ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

Н.С.Диканский, Д.В.Пестриков

О СТОЛКНОВИТЕЛЬНОМ НАГРЕВЕ ПУЧКА В НАКОПИТЕЛЕ

ПРЕПРИНТ 83-112

НОВОСИБИРСК

О СТОЛКНОВИТЕЛЬНОМ НАГРЕВЕ ПУЧКА В НАКОПИТЕЛЕ

Н.С.Диканский, Д.В.Пестриков

А Н Н О Т А Ц И Я

В работе обсуждаются общие особенности столкновительной релаксации пучка в накопителе. Показано, что, в целом, столкновения частиц приводят к увеличению фазового объема пучка, то-есть к его нагреву. Обсуждается влияние жесткости фокусировки накопителя на скорость увеличения фазового объема пучка и возможные равновесные распределения частиц.

I. Одно из ограничений увеличения плотности пучков может быть связано с взаимным рассеянием частиц пучка. В простейшем случае это рассеяние приводит к перераспределению фазовых объемов по различным степеням свободы, что может вызвать ухудшение параметров пучка. В работе [1] было установлено, что в накопителях, благодаря тому, что частицы движутся вдоль замкнутых орбит, взаимное рассеяние частиц может приводить к саморазогреву пучка, если энергия частиц превышает критическую энергию машины. В работе [2] этот эффект анализировался на основе кинетического уравнения Ландау. В этой же работе приведена простая модель, поясняющая причину увеличения фазового объема пучка: при превышении критической энергии рассеяние пары частиц с передачей из поперечного движения в продольное приводит к увеличению суммарной энергии колебаний сталкивающихся частиц. Сама возможность работы выше или ниже критической энергии предполагает наличие азимутальной несимметрии фокусировки накопителя.

Расчет, учитывающий азимутальную несимметрию фокусировки явным образом был выполнен в работе [3]. В отличие от работ [I,2] в [3] было установлено, что в машинах с жесткой фокусировкой взаимное рассеяние частиц независимо от энергии всегда приводит к саморазогреву пучка. В работе [3] этот факт устанавливается для частного вида распределения частиц (характерного для пучков в накопителе). Поэтому не ясно, является ли это общим свойством жесткофокусирующих машин и возможно ли достижение состояния равновесия в пучке за счет взаимного рассеяния частиц.

Между тем факт саморазогрева пучка в жесткофокусирующей машине кажется согласующимся с тем общим требованием, что в состоянии равновесия функции распределения могут зависеть только от аддитивных интегралов движения [4]. В накопителе с жесткой фокусировкой единственным таким интегралом является интеграл энергии, чему отвечает равновесное распределение без среднего движения[ж)].

В этом плане представляет определенный интерес получить результат работы [3] в рамках кинетического подхода. В последнем случае удается установить явный вид равновесной функции

[ж)] Общая идея такой интерпретации результата работы [3] принадлежит В.Келлсу.

распределения, характер релаксации к равновесию, а также оценить соответствующие времена релаксации.

Строго говоря, в накопителе кинетика взаимного рассеяния частиц в пучке может не описываться уравнением Ландау из-за того, что сталкивающиеся частицы движутся в фокусирующих полях. Как известно /5/, при достаточной длительности столкновения пары частиц присутствие внешних полей может приводить к существенному изменению интеграла столкновений. Помимо этого кинетика релаксации к равновесию может осложняться коллективными эффектами. Косвенным образом на важность перечисленных эффектов указывают результаты измерений, проводившихся в /6/.

В настоящей работе задача о релаксации распределения в пучке за счет взаимного рассеяния частиц анализируется в наиболее простом случае, когда можно ограничиться приближением парных столкновений.

2. Получим сначала кинетическое уравнение, описывающее эволюцию функции распределения за счет взаимного рассеяния частиц пучка. При вычислении интеграла столкновений нужно учитывать то, что в отсутствии возмущений движение частицы в накопителе представляет собой комбинацию движения вдоль замкнутой орбиты и колебаний относительно этой орбиты. Если, для простоты, считать пучок непрерывным, такое невозмущенное движение описывается формулами /7/:

$$z = a_z \phi_z \cos(\psi_z + \chi_z), \quad x = x_b + \eta \frac{\Delta p}{p}, \quad \vec{p}_\perp = \frac{p_s}{R_0}\frac{d\vec{z}_\perp}{d\theta}; \quad \Delta p = p - p_s,$$

$$x_b = a_x \phi_x \cos(\psi_x + \chi_x), \quad \theta = \psi_\parallel + \theta_b, \quad \theta_b = \frac{1}{R_0^2}\left(\frac{dx_b}{d\theta}\eta - \frac{d\eta}{d\theta}x_b\right),$$

$$\dot{\psi}_{x,z} = \omega_{x,z} = \omega_0(p)\nu_{x,z}, \quad \dot{\psi}_\parallel = \omega_0(p), \quad \psi = \theta_s + \varphi, \quad \theta_s = \omega_s t, \qquad (I)$$

$$I_{x,z} = \frac{p_s}{2R_0} a_{x,z}^2, \qquad I_\parallel = R_0 \Delta p$$

осуществляющими каноническое преобразование от переменных $(\vec{p}, \vec{z})$ к переменным действие-фаза (I, ψ). Здесь использованы стандартные обозначения: $2\pi R_0$ – периметр орбиты, $p_s = \gamma M v_s$ – импульс равновесной частицы, $\omega_0(p) = \omega_s + \omega_0' \Delta p$ частота обращения, $\omega_0' = \frac{\omega_s}{p_s}\left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma_{tr}^2}\right)$, γ_{tr} – отвечает крити-

ческой энергии машины, $\phi_{x,z}(\theta_s)$, $\chi_{x,z}(\theta_s)$ – соответственно амплитуды и фазы функций Флоке, η – дисперсионная функция машины. Частоты бетатронных колебаний ν_x, ν_z, вообще говоря, могут зависеть от Δp и амплитуд бетатронных колебаний $a^2 \sim I/p_s$. Если описывать движение частиц гамильтонианом $\mathcal{H}_0$, то в переменных действие-фаза уравнения движения имеют особенно простой вид

$$\mathcal{H}_0 = \omega_x I_x + \omega_z I_z + v_s \Delta p + R_0 \frac{d\omega_0}{dp}\frac{\Delta p^2}{2}$$

$$\dot{I}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \psi_\alpha} \equiv 0, \quad \dot{\psi}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial I_\alpha} = \omega_\alpha, \quad \alpha = x, z, \parallel.$$

Для вычисления интеграла столкновений воспользуемся методом микроскопической фазовой плотности /8/. Как известно, в этом методе одночастичная функция распределения вводится, как статистическое среднее микроскопической плотности частиц в фазовом пространстве

$$F(I, \psi, t) = \sum_{a=1}^{N} \prod_{\alpha = x,z,\parallel} \delta(I_\alpha - I_\alpha^a(t))\,\delta(\psi_\alpha - \psi_\alpha^a(t)) \qquad (2)$$

и

$$f(I, t) = \langle F(I, \psi, t) \rangle, \qquad (3)$$

N – число частиц в пучке, a – нумерует частицы. По определению f нормировано на число частиц N.

Необходимым условием построения кинетического уравнения является предположение о наличии такой иерархии времен, что время релаксации f является самым большим. Поэтому можно считать, что одночастичная функция распределения f не зависит от переменных "фаза".

Уравнение для f строится /8/ выделением флуктуационной части уравнения Лиувилля

$$\frac{\partial F}{\partial t} + [\mathcal{H}_0 - \mathcal{L}; F] = 0, \qquad (4)$$

$[\,;\,]$ – скобка Пуассона, $\mathcal{L}$ – лагранжиан взаимодействия частиц. Вводя флуктуации относительного среднего (3) $\delta F = F - f$, в приближении парных корреляторов имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \vec{I}} \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial \vec{\varphi}} \delta\mathcal{L}\right) \cdot \delta F \right\rangle \tag{5}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\omega} \frac{\partial}{\partial \vec{\varphi}}\right) \delta F = -\left(\frac{\partial}{\partial \vec{\varphi}} \delta\mathcal{L}\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{I}} \tag{6}$$

Здесь принято $\vec{a}\vec{b} = a_x b_x + a_z b_z + a_\parallel b_\parallel$.

Уравнение (6) описывает динамику флуктуаций в пучке. Для его решения необходимо задать связь $\delta\mathcal{L}$ и $\delta F(I, \varphi, t)$. Если считать, что взаимодействие частиц в пучке описывается потенциалом $V(1,2)$, то

$$\delta\mathcal{L}(I, \varphi, t) = -\int d(2)\, V(1,2)\, \delta F(2,t), \tag{7}$$

для краткости введено обозначение $(1) \equiv (I_1, \varphi_1)$. Относительно взаимодействия частиц будем предполагать, что оно является бездиссипативным, то-есть $V(1,2) = V(2,1)$.

Выполнение стандартных вычислений /8/ в приближении парных столкновений приводит к кинетическому уравнению:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \vec{I}} \vec{j}(I, t), \tag{8}$$

где ток $\vec{j}(I,t)$ определяется выражением

$$\vec{j} = -\pi \sum_{m m'} \vec{m} \int d(2)\, \delta(\omega(1) - \omega(2))\, |V(1,2)|^2 \times \left\{\left(\vec{m} \frac{\partial f(1)}{\partial \vec{I}_1}\right) f(2) - \left(\vec{m}' \frac{\partial f(2)}{\partial \vec{I}_2}\right) f(1)\right\}. \tag{9}$$

Здесь $\omega(1) = \vec{m}\vec{\omega}(1)$, $\omega(2) = \vec{m}'\vec{\omega}(2)$,

$$V(1,2) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{d\varphi_1}{2\pi}\right)^3 \left(\frac{d\varphi_2}{2\pi}\right)^3 V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\, \exp(-i\vec{m}\vec{\varphi}_1 + i\vec{m}'\vec{\varphi}_2) \tag{10}$$

Фурье-гармоника потенциала V по фазам φ_1 и φ_2. Интеграл столкновений (9) получен решением уравнения (6) в низшем порядке теории возмущений по взаимодействию. Это, во всяком случае, предполагает малость вносимого взаимодействием (7) когерентного сдвига частоты по сравнению с разбросами частот в пучке $(\vec{m}\Delta\vec{\omega})$.

Легко проверить, что в соответствии с предположением о бездиссипативности взаимодействия, гамильтониан $\mathcal{H}_0$ невозмущенного движения является инвариантом уравнения (8):

$$\frac{d\bar{\mathcal{H}}_0}{dt} = \frac{\pi}{N} \sum_{m m'} \int d(1)\, d(2)\, \delta(\omega(1) - \omega(2))\, |V(1,2)|^2 \times \left\{\omega(1) f(2) \left(\vec{m} \frac{\partial f(1)}{\partial \vec{I}_1}\right) - \omega(2) f(1) \left(\vec{m}' \frac{\partial f(2)}{\partial \vec{I}_2}\right)\right\} \equiv 0,$$

$$\bar{\mathcal{H}}_0(t) = \frac{1}{N} \int d(1)\, \mathcal{H}_0\, f(1,t).$$

Уравнение, аналогичное уравнению (8), было получено ранее С.Т.Беляевым /9/ усреднением уравнения Н.Н.Боголюбова по быстрым переменным. Переход к кинетическому уравнению работы /9/ осуществляется заменой в (9) δ-функции интегральным представлением и выполнением суммирования по m и m':

$$j_\alpha = -\frac{1}{2} \int (dI_2) \left\{ W^{1,1}_{\alpha\beta} f(2) \frac{\partial f(1)}{\partial I_{1\beta}} + W^{1,2}_{\alpha\beta} f(1) \frac{\partial f(2)}{\partial I_{2\beta}} \right\}, \tag{11}$$

$$W^{a,b}_{\alpha\beta} = \left\langle \frac{\partial I^a_\alpha}{\partial p^a_\lambda} \frac{\partial V}{\partial r^a_\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left(\frac{\partial I^b_\beta}{\partial p^b_\sigma} \cdot \frac{\partial V}{\partial r^b_\sigma} \right)_\tau \right\rangle_{\varphi_1, \varphi_2} \tag{12}$$

Здесь $\langle\ \rangle_\varphi$ – означает усреднение по соответствующим фазам; $V_\tau = V(\varphi^{(1)}_\alpha - \omega^{(1)}_\alpha \tau,\ \varphi^{(2)}_\alpha - \omega^{(2)}_\alpha \tau)$, $(dI) = dI_x\, dI_z\, dI_\parallel$. Легко проследить, когда (8) переходит в уравнение Ландау /9/. Фактически для всякого потенциала V может быть определен радиус действия сил a, определяющий длительность столкновения пары частиц $\tau_{ст} = a/u$, где u – относительная скорость

Если столкновение является быстрым $\omega_x \tau_{ст} \ll 1$, множитель $\partial I/\partial p$ медленно меняется на интервале $\Delta\tau \sim \tau_{ст}$, дающем основной вклад в интеграл по τ в (I2), и может быть вынесен за знак интеграла:

$$W^{a,b}_{\alpha\beta} \simeq \left\langle \frac{\partial I^a_\alpha}{\partial p^a_\lambda} \frac{\partial I^b_\beta}{\partial p^b_\sigma} \frac{\partial V}{\partial r^a_\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\partial V_\tau}{\partial r^b_\sigma} \right\rangle_{\psi_1,\psi_2} . \qquad (I2a)$$

Если, кроме того, пространственный масштаб изменения f существенно превосходит a , (II) переходит в ток, отвечающий уравнению Ландау:

$$j_\alpha = -\frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial I_\alpha}{\partial p_\lambda} \int d^3p_2 \left(f(2) \frac{\partial f(1)}{\partial p_{1\sigma}} - f(1) \frac{\partial f(2)}{\partial p_{2\sigma}} \right) W_{\lambda\sigma} \right\rangle_{\psi_1,\psi_2}$$

$$W_{\alpha\beta} = \int d^3r_2 \frac{\partial V}{\partial r_{1\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\partial V_\tau}{\partial r_{1\beta}} , \quad V = V(|\bar r_1 - \bar r_2|).$$

В накопителях выполнение условия $\omega_x \tau_{ст} \ll 1$ может быть затруднено тем, что частицы движутся вдоль близких замкнутых орбит. В этом случае длительность взаимодействия пары частиц может увеличиваться, например, за счет увеличения кратности столкновений.

3. Вычислим скорость изменения фазового объема $\Delta\Gamma$, занимаемого пучком. По определению /4/, эта величина связана со скоростью изменения энтропии пучка:

$$\frac{d \ln \Delta\Gamma}{dt} = \frac{dS}{dt} = -\frac{d}{dt} \int d\Gamma f \ln f . \qquad (I3)$$

Используя уравнение (8), для dS/dt получим:

$$\frac{dS}{dt} = -\int d\Gamma \vec{j} \frac{\partial \ln f}{\partial \vec I}$$

$$= \pi \sum_{m,m'} \int d(1)d(2)\, \delta(\omega(1)-\omega(2))\, |V(1,2)|^2 f(1)f(2) \times$$

$$\times \left(\bar m \frac{\partial \ln f(1)}{\partial \bar I_1}\right) \left\{ \left(\bar m \frac{\partial \ln f(1)}{\partial \bar I_1}\right) - \left(\bar m' \frac{\partial \ln f(2)}{\partial \bar I_2}\right) \right\}.$$

С учетом симметрии потенциала V по индексам I и 2, последнее выражение можно переписать в виде:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\pi}{2} \sum_{m,m'} \int d(1)d(2)\, \delta(\omega(1)-\omega(2))\, |V(1,2)|^2 f(1)f(2) \times$$
$$\times \left\{ \left(\bar m \frac{\partial \ln f(1)}{\partial \bar I_1}\right) - \left(\bar m' \frac{\partial \ln f(2)}{\partial \bar I_2}\right) \right\}^2 . \qquad (I4)$$

Как и следовало ожидать, соотношение (I4) отражает выполнение Н-теоремы Больцмана при столкновительной релаксации пучка к равновесию. В состоянии, отличном от равновесного, взаимное рассеяние частиц приводит к увеличению энтропии пучка $dS/dt > 0$. При этом, в соответствии с (I0), фазовый объем пучка увеличивается, то-есть происходит его разогрев. Мгновенный инкремент нарастания фазового объема равен

$$\tau_p^{-1} = \Lambda(\Delta\Gamma) = \frac{dS}{dt} . \qquad (I5)$$

Это и есть результат работы /3/. Следует отметить, что поскольку релаксация сопровождается увеличением фазового объема пучка, можно ожидать, что τ_p будет увеличиваться при приближении к состоянию равновесия.

Найдем теперь равновесную функцию распределения

$$dS/dt = 0. \qquad (I6)$$

Для определенности положим $V = V(|\bar r_1 - \bar r_2|)$.

Рассмотрим сначала более простой случай, когда фокусировка машины обладает азимутальной симметрией. При выполнении этого условия гармоники потенциала V диагональны по азимутальному номеру гармоники:

$$V_{m,m'}(1,2) = \delta_{n,n'} V_{m_\perp,m'_\perp,n}(1,2). \qquad (I7)$$

Условию равновесия (I6), как легко видеть, отвечало бы распределение

$$f \sim exp\left\{-\frac{\vec{\omega}_\perp \vec{I}_\perp + R_0 \frac{d\omega_0}{dp}\frac{\Delta p^2}{2}}{T}\right\}, \qquad (I8)$$

где T - температура пучка в равновесии. В машинах с азимутально-симметричной фокусировкой всегда $\gamma_{tr} = \nu_x < 1$, а $d\omega_0/dp < 0$. Следовательно распределение (I8) не может быть нормировано и поэтому не может быть равновесным распределением. Отсюда следует, что в машинах с азимутально-симметричной фокусировкой взаимное рассеяние частиц всегда приводит и к саморазогреву пучка. Эффект самонагрева в этом случае обязан замкнутости орбиты, вдоль которой движутся частицы, и зависимости периметра орбиты от энергии частиц. Как уже говорилось, при $d\omega_0/dp < 0$ рассеяние с передачей импульса из поперечного в продольное движение приводит к увеличению суммарной энергии колебаний сталкивающихся частиц /2/.

Если в качестве f взять распределение, характерное для пучка

$$f(I_\perp, \Delta p) \sim exp\left\{-\frac{\vec{\omega}_\perp \vec{I}_\perp}{T_\perp} - \frac{\Delta p^2}{2\Delta^2}\right\}, \qquad (I9)$$

то значение Λ определяется выражением:

$$\Lambda = \frac{\pi}{2}\left(1 - R_0\omega_0' \frac{\Delta^2}{T_\perp}\right)^2 \sum_n \sum_{m_\perp, m_\perp'} \int d(1)d(2)\,\delta(\omega(1)-\omega(2)) \times \qquad (20)$$
$$\times |V(1,2)|^2 f(1)f(2)\, n^2 \left(\frac{\Delta p_1 - \Delta p_2}{R_0\Delta^2}\right)^2.$$

Видно, что при $\omega_0' < 0$, Λ не обращается в нуль ни при каких Δ^2 и $T_\perp$.

Отметим еще одно следствие соотношения (20). В условиях, когда можно пренебречь нелинейностью бетатронных колебаний (а распределения (I8), (I9) написаны именно для этого случая) увеличение фазового объема обязано недиагональным по $m_\perp$ и $m_\perp'$ гармоникам потенциала V. Если влиянием недиагональных гармоник можно пренебречь, уравнения (I6) и (8) допускают в качестве равновесного любое распределение вида

$$f \sim exp\left\{-\frac{\vec{\omega}_\perp \vec{I}_\perp}{T_\perp}\right\} \bar{f}(\Delta p) \qquad (2I)$$

где $\bar{f}$ произвольная функция Δp. В этом случае взаимное рассеяние частиц приводит к термализации поперечных степеней свободы, не изменяя распределения по импульсам. Причина этого очевидна. Для потенциалов $V = V(\varphi_1 - \varphi_2)$ продольная степень фактически выпадает из условия резонанса $\omega(1) = \omega(2)$, ответственного за перераспределения парциальных фазовых объемов. Заметим, что сама возможность выделения отдельных гармоник взаимодействия предполагает, что столкновения частиц не являются быстрыми ($\omega_x \tau_{ст} > 1$, где $\tau_{ст}$ - длительность столкновения).

Те же соображения относительно вида f справедливы и для машин с жесткой фокусировкой в приближении, когда в аргументах V значения бетатронных функций могут быть заменены своим средним значением (т.н. "сглаженное" приближение). Однако, в отличие от предыдущего случая здесь знак $d\omega_0/dp$ меняется при переходе через критическую энергию накопителя γ_{tr}. Если энергия пучка ниже критической $\gamma < \gamma_{tr}$, $d\omega_0/dp > 0$ и равновесию отвечает распределение (I8) - взаимное рассеяние приводит к выравниванию парциальных температур $(T_\perp = R_0\omega_0'\Delta^2)$. В обратном случае $\gamma > \gamma_{tr}$, $d\omega_0/dp < 0$ - взаимное рассеяние приводит к самонагреву пучка, как это было установлено в работах /I,2/.

Строго говоря, в накопителе с жесткой фокусировкой благодаря модуляции Флоке

$$\vec{r} = \vec{r}(\theta_s, \varphi, I), \quad \vec{P} = \vec{P}(\theta_s, \varphi, I)$$

гармоники потенциала V всегда недиагональны по n:

$$V(1,2) \neq \delta_{n,n'} V_{m_\perp, m_\perp', n}$$

В этом случае условию равновесия (I6) отвечает распределение

$$f \sim exp\left\{-\frac{\vec{\omega}_\perp \vec{I}_\perp + \theta_s\Delta p + R_0\omega_0'\Delta p^2/2}{T}\right\} \qquad (22)$$

то-есть полностью термализованное распределение Больцмана. Как видно из (22), этот процесс сопровождается торможением пучка в целом. Ясно, что распределение (22) не может отвечать ни какому разумному распределению в пучке. Поэтому в накопителях с азимутально несимметричной фокусировкой любое "пучковое" распределение приводит к условию

$$\Lambda = \frac{d \ln \Delta\Gamma}{dt} > 0,$$

то-есть к критерию самонагрева пучка в смысле /3/. Причина увеличения фазового объема здесь очевидна. Если спектр потенциала V богат недиагональными гармониками $(n \neq n')$, частицы движутся в поле

$$V \sim e^{iq\psi_\perp + il\theta}$$

При этом равенству $\omega(1) = \omega(2)$ отвечает выполнение условий суммового резонанса, вызывающего перекачку энергии продольного движения в тепловое движение частиц.

Для распределения (19) начальное время релаксации может быть оценено по формуле

$$\tau_p^{-1} = \Lambda = \Lambda_0 + \Delta\Lambda,$$

где Λ_0 определяется выражением (20), а

$$\Delta\Lambda = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\omega_s}{2T_\perp}\right)^2 \sum_{n \neq n'} \sum_{\substack{m_\perp \\ m_\perp'}} \int d(1)\,d(2)\,\delta(\omega(1)-\omega(2))\, f(1) f(2) \times$$
$$\times |V(1,2)|^2 (n-n')^2 \tag{23}$$

учитывает вклад недиагональных по n и n' слагаемых, ответственных за переход к распределению (22). Из сравнения (20) и (23) можно видеть, что величины Λ_0 и $\delta\Lambda$ будут одного порядка при выполнении соотношения

$$\left|\frac{V_{n \neq n'}}{V_{n = n'}}\right| \sim \frac{T_\perp}{v_s \Delta} \sim \frac{\Delta\omega}{\omega_s}\Bigg|_{T_\perp \sim R_0 \omega_0' \Delta^2} \tag{24}$$

Для быстрых столкновений $(\omega_x \tau_{ст} < 1)$ формулы (20), (23) можно переписать в виде:

$$\Lambda_0 = \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{R_0 \omega_0' \Delta^2}{T_\perp}\right)^2 \int d(1)\,d(2)\, f(1) f(2) \left(\frac{\delta p_\parallel}{\Delta^2}\right)^2 \frac{\partial V}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\partial V_\tau}{\partial y}, \tag{20a}$$

$$\Delta\Lambda = \left(\frac{\omega_s}{2T_\perp}\right)^2 \int d(1)\,d(2)\, f(1) f(2) \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial \theta_s} \frac{\partial \rho_\beta}{\partial \theta_s} \frac{\partial V}{\partial \rho_\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\partial V_\tau}{\partial \rho_\beta}. \tag{23a}$$

Здесь $y = R_0 \theta$; $\vec{\rho} = \vec{z}_1(\theta_s, \psi, I) - \vec{z}_2(\theta_s, \psi, I)$; дифференцирование должно выполняться по явной зависимости ρ от θ_s, например:

$$\frac{\partial \rho_x}{\partial \theta_s} = \frac{\delta p_x}{p_s} R_0 \phi_x \left(1 - \nu_x \phi_x^2\right) + \frac{\delta p_\parallel}{p_s}\left(\phi_x \xi - \xi\left(1 - \nu \phi_x^2\right)\right),$$

$$\xi = \eta' \phi_x - \phi_x' \eta, \quad \delta p_x = p_x^{(1)} - p_x^{(2)}, \quad \delta p_\parallel = \Delta p^{(1)} - \Delta p^{(2)}$$

Соотношения (20а), (23а) показывают, что относительный вклад Λ_0 и $\Delta\Lambda$ во время релаксации Λ^{-1} зависит от соотношения продольной и поперечной температур и от жесткости машины. Для кулоновского взаимодействия, при $T_\perp \gg R_0 \omega_0' \Delta^2$, отношение $\Delta\Lambda/\Lambda_0$ порядка

$$\frac{\Delta\Lambda}{\Lambda_0} \sim \frac{\Delta_\parallel^2}{\Delta_\perp^2} \int_0^{\vartheta_\Pi} \frac{d\theta_s}{2\pi} \left[\frac{\eta'^2}{R_0^2} + \frac{1}{\gamma^2}\left(1 - \nu \phi^2\right)^2\right] \tag{25}$$

$$\sim \frac{\Delta_\parallel^2}{\nu^2 \Delta_\perp^2}, \quad \gamma \gg 1$$

$\Delta_\perp = \sqrt{\gamma M T_\perp}\ (> \Delta_\parallel)$ разброс поперечных импульсов в пучке.

4. Проведенное исследование показывает, что при отличии распределения в пучке от равновесных (18,22), взаимное рассеяние частиц всегда приводит к увеличению фазового объема пучка и, в этом смысле, к некоторому самонагреву.

Возможность неограниченного самонагрева пучка определяется свойствами фокусирующей системы накопителя. Имеется два механизма самонагрева. Первый связан с тем, что частицы в накопителе движутся вдоль замкнутой траектории. За счет связи радиального и продольного движения, это приводит к увеличению фазового объема, если энергия пучка превышает критическую энергию накопителя.

Второй механизм связан с азимутальной несимметрией взаимодействия частиц, обязанной модуляции Флоке. В этом случае рост фазового объема обусловлен взаимодействием частиц, для которых выполняется условие суммового резонанса. Этот механизм, вообще говоря, не связан с замкнутостью орбиты частиц и может приводить к увеличению фазового объема как в кольцевых, так и в прямых пучках (например, в линейных ускорителях). Следует, однако, отметить, что в машинах с достаточно "гладкой" фокусировкой вклад второго механизма в скорость столкновительной релаксации подавлен.

Отметим, что в накопителях с малой нелинейностью бетатронных колебаний увеличение длительности столкновения пары частиц может приводить к исключению продольной степени из процесса термализации и достижению, в качестве равновесного, распределения вида (2I). Правда, увеличению длительности столкновения может отвечать увеличение роли коллективных эффектов, влияние которых в данной работе не учитывалось.

В этой связи напомним, что скорость релаксации (I4), во всяком случае, ограничена условием малости величин когерентного сдвига, вносимых взаимодействием, по сравнению с разбросами частот в пучке.

В настоящей работе расчет проведен для непрерывного пучка. Не представляет труда обобщить эти результаты на случай, когда пучок сгруппирован. Благодаря малости частот синхротронных колебаний (что является обычным для накопителей) можно считать, что для этой степени свободы столкновения всегда являются быстрыми.

В накопителях, столкновительная релаксация пучка может быть обусловлена не только "прямым" взаимодействием частиц, но и взаимным рассеянием частиц на полях, наведенных в окружающих пучок элементах вакуумной камеры. Как и в предыдущем случае, если вносимые взаимодействием когерентные сдвиги частот малы

по сравнению с разбросами частот в пучке, процесс такой релаксации будет описываться уравнением, типа уравнения (8) (мы имеем в виду случаи, когда диссипативность элемента малосущественна). Очевидно, что процесс такой релаксации будет обладать всеми обсуждавшимися особенностями. Однако, в отличие от случая с прямым взаимодействием частиц, азимутальная несимметрия взаимодействия через внешние системы может быть обусловлена конечной азимутальной протяженностью самого элемента, с которым взаимодействует пучок. Поэтому может оказаться, что в машине с достаточно "сглаженной" фокусировкой вклад резонансных эффектов не мал. В этом случае (24) может определять допустимую величину азимутальной несимметрии взаимодействия.

Авторы благодарны Я.С.Дербеневу, В.В.Пархомчуку, А.Н.Скринскому, а также сотрудникам ФНАЛ Дж.Бьёркену, С.Мтингва и В.Келлсу за полезные обсуждения.

Литература:

1. A. Piwinski. Proc. of the IX Intern. Conf. on High Energy Accelerators, 405, Stanford, 1974.
2. Я.С.Дербенев. Труды УI Всесоюзного совещания по ускорителям. I, II9, Дубна I979.
3. J. Bjorken, S. Mtingwa. Theory of intrabeam scattering. Proc. of the Cooling Workshop. Madison. 1982.
4. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Статистическая физика. Наука, I964.
5. Я.С.Дербенев, А.Н.Скринский. Труды X Международной конференции по ускорителям, I, 5I6, Серпухов, I977.
6. В.И.Куделайнен и др. ЖЭТФ, 83, 6, 2056, I982.
7. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев. Теория циклических ускорителей. Физматгиз, I962.
8. Ю.Л.Климонтович. Статистическая теория неравновесных процессов в плазме. МГУ I964.
9. С.Т.Беляев. В сб. "Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций". 3, 50, Изд. АН СССР I958.

Н.С.Диканский, Д.В.Пестриков

О СТОЛКНОВИТЕЛЬНОМ НАГРЕВЕ ПУЧКА
В НАКОПИТЕЛЕ

Препринт
№ 83-II2

Работа поступила 22 июня I983г.
Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати I4.09-I983 г. МН 0335I
Формат бумаги 60х90 I/I6 Усл.I,0 печ.л., 0,8 учетно-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № II2.
Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90