

Н. 16

14

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР



В.П.Нагорный, Г.В.Ступаков.

**ЖЕЛОБКОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ
ПЛАЗМЫ В АНТИПРОБКОТРОНЕ**

ПРЕПРИНТ 83-23

БИБЛИОТЕКА
Института ядерной
физики СО АН СССР
ИНВ. № _____

НОВОСИБИРСК

А Н Н О Т А Ц И Я

С помощью энергетического принципа в приближении Чу-Голдберга-Лоу рассмотрена желобковая неустойчивость плазмы с малым β в непараксиальных ловушках с аксиальной симметрией. Показано, что в случае короткой плазмы благоприятная кривизна силовых линий магнитного поля, вообще говоря, не гарантирует устойчивости плазмы. Найдена максимальная скорость спада давления к центру антипробкотрона при которой плазма еще устойчива относительно желобковых возмущений.

A B S T R A C T

The flute instability of a low β plasma in axisymmetric traps having nonparaxial magnetic field is studied in Chew-Goldberger - Low approximation. It is shown that the favourable curvature, generally speaking, does not stabilize the flute instability of a short plasma. The maximum gradient of the pressure of a plasma confined in a cusp is found corresponding to the marginal stability against the flute perturbations.

ЖЕЛОБКОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ В АНТИПРОБКОТРОНЕ

В.П.Нагорный, Г.В.Ступаков

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в литературе интенсивно обсуждаются схемы амбиполярных ловушек, магнитное поле которых является полностью аксиально-симметричным^[1-5]. Главным достоинством таких конфигураций является отсутствие в них неоклассических процессов переноса, которые в аксиально-несимметричных вариантах могут приводить к значительному ухудшению поперечного удержания плазмы. В качестве стабилизирующего элемента, обеспечивающего МГД-устойчивость центрального пробкотрона, в некоторых системах^[3,5] предполагается использовать в крайних пробкотронах конфигурацию магнитного поля типа антипробкотрона. При этом возникает необходимость определить запас устойчивости, который обеспечивает такой стабилизатор при заданных параметрах плазмы в нем. Решение этой задачи дает возможность найти верхнюю границу допустимых значений β в центральном пробкотроне, при которых вся система устойчива относительно желобковых возмущений. Отметим сразу, что вследствие непараксиальности магнитного поля антипробкотрона, обычно используемый критерий устойчивости^[6] в данном случае не применим.

Особенностью антипробкотрона является то обстоятельство, что вследствие усиленных потерь частиц, пролетающих вблизи точки нулевого магнитного поля (для этих частиц не сохраняется магнитный момент), в его внутренней области следует ожидать уменьшения плотности (и давления) плазмы в направлении к центру^{*)}. Такой ход давления является неблагоприятным в смысле желобковой неустойчивости (производная давления в направлении вектора кривизны силовой линии больше нуля), и если скорость спа-

*) В работе^[3] рассматривается конфигурация, в которой плазма отделена от области нулевого магнитного поля внутренней границей. При этом неблагоприятное направление градиента давления связано просто с уменьшением плотности при приближении к этой границе.

да достаточно велика, желобковая неустойчивость может развиваться во внутренней части самого антипробкотрона. Задача теории состоит в вычислении критической скорости спада давления.

Решению этих двух задач, основанному на использовании энергетического принципа, посвящена настоящая работа. Задавшись определенной моделью распределения давления вдоль силовых линий, мы вычисляем потенциальную энергию плазмы в антипробкотроне W , связанную с желобковым возмущением. Величина W характеризует свойства антипробкотрона как стабилизирующего элемента в амби-полярной ловушке: если обозначить через $W_{ц}$ потенциальную энергию желобкового возмущения в центральном пробкотроне (она отрицательна, так как кривизна силовых линий в центральном пробкотроне в среднем неблагоприятна), то допустимые значения $W_{ц}$ будут ограничены условием $-W_{ц} < W$. Одновременно требование $W > 0$ определяет максимальную скорость спада давления вблизи центра антипробкотрона для того, чтобы плазма в его внутренней области была устойчива.

Наиболее адекватным рассматриваемой задаче является выражение для потенциальной энергии, полученное в работе Крускала и Обермана [7], $W_{ко}$. Однако для вычисления $W_{ко}$ необходимо знать функцию распределения частиц плазмы по энергии и магнитному моменту. Поэтому мы используем более простое выражение для W , соответствующее гидродинамике плазмы в приближении Чу-Голдбергера-Лоу [8], $W_{сгл}$, позволяющее провести анализ в терминах продольного и поперечного давления $P_{||}$ и P_{\perp} . В силу теоремы сравнения [7] $W_{сгл} < W_{ко}$, полученные в настоящей работе критерии устойчивости являются необходимыми, а критерии неустойчивости достаточными.

2. ВЫВОД И АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ

Будем предполагать, что величина β мала по сравнению с единицей, тогда допустимыми являются только моды колебаний, которые не возмущают магнитного поля. При этом общее выражение для энергии плазмы упрощается и принимает следующий вид [9]:

$$W = \int dV \left\{ 3P_{||} (\text{div } \vec{\xi})^2 + \left(\vec{\xi} \frac{\nabla B}{B} \right) \text{div } \vec{\xi} (5P_{||} - P_{\perp}) \right\} \quad (1)$$

$$+ \left(\vec{\xi} \frac{\nabla B}{B} \right)^2 (P_{\perp} + 2P_{||}) + \text{div } \vec{\xi} (\vec{\xi} \nabla P_{||}) + \left(\vec{\xi} \frac{\nabla B}{B} \right) \left[\vec{\xi} \nabla (P_{||} - P_{\perp}) \right] \Big\},$$

где $\vec{\xi}$ - вектор смещения, а $P_{||}$ и P_{\perp} - продольное и поперечное давление плазмы. Условие того, что возмущение магнитного поля равно нулю, означает, что

$$\text{rot} [\vec{\xi} \times \vec{B}] = 0. \quad (2)$$

Дальнейшее упрощение выражения (1) основано на предположении, что смещение $\vec{\xi}(\vec{r})$ локализовано вблизи некоторой силовой линии \mathcal{L} и обращается в нуль при удалении от \mathcal{L} на расстояние, малое по сравнению со всеми характерными масштабами задачи. В результате в W остаются только члены, содержащие проекции смещения на магнитное поле, $\xi_{||}$, и на вектор нормали к силовой линии, ξ_{\perp} , а также их производные вдоль силовой линии:

$$W = W_{\perp}^{(1)} + W_{\perp}^{(2)} + W_{||}, \quad (3)$$

$$W_{\perp}^{(1)} = -\frac{1}{2} \varphi \int \frac{ds}{B} \frac{\xi_{\perp}^2}{R} \frac{\partial}{\partial n} (P_{||} + P_{\perp}), \quad (4)$$

$$W_{\perp}^{(2)} = \frac{1}{2} \varphi \int \frac{ds}{B} \frac{\xi_{\perp}^2}{R^2} (4P_{||} + 3P_{\perp}), \quad (5)$$

$$W_{||} = \frac{1}{2} \varphi \int \frac{ds}{B} \left[3P_{||} \left(\frac{\partial \xi_{||}}{\partial s} \right)^2 + P_{\perp} \frac{B''}{B} \xi_{||}^2 + 2\xi_{||} \left(3P_{||} \frac{\partial}{\partial s} \frac{\xi_{\perp}}{R} + P_{\perp} B \frac{\partial}{\partial s} \frac{\xi_{\perp}}{RB} \right) \right]. \quad (6)$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial n} \equiv \vec{n} \nabla$, где \vec{n} - единичный вектор нормали к силовой линии, который считается направленным от оси ловушки; $R^{-1} = \vec{\xi} \nabla$, где $\vec{\xi}$ - вектор кривизны силовой линии; φ обозначает поток внутри силовой трубки, которая подвергается желобковому смещению и вдоль которой берутся интегралы (4)-(6). Переменные ξ_{\perp} и $\xi_{||}$ в (4)-(6) рассматриваются теперь как функции длины силовой линии s , а штрих обозначает дифференцирование по s . При выводе выражения (3) предполагалось, что силовая линия \mathcal{L} - плоская; оно, в частности, может быть использовано для анализа устойчивости в аксиально-несимметричных ловушках в окрестности

плоскостей симметрии. Ниже, однако, мы ограничимся случаем осесимметричных систем. В этом случае соотношение (2) сводится к равенству

$$\xi_n(s) = \frac{\text{const}}{r(s)B(s)}, \quad (7)$$

где $r(s)$ — расстояние от силовой линии \mathcal{L} до оси системы, а $B(s)$ — напряженность магнитного поля на этой силовой линии как функция s .

Вместо формального вывода (3) из (1) мы приводим в Приложении I наглядный способ получения выражения (3), основанный на непосредственном подсчете работы, затрачиваемой при перемещении желобка с одной силовой линии на другую.

Обратимся к анализу выражений (4)–(6). В предположении, что давление уменьшается при удалении от оси системы ($\frac{\partial}{\partial n}(p_{\perp} + p_{\parallel}) < 0$), в $W_{\perp}^{(1)}$ вносят положительный вклад области благоприятной кривизны ($R > 0$) и отрицательный — области неблагоприятной кривизны ($R < 0$). В параксиальном приближении, когда поперечный размер плазмы r мал по сравнению с ее длиной l (при этом $|R| \sim l^2/r$) это слагаемое в W оказывается в l^2/r^2 больше $W_{\perp}^{(2)}$ и W_{\parallel} , и критерий устойчивости принимает хорошо известный вид [6]:

$$\int \frac{ds}{rRB} \frac{\partial(p_{\perp} + p_{\parallel})}{\partial n} < 0.$$

В непараксиальной магнитной ловушке ($r \sim l$) слагаемые $W_{\perp}^{(2)}$ и W_{\parallel} по порядку величины равны $W_{\perp}^{(1)}$. Первое из них всегда положительно и, таким образом, играет стабилизирующую роль. Второе же, как будет сейчас показано, является дестабилизирующим — его минимальное значение меньше нуля.

Для доказательства представим $\xi_{\parallel}(s)$ как произведение нормированной (некоторым образом) функции $f(s)$ на численный коэффициент a ,

$$\xi_{\parallel} = a f \quad (8)$$

и подставим (8) в (6):

$$W_{\parallel} = a^2 I_1 + a I_2, \quad (9)$$

где

$$I_1 = \frac{1}{2} \varphi \int \frac{ds}{B} [3 p_{\parallel} (f')^2 + p_{\perp} \frac{B''}{B} f^2],$$

$$I_2 = \varphi \int \frac{ds}{B} f \left(3 p_{\parallel} \frac{\partial \xi_{\parallel}}{\partial s} \frac{\partial}{R} + p_{\perp} B \frac{\partial \xi_{\parallel}}{\partial s} \frac{\partial}{RB} \right).$$

Рассмотрим сначала случай, когда минимальное значение функционала I_1 положительно, т.е. $I_1 > 0$ для любой функции f (это заведомо выполняется для антипробкотрона, рассматриваемого в следующем разделе, где всюду на силовой линии $B'' > 0$). Зафиксируем функцию $f(s)$ и найдем минимум W_{\parallel} по переменной a :

$$\min_a W_{\parallel} = -\frac{1}{4} \frac{(I_2)^2}{I_1}.$$

Учитывая, что $I_1 > 0$, заключаем отсюда, что W_{\parallel} принимает отрицательные значения и, следовательно, $\min W_{\parallel} < 0$.

Если $B''(s)$ принимает отрицательные значения, то можно доказать, что $\min I_1 < 0$. В этом случае, как видно из (9), функционал W_{\parallel} не ограничен снизу, $\min W_{\parallel} = -\infty$. В дальнейшем, однако, мы не будем рассматривать этой возможности, предполагая, что всюду $B'' > 0$.

Варьируя функционал (6), найдем уравнение, которому подчиняется функция $\xi_{\parallel}(s)$, минимизирующая W_{\parallel} :

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{p_{\parallel}}{B} \frac{\partial \xi_{\parallel}}{\partial s} - \frac{p_{\perp} B''}{3 B^2} \xi_{\parallel} = g(s), \quad (10)$$

$$g(s) \equiv \frac{p_{\parallel}}{B} \frac{\partial \xi_{\parallel}}{\partial s} \frac{\partial}{R} + \frac{1}{3} p_{\perp} \frac{\partial \xi_{\parallel}}{\partial s} \frac{\partial}{RB}.$$

Обсудим граничные условия для уравнения (10).

В открытой ловушке распределение давления плазмы вдоль силовой линии таково, что функции $p_{\perp}(s)$ и $p_{\parallel}(s)$ отличны от нуля в некотором интервале $a < s < b$ и обращаются в нуль на концах этого интервала. Вместе с p_{\parallel} обращается в нуль коэффициент при старшей производной в уравнении (10). Как показано в Приложении 2, это приводит к тому, что в точке a одно из линейно независимых решений однородного уравнения (10) (т.е. уравнения, в котором $g \equiv 0$) можно выбрать регулярным, а дру-

гое, линейно независимое с ним, обладает особенностью; то же самое имеет место в окрестности точки b . В то же время из физических соображений ясно, что смещение $\xi_{||}$ должно быть конечным на всем интервале (a, b) . Отсутствие особенностей у $\xi_{||}$ в точках a и b и является граничным условием к уравнению (10), позволяющим однозначно определить функцию $\xi_{||}(s)$.

Приведем явное выражение для $\xi_{||}$. Для этого построим два линейно независимых решения ξ_a и ξ_b однородного уравнения, обладающих тем свойством, что первое из них регулярно в точке $s=a$ (но имеет особенность в точке $s=b$), а второе регулярно в точке $s=b$ (но имеет особенность при $s=a$)^{*}. Единственное регулярное на всем интервале (a, b) решение неоднородной задачи (10) выражается через ξ_a и ξ_b следующим образом:

$$\xi_{||}(s) = \xi_a(s) \int_s^b \frac{g B \xi_b}{\rho_{||} \omega} ds' - \xi_b(s) \int_a^s \frac{g B \xi_a}{\rho_{||} \omega} ds', \quad (II)$$

где через ω обозначен вронскиан $\xi_a' \xi_b - \xi_a \xi_b'$. То, что выражение (II) не имеет особенностей на концах интервала, легко установить с помощью асимптотик решений, выписанных в Приложении 2; единственность же решения (II) следует из того, что любое другое решение отличается от него линейной комбинацией ξ_a и ξ_b , обладающей особенностью по крайней мере на одном из концов рассматриваемого интервала.

Простое выражение для $\xi_{||}$ легко получить в предельном случае короткой плазмы, когда давление меняется вдоль силовой линии на масштабе Δ , малом по сравнению с характерным масштабом l изменения магнитного поля, $\Delta \ll l$. Как следует из уравнения продольного равновесия,

$$\frac{\partial \rho_{||}}{\partial s} = -\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial s} (\rho_{\perp} - \rho_{||}), \quad (I2)$$

это означает, что $\rho_{||} \ll \rho_{\perp}$. При оценке отношения $\rho_{||}/\rho_{\perp}$ нужно учесть, что на каждой силовой линии плазма локализована вблизи минимума магнитного поля, так что $|\partial B/\partial s| \sim B'' \Delta$, поэтому

^{*} Вырожденный случай, когда у однородного уравнения имеется решение, регулярное одновременно в обеих точках a и b означает, что экстремум функционала I_1 в точности равен нулю.

$$\frac{\rho_{||}}{\rho_{\perp}} \sim \left(\frac{\Delta}{l}\right)^2.$$

Малость $\rho_{||}$ по сравнению с ρ_{\perp} позволяет пренебречь первым слагаемым в функции g , входящей в уравнение (10), и переписать (10) в следующем виде

$$\frac{1}{\rho_{\perp}} \frac{\partial}{\partial s} \frac{\rho_{||}}{B} \frac{\partial \xi_{||}}{\partial s} - \frac{B''}{3B^2} \xi_{||} = \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial s} \frac{\xi_n}{RB}, \quad (I3)$$

причем коэффициент при $\xi_{||}$ и правая часть в (I3) могут считаться постоянными, равными своим значениям в точке минимума поля $s = s_{min}$ (напомним, во избежание недоразумений, что ξ_n задается выражением (7) и меняется на масштабе $\sim l$). С учетом этого замечания, регулярное решение (I3) (которое, как доказано выше, единственно) есть константа:

$$\xi_{||} = -\frac{B}{B''} \frac{\partial}{\partial s} \frac{\xi_n}{R} \Big|_{s=s_{min}}. \quad (I4)$$

Полученный результат можно качественно пояснить следующим образом. При смещении ξ_n с исходной силовой линии в нормальном направлении плазма, находившаяся внутри желобка, попадает в точку, которая не является точкой минимума поля на новой силовой линии (см. рис. I). Поэтому требуется дополнительное продольное смещение в определенном направлении, которое переводит плазму в точку минимума B на новой силовой линии. Естественно, что выполнение смещения $\xi_{||}$ приводит к уменьшению энергии плазмы, $W_{||} < 0$.

Используя (I4), вычислим сумму $W_{\perp}^{(2)} + W_{||}$, пренебрегая членами, пропорциональными $\rho_{||}$:

$$W_{\perp}^{(2)} + W_{||} = \frac{1}{2} \varphi \left(\int ds \cdot \rho_{\perp} \right) \frac{1}{B} \left(3 \frac{\xi_n^2}{R^2} - \frac{B}{B''} \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{\xi_n}{R} \right)^2 \right) \Big|_{s=s_{min}}. \quad (I5)$$

Как следует из (I5), если выполняется неравенство

$$3 \frac{B''}{B} < \left(\frac{\partial \ln r R}{\partial s} \right)^2 \quad (I6)$$

(все величины берутся в точке минимума поля на рассматриваемой силовой линии), то $W_{\perp}^{(2)} + W_{||} < 0$. Это означает, что даже в

случае благоприятной кривизны силовых линий ($R > 0$) в короткой плазме возможна желобковая неустойчивость. Она стабилизируется, если давление достаточно быстро спадает в направлении \vec{n} , так что $W_{\perp}^{(1)} > |W_{\perp}^{(2)} + W_{\parallel}|$. Подчеркнем, что этот эффект является следствием одновременного учета анизотропии плазмы и непараксильности магнитного поля. Хотя рассмотренный выше пример относится к случаю $p_{\perp} \gg p_{\parallel}$, ясно, что эффекты такого рода могут в принципе проявляться и при $p_{\perp} \sim p_{\parallel}$.

3. ЖЕЛОБКОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ В АНТИПРОБОКРОТРОНЕ

В цилиндрической системе координат с осью z , направленной вдоль оси системы, вакуумное магнитное поле антипробокротрона имеет вид

$$B_z = 2Gz, \quad B_r = -Gr, \quad (17)$$

где G — некоторая константа, определяющая величину магнитного поля. Уравнение силовых линий поля (17) удобно записать следующим образом:

$$r^2 z = \left(\frac{l_0}{\sqrt{3}}\right)^3, \quad (18)$$

где l_0 — параметр, задающий силовую линию, и имеющий размерность длины. Введем безразмерные переменные $\tilde{r} = \frac{r}{l_0}$, $\tilde{z} = \frac{z}{l_0}$, $\tilde{\rho} = \frac{1}{l_0}$, тогда уравнение силовых линий примет вид:

$$\tilde{r}^2 \tilde{z} = \frac{1}{3\sqrt{3}}. \quad (19)$$

Минимальное поле на данной силовой линии связано с введенной выше константой G и параметром l_0 соотношением

$$B_{\min}(l_0) = Gl_0.$$

Напряженность поля B в точке (r, z) равна

$$B = B_{\min}(l_0) \cdot k, \quad (20)$$

где $k = \sqrt{4\tilde{z}^2 + \tilde{r}^2}$. Величина k имеет смысл отношения величины поля B в точке (r, z) к минимальному полю на силовой линии, проходящей через эту точку.

Будем считать для простоты, что электростатический потенциал в ловушке не зависит от координаты вдоль силовой линии. Это соответствует реальной ситуации, когда температура электронов мала по сравнению с ионной температурой и электрическое поле не влияет на движение ионов. При этом давление плазмы определяется ионной компонентой. Для анализа устойчивости мы примем, что распределение давления в антипробокротроне соответствует следующей модельной функции распределения ионов:

$$f(\varepsilon, \mu, l_0) = \begin{cases} 0, & \mu < \varepsilon/B_0(l_0), \\ F(\varepsilon, l_0), & \varepsilon/B_0(l_0) < \mu < \varepsilon/B, \end{cases} \quad (21)$$

где ε и μ — энергия и адиабатический инвариант частицы, $B_0(l_0)$ — величина поля, при котором функция распределения на данной силовой линии обращается в нуль, а $F(\varepsilon, l_0)$ задает распределение частиц по энергии. Такая функция распределения соответствует наличию в фазовом пространстве пустого конуса с углом $\theta = \arcsin \sqrt{\frac{B}{B_0(l_0)}}$; вне этого конуса она изотропна. Давление плазмы выражается через функцию распределения с помощью соотношений:

$$p_{\perp} = 2\sqrt{2} \pi m_i^{-3/2} B^2 \int_0^{\varepsilon/B} d\varepsilon \int_{\mu=0}^{\varepsilon/B} d\mu \frac{\mu f(\varepsilon, \mu, l_0)}{\sqrt{\varepsilon - \mu B}}, \quad (22)$$

$$p_{\parallel} = 4\sqrt{2} \pi m_i^{-3/2} B \int_0^{\varepsilon/B} d\varepsilon \int_0^{\varepsilon/B} d\mu \sqrt{\varepsilon - \mu B} f(\varepsilon, \mu, l_0),$$

где m_i — масса иона. Подставляя (21) в (22), получаем

$$p_{\perp}(k, k_0, l_0) = p_{\perp \max}(l_0) \frac{\sqrt{k_0 - k} (k_0 + k/2)}{\sqrt{k_0 - 1} (k_0 + 1/2)}, \quad (23)$$

$$p_{\parallel}(k, k_0, l_0) = p_{\perp \max}(l_0) \frac{(k_0 - k)^{3/2}}{\sqrt{k_0 - 1} (k_0 + 1/2)};$$

где $p_{\perp \max}(l_0)$ — поперечное давление в минимуме поля ($k = 1$), а

$$k_0 = \frac{B_0(l_0)}{B_{\min}(l_0)}.$$

Пусть исходная силовая линия характеризуется параметром l_0 , а та на которую перемещается желобок, — $l_0 + \delta l_0$. Легко показать, что при этом в соответствии с (7), $\xi_n = \frac{\delta l_0}{\sqrt{3} F k}$. Введем безразмер-

ные смещения $\xi_n = \sqrt{3} \xi_n / \delta \ell_0$ и $\xi_{11} = \sqrt{3} \xi_{11} / \delta \ell_0$, тогда $\xi_n = 1/\sqrt{3} k$, а ξ_{11} определяется из уравнения (10), которое для выбранной модели плазмы принимает вид (тильду здесь и в дальнейшем для краткости опускаем):

$$3(k_0 - k) \frac{\partial^2 \xi_{11}}{\partial z^2} - (k_0 + \frac{k}{2}) \left[3 \frac{8z^3 - C}{zk^3} \frac{\partial \xi_{11}}{\partial z} + \frac{72Cz}{k^6} \xi_{11} \right] + (24)$$

$$+ \frac{6}{k^7} \left[18(k_0 - k)(4z^3 - C) + (k_0 + \frac{k}{2})(32z^3 - 7C) \right] = 0;$$

для удобства в (24) введено обозначение $C = \frac{1}{3\sqrt{3}}$. Работу (3), необходимую для создания желобкового возмущения, можно представить в следующем виде

$$W = \varphi \frac{P_{1\max}(\ell_0)}{G_1} \left(\frac{\delta \ell_0}{\ell_0} \right)^2 \left\{ I_1(k_0) \frac{\partial \ln P_{1\max}(\ell_0)}{\partial \ln \ell_0} + I_2(k_0) \frac{\partial \ln k_0}{\partial \ln \ell_0} + I_3(k_0) + I_{11}(k_0) \right\} (25)$$

Выражения для интегралов I_1, I_2, I_3, I_{11} приведены в Приложении 3.

Уравнение (24) решалось на ЭВМ методом прогонки с использованием условия ограниченности решения на концах интервала, границы которого определяются из условия $k(a) = k(b) = k_0$. По полученному решению затем вычислялся интеграл I_{11} . Графики $I_1, I_2, I_3 + I_{11}$ в зависимости от k_0 приведены на рис.2. Как видно из рисунка, интегралы $I_1, I_2, I_3 + I_{11}$ являются монотонными функциями k_0 , причем I_1 и I_2 отрицательны, а $I_3 + I_{11} > 0$. При $k_0 \rightarrow 1$ I_1 и $I_3 + I_{11}$ стремятся к нулю, а I_2 ведет себя как $\text{const} \cdot (k_0 - 1)^{-1/2}$. При больших k_0 ($k_0 > 7+8$) I_1 и $I_3 + I_{11}$ почти не зависят от k_0 ; а $I_2 \rightarrow 0$.

Рассмотрим более подробно случай больших k_0 . При этом членом $I_2 \frac{\partial \ln k_0}{\partial \ln \ell_0}$ в (25) можно пренебречь. Поскольку $I_3 + I_{11} > 0$, а $I_1 < 0$, то на внешней границе плазмы, где $\frac{\partial P_{1\max}}{\partial \ell_0} < 0$, W положительно и, следовательно, внешняя граница плазмы устойчива относительно желобковых возмущений. Во внутренней области плазмы, где давление спадает от периферии к центру, т.е. $\frac{\partial P_{1\max}}{\partial \ell_0} > 0$, W может быть как положительно, так и отрицательно. Порог устойчивости определяется условием $W = 0$. Найдем максимальную скорость спада давления к центру ловушки, при которой плазма еще устойчива, воспользовавшись тем, что при больших k_0 интегралы $I_1, I_3 + I_{11}$ можно считать константами. Положив в (25)

$W = 0$, и проинтегрировав получившееся уравнение по ℓ_0 , найдем:

$$(P_{1\max}(\ell_0))^{I_1} \ell_0^{I_3 + I_{11}} = \text{const}. (26)$$

Подставив сюда значения I_1, I_3 и I_{11} при $k_0 = 10$ (как видно из рисунка эти значения очень слабо зависят от k_0 при $k_0 > 6+7$), получим:

$$P_{1\max}(\ell_0) = \text{const} \cdot \ell_0^{1,3}. (27)$$

Как отмечалось во Введении, в силу неравенства $W_{k_0} < W$, полученный показатель степени $\gamma = 1,3$ должен рассматриваться как верхняя граница этой величины; реально предельное значение γ будет меньше, чем полученное.

В заключение авторы выражают благодарность Д.Д.Рятову за полезные обсуждения.

Приложение I

1. Пусть смещение трубки при желобковом возмущении задается функцией $\xi_n(s)$, определяемой формулой (7). При этом форма силовых линий магнитного поля не изменяется: исходная силовая линия магнитного поля в трубке в точности совмещается с некоторой другой силовой линией невозмущенного магнитного поля.

Каждый элемент плазмы, всплывая вместе с трубкой, может смещаться в продольном направлении, так что его полное смещение равно $\xi(s) = \xi_n(s) + \xi_{||}(s)$, где $\xi_{||}$ направлено вдоль \vec{B} . Найдем возмущение давления в элементе плазмы трубки в результате такого смещения. Воспользуемся адиабатами Чу-Голдбергера-Лоу для плазмы с анизотропным давлением

$$\frac{p_{||} B^2}{n^3} = const, \quad \frac{p_{\perp}}{nB} = const, \quad (III.1)$$

где n - плотность плазмы. Отсюда для возмущений соответствующих величин имеем

$$\frac{\delta p_{||}}{p_{||}} = 3 \frac{\delta n}{n} - 2 \frac{\delta B}{B}, \quad (III.2)$$

$$\frac{\delta p_{\perp}}{p_{\perp}} = \frac{\delta n}{n} + \frac{\delta B}{B}.$$

Возмущение δB связано с тем, что элемент плазмы переходит в точку, в которой величина поля отлична от той, которая была в исходном положении элемента трубки до смещения, следовательно

$$\frac{\delta B}{B} = \frac{\xi_n}{B} \frac{\partial B}{\partial n} + \frac{\xi_{||}}{B} \frac{\partial B}{\partial s} = \frac{\xi_n}{R} + \frac{\xi_{||}}{B} \frac{\partial B}{\partial s}. \quad (III.3)$$

Изменение плотности δn вызвано изменением объема элемента трубки при перемещении. Если исходный объем элемента трубки был dV , то

$$\frac{\delta n}{n} = - \frac{\delta dV}{dV} = - \frac{\delta \sigma}{\sigma} - \frac{\delta dl}{dl} = \frac{\delta B}{B} - \frac{\delta dl}{dl}, \quad (III.4)$$

где dl и σ - длина и поперечное сечение элемента трубки. При получении (III.4) мы воспользовались условием замороженности

магнитного поля, в силу которого магнитный поток φ через поперечное сечение трубки σ сохраняется:

$$\varphi = B\sigma = const, \quad (III.5)$$

Изменение длины δdl равно

$$\delta dl = dl \left(\frac{\partial \xi_{||}}{\partial s} - \frac{\xi_{||}}{R} \right). \quad (III.6)$$

Подставив (III.3, III.4, III.6) в (III.2), получим выражение для $\delta p_{||}$ и δp_{\perp} :

$$\delta p_{\perp} = p_{\perp} \left(3 \frac{\xi_n}{R} - B^2 \frac{\partial}{\partial s} \frac{\xi_n}{B^2} \right), \quad (III.7)$$

$$\delta p_{||} = p_{||} \left(4 \frac{\xi_n}{R} - 3B^{1/3} \frac{\partial}{\partial s} \frac{\xi_{||}}{B^{1/3}} \right).$$

2. Найдем работу, производимую сторонними силами, приложенными к поверхности трубки для смещения заключенной в нее плазмы на новую силовую линию. Эту работу удобно вычислять следующим образом: сначала положим $\xi_{||}(s) = 0$ и найдем "поперечную" работу по перемещению каждого элемента плазмы на величину $\xi_n(s)$, задаваемую формулой (7), затем при фиксированном $\xi_n(s)$ произведем смещение $\xi_{||}(s)$ и вычислим продольную работу.

Поперечная работа. Вычислим работу по поперечному смещению элемента плазмы, заключенного между двумя близкими нормальными сечениями силовой трубки (см. рис. 3). Будем предполагать, что торцы элемента плазмы 1 и 2 в ходе смещения ξ_n движутся в своих плоскостях (при этом, очевидно, рассматриваемый элемент плазмы изменяет свой продольный размер), так что сила, действующая на торцы элемента трубки работы не совершает. Таким образом, работа выполняется только против сил, действующих на боковую поверхность трубки. Сторонняя сила, которая производит эту работу, должна компенсировать разность сил давления, действующих на боковую поверхность трубки со стороны внешней и внутренней по отношению к поверхности трубки плазмы.

Напишем тензор потока импульса $\Pi_{\alpha\beta}$:

$$\Pi_{\alpha\beta} = \Pi_{||} b_{\alpha} b_{\beta} + \Pi_{\perp} (\delta_{\alpha\beta} - b_{\alpha} b_{\beta}), \quad (III.8)$$

где $\vec{b} = \frac{\vec{B}}{B}$, $\Pi_{\parallel} = p_{\parallel} - \frac{B^2}{8\pi}$, $\Pi_{\perp} = p_{\perp} + \frac{B^2}{8\pi}$. (III.9)

Обозначим через dS_{η} - площадь элемента боковой поверхности трубки (рис.3), а через \vec{n}_{η} - вектор нормали к этому элементу поверхности. Сторонняя сила, действующая на элемент трубки в направлении \vec{n} очевидно равна

$$dF_n = \oint (\vec{n} \vec{n}_{\eta}) (\Pi_{\perp out} - \Pi_{\perp in}) dS_{\eta}. \quad (III.10)$$

Индексами "out" и "in" обозначены величины, характеризующие плазму, соответственно снаружи и внутри трубки. Введем координаты x и y , направленные, соответственно, по нормали и бинормали к центральной силовой линии желобка, а длину участка этой линии и ее радиус кривизны будем, как и в разделе 2, обозначать ds и R . В этих обозначениях

$$(\vec{n} \vec{n}_{\eta}) dS_{\eta} = (R-x) \theta dy,$$

где $\theta = \frac{ds}{R}$. (Здесь учтено, что в случае, изображенном на рис.3, $R < 0$. Нетрудно убедиться, что в случае, когда $R > 0$, получается то же выражение).

Из уравнения равновесия следует, что в плоскости x, y $\Pi_{\perp out}$ и $\Pi_{\perp in}$ зависят только от координаты x . Разлагая $\Pi_{\perp}(x)$ вблизи центральной силовой линии, имеем

$$dF_n = \oint (\Pi_{\perp out}(x) - \Pi_{\perp in}(x)) (R-x) \theta dy = \\ = - \left(\Pi_{\perp out}^{(0)} - R \frac{\partial \Pi_{\perp out}^{(0)}}{\partial n} - \Pi_{\perp in}^{(0)} + R \frac{\partial \Pi_{\perp in}^{(0)}}{\partial n} \right) \theta \sigma. \quad (III.11)$$

Индекс "0" у $\Pi_{\perp in}$ и $\Pi_{\perp out}$ означает, что эти величины берутся на "центральной" силовой линии. Учитывая, что в равновесии

$$R \frac{\partial \Pi_{\perp}}{\partial n} - \Pi_{\perp} = - \Pi_{\parallel} \quad (III.12)$$

и, имея в виду, что внутри трубки плазма находится в равновесии,

получим

$$dF_n = - (p_{\parallel out} - p_{\parallel in}) \sigma \frac{ds}{R}. \quad (III.13)$$

При получении (III.13) мы использовали выражение (III.9) и то, что при желобковом смещении магнитное поле не возмущается, т.е. $B_{in} = B_{out}$. Таким образом, для работы этой силы над всей трубкой получаем выражение

$$W_{\perp n} = - \frac{1}{2} \int \frac{ds}{R} \sigma (p_{\parallel out} - p_{\parallel in}) \xi_n = - \frac{1}{2} \varphi \int \frac{ds}{B} \frac{\xi_n}{R} (p_{\parallel out} - p_{\parallel in}). \quad (III.14)$$

К этой работе надо добавить работу по расширению трубки (обозначим ее $W_{\perp \sigma}$), которая равна

$$W_{\perp \sigma} = \frac{1}{2} \int ds \left. \frac{d\sigma}{d\xi_n} \right|_{\xi_n=0} \xi_n (p_{\perp out} - p_{\perp in}) = \quad (III.15)$$

$$= - \frac{1}{2} \int \frac{ds}{R} \sigma \xi_n (p_{\perp out} - p_{\perp in}) = - \frac{1}{2} \varphi \int \frac{ds}{B} \frac{\xi_n}{R} (p_{\perp out} - p_{\perp in}).$$

Объединяя (III.14) и (III.15), получаем для W_{\perp} следующее выражение

$$W_{\perp} = \frac{1}{2} \varphi \int \frac{ds}{B} \frac{\xi_n}{R} (p_{\parallel in} + p_{\perp in} - p_{\parallel out} - p_{\perp out}). \quad (III.16)$$

Представим величины $p_{\perp in}$, $p_{\parallel in}$, $p_{\perp out}$ и $p_{\parallel out}$ в виде

$$p_{\perp in} = p_{\perp} + \delta p_{\perp in}, \quad p_{\parallel in} = p_{\parallel} + \delta p_{\parallel in}, \quad (III.17)$$

$$p_{\perp out} = p_{\perp} + \frac{\partial p_{\perp}}{\partial n} \xi_n, \quad p_{\parallel out} = p_{\parallel} + \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial n} \xi_n,$$

где p_{\perp} и p_{\parallel} обозначают давление на исходной силовой линии до ее смещения, а $\delta p_{\perp in}$ и $\delta p_{\parallel in}$ определяются формулами (III.7), в которых следует положить $\xi_{in} = 0$. Подставив (III.17) в (III.16), получим выражения (4), (5) для поперечной работы.

Продольная работа. Сила, действующая на элемент плазмы объема dV в направлении силовой линии, равна

$$dF_{\parallel} = b_{\alpha} \frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} dV = dV \left(- \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial s} - \frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{B} \frac{\partial B}{\partial s} \right); \quad (III.18)$$

здесь все величины относятся к плазме внутри трубки. Учитывая, что до смещения плазма в трубке была в равновесии, перепишем эту формулу в виде

$$d\mathcal{L}_{||} = dV \left(-\frac{\partial \delta p_{||}}{\partial s} - \frac{\delta p_{\perp} - \delta p_{||}}{B} \frac{\partial B}{\partial s} + \frac{p_{\perp} - p_{||}}{B} \frac{\delta B}{B} \frac{\partial B}{\partial s} - \frac{p_{\perp} - p_{||}}{B} \frac{\partial \delta B}{\partial s} \right). \quad (\text{III.19})$$

Подставив сюда выражения для δB , δp_{\perp} и $\delta p_{||}$ из (III.3) и (III.7), после простых преобразований получим

$$d\mathcal{L}_{||} = dV \left(3B \frac{\partial p_{||}}{\partial s} \frac{\partial \xi_{||}}{\partial s} - \frac{p_{||}}{B} \frac{\partial^2 B}{\partial s^2} \xi_{||} - 3p_{||} \frac{\partial}{\partial s} \frac{\xi_{||}}{R} - p_{\perp} B \frac{\partial}{\partial s} \frac{\xi_{||}}{RB} \right). \quad (\text{III.20})$$

Соответствующая продольному смещению $\xi_{||}(s)$ работа равна

$$W = \Phi \int \frac{ds}{B} \xi_{||} \left(-\frac{3}{2} B \frac{\partial}{\partial s} \frac{p_{||}}{B} \frac{\partial \xi_{||}}{\partial s} + \frac{1}{2} \frac{p_{\perp}}{B} \frac{\partial^2 B}{\partial s^2} \xi_{||} + 3p_{||} \frac{\partial}{\partial s} \frac{\xi_{||}}{R} + p_{\perp} B \frac{\partial}{\partial s} \frac{\xi_{||}}{RB} \right); \quad (\text{III.21})$$

здесь мы заменили $dV = \Phi \frac{ds}{B}$. Проинтегрировав по частям первый член, получим (6).

Приложение 2

Для определенности будем говорить о левой границе интервала, $s=a$, и обозначим через ζ разность $s-a$. Допустим, что давление $p_{||}$ обращается в нуль в точке $\zeta=0$ по закону

$$p_{||} = A \zeta^{\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Характер поведения p_{\perp} в окрестности этой точки определяется из уравнения продольного равновесия (I2). Рассмотрим сначала случай, когда в точке $\zeta=0$ производная $\frac{\partial B}{\partial s}$ отлична от нуля, тогда из (I2) следует, что

$$p_{\perp} \sim \zeta^{\alpha-1}, \quad (\text{II.1})$$

а из требования $p_{\perp}(\zeta=0) = 0$ получаем более жесткое ограничение на α : $\alpha > 1$. С учетом найденных зависимостей представим коэффициенты в уравнении (I0) в следующем виде

$$\frac{p_{||}}{B} = \zeta^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n, \quad (\text{II.2})$$

$$\frac{p_{\perp} B''}{3B^2} = \zeta^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n. \quad (\text{II.3})$$

и будем искать решение также в виде ряда

$$\xi_{||} = \zeta^{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n, \quad c_0 \neq 0. \quad (\text{II.4})$$

Подставляя эти разложения в однородное уравнение (I0) и приравнявая коэффициент при $\zeta^{\alpha+\beta-2}$ к нулю, получим, что

$$(\beta-1)(\beta-1+\alpha) = 0,$$

откуда находим возможные значения β для двух линейно независимых решений:

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = 1 - \alpha \quad (\text{II.5})$$

(равенство нулю коэффициентов при более высоких степенях ζ позволяет при этом выразить c_n для $n \geq 1$ через c_0, a_i, b_i). Так как $\alpha > 1$, то одно из линейно независимых решений ($\beta = \beta_1$) регулярно в нуле, другое ($\beta = \beta_2$) имеет там особенность.

Рассмотрим теперь случай, когда точка $\zeta=0$ соответствует максимуму магнитного поля, и в ее окрестности $\frac{\partial B}{\partial s} = B'' \zeta$. Из уравнения (I2) находим при этом, что главный член в разложении p_{\perp} имеет вид:

$$p_{\perp} = -A \frac{B}{B''} \alpha \zeta^{\alpha-2},$$

а условие $p_{\perp}(\zeta=0) = 0$ означает, что $\alpha > 2$. Соответственно, вместо (II.3) надо писать

$$\frac{p_{\perp} B''}{3B^2} = \zeta^{\alpha-2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n, \quad (\text{II.6})$$

причем $b_0 = -\frac{1}{3} \alpha A$. Подставляя теперь в однородное уравнение (II.2), (II.4), (II.6) и приравнявая к нулю коэффициент при $\zeta^{\alpha+\beta-2}$, получим

$$(\beta-1)(\beta-1+\alpha) + \frac{1}{3} \alpha = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, снова находим два возможных значения β :

$$\beta_{1,2} = 1 - \frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\alpha^2 - \frac{4}{3}\alpha}$$

Элементарный анализ показывает, что одно из этих значений β меньше нуля, а другое — больше нуля. Это означает, что как и в предыдущем случае, одно из линейно независимых решений однородного уравнения обладает особенностью, а другое регулярно в окрестности точки $\zeta = 0$.

Приложение 3

Приведем выражения для интегралов I_1, I_2, I_3, I_{11} .

$$I_1 = -\sqrt{3} \int \frac{d\lambda}{k^5} z \frac{\sqrt{k_0 - k} (2k_0 - k/2)}{\sqrt{k_0 - 1} (k_0 + 1/2)},$$

$$I_2 = -\frac{3/2 \cdot k_0 (k_0 - 1/2)}{(k_0 - 1)(k_0 + 1/2)} I_1 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \int \frac{d\lambda}{k^5} z \frac{k_0 (2k_0 - \frac{3}{2}k)}{\sqrt{k_0 - k} \sqrt{k_0 - 1} (k_0 + 1/2)},$$

$$I_3 = \frac{3\sqrt{3}/2}{\sqrt{k_0 - 1} (k_0 + 1/2)} \left[\int \frac{d\lambda}{k^5} z \frac{k_0 - k/2}{\sqrt{k_0 - k}} (2\sqrt{3} \frac{z}{k^3} - k) + \frac{4}{\sqrt{3}} \int \frac{d\lambda}{k^9} z^2 \sqrt{k_0 - k} (7k_0 - \frac{5}{2}k) \right],$$

$$I_{11} = \frac{1/3}{\sqrt{k_0 - 1} (k_0 + 1/2)} \left\{ \frac{1}{2} \int \frac{d\lambda}{k} \sqrt{k_0 - k} \left[3(k_0 - k) \left(\frac{\partial \xi_{11}}{\partial \lambda} \right)^2 + (k_0 + \frac{k}{2}) \frac{8\sqrt{3}}{k^6} z \xi_{11}^2 \right] + \right.$$

$$\left. + 6 \int \frac{d\lambda}{k^8} \xi_{11} \sqrt{k_0 - k} \left[18(k_0 - k) \left(4z^3 - \frac{1}{3\sqrt{3}} \right) + (k_0 + \frac{k}{2}) \left(32z^3 - \frac{7}{3\sqrt{3}} \right) \right] \right\},$$

здесь всюду $z > 0$. Пределы интегрирования по λ определяются из условий $k(a) = k(b) = k_0$.

При больших k_0 $z(b) \approx \frac{k_0}{2}$, $r(a) \approx k_0$. Покажем, что интегралы I_1, I_2, I_3 при $k_0 \rightarrow \infty$ сходятся. Выберем за точку отсчета ($\lambda = 0$) точку, в которой поле принимает свое минимальное значе-

ние на данной силовой линии, тогда $\lambda(a) \approx -r(a) \approx -k_0$, $\lambda(b) \approx z(b) \approx \frac{k_0}{2}$ и при $k_0 \rightarrow \infty$ эти интегралы нужно брать в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. При этом подынтегральные функции не зависят от k_0 и при больших λ спадают не медленнее, чем $\frac{1}{k^4} \sim \frac{1}{\lambda^4}$. Отсюда сразу следует сходимость интегралов I_1, I_2, I_3 . Из выражения для I_1, I_2 кроме того видно также, что $I_2 \rightarrow 0$. Нетрудно показать, что I_{11} ограничено при конечных ξ_{11} .

Л и т е р а т у р а :

1. В.В.Арсенин. Физика плазмы, 5, 1293 (1979).
2. B.G. Logan. Comments Plasma Phys. Control. Fusion, 5, 271 (1980).
3. B.G. Logan. Comments Plasma Phys. Control. Fusion, 6, 199 (1981).
4. В.В.Арсенин. Физика плазмы, 8, 484, 1982.
5. Г.И.Димов. Препринт ИЯФ СО АН СССР 82-150 (1982).
6. M.N. Rosenbluth, C.L. Longmire. Ann. Phys. 1, 120 (1957).
7. M.D. Kruskal, C.R. Oberman. Phys. Fluids, 1, 275 (1958).
8. I. V. Bernstein, E.A. Frieman, M.D. Kruskal, R.M. Kulsrud. Proc. Roy. Soc., A244, 17 (1958).
9. J.V. Taylor. Phys. Fluids, 6, 1529 (1963).

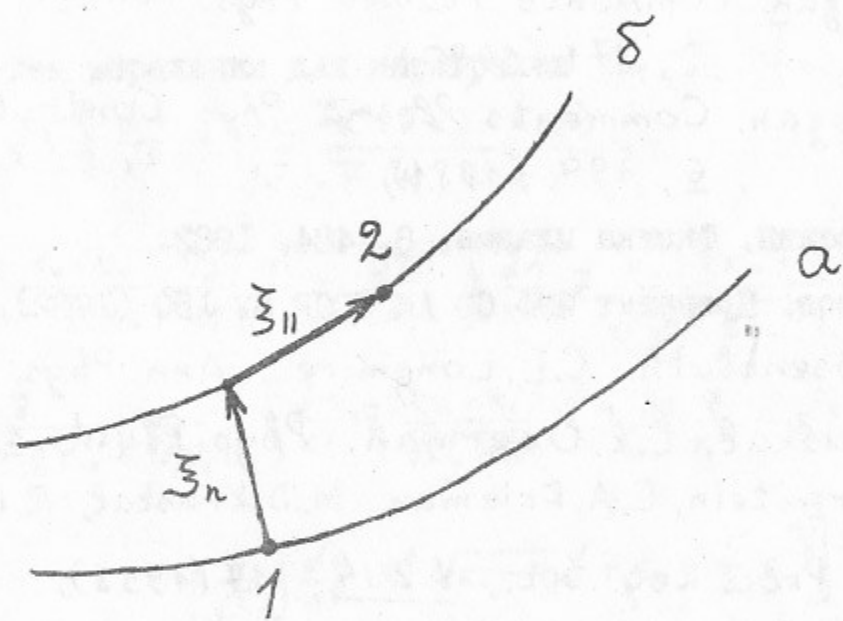


Рис.1. К задаче об устойчивости короткой плазмы. Точка 1 соответствует минимуму магнитного поля на силовой линии a , точка 2 - минимуму поля на силовой линии δ . Стрелки обозначают нормальное (ξ_n) и продольное ($\xi_{||}$) смещения плазмы, минимизирующие функционал энергии.

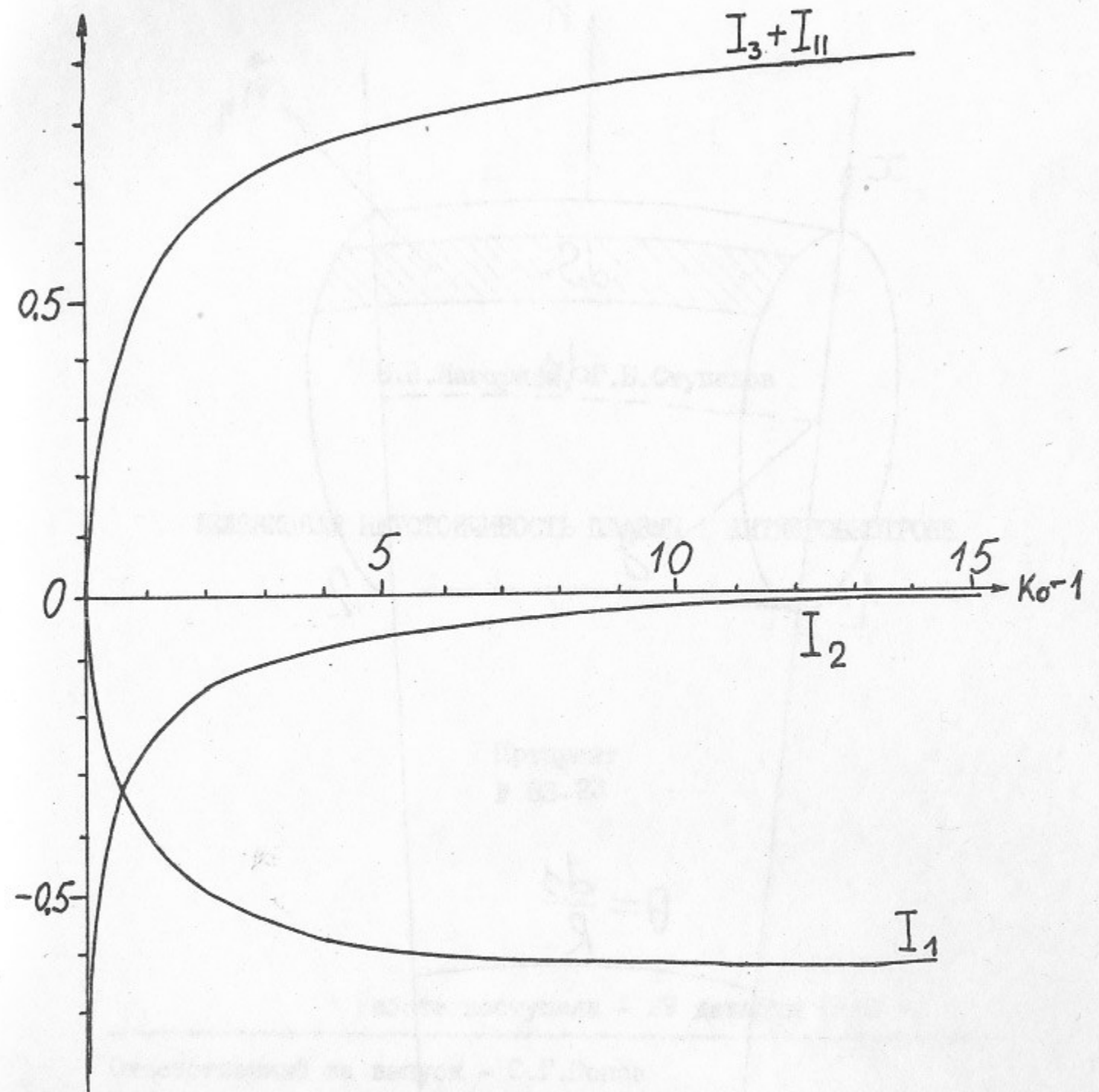


Рис.2. Графики функций I_1 , I_2 , $I_3 + I_{||}$ в зависимости от K_0 .

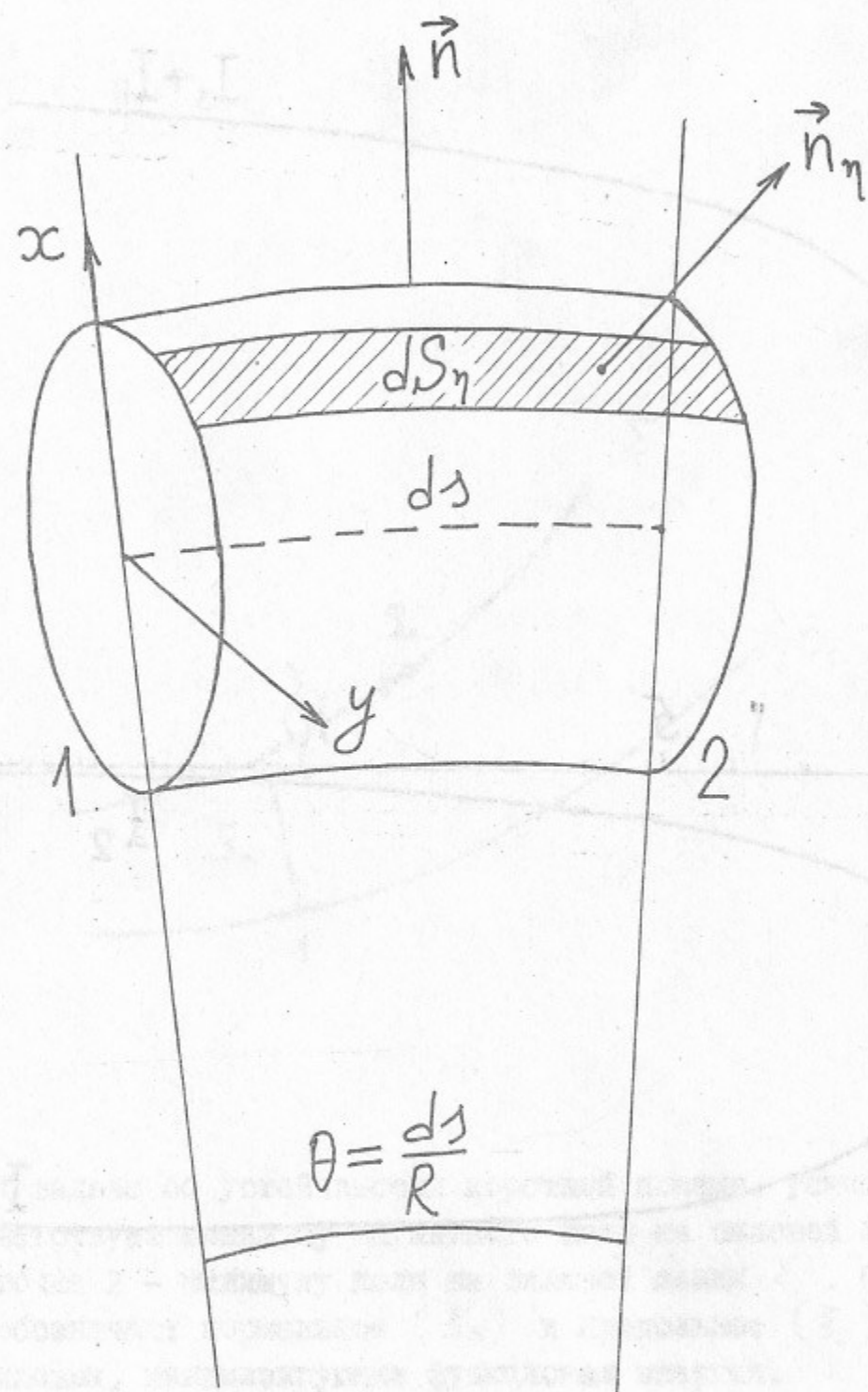


Рис.3. К выводу выражений (III.11), (III.12)

В.П.Нагорный, Г.В.Ступаков

КЕЛОБКОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ В АНТИПРОБКОТРОНЕ

Препринт
№ 83-23

Работа поступила - 29 декабря 1982 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов

Подписано к печати 4.02-1983 г. МН 03043

Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.1,5 печ.л., 1,2 учетно-изд.л.

Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 23.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90