > 0$. Пунктиром показаны последовательные положения кривой $\lambda_1(\omega)$, иллюстрирующие переход системы из устойчивого состояния в неустойчивое при уменьшении $\min W$ ($\lambda_1(0)$) : 2 - при $\min W = 0$ корни $\pm\omega_1$ сливаются и образуют двойной корень $\omega = 0$; 3 - при $\min W < 0$ два корня исчезают с действительной оси.

то для положительной определенности W необходимо и достаточно, чтобы все $\lambda_i(0)$ были больше нуля (как обычно, мы предполагаем, что $\vec{\xi}_i$ образуют полный набор). Из свойства 2 следует, что, если $W \geqslant 0$, то уравнение (4) имеет только действительные корни. Легко понять, что все они могут быть найдены графически как пересечение кривых $\lambda_i(\omega)$ с параболой ω^2 (см. рис.I), поскольку равенство $\lambda_i(\omega) = \omega^2$ переводит уравнение (6) в (4). Так как при $|\omega| \to \infty$ $\lambda \backsim \omega$, то каждая кривая $\lambda_i(\omega)$ (при $\lambda_i(0) > 0$) пересекает параболу по крайней мере дважды (в точках ω, отличающихся знаком). Можно показать, что этих пересечений ровно два (см. Приложение I).

Рассмотрим теперь с помощью графического метода, как происходит переход системы из устойчивого состояния в неустойчивое и обратно при непрерывном изменении параметров течения, предполагая, как и выше, что основное состояние оператора $\hat{F}$ невырождено. Представим, что из области параметров, где $W \geqslant 0$, система попадает в область, где W может принимать отрицательные значения. В момент перехода $\lambda_1(0)$ обращается в нуль, меняя знак с положительного на отрицательный. Как следует из графического построения, при этом кривая $\lambda_1(\omega)$ выходит из зацепления с параболой и два действительных корня ($\pm\,\omega_1$ на рис. I), сливаясь, исчезают с действительной оси. С помощью теории возмущений нетрудно убедиться [6], что когда $\lambda_1(0)$ становится отрицательным, два корня появляются на мнимой оси, $\omega = \pm i\gamma_1$ (фактически, в этом утверждении и состоит смысл свойства 2). По мере дальнейшего уменьшения $\lambda_1(0)$ эти корни некоторым образом двигаются в комплексной плоскости. Принципиальным является ответ на вопрос, могут ли они при этом выйти на действительную ось, вернув систему в устойчивое состояние, но сохранив для W возможность принимать отрицательное значение. Ответ на него дает следующее утверждение, доказанное в Приложении I: при изменении параметров пара мнимых корней, родившись, все время остается на мнимой оси и может вернуться на действительную ось только пройдя через точку $\omega = 0$. Поскольку наличие у уравнения (4) корня $\omega = 0$, означает, что у оператора $\hat{F}$ имеется нулевое собственное значение, то мнимые корни, возникшие в момент, когда $\lambda_1(0) = 0$, могут превратиться в действительные не раньше, чем $\lambda_2(0)$ изменит знак. Такая возможность видна и из графического построения: если в момент, когда $\lambda_2(0)$ пересекает ось x, $d^2\lambda_2/d\omega^2\big|_{\omega=0} > 2$, то на ветке $\lambda_2(\omega)$

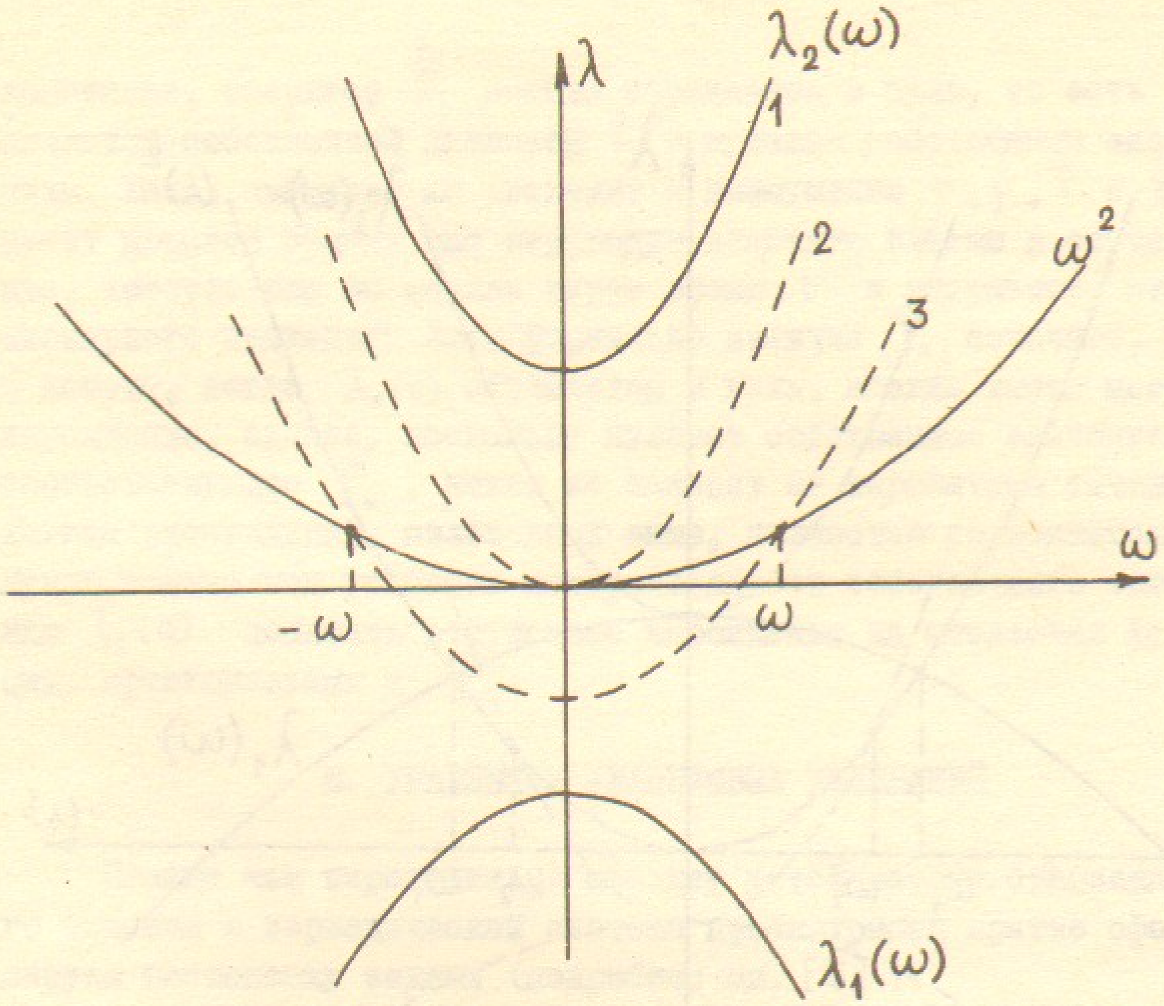

Рис.2. Последовательные положения (I,2,3) кривой $\lambda_2(\omega)$ при переходе второго собственного значения оператора $\hat{F}$ через нуль в случае, когда $d^2\lambda_2/d\omega^2\big|_{\omega=0} > 2$. Два мнимых корня, существующие при $\lambda_2(0) > 0$, сливаясь в точке $\omega = 0$ (положение 2), переходят на действительную ось (положение 3), возвращая систему в устойчивое состояние.

появляются два новых корня (см. рис.2) (если же $d^2\lambda_2/d\omega^2 < 2$, то, наоборот, два действительных корня исчезают и приводят к появлению еще пары мнимых корней).

Отметим, что требование невырожденности основного состояния $\hat{F}$ в момент, когда $\lambda_1(0)$ обращается в нуль, является существенным. На рис.3 изображена ситуация, когда при наличии вырождения, пересечение корнем $\lambda_1(0)$ оси абсцисс (и, следовательно, нарушение достаточного критерия устойчивости) не приводит к появлению мнимых корней.

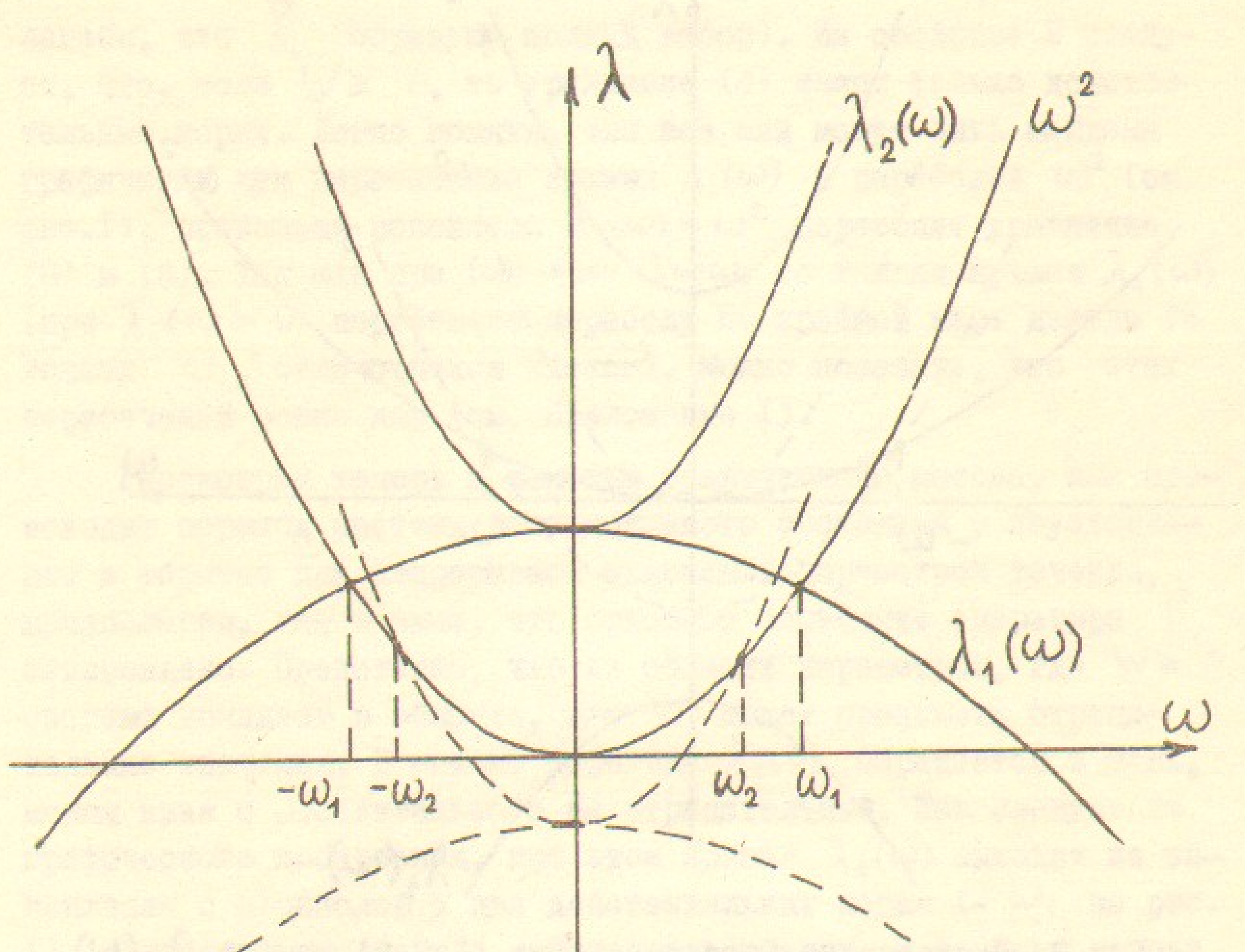

Рис.3. Случай (двукратно) вырожденного основного состояния оператора $\hat{F}$. Система остается устойчивой при переходе $\min W$ через нуль; при этом вместо корней $\pm\omega_1$ на ветви $\lambda_1(\omega)$ появляются корни $\pm\omega_2$ на ветви $\lambda_2(\omega)$.

Суммируя сказанное выше, мы приходим к выводу, что если во всей области допустимых значений параметров, описывающих стационарное состояние системы, только самое нижнее собственное значение оператора $\hat{F}$ может пересекать ось абсцисс, а $\lambda_2(0)$ всюду больше нуля, то условие положительной определенности формы (5) является необходимым и достаточным для устойчивости. В следующих двух разделах будет показано, что именно так обстоит дело в задаче о желобковой неустойчивости потока плазмы в периодической системе пробкотронов.

В заключение этого раздела сделаем одну существенную оговорку. Из (3) легко видеть, что на смещении $\vec{\xi}_* = t\cdot\vec{v}$, где t - константа, оператор $\hat{F}$ всегда обращается в нуль, то есть $\vec{\xi}_*$ является собственной функцией $\hat{F}$ с нулевым собственным значением. Такое смещение не приводит к возмущению $p, \rho, \vec{v}$ и $\vec{B}$ и имеет простой смысл: оно переводит элементы плазмы в состояние, которое они бы заняли через время t в результате стационарного движения. Хотя формально наличие $\vec{\xi}_*$ означает, что в момент, когда $\lambda_1(0)$ обращается в нуль, всегда имеет место вырождение, однако, поскольку нулевое собственное значение, соответствующее $\vec{\xi}_*$, никак не зависит от параметров течения, логика рассуждений, изложенных выше, полностью сохраняется. Нужно только под условием невырожденности собственного значения $\lambda_1(0)$ понимать отсутствие вырождения на множестве функций, ортогональных к $\vec{\xi}_*$.

III. УРАВНЕНИЕ ЖЕЛОБКОВЫХ КОЛЕБАНИЙ

Прежде чем переходить к анализу устойчивости стационарного течения в периодической системе пробкотронов кратко сформулируем постановку задачи (подробнее см. [5]).

Предполагается, что в стационарном состоянии магнитное поле не имеет азимутальной составляющей, а скорость плазмы направлена вдоль поля:

$$\vec{v} = v\vec{h}$$

где $\vec{h} = \vec{B}/B$, кроме того считается, что течение всюду дозвуковое, т.е. величина $\Gamma \equiv 1 - v^2/c_s^2 > 0$, где $c_s^2 = \gamma p/\rho$ - скорость звука.

Анализ устойчивости системы проводится в пределе малого давления плазмы: $\beta \ll 1$. Более точно, считается, что параметры

$$\beta_p \equiv \frac{8\pi p}{B^2}, \qquad \beta_v \equiv \frac{4\pi\rho v^2}{B^2}$$

малы по сравнению с единицей. Это означает, что единственно возможными являются возмущения, не искажающие магнитного поля, т.е. совмещающие одну силовую трубку с другой.

В этих предположениях в работе [5] из исходного уравнения (4) была получена система уравнений, описывающая эволюцию бесконечно тонких в азимутальном направлении возмущений (мода

$m \to \infty$, где m – азимутальное число). Эти уравнения имеют вид:

$$-\omega^2 \rho \xi_\parallel + 2i\omega\rho v \frac{\partial \xi_\parallel}{\partial l} - 2i\omega\rho v \varkappa_n \xi_n - \tag{7}$$

$$-\frac{B}{v}\frac{\partial}{\partial l}\frac{\Gamma p v}{B}\left(v\frac{\partial}{\partial l}\frac{\xi_\parallel}{v} - \frac{1+\Gamma}{\Gamma}\varkappa_n \xi_n\right) - \frac{\delta B_n}{B}\left(\frac{\partial p}{\partial n} + \varkappa_n \rho v^2\right) = 0,$$

$$-\omega^2 \rho \xi_n + 2i\rho v \omega \frac{\partial \xi_n}{\partial l} - 2i\omega\rho v \varkappa_n \xi_\parallel + \rho v \frac{\partial}{\partial l} v \xi_{\text{ж}} \frac{\partial}{\partial l}\frac{\xi_n}{\xi_{\text{ж}}} + \tag{8}$$

$$+2\varkappa_n\left(\delta p + \frac{v^2}{2}\delta\rho + \rho v \delta v_\parallel'\right) - \frac{B}{4\pi\xi_{\text{ж}}}\frac{\partial}{\partial l}\xi_{\text{ж}}\delta B_n = 0,$$

где $\xi_\parallel = \vec{\xi}\vec{h}$, $\xi_n = \vec{\xi}\vec{n}$ – проекции вектора смещения на магнитное поле и нормаль к силовой линии, $\varkappa_n = \vec{\varkappa}\vec{n}$, где $\vec{\varkappa}$ – вектор кривизны силовой линии; все величины в (7), (8) являются функциями длины силовой линии l.

Возмущение давления δp, плотности $\delta\rho$ и нормальной составляющей магнитного поля δB_n выражаются через компоненты вектора смещения следующим образом

$$\delta p = -\xi_\parallel \frac{\partial p}{\partial l} - \xi_n \frac{\partial p}{\partial n} - \gamma p B \frac{\partial}{\partial l}\frac{\xi_\parallel}{B} + 2\gamma p \varkappa_n \xi_n, \tag{9}$$

$$\delta\rho = -\xi_\parallel \frac{\partial \rho}{\partial l} - \xi_n \frac{\partial \rho}{\partial n} - \rho B \frac{\partial}{\partial l}\frac{\xi_\parallel}{B} + 2\rho\varkappa_n \xi_n, \tag{10}$$

$$\delta B_n = B \xi_{\text{ж}} \frac{\partial}{\partial l}\frac{\xi_n}{\xi_{\text{ж}}}, \tag{11}$$

где через $\xi_{\text{ж}}$ обозначено смещение, совмещающее одну силовую линию с другой:

$$\xi_{\text{ж}}(l) = \xi_0 \frac{r_0 B_0}{r(l) B(l)}, \tag{12}$$

$r(l)$ – расстояние от оси ловушки до силовой линии, а индекс "0" указывает на то, что соответствующая величина берется в экваториальной плоскости пробкотрона; вместо возмущения продольной скорости $\delta v_\parallel$ мы ввели величину $\delta v_\parallel'$, отличающуюся от $\delta v_\parallel$ на $i\omega\xi_\parallel$ и, совпадающую с $\delta v_\parallel$ при $\omega = 0$:

$$\delta v_\parallel' = v^2 \frac{\partial}{\partial l}\frac{\xi_\parallel}{v} - \left(v\varkappa_n + \frac{\partial v}{\partial n}\right)\xi_n. \tag{13}$$

Ограничиваясь анализом только возмущений с $m \to \infty$, отметим, что в рамках МГД теории, такие возмущения являются наиболее неустойчивыми. Доказательство этого факта содержится в Приложении 2 (ср. [I]).

В соответствии с тем, что говорилось в предыдущем разделе, рассмотрим спектральную задачу для оператора $\hat{F}$, соответствующего системе уравнений (7)-(8).

Сравнивая уравнения (7)-(8) с (4), получим выражение для компонент вектора $\hat{F}\{\vec{\xi}\}$:

$$\hat{F}_n\{\vec{\xi}\} = \frac{B}{4\pi\xi_{\text{ж}}}\frac{\partial}{\partial l}\xi_{\text{ж}}\delta B_n - 2\varkappa_n\left(\delta p + \frac{v^2}{2}\delta\rho + \rho v\delta v_\parallel'\right) - \tag{14}$$

$$-\rho v \frac{\partial}{\partial l}\xi_{\text{ж}} v \frac{\partial}{\partial l}\frac{\xi_n}{\xi_{\text{ж}}},$$

$$\hat{F}_\parallel\{\vec{\xi}\} = \frac{B}{v}\frac{\partial}{\partial l}\frac{\Gamma p v}{B}\left(v\frac{\partial}{\partial l}\frac{\xi_\parallel}{v} - \frac{1+\Gamma}{\Gamma}\varkappa_n\xi_n\right) - \frac{\delta B_n}{B}\left(\frac{\partial p}{\partial n} + \varkappa_n \rho v^2\right). \tag{15}$$

Собственные значения оператора $\hat{F}$ находятся из решения системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} \hat{F}_n\{\vec{\xi}\} &= \lambda\rho\xi_n \\ \hat{F}_\parallel\{\vec{\xi}\} &= \lambda\rho\xi_\parallel \end{aligned}\right\}. \tag{16}$$

В общем случае отыскание спектра оператора $\hat{F}$ из системы (I6) представляет собой довольно сложную задачу, которая, однако, сильно упрощается в рассматриваемом нами пределе β_p, $\beta_v \ll 1$. При этом в первом уравнении формально главным является слагаемое в левой части, содержащее возмущение магнитного поля δB_n. В нулевом приближении оно должно обратиться в нуль, что означает $\delta B_n/B = O(\beta_p + \beta_v)$, или

$$\xi_n = \xi_{\text{ж}} + O(\beta_p + \beta_v). \tag{17}$$

Подставив (I7) в систему (I6) и отбросив малые по параметру β, члены, получим в следующем приближении

$$\frac{B}{4\pi\xi_{\varkappa}}\frac{\partial}{\partial\ell}\xi_{\varkappa}\delta B_n-2\varkappa_n\left(\delta p+\frac{v^2}{2}\delta\rho+\rho v\delta v_{\parallel}'\right)=\lambda\rho\xi_{\varkappa}, \tag{18}$$

$$\frac{B}{v}\frac{\partial}{\partial\ell}\frac{\Gamma\rho v}{B}\left(v\frac{\partial}{\partial\ell}\frac{\xi_{\parallel}}{v}-\frac{1+\Gamma}{\Gamma}\varkappa_n\xi_{\varkappa}\right)=\lambda\rho\xi_{\parallel}. \tag{19}$$

Условие разрешимости системы (18)-(19) в этом приближении дает дисперсионное уравнение, из которого определяются собственные значения λ. Для получения этого условия решим уравнение (19) относительно $\xi_{\parallel}$, рассматривая в нем λ как параметр. Выразив с помощью полученного решения сумму $(\delta p+\frac{v^2}{2}\delta\rho+\rho v\delta v_{\parallel}')\equiv\equiv\delta(p+\rho v^2/2)$ через $\xi_{\varkappa}$, проинтегрируем уравнение (18) по периоду системы с весом $\xi_{\varkappa}/B$. В результате интегрирования член, содержащий возмущение магнитного поля δB_n, выпадает и мы приходим к дисперсионному уравнению:

$$\lambda=-\frac{\int\frac{d\ell}{B}\varkappa_n\xi_{\varkappa}\delta(2p+\rho v^2)}{\int\frac{d\ell}{B}\rho\xi_{\varkappa}^2}. \tag{20}$$

Покажем теперь, что собственное значение $\lambda=0$ оператора $\hat{F}$ не вырождено (на классе функций ортогональных к $\vec{\xi}_*=\alpha\vec{V}$). Поскольку вид функции $\xi_{\varkappa}$ определен формулой (12) однозначно, остается доказать, что собственному значению $\lambda=0$ соответствует единственная функция $\xi_{\parallel}(\ell)$. Положив в уравнении (19) $\lambda=0$ и проинтегрировав его по ℓ, находим

$$v\frac{\partial}{\partial\ell}\frac{\xi_{\parallel}}{v}=\frac{1+\Gamma}{\Gamma}\varkappa_n\xi_{\varkappa}+c_*\frac{B}{\Gamma\rho v}. \tag{21}$$

Константа c_* определится из условия периодичности $\xi_{\parallel}$, если проинтегрировать (21) с весом $1/v$ по периоду системы:

$$c_*=-\frac{\int\frac{1+\Gamma}{\Gamma}\varkappa_n\xi_{\varkappa}\rho\frac{d\ell}{B}}{\int\frac{d\ell}{B}\frac{\rho}{\Gamma p v}}; \tag{22}$$

при интегрировании мы воспользовались постоянством $\rho v/B$ вдоль силовой линии. Интегрируя (19), находим $\xi_{\parallel}(\ell)$

$$\xi_{\parallel}=v\int^{\ell}\left[c_*\frac{B}{\Gamma\rho v}+\frac{1+\Gamma}{\Gamma}\varkappa_n\xi_{\varkappa}\right]\frac{d\ell}{v}+av. \tag{23}$$

Условие ортогональности решения (23) к функции $\xi_{\parallel}=\alpha v$ однозначно определяет константу a [*], что и доказывает единственность функции $\xi_{\parallel}(\ell)$. При этом условие

$$\int\frac{d\ell}{B}\varkappa_n\xi_{\varkappa}\delta(2p+\rho v^2)=0, \tag{24}$$

следующее из уравнения (20), дает значения параметров системы, при которых в спектре оператора $\hat{F}$ присутствует нулевое собственное значение.

4. КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЖЕЛОБКОВЫХ КОЛЕБАНИЙ

В предыдущем разделе было показано, что рассматриваемая нами система удовлетворяет одному из сформулированных в разделе 2 необходимых требований - невырожденности собственного значения $\lambda=0$ оператора $\hat{F}$. Теперь остается доказать, что второе собственное значение λ_2 оператора $\hat{F}$ всегда положительно.

Мы покажем, что если в спектре оператора $\hat{F}$ имеется нулевое собственное значение, то оно обязательно является его минимальным собственным значением $\lambda_1(0)$, другими словами $\lambda_2(0)$ (а также $\lambda_i(0)$, $i>2$) никогда не обращается в нуль. Поскольку существует область параметров, где $W\geqslant 0$ и где $\lambda_2(0)$ заведомо положительно, то это означает, что всюду $\lambda_2(0)>0$.

Несложно убедиться, что собственные значения λ_i оператора $\hat{F}$ являются стационарными значениями нормированного функционала (5), W_N:

$$W_N(\xi_{\parallel}(\vec{r}),\xi_n(\vec{r}))\equiv\frac{W}{\int\rho|\vec{\xi}|^2dV}=-\frac{1}{2}\frac{\int\vec{\xi}^*\hat{F}\{\vec{\xi}\}dV}{\int\rho|\vec{\xi}|^2dV} \tag{25}$$

---

[*] Приведем для справки результат:
$$a=\left[\int_{\ell_0}^{\ell_0+L}v\,d\ell\int_{\ell_0}^{\ell}\left(c_*\frac{\rho}{\Gamma p v}+\frac{1+\Gamma}{\Gamma}\varkappa_n\xi_{\varkappa}\right)\frac{d\ell'}{v}\right]\Big/\int_{\ell_0}^{\ell_0+L}v\,d\ell$$
где интегрирование по $d\ell$ проводится от пробки до пробки.

и могут быть найдены из уравнения

$$\delta W_N = 0, \tag{26}$$

причем нижнему собственному значению соответствует минимум функционала W_N, для остальных же λ_i вторая вариация $\delta^2 W_N$ не является знакоопределенной. Пусть параметры системы таковы, что в спектре оператора $\hat{F}$ присутствует нулевое собственное значение $\lambda = 0$. На собственной функции, соответствующей этому собственному значению, величина W_N вместе δW_N равна нулю. Покажем, что при этом вторая вариация $\delta^2 W_N$ положительна, что и будет означать, что λ – минимальное собственное значение.

Перейдем к доказательству справедливости этого утверждения. Заметим, что поскольку $W_N = 0$, то и ненормированный функционал W также равен нулю. Варьируя выражение (25) и пользуясь равенствами $\delta W_N = 0$, $W_N = 0$, получим, что $\delta W = 0$, а знаки у вторых вариаций $\delta^2 W_N$ и $\delta^2 W$ совпадают. Поэтому ниже мы будем вычислять вторую вариацию ненормированного функционала (5).

Выражение для W применительно к желобковым колебаниям можно записать в виде [5] (см. также Приложение 2):

$$W = W_{\parallel} + W_{\perp} \tag{27}$$

$$W_{\parallel} = \frac{\Phi}{2}\gamma \int \frac{dl}{B}\, p\Gamma \left(v \frac{\partial}{\partial l} \frac{\xi_{\parallel}}{v} - \frac{1+\Gamma}{\Gamma} \varkappa_n \xi_{\varkappa} \right)^2, \tag{28}$$

$$W_{\perp} = -\Phi \int \frac{dl}{B} \varkappa_n \xi_{\varkappa}^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial n}(p + \rho v^2/2) + 2\gamma p \varkappa_n \frac{(1-\Gamma)^2}{4\Gamma} \right\} \tag{29}$$

где Φ обозначает поток внутри силовой трубки, по объему которой проводится интегрирование.

Покажем теперь, что вторая вариация W при $\lambda = 0$ положительна. Заметим предварительно, что поскольку зависимость $\xi_{\varkappa}$ от l определена формулой (I2) (с точностью до константы ξ_0, вариация которой, как легко показать, не меняет величины W_N), то выражение (25) является функционалом только от функции продольного смещения $\xi_{\parallel}(l)$ [ж].

Подставив в (27) в качестве $\xi_{\parallel}(l)$ сумму $\xi_{\parallel}(l) = \xi_{\parallel 0}(l) + \delta\xi_{\parallel}$, где $\delta\xi_{\parallel}$ – добавка, удовлетворяющая периодическим граничным условиям, получим

$$\delta^2 W = \delta^2 W_{\parallel} = \frac{\Phi}{2}\gamma \int \frac{dl}{B}\, p\Gamma \left\{ \left(v \frac{\partial}{\partial l} \frac{\delta\xi_{\parallel}}{v} \right)^2 + 2v \left(\frac{\partial}{\partial l} \frac{\delta\xi_{\parallel}}{v} \right) \left[v \frac{\partial}{\partial l} \frac{\xi_{\parallel}}{v} - \frac{1+\Gamma}{\Gamma} \xi_{\varkappa} \varkappa_n \right] \right\}$$

$$\equiv \frac{\Phi}{2}\gamma \int \frac{dl}{B}\, p\Gamma \left(v \frac{\partial}{\partial l} \frac{\delta\xi_{\parallel}}{v} \right)^2 + \Phi\gamma c_* \int dl \frac{\partial}{\partial l} \frac{\delta\xi_{\parallel}}{v} =$$

$$= \frac{\Phi}{2}\gamma \int \frac{dl}{B}\, p\Gamma \left(v \frac{\partial}{\partial l} \frac{\delta\xi_{\parallel}}{v} \right)^2 > 0;$$

чем и заканчивается доказательство необходимости условия $\min W > 0$ для устойчивости системы. В развернутой форме этот критерий имеет вид [5]:

$$\left(\int \frac{dl}{B} \xi_{\varkappa} \varkappa_n p \frac{1+\Gamma}{\Gamma} \right)^2 \left(\int \frac{dl}{B} \frac{p^2}{\Gamma p} \right)^{-1} - \tag{30}$$

$$- \frac{1}{\gamma} \int \frac{dl}{B} \varkappa_n \xi_{\varkappa}^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial n}\left(p + \rho \frac{v^2}{2}\right) + \gamma p \varkappa_n \frac{(1-\Gamma)^2}{2\Gamma} \right\} > 0$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что критерий устойчивости, выведенный в [3], и являющийся в общем случае только достаточным, в задаче об устойчивости желобковых колебаний потока плазмы в периодической системе пробкотронов дает также необходимое условие устойчивости. Доказательство этого утверждения, приведенное выше, основано только на общих свойствах операторов, входящих в уравнение (4) и может быть использовано при исследовании устойчивости других систем, для которых нахождение собственных частот свя-

---

[ж] Строго говоря, нормальное смещение ξ_n не равно в точности $\xi_{\varkappa}$ и в точном функционале W (отличающемся от (27)-(29) на величину порядка $O(\beta_p + \beta_v)$ следовало бы варьировать не только $\xi_{\parallel}$, но и ξ_n. При этом, согласно (I5), ξ_n нужно варьировать на классе функций, отличающихся от $\xi_{\varkappa}$ на величину порядка $O(\beta_p + \beta_v)$. Легко видеть, что возникающая поправка к δW мала по параметру $\beta_p + \beta_v$ и ею можно пренебречь.

зано с решением спектральной задачи

$$(\omega^2 + i\omega\hat{a} + \hat{F})\xi = 0 \qquad (31)$$

где $\hat{F}$ и $\hat{a}$ являются симметричным и антисимметричным операторами, соответственно. Важно отметить, что при этом, фактически, весь анализ сводится в конечном итоге к изучению уравнения

$$\hat{F}\xi = 0$$

– задача, которая часто является гораздо более простой, чем нахождение решений (31).

Авторы признательны В.М.Малкину за полезные обсуждения.

Приложение I

1. Докажем, что если все $\lambda_i(0) > 0$ и, следовательно, $W \geqslant 0$, то каждая кривая $\lambda_i(\omega)$ пересекает параболу ω^2 не более двух раз. В соответствии со сказанным в разделе 2, это означает, что таких пересечений ровно два.

Учитывая, что $\lambda_i(\omega)$ – четная функция, рассмотрим интервал $\omega > 0$. Предположим, что здесь имеется более одного пересечения, например, три, как изображено на рис.4. Поскольку в

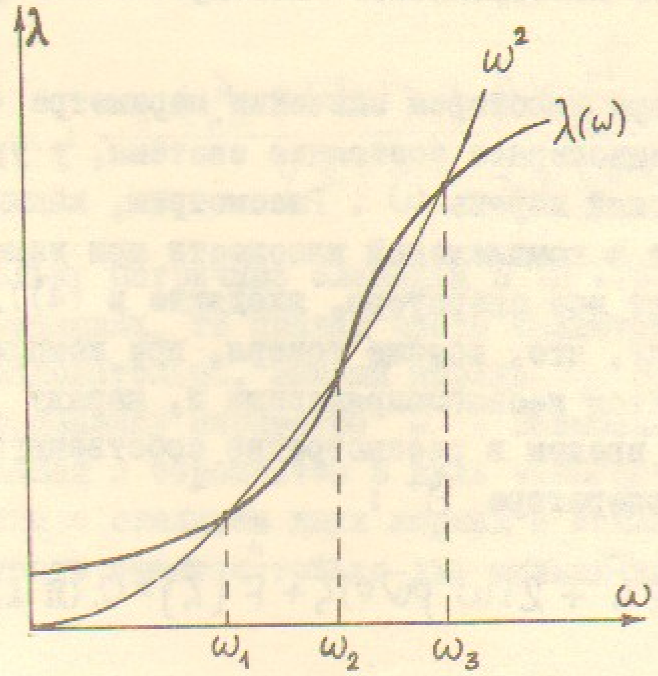

Рис.4.

первой точке пересечения $d\lambda_i/d\omega|_{\omega_1} < 2\omega_1$, а во второй точке $d\lambda_i/d\omega|_{\omega_2} > 2\omega_2$, то ясно, что в промежутке (ω_1, ω_2) найдется такое ω, что

$$\frac{d\lambda_i}{d\omega} = 2\omega\,, \qquad \lambda_i < \omega^2 \qquad (\text{П I.1})$$

С другой стороны по теореме о производной собственного значения оператора по параметру [7] из (6) имеем, что

$$\frac{d\lambda_i}{d\omega} = \frac{-2i\int \vec{\xi}^* \rho(\vec{v}\nabla)\vec{\xi}\, dV}{\int \rho|\vec{\xi}|^2 dV}\,, \qquad (\text{П I.2})$$

кроме того, умножая (6) на $\vec{\xi}^*$ и интегрируя по dV, находим

$$W=2\lambda_i\int\rho|\vec{\xi}|^2dV+2i\omega\int\vec{\xi}^*\rho(\vec{v}\nabla)\vec{\xi}\,dV \qquad (\text{П. I.3})$$

Собирая вместе (П I.I)-(П I.3), получаем

$$W=\left(2\lambda_i-\omega\frac{d\lambda_i}{d\omega}\right)\int\rho|\vec{\xi}|^2dV=2(\lambda_i-\omega^2)\int\rho|\vec{\xi}|^2dV<0,$$

что противоречит условию положительной определенности W. Это противоречие доказывает невозможность многократного пересечения.

2. Предположим, что при некотором значении параметра $a=a_0$, характеризующего стационарное состояние системы, у уравнения (4) имеется комплексный корень ω. Рассмотрим, каким образом он будет двигаться в комплексной плоскости при изменении a (от которого зависят все операторы, входящие в (4)). При этом будем иметь в виду, что, вообще говоря, при комплексных ω оператор $\hat{H}$ является несамосопряженным и, наряду с собственной функцией $\vec{\xi}$, введем в рассмотрение собственную функцию $\vec{\zeta}$ сопряженного оператора $\hat{H}^+$:

$$\hat{H}^+(\omega)\vec{\zeta}=(\omega^*)^2\rho\vec{\zeta}+2i\omega^*\rho(\vec{v}\nabla)\vec{\zeta}+\hat{\vec{F}}\{\vec{\zeta}\}=0. \quad (\text{П I.4})$$

Продифференцируем уравнение (4) по a, умножим его на $\vec{\zeta}^*$ и проинтегрируем по объему. В результате получим

$$\frac{d\omega}{da}=-\frac{i\omega\langle\frac{\partial}{\partial a}\rho(\vec{v}\nabla)\rangle+\frac{1}{2}\langle\frac{\partial\hat{\vec{F}}}{\partial a}\rangle+\omega^2\langle\frac{\partial\rho}{\partial a}\rangle}{\langle\rho\rangle\omega+i\langle\rho(\vec{v}\nabla)\rangle}, \qquad (\text{П.I.5})$$

где угловые скобки обозначают взятие матричного элемента:

$$\langle\hat{A}\rangle=\int\vec{\zeta}^*(\hat{\vec{A}}\vec{\xi})\,dV.$$

Отметим сразу, что если знаменатель в (П I.5) обращается в нуль, то это означает, что

$$\int\vec{\zeta}^*\left(\frac{\partial\hat{H}}{\partial\omega}\vec{\xi}\right)dV=0,$$

и корень ω, соответствующий собственной функции $\vec{\xi}$, является двойным.

Пусть теперь ω – чисто мнимое, $\omega=i\gamma$. При этом в уравнениях (4) и (П I.4) все операторы являются действительными и, в силу действительных граничных условий, соответствующие собственные функции $\vec{\xi}$ и $\vec{\zeta}$ также являются действительными. Соотношение (П I.5) сводится к

$$\frac{d\omega}{da}=i\,\frac{-\gamma\langle\frac{\partial}{\partial a}\rho(\vec{v}\nabla)\rangle+\frac{1}{2}\langle\frac{\partial\vec{F}}{\partial a}\rangle-\gamma^2\langle\frac{\partial\rho}{\partial a}\rangle}{\gamma\langle\rho\rangle+\langle\rho(\vec{v}\nabla)\rangle}. \qquad (\text{П I.6})$$

Поскольку матричные элементы в (П I.6) берутся на действительных функциях, то правая часть является чисто мнимой величиной и, следовательно, мнимый корень $i\gamma$ будет оставаться таковым при изменении параметра a. Возможная особенность в (П I.6), связанная с обращением в нуль знаменателя, как отмечено выше, связана с слиянием двух корней и исключена, если в комплексной плоскости имеется только два мнимых корня, отличающихся знаком.

Приложение 2

Мы докажем здесь, что достаточное условие устойчивости ($W > 0$) раньше всего нарушается на возмущении с $m \to \infty$, которое при этом, как следует из результата раздела 4, теряет устойчивость (в случае $\beta_p + \beta_v \ll 1$). В этом смысле такие возмущения являются наиболее неустойчивыми.

Несмотря на то, что весь анализ в настоящей работе проводится в предположении малого давления плазмы, в доказательстве этого предполагаться не будет.

Представим смещение $\vec{\xi}(\vec{r})$ в (3) в виде

$$\vec{\xi} = \xi_n \vec{n} + \xi_\varphi \vec{e}_\varphi + \xi_\parallel \vec{h} \qquad (\text{П } 2.1)$$

и подставим полученное выражение для $\hat{\vec{F}}\{\vec{\xi}\}$ в (5). После ряда преобразований и интегрирований по частям, получим для W выражение:

$$W = \frac{1}{2}\int dV \Big\{ \Big(\frac{B^2}{4\pi} + \gamma p\Big)\Big(u + \frac{\gamma p \psi + \rho v^4/c_s^2 \Gamma}{B^2/4\pi + \gamma p}\Big)^2 + \Big(\frac{B^2}{4\pi} - \rho v^2\Big)\Big[\Big(\frac{1}{Br}\frac{\partial}{\partial \ell}\xi_n B r\Big)^2 + \Big(r\frac{\partial}{\partial \ell}\frac{\xi_\varphi}{r}\Big)^2\Big] - \frac{(\gamma p \psi + \rho v^4/c_s^2 \Gamma)^2}{B^2/4\pi + \gamma p} + \gamma p \Gamma \psi^2 - \varkappa_n \xi_n^2 \Big[\frac{\partial}{\partial n}(2p + \rho v^2) + \gamma p \varkappa_n \frac{(1-\Gamma)^2}{\Gamma}\Big] \qquad (\text{П } 2.2)$$

где

$$u = \operatorname{div}\vec{\xi}_\perp + 2\varkappa_n \xi_n, \qquad (\text{П } 2.3)$$
$$\psi = v\frac{\partial}{\partial \ell}\frac{\xi_\parallel}{v} - \frac{1+\Gamma}{\Gamma}\varkappa_n \xi_n,$$

а

$$\vec{\xi}_\perp \equiv \xi_n \vec{n} + \xi_\varphi \vec{e}_\varphi$$

Действуя точно так же как в работе [1], легко показать, что если W можно сделать отрицательным на возмущении с азимутальным числом m, то его можно сделать отрицательным и на возмущении с $m + 1$. Этим и завершается доказательство сформулированного утверждения.

В заключение приведем выражение для минимизированного относительно переменной ξ_φ функционала W, удобное при исследовании баллонных мод. Процедура минимизации величины W заключается в том, что одновременно устремляются к нулю ξ_φ и размер желобка в азимутальном направлении (что соответствует моде $m \to \infty$) так, чтобы производная ξ_φ по этому направлению оставалась конечной (см [8]), причем значение этой производной подбирается таким, чтобы выполнялось равенство

$$u + \frac{\gamma p \psi + \rho v^4/c_s^2 \Gamma}{B^2/4\pi + \gamma p} = 0, \qquad (\text{П } 2.4)$$

т.е. первое слагаемое обратилось в нуль. Одновременно с ξ_φ стремится к нулю слагаемое, содержащее производную ξ_φ по ℓ. В результате для W получаем

$$W = \frac{1}{2}\int dV \Big\{ \Big(\frac{B^2}{4\pi} - \rho v^2\Big)\Big(\frac{1}{Br}\frac{\partial}{\partial \ell}\xi_n B r\Big)^2 + \frac{(\gamma p \psi + \rho v^4/c_s^2 \Gamma)^2}{B^2/4\pi + \gamma p} + \gamma p \Gamma \psi^2 - \varkappa_n \xi_n^2 \Big[\frac{\partial}{\partial n}(2p + \rho v^2) + \gamma p \varkappa_n \frac{(1-\Gamma)^2}{\Gamma}\Big]\Big\}. \qquad (\text{П } 2.5)$$

Легко видеть, что в пределе $\beta_p, \beta_v \to 0$ оно переходит в (24)-(26), а равенство (П.4) в этом пределе дает

$$\operatorname{div}\vec{\xi}_\perp = -2\varkappa_n \xi_{n}. \qquad (\text{П } 2.6)$$

Литература

I. Bernstein I.B., Frieman E.A., Kruskal M.D., Kulsrud M. Proc. Roy. Soc. (London) A244, 17 (1958).
2. Кадомцев Б.Б. В сб. "Вопросы теории плазмы", вып.2, стр.132, М., Атомиздат, 1963.
3. Frieman E.A., Rotenberg M. Rev. Mod. Phys. 22, 898 (1960)
4. Newcomb W.A. Nuclear Fusion., Suppl. part 2, 451 (1962)
5. Нагорный В.П., Рютов Д.Д., Ступаков Г.В. Препринт ИЯФ СО АН СССР 83-74 (1983).
6. Laval G., Pellat R., Cotsaftis M., Trocheris M. Nuclear Fusion 4, 25 (1964)
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. "Квантовая механика", М., Наука, 1974.
8. Ryutov D.D., Stupakov G.V. Plasma Phys. Contr. Nucl. Fus. Research 1980, Vol. 1, p 119, Vienna, 1981

В.П.Нагорный, Г.В.Ступаков

О ПРИМЕНЕНИИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ПРИНЦИПА К ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ПЛАЗМЫ

Препринт
№ 83-102

Работа поступила - 1 сентября 1983 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати 6.12-1983 г. МН 03460
Формат бумаги 60х90 1/16 Усл.1,5 печ.л., 1,2 учетно-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 102.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90