

31

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ  
СО АН СССР



Б.Н.Брейзман, В.И.Ерофеев

РЕЛАКСАЦИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА  
В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ  
СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ  
ПЛОТНОСТИ

ПРЕПРИНТ 83-52

НОВОСИБИРСК



РЕЛАКСАЦИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В МАГНИТОАКТИВНОЙ  
ПЛАЗМЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ ПЛОТНОСТИ

Б.Н.Брейзман, В.И.Ерофеев

А Н Н О Т А Ц И Я

В рамках приближения слабой турбулентности рассмотрено возбуждение ленгмюровских волн при стационарной инжекции электронного пучка в магнитоактивную плазму со случайными неоднородностями плотности. Показано, что в достаточно сильном магнитном поле упругое рассеяние ленгмюровских волн на неоднородностях плотности само по себе не приводит к стабилизации пучковой неустойчивости. Найден стационарный спектр турбулентности в условиях, когда ленгмюровские волны испытывают быстрое рассеяние, а их энергия ограничивается за счет спектральной перекачки при индуцированном рассеянии на ионах плазмы. Получены оценки стационарного уровня ленгмюровских волн с учетом поглощения энергии горячими электронами плазмы и проведено сопоставление этих оценок с результатами пучково-плазменных экспериментов на установках ИНАР и ГОЛ-1 в ИЯФ СО АН СССР.



ELECTRON BEAM RELAXATION IN A MAGNETICALLY  
 CONFINED PLASMA WITH RANDOM DENSITY  
 INHOMOGENEITIES

B.N.Breizman and V.I.Erofeev  
 Institute of Nuclear Physics,  
 630090, Novosibirsk, U S S R

A b s t r a c t

We consider the excitation of weak Langmuir turbulence by an electron beam injected into a plasma with random density inhomogeneities. We show that, in the presence of a sufficiently strong external magnetic field, the elastic scattering of Langmuir waves by density inhomogeneities is not capable of suppressing the two-stream instability. We find a stationary turbulence spectrum for the case in which Langmuir waves undergo a strong elastic scattering while their energy is limited due to the spectral transfer resulting from the wave induced scattering by plasma ions. We estimate the stationary turbulence level taking into account wave damping on hot plasma electrons. These estimates are compared with the experimental results obtained on the INAR and GOJ-1 devices at the Institute of Nuclear Physics (Novosibirsk).

I. В в е д е н и е

Для интерпретации лабораторных экспериментов по нагреву плазмы электронными пучками и для описания динамики электронных пучков в астрофизической плазме принципиально важен вопрос о возбуждении ленгмювской турбулентности и о влиянии этой турбулентности на релаксацию пучка. В плазме без магнитного поля пучок релаксирует за счет взаимодействия с волнами, удовлетворяющими условию черенковского резонанса

$$\omega - \vec{k}\vec{v} = 0. \quad (1)$$

Если плотность плазмы однородна, то волны, раскачиваемые пучком, нарастают до тех пор, пока не включатся те или иные нелинейные эффекты, ограничивающие их энергию. Если же в плазме имеются случайные неоднородности, то пучковая неустойчивость может стабилизироваться за счет другого механизма — упругого рассеяния волн на этих неоднородностях <sup>/1,2/</sup>. Такое рассеяние, если оно идет достаточно быстро, делает спектр ленгмювских волн почти изотропным, а при изотропном спектре, как было показано в работе <sup>/2/</sup>, волны не возбуждаются, а, напротив, затухают на электронах пучка. Подчеркнем, что этот механизм существенно связан с изотропностью закона дисперсии плазмонов. Поэтому вывод о стабилизирующей роли неоднородностей плотности не может быть непосредственно отнесен к плазме, находящейся в магнитном поле, где дисперсионная добавка к частоте ленгмювской волны зависит не только от величины, но и от направления волнового вектора. Случай магнитоактивной плазмы должен быть, следовательно, рассмотрен отдельно, что и составляет цель настоящей работы.

Напомним, что в плазме со слабым магнитным полем закон дисперсии ленгмювских волн имеет следующий вид <sup>/3/</sup>:

$$\omega_{\vec{k}} = \omega_{pe} \left[ 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \left( \frac{\omega_{ne}}{\omega_{pe}} \right)^2 \left( 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 c^2} \right) + \frac{3}{2} k^2 r_D^2 \right] \quad (2)$$

Здесь  $\theta$  — угол между волновым вектором и направлением поля, а  $r_D$  — дебаевский радиус. При возбуждении волн релятивистским электронным пучком ( $k \sim \omega_{pe}/c$ ;  $\theta \sim 1$ ) отношение теплового вклада в дисперсию к магнитному оценочно равно  $12\pi nT/H^2$ . Во всех системах с магнитным удержанием плазмы это отношение мало, т.е. влияние поля на дисперсию волн в таких системах оказывается определяющим.



Неоднородности плотности плазмы могут в реальных условиях возникать по разным причинам: это могут быть неоднородности, связанные со способом приготовления плазмы; звуковые колебания, возбуждаемые текущим по плазме током; медленные возмущения, порожденные высокочастотным давлением самих ленгмюровских волн и т.д. Уровень флуктуаций плотности  $\delta n/n$ , при котором неоднородность начинает влиять на пучковую неустойчивость, легко найти из условия равенства частоты упругого рассеяния ленгмюровских волн  $v_{eff}$  и инкремента неустойчивости  $\gamma$ . Для релятивистского пучка с не слишком малым угловым разбросом<sup>46</sup> это дает оценку<sup>47</sup> \*

$$\frac{\delta n}{n} \sim \left[ \gamma \left( \frac{\omega_{He}}{\omega_{pe}} \right)^2 \frac{\omega_{pe}}{qc} \right]^{1/2} \cdot \Delta \theta, \quad (3)$$

где  $q$  — характерное волновое число возмущений плотности. Если же

$$v_{eff} \gg \frac{1}{\Delta \theta} \gamma, \quad (4)$$

то рассеяние, как мы увидим, можно считать бесконечно быстрым. Именно с этого случая мы и начнем рассмотрение роли рассеяния.

Неравенство (4) означает, что рассеяние обеспечивает быструю эргодизацию спектра ленгмюровских волн (выравнивание спектральной плотности энергии вдоль поверхностей  $\omega_{\vec{k}} = \text{const}$ ). В такой ситуации мощность  $Q_{\omega}$ , теряемая пучком на возбуждение волн с частотой  $\omega$ , задается следующей формулой<sup>48</sup> \*\*):

$$Q_{\omega} = 2 W(\omega) \int \gamma_{\vec{k}} \delta(\omega - \omega_{\vec{k}}) d\vec{k}, \quad (5)$$

где  $W(\omega)$  — спектральная плотность энергии ленгмюровских волн, а  $\gamma_{\vec{k}}$  — инкремент неустойчивости.

\* Оценка (3) написана в предположении, что рассеяние носит диффузионный характер. Это имеет место при достаточно малых значениях  $q$  ( $q \ll \Delta \theta \omega_{pe}/c$ ).

\*\* Величина  $Q_{\omega}$  представляет собой мощность, приходящуюся на единичный интервал частоты, так что полная мощность, выделяемая в единице объема плазмы, равна  $\int Q_{\omega} d\omega$ .

В разделе 2 мы покажем, что при не слишком слабом магнитном поле ( $\omega_{He} > \sqrt{3} \omega_{pe}^2 r_D / v$ , где  $v$  — скорость пучка) величина  $Q_{\omega}$  в определенной области частот оказывается положительной. В этом отношении рассматриваемый случай качественно отличается от случая плазмы без магнитного поля, где  $Q_{\omega} < 0$  при всех  $\omega$ <sup>49</sup>.

В области положительности  $Q_{\omega}$  упругое рассеяние само по себе не приводит к стабилизации пучковой неустойчивости; здесь должен действовать какой-либо дополнительный механизм стабилизации. В качестве такого механизма мы рассмотрим спектральную перекачку ленгмюровских волн за счет их индуцированного рассеяния на ионах. Это будет сделано в разделе 3.

В заключительном (четвертом) разделе работы приведены оценки роли упругого рассеяния ленгмюровских волн в условиях экспериментов по пучковому нагреву плазмы, ведущихся в ИЯФ СО АН СССР. В основе этих оценок лежит предположение о том, что неоднородности плотности, на которых идет рассеяние, порождаются высокочастотным давлением ленгмюровских волн.

## 2. Интегральный инкремент неустойчивости

### 2.1. Смена знака интегрального инкремента в магнитоактивной плазме

Знак функции  $Q_{\omega}$  определяется знаком величины

$$\Gamma = \int \gamma_{\vec{k}} \delta(\omega - \omega_{\vec{k}}) d\vec{k}, \quad (6)$$

которую мы будем называть интегральным инкрементом. Зависимость  $\Gamma$  от магнитного поля обусловлена двумя причинами: влиянием поля на инкремент пучковой неустойчивости  $\gamma_{\vec{k}}$  и на закон дисперсии ленгмюровских волн  $\omega_{\vec{k}}$ .

Известно, что в магнитном поле черенковский резонанс (I) расщепляется на набор циклотронных резонансов

$$\omega_{\vec{k}} - k_{\parallel} v_{\parallel} - n |\Omega_{\parallel}| = 0, \quad (7)$$

где  $\Omega_{\parallel}$  — циклотронная частота электрона пучка. Это расщепление существенно для пучков с малым разбросом по продольной скорости

$$k_{\parallel} \Delta v_{\parallel} < \Omega_{\parallel}. \quad (8)$$



Если же

$$k_{\parallel} \Delta v_{\parallel} \gg \Omega_n, \quad (9)$$

то циклотронные резонансы с различными номерами  $n$  перекрываются, в результате чего влияние поля на  $\chi_{\vec{k}}$  оказывается малым (см. /5/); в этом предельном случае

$$\chi_{\vec{k}} = \omega_{pe} \frac{2\pi^2 e^2}{k^2} \int \vec{k} \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \delta(\omega_{pe} - \vec{k}\vec{v}) d\vec{p}, \quad (10)$$

где  $f$  - функция распределения электронов пучка.

Хотя формула (10) справедлива лишь для пучков с не слишком малым разбросом, она, как показано в Приложении I, пригодна для вычисления  $\Gamma$  также и в том случае, когда разброс  $\Delta v_{\parallel}$  настолько мал, что циклотронные резонансы расщеплены. Это странное на первый взгляд обстоятельство объясняется тем, что при  $\omega_{He} \ll \omega_{pe}$  интегральный инкремент включает в себя вклады всех циклотронных резонансов. Суммирование по резонансам оказывается эквивалентным замене в формуле (6) истинного инкремента выражением (10).

При вычислении  $\Gamma$  мы для сокращения записи будем пользоваться безразмерными переменными, которые вводятся с помощью следующих замен:

$$\vec{k} \rightarrow [\omega_{pe}/c] \vec{k}$$

$$\vec{p} \rightarrow [mc] \vec{p}$$

$$\vec{v} \rightarrow [c] \vec{v}$$

$$\omega_{\vec{k}} - \omega_{pe} \rightarrow \left[ \frac{\omega_{He}^2}{2\omega_{pe}} \right] \omega_{\vec{k}}$$

$$\omega - \omega_{pe} \rightarrow \left[ \frac{\omega_{He}^2}{2\omega_{pe}} \right] \omega$$

$$f \rightarrow \left[ \frac{n_b}{(mc)^3} \right] f$$

$$\chi_{\vec{k}} \rightarrow \left[ \frac{2\pi^2 e^2 n_b}{m \omega_{pe}} \right] \chi_{\vec{k}}$$

$$\Gamma \rightarrow \left[ \frac{4\pi^2 e^2 n_b}{m \omega_{He}^2} \left( \frac{\omega_{pe}}{c} \right)^3 \right] \Gamma$$

Здесь  $n_b$  - концентрация пучка.

В новых переменных формулы (2) и (6) принимают вид

$$\omega_{\vec{k}} = \frac{k_{\parallel}^2}{k^2} \left( 1 - \frac{1}{k^2} \right) + \beta k^2 \quad (12)$$

$$\Gamma = \int d\vec{k} \int d\vec{p} \frac{\vec{k}}{k^2} \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \delta(\omega - \omega_{\vec{k}}) \delta(1 - \vec{k}\vec{v}), \quad (13)$$

$$\text{где } \beta = \frac{3r_D^2 \omega_{pe}^4}{\omega_{He}^2 c^2} = \frac{12\pi n \Gamma}{H^2}.$$

Если разброс электронов пучка по импульсам мал (подробнее роль разброса будет обсуждена ниже), то в формуле (13) можно положить

$$f = \delta(\vec{p}_{\perp}) \delta(p_{\parallel} - p),$$

где  $p$  - средний импульс электронов, и выполнить интегрирование по  $\vec{p}_{\perp}$  и  $p_{\parallel}$ ; это дает

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} \int d\vec{k} \left( 1 - v^2 \frac{k_{\parallel}^2}{k^2} \right) \delta'(1 - k_{\parallel} v) \delta(\omega - \omega_{\vec{k}}).$$

Выполнив теперь интегрирование по  $\vec{k}_{\perp}$  и  $k_{\parallel}$ , получим окончательно

$$\Gamma = \frac{\pi}{p v} \frac{\partial}{\partial k_{\parallel}} \left( \frac{k^6 - k^4 k_{\parallel}^2 v^2}{k^6 \beta + k^2 k_{\parallel}^2 + k^2 - 2k_{\parallel}^2} \right) \Big|_{k_{\parallel} = \frac{1}{v}} \quad (14)$$

Здесь  $k^2$  следует рассматривать как функцию  $k_{\parallel}$  и  $\omega$ , определяемую условием  $\omega_{\vec{k}} = \omega$ , а дифференцирование по  $k_{\parallel}$  ведется при постоянном значении  $\omega$ .

Чтобы выяснить, как влияет на интегральный инкремент магнитное поле, обратимся к двум предельным случаям:  $\beta \rightarrow \infty$  и  $\beta \rightarrow 0$ . В первом из них преобладает тепловой вклад в дисперсию ленгмюровских волн, так что  $\omega_{\vec{k}} \approx \beta k^2$ . При этом

$$\Gamma = -\frac{2\pi}{p\omega} \begin{cases} 0; & \omega < \beta/v^2 \\ 1; & \omega > \beta/v^2. \end{cases} \quad (15)$$



В согласии с результатом работы /2/ полученное выражение для  $\Gamma$  отрицательно при всех  $\omega$ .

В пределе  $\beta \rightarrow 0$ , когда дисперсия волн определяется преимущественно магнитным полем, формулы (I2) и (I4) дают

$$\Gamma = \frac{2\pi k^4 v^2}{\rho} \cdot \frac{k^6(v^2+1) - k^4(v^4+2v^2+5) + k^2(3v^2+7) - 4}{[k^2(1+v^2) - 2]^3} \quad (I6)$$

Здесь квадрат волнового числа связан с  $\omega$  и  $V$  соотношением

$$\omega = \left(1 - \frac{1}{k^2 v^2}\right) \left(1 - \frac{1}{k^2}\right). \quad (I7)$$

В дополнение к формуле (I6) приведем еще упрощенные выражения для  $\Gamma$ , относящиеся к нерелятивистскому ( $\rho \ll 1$ ) и ультрарелятивистскому ( $\rho \gg 1$ ) пучкам:

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\rho^3} \frac{1}{(1-\omega)^2}; \quad \rho \ll 1; \quad 0 \leq \omega < 1 \quad (I8)$$

$$\Gamma = \frac{\pi}{2\rho} \frac{2\omega^{1/2} - 1}{\omega^{1/2}(1-\omega^{1/2})^2}; \quad \rho \gg 1; \quad 0 \leq \omega < 1. \quad (I9)$$

Как видно из этих формул, при  $\beta \rightarrow 0$  величина  $\Gamma$  для нерелятивистского пучка положительна при всех значениях  $\omega$ , а для ультрарелятивистского — при  $\omega > 1/4$ . Таким образом, при достаточно малых  $\beta$  упругое рассеяние волн само по себе не может привести к срыву пучковой неустойчивости, как это происходило в плазме без магнитного поля (см. формулу (I5)). Если увеличивать  $\beta$ , то интегральный инкремент в конце концов должен стать отрицательным для всех волн. Зависимость соответствующего граничного значения  $\beta$  от скорости пучка  $v$  показана на рис. I. Эта зависимость получена численно из соотношений (I2) и (I4).

Формулы (I8) и (I9) показывают, что в пределе  $\beta \rightarrow 0$  знаки  $\Gamma$  в области низких частот ( $\omega < 1/4$ ) для нерелятивистского и ультрарелятивистского пучков противоположны. Поэтому должна существовать некоторая критическая скорость пучка  $v_0$ , при которой выражение (I6) становится знакоопределенным, т.е. область затухания, присутствующая в инкременте (I9), полностью исчезает. Чтобы найти эту скорость, рассмотрим предварительно поведение  $\Gamma$

при  $\omega \rightarrow 0$ . В этом случае  $k \approx 1/v$  и, соответственно,

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\rho v^2} \frac{1-2v^2}{1-v^2} \quad (20)$$

(см. формулу (I6)).

Отсюда видно, что для волн с  $\omega \rightarrow 0$  инкремент  $\Gamma$  меняет знак при  $v = 1/\sqrt{2}$ . Покажем теперь, что при  $v < 1/\sqrt{2}$  инкремент (I6) положителен для всех  $\omega$ . Знаменатель в формуле (I6) положителен, поскольку  $k^2$  изменяется в пределах от  $1/v^2$  до  $\infty$ , так что знак  $\Gamma$  определяется числителем, представляющим собой многочлен третьей степени относительно  $k^2$ . Если  $k^2 \geq 1/v^2$  и  $v < 1/\sqrt{2}$ , то числитель (I6) также положителен, поскольку при  $k^2 = 1/v^2$  он положителен вместе со всеми своими производными, в чем легко убедиться непосредственно. Таким образом, искомая критическая скорость  $v_0$  равна  $1/\sqrt{2}$ .

## 2.2. Особенности интегрального инкремента в области высоких частот

Выражение (I6) для  $\Gamma$ , полученное в пределе  $\beta \rightarrow 0$ , оказывается расходящимся при  $\omega \rightarrow 1$  ( $k^2 \rightarrow \infty$ ). Эта расходимость возникла из-за полного пренебрежения тепловой добавкой к закону дисперсии ленгмюровских волн. Между тем при  $k^2 \rightarrow \infty$  тепловая добавка становится существенной даже в случае малых  $\beta$ . С учетом этой добавки выражение (I4) для  $\Gamma$  в области  $|\omega| \ll 1$  принимает вид

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\rho v^2} \frac{1-\omega}{[(1-\omega)^2 + \frac{4\beta}{v^2}]^{3/2}} \quad (21)$$

Отсюда, в частности, следует, что  $\Gamma$  меняет знак при  $\omega = 1$ . Простой анализ выражения (I4) показывает, что во всей области  $\omega > 1$  величина  $\Gamma$  остается отрицательной, причем по мере увеличения  $\omega$  формула (I4) переходит в (I5).

При выводе формулы (I4) и всех следующих из нее формул мы считали разброс пучка пренебрежимо малым. Выясним теперь, как учет разброса может повлиять на полученные результаты. Для этого обратимся к рисунку 2. На нем изображена резонансная область



$\bar{K}$  — пространства, т.е. область, в которой лежат волны, взаимодействующие с пучком. Ее границы определяются условием (I); они образуют угол  $\Delta\theta \ll 1$ , равный угловому разбросу пучка. На этом же рисунке изображены две линии постоянной частоты. Нижняя линия соответствует частоте, не слишком близкой к единице, а верхняя — случаю  $1 - \omega \approx (\Delta\theta)^2$ . Так как нижняя линия пересекает обе границы резонансной области, то находящиеся на этой линии волны взаимодействуют со всеми электронами, и  $\Gamma$  для нижней линии зависит лишь от интегральных характеристик пучка. Иначе обстоит дело для частот, близких к единице ( $1 - \omega \approx (\Delta\theta)^2$ ). Для них линия постоянной частоты при  $\beta = 0$  не выходит из резонансной области. Поэтому вклад в интегральный инкремент дает лишь часть электронов пучка, благодаря чему  $\Gamma$  начинает зависеть от деталей функции распределения электронов.

С учетом тепловой добавки линия постоянной частоты при достаточно больших значениях  $\kappa$  все же покидает резонансную область. Чтобы влияние углового разброса пучка на  $\Gamma$  было малым, участок линии  $\omega = \text{const}$ , находящийся внутри области резонанса, должен быть мал по сравнению с масштабом изменения  $\chi_{\bar{k}}$  в поперечном направлении. Это требование сводится к следующему неравенству:

$$\Delta\theta^4 \ll \beta/v^2. \quad (22)$$

Если условие (22) не выполнено, то  $\Gamma$  в области  $|1 - \omega| \approx \Delta\theta^2$  существенно зависит от углового разброса пучка. Поведение  $\Gamma$  в этом случае проанализировано в Приложении 2. Результат анализа сводится к следующему. При  $\Delta\theta^2 \ll |1 - \omega| \ll 1$  интегральный инкремент хорошо описывается формулой (2I). В области частот  $\omega > 1$  он отрицателен, а при  $1 - \omega \gg \Delta\theta^2$  — положителен. Смена знака  $\Gamma$  происходит внутри промежутка  $1 - \Delta\theta^2 < \omega < 1$ . Максимум функции  $\Gamma(\omega)$  находится при  $1 - \omega \sim \Delta\theta^2$ ; его ширина  $\Delta\omega \sim \Delta\theta^2$ . Максимальное значение  $\Gamma$  можно оценить по формуле (2I), положив в ней  $1 - \omega \approx \Delta\theta^2$ .

### 2.3. Интегральный инкремент при малых $\omega$ .

Необходимость уточнения формулы (I6) при малых  $\omega$  ( $\omega \sim \beta/v^2$ ) вызвана тем, что соответствующая линия постоянной частоты может оканчиваться в резонансной области или вообще не проникать в эту

область (см. рис. 3). Вычисляя  $\Gamma$  для таких частот, мы для простоты ограничимся здесь рассмотрением не слишком быстрых пучков ( $P \leq 1$ ). Аналогичное рассмотрение можно, впрочем, провести и для ультрарелятивистского пучка ( $P \gg 1$ ), но оно оказывается несколько более трудоемким.

Заметим, что при  $\beta \ll v^2$  колебания с частотами  $\omega \sim \beta/v^2$  распространяются под малыми углами к оси пучка. Для таких почти одномерных колебаний

$$\chi_{\bar{k}} = \int \frac{1}{\kappa_{||}} \frac{\partial f}{\partial p_{||}} \delta(1 - \kappa_{||} v_{||}) d\bar{p},$$

$$\omega_{\bar{k}} = \frac{\kappa_{\perp}^2}{\kappa_{||}^2} \left(1 - \frac{1}{\kappa_{||}^2}\right) + \beta \kappa_{||}^2.$$

С учетом этих выражений формула (I3) записывается в виде

$$\Gamma(\omega) = \int d\bar{k} d\bar{p} \frac{1}{\kappa_{||}} \frac{\partial f}{\partial p_{||}} \delta(1 - \kappa_{||} v_{||}) \delta\left[\omega - \frac{\kappa_{\perp}^2}{\kappa_{||}^2} \left(1 - \frac{1}{\kappa_{||}^2}\right) + \beta \kappa_{||}^2\right].$$

Принимая во внимание малость углового разброса пучка и ограничение  $P \leq 1$ , можно пренебречь здесь зависимостью  $v_{||}$  от  $P_{\perp}$ . Это позволяет выполнить интегрирование по  $P_{\perp}$ , т.е. ввести вместо  $f$  функцию распределения электронов по продольным импульсам

$$F(P_{||}) = \int f d\bar{p}_{\perp}.$$

Проводя теперь интегрирование по  $\kappa_{\perp}$ ;  $\kappa_{||}$  и  $P_{||}$ , получим

$$\Gamma(\omega) = -\frac{\pi}{v^2} \frac{1}{1 - v^2} F \Big|_{v_{||} = \sqrt{\beta/\omega}} +$$

$$+ \frac{2\pi}{Pv^2} \frac{1 - 2v^2}{1 - v^2} \int_{v_{||} = \sqrt{\beta/\omega}}^{\infty} F dP_{||}. \quad (23)$$

Второе слагаемое в этой формуле стремится к нулю при

$$\frac{\beta}{v^2} - \omega \gg \frac{\beta \Delta v_{||}}{v^3}$$

и переходит в выражение (20) при

$$\omega - \beta/v^2 \gg \beta \Delta v_{||} / v^3 \quad (\omega \ll 1).$$



Первое слагаемое отрицательно и отлично от нуля лишь в узком интервале частот

$$\left| \omega - \frac{\beta}{v^2} \right| \leq \frac{\beta \Delta v_{||}}{v^3}$$

В этом интервале оно в  $v/\Delta v_{||}$  раз больше второго слагаемого. Таким образом, результат уточнения формулы (16) сводится к тому, что в области малых частот обнаруживается интервал сильного затухания волн.

### 3. Эргодический спектр ленгмюровских волн

Кинетическое уравнение, описывающее возбуждение ленгмюровских волн пучком, спектральную перекачку волн за счет их индуцированного рассеяния на ионах и упругое рассеяние волн на случайных неоднородностях плотности, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{\vec{k}}}{\partial t} = & 2\gamma_{\vec{k}} N_{\vec{k}} + N_{\vec{k}} \int \frac{e^2}{4\pi m M} N_{\vec{k}_1} \frac{(\vec{k}\vec{k}_1)^2}{k^2 k_1^2} \delta' \left( \frac{\omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}_1}}{|\vec{k} - \vec{k}_1|} \right) d\vec{k}_1 + \\ & + \int (N_{\vec{k}_1} - N_{\vec{k}}) \frac{\omega_{pe}^2}{32\pi^2} \frac{(\vec{k}\vec{k}_1)^2}{k^2 k_1^2} (n_{\vec{k}_1 - \vec{k}} + n_{\vec{k} - \vec{k}_1}) \delta(\omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}_1}) d\vec{k}_1. \end{aligned} \quad (24)$$

В этом уравнении через  $\omega_{\vec{k}}$  обозначена дисперсионная добавка к плазменной частоте, а через  $N_{\vec{k}}$  и  $n_{\vec{x}}$ , соответственно, — спектральные функции ленгмюровских волн и неоднородностей плотности. Функции  $N_{\vec{k}}$  и  $n_{\vec{x}}$  нормированы условиями

$$W = \int \omega_{pe} N_{\vec{k}} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3};$$

$$\left\langle \left( \frac{\delta n}{n} \right)^2 \right\rangle = \int n_{\vec{x}} \frac{d\vec{x}}{(2\pi)^3}.$$

где  $W$  — плотность энергии ленгмюровских волн, а  $\left\langle \left( \frac{\delta n}{n} \right)^2 \right\rangle$  — средний квадрат относительных возмущений плотности плазмы. Спектральная перекачка описывается уравнением (24) в так называемом дифференциальном приближении, подразумеваемом, что изменение частоты в элементарном акте рассеяния волны на ионе мало по сравнению с шириной спектра волн (см., например, /6/).

Если уровень возмущений плотности  $n_{\vec{x}}$  достаточно высок, то последнее слагаемое в правой части (24) обеспечивает выравнивание распределения  $N_{\vec{k}}$  вдоль поверхностей  $\omega_{\vec{k}} = \text{const}$ . В этом случае можно считать, что  $N_{\vec{k}}$  зависит лишь от  $\omega_{\vec{k}}$ . Чтобы получить уравнение для функции  $N(\omega)$ , мы проинтегрируем обе части (24) по поверхности  $\omega_{\vec{k}} = \omega$ . Последнее слагаемое в правой части не даст вклада в интеграл, т.к. оно сохраняет число волн на каждой энергетической поверхности. В остальных слагаемых можно с достаточной точностью заменить  $N_{\vec{k}}$  на  $N(\omega)$ . В итоге получим

$$\frac{\partial N}{\partial t} \int \delta(\omega_{\vec{k}} - \omega) d\vec{k} = N \left[ 2\Gamma(\omega) + \frac{\partial}{\partial \omega_1} F^2(\omega; \omega_1) N(\omega_1) \right]_{\omega_1 = \omega} \quad (25)$$

где

$$F^2(\omega; \omega_1) = \frac{e^2}{4\pi m M} \int |\vec{k} - \vec{k}_1|^2 \left( \frac{\vec{k}\vec{k}_1}{k k_1} \right)^2 \delta(\omega - \omega_{\vec{k}}) \delta(\omega_1 - \omega_{\vec{k}_1}) d\vec{k} d\vec{k}_1 \quad (26)$$

Учитывая симметрию функции  $F$  относительно перестановки  $\omega$  и  $\omega_1$  можно переписать уравнение (25) в виде

$$\frac{\partial N}{\partial t} \int \delta(\omega - \omega_{\vec{k}}) d\vec{k} = N \left[ 2\Gamma(\omega) + F(\omega; \omega) \frac{\partial}{\partial \omega} F(\omega; \omega) N \right] \quad (27)$$

Это уравнение имеет следующее стационарное решение:

$$N(\omega) = \begin{cases} 0; & \omega > \omega_+ \\ \frac{2}{F(\omega; \omega)} \int_{\omega}^{\omega_+} \frac{\Gamma(\omega_1)}{F(\omega_1; \omega_1)} d\omega_1; & \omega < \omega_+ \end{cases} \quad (28)$$

Здесь в качестве верхней границы спектра  $\omega_+$  должна выбираться частота, при которой  $\Gamma(\omega) = 0$  и выше которой  $\Gamma < 0$ . В области низких частот спектр (28) либо обрывается (если при некоторой частоте  $\omega_- < \omega_+$  интеграл (28) обращается в ноль), либо тянется вплоть до области ленгмюровского конденсата. В последнем случае решение (28) соответствует конечному потоку энергии в конденсат.

Перейдем от функций  $F$  и  $N$  к соответствующим безразмерным функциям, сделав, кроме (II), следующие замены:



$$F^2 \rightarrow \frac{e^2}{\pi m M} \left(\frac{\omega_{pe}}{c}\right)^8 \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_{He}^2}\right)^2 F^2,$$

$$N \rightarrow 2\pi^3 M n_b \left(\frac{c}{\omega_{pe}}\right)^5 \frac{\omega_{He}^4}{\omega_{pe}^3} N.$$

При этом формула (28) остается неизменной, а выражение для  $F^2$  принимает вид

$$F^2 = \int \delta(\omega - \omega_{\vec{k}}) \delta(\omega - \omega_{\vec{k}_1}) \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k_1^2}\right) \left(k_{\parallel}^2 k_{1\parallel}^2 + \frac{1}{2} k_{\perp}^2 k_{1\perp}^2\right) d\vec{k} d\vec{k}_1 \quad (29)$$

Если частота  $\omega$  не слишком мала ( $\omega \gg \beta$ ), то основной вклад в  $F^2$  вносят большие волновые числа ( $k \gg 1$ ), так что в интеграле (29) можно положить

$$\omega_{\vec{k}} = \frac{k_{\perp}^2}{k^2} + \beta k^2$$

Тогда

$$F^2 = \frac{8\pi^2}{3\beta^4} \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \left[ \frac{\omega^{5/2}}{6} + \frac{\omega^{5/2}(1-\omega^2)}{48} + \frac{\omega^{5/2}(1-\omega)^3}{80} + \frac{(1-\omega)^3}{16} \left( \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\omega^{1/2}}{1-\omega^{1/2}} \right| - \omega^{1/2} - \frac{1}{3} \omega^{3/2} - \frac{1}{5} \omega^{5/2} \right) \right]^2 + \left[ \frac{\omega^{7/2}}{160} \left( 1 + \frac{14}{3} \omega + \omega^2 \right) + (1-\omega)^2 \left( \frac{3}{16} - \frac{1-\omega}{32} \right) \left( \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\omega^{1/2}}{1-\omega^{1/2}} \right| - \omega^{1/2} - \frac{1}{3} \omega^{3/2} - \frac{1}{5} \omega^{5/2} \right) \right]^2 \right\}$$

При  $\omega \ll 1$  функция  $F$  растет пропорционально  $\omega^2$ :

$$F = \frac{\pi}{\beta^2} \sqrt{\frac{8}{15}} \omega^2 \quad (\omega \ll 1), \quad (30)$$

а при  $\omega \rightarrow 1$  она принимает значение

$$F = \frac{\pi}{\beta^2} \sqrt{\frac{5}{12}}. \quad (31)$$

Проследим теперь более подробно за тем, как выглядит эргодический спектр (28) при  $\beta \ll v^2$ , обращая внимание на зависимость формы спектра от энергии электронов пучка. Относительно углового разброса  $\Delta\theta$  мы для определенности предположим, что

$$\Delta\theta \ll \left(\frac{\beta}{v^2}\right)^{1/4}. \quad (32)$$

Отметим, впрочем, что рассмотрение противоположного предельного случая ( $\Delta\theta \gg (\beta/v^2)^{1/4}$ ) также не вызывает затруднений.

При выполнении условия (32)  $\Gamma(\omega)$  обращается в ноль в точке  $\omega = 1$  (см. формулу (21)). Именно эта точка и отвечает верхней границе спектра.

Введем вместо спектральной функции  $N(\omega)$  более удобную характеристику — поток волн в сторону низких частот  $P(\omega)$ . В соответствии с формулами (27) и (28)

$$P(\omega) = \frac{1}{2} N^2 F^2 = 2 \left[ \int_{\omega}^1 \frac{\Gamma d\omega}{F} \right]^2. \quad (33)$$

Анализ выражения (33) показывает, что в узком интервале частот  $\Delta\omega \sim (\beta/v^2)^{1/2}$ , примыкающем слева к верхней границе спектра, поток резко возрастает от нуля до величины

$$P_{\max} = \frac{24 \beta^3}{5 \rho^2 v^2} \quad (34)$$

Достигнув этого уровня, поток остается практически постоянным вплоть до области малых частот ( $\omega \ll 1$ ). Для вычисления  $P(\omega)$  при не слишком малых  $\omega$  достаточно подставить в интеграл (33) вместо функции  $F$  ее значение при  $\omega = 1$  (см. формулу (31)), а вместо  $\Gamma(\omega)$  — выражение (21). Это дает

$$P(\omega) = \frac{96 \beta^4}{5 v^4 \rho^2} \left[ \frac{v}{(4\beta)^{1/2}} - \frac{v}{[4\beta + v^2(1-\omega)^2]^{1/2}} \right]^2. \quad (35)$$

Приведенная формула относится как к релятивистскому, так и к нерелятивистскому пучкам. При низких частотах ( $\omega \ll 1$ ) поведение потока для релятивистского и нерелятивистского пучков ока-



зывается качественно различным. В ультрарелятивистском случае поток спадает до нуля, что связано с отрицательностью интегрального инкремента  $\Gamma$  и убыванием функции  $F$  при малых  $\omega$ . Характерная ширина области, в которой происходит спад потока, по порядку величины равна  $\beta^{1/3}$ , а нижняя граница соответствующего спектра лежит при

$$\omega = \omega_- = (25\beta/288)^{1/3}.$$

Обрыв спектра свидетельствует о том, что в рассматриваемой ситуации пучок сам поглощает все излученные им волны и, следовательно, релаксирует, не теряя энергии.

В случае нерелятивистского пучка область применимости формулы (35) ограничена условием

$$\omega \gg (\beta/v^2)^{1/2}.$$

При меньших значениях  $\omega$  поток вновь начинает расти вплоть до  $\omega = \beta/v^2$ . В области  $\beta/v^2 < \omega \ll (\beta/v^2)^{1/2}$  этот рост описывается выражением

$$P(\omega) = \frac{15\beta^4}{v^6\omega^2}.$$

При дальнейшем уменьшении  $\omega$  поток резко спадает до величины (34), после чего остается постоянным. Спад происходит в области затухания волн на пучке (см. раздел 2.3). Зная поток (34), выходящий из области затухания и попадающий в конденсат, нетрудно вычислить энергию  $Q$ , выделяемую пучком в единицу времени в единице объема плазмы. В размерных переменных

$$Q = \frac{96}{5} \pi^5 \omega_{pe} \frac{M}{m} n_b^2 e^2 \left(\frac{c}{\omega_{pe}}\right)^2 \left(\frac{\omega_{ne}}{\omega_{pe}} \frac{c}{v}\right)^4 \beta^3.$$

Как видно из перечисленных результатов, в спектре, возбуждаемом нерелятивистским пучком, основная энергия приходится на колебания с малыми  $\omega$  ( $\omega \ll 1$ ). Волновые векторы и, соответственно, электрическое поле этих колебаний направлены под малыми углами к оси пучка. Поэтому квазилинейная диффузия электронов пучка по скоростям оказывается одномерной, что делает задачу о диффузии относительно простой.

В заключение этого раздела уточним условия применимости рассмотренной модели спектра.

Переходя от уравнения (24) к уравнению (25), мы пренебрегли влиянием неэргодичности на накачку волн. Для неэргодической добавки к спектру в области взаимодействия волн с пучком можно написать следующую оценку:

$$\Delta N \sim N \frac{\gamma_{\vec{k}}}{v_{eff}},$$

где  $v_{eff}$  — эффективная частота упругого рассеяния волн. Соответствующая поправка к величине  $\Gamma$  в уравнении (25) имеет вид

$$\Delta \Gamma \sim \int \frac{\gamma_{\vec{k}}^2}{v_{eff}} \delta(\omega - \omega_{\vec{k}}) d\vec{k}.$$

Требование малости  $\Delta \Gamma$  по сравнению с  $\Gamma$  приводит к неравенству (4).

Рассматривая эргодический спектр, мы пренебрегли также затуханием нерезонансных (не взаимодействующих с пучком) волн. Это может быть либо столкновительное затухание, либо затухание Ландау на "хвостах" распределения электронов плазмы. Роль затухания подчеркивается тем обстоятельством, что при  $\beta \ll v^2$  фазовый объем, приходящийся на нерезонансные волны, значительно превышает объем, приходящийся на волны, возбуждаемые пучком. Поэтому для применимости эргодической модели недостаточно, чтобы декремент затухания  $\nu$  был мал по сравнению с  $\gamma_{\vec{k}}$ , а требуется выполнение гораздо более жесткого условия: должна существовать область частот, в которой, несмотря на дополнительное затухание, остается положительным интегральный инкремент

$$\Gamma(\omega) = \int (\gamma_{\vec{k}} - \nu) \delta(\omega - \omega_{\vec{k}}) d\vec{k}.$$

Для релятивистского пучка это условие оценочно имеет вид

$$\nu < \gamma_{\vec{k}} \beta^{3/2} (\Delta\theta)^2. \quad (36)$$

Наряду с тем случаем, когда оно выполнено, представляет интерес и противоположный предельный случай:

$$\nu > \gamma_{\vec{k}} \beta^{3/2} (\Delta\theta)^2, \quad (37)$$



ответающий, в частности, условиям экспериментов по пучковому нагреву плазмы, ведущихся на установках ИНАР и ГОЛ-1 в ИЯФ СО АН. Мы обсудим этот режим в разделе 4.

#### 4. Учет затухания нерезонансных волн

Неравенство (37) означает, что в эргодическом спектре затухание преобладает над накачкой. Иначе говоря, при достаточно высокой частоте упругого рассеяния энергия ленгмюровских волн должна уменьшаться. Если флуктуации плотности, на которых идет рассеяние, порождаются самими ленгмюровскими волнами, то с уменьшением энергии этих волн уменьшается и частота рассеяния. С другой стороны, в отсутствие рассеяния пучковая неустойчивость привела бы к росту энергии ленгмюровских волн. Отсюда видно, что может существовать стационарное состояние, в котором упругое рассеяние поддерживает баланс между накачкой и затуханием. Ниже мы приведем оценки, относящиеся к такому состоянию \*). Напомним, что для плазмы без магнитного поля соответствующая задача была решена в работах [2,7].

Условие энергетического баланса позволяет написать следующее соотношение:

$$\gamma_{\vec{k}} W_R \sim \nu W_N, \quad (38)$$

где через  $W_R$  и  $W_N$  обозначены, соответственно, плотность энергии резонансных и нерезонансных волн. Стационарность спектра в резонансной области обеспечивается тем, что возбуждение волн уравновешивается их уходом из этой области вследствие упругого рассеяния. Поэтому частота рассеяния  $\nu_{\text{eff}}$  должна быть оценочно равна инкременту неустойчивости  $\gamma_{\vec{k}}$ :

$$\nu_{\text{eff}} \sim \gamma_{\vec{k}}. \quad (39)$$

Обратившись к уравнению (24), нетрудно выразить  $\nu_{\text{eff}}$  через среднеквадратичный уровень возмущений плотности плазмы, после чего соотношение (39) принимает вид

$$\omega_{pe} \left( \frac{\delta n}{n} \right)^2 \left( \frac{\omega_{pe}}{\omega_{ne}} \right)^2 \sim \gamma_{\vec{k}}. \quad (40)$$

\* В этих оценках мы для наглядности будем пользоваться размерными переменными.

Относительно возмущений плотности мы предположим, что они возникают в результате распадного взаимодействия ленгмюровских и ионно-звуковых волн. При этом спектральная функция возмущений

$n_{\vec{x}}$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial n_{\vec{x}}}{\partial t} = -2 \gamma_s(\vec{x}) n_{\vec{x}} + n_{\vec{x}} \int \omega_{\vec{k}\vec{k}_1\vec{x}} (N_{\vec{k}} - N_{\vec{k}_1}) d\vec{k} d\vec{k}_1 + (41) \\ + \frac{\omega_s(\vec{x})}{nT} \int \omega_{\vec{k}\vec{k}_1\vec{x}} N_{\vec{k}} N_{\vec{k}_1} d\vec{k} d\vec{k}_1,$$

где  $\omega_s(\vec{x})$  и  $\gamma_s(\vec{x})$  — частота и декремент затухания звука, а  $\omega_{\vec{k}\vec{k}_1\vec{x}}$  — вероятность распада (см., например, [8]):

$$\omega_{\vec{k}\vec{k}_1\vec{x}} = \omega_s(\vec{x}) \frac{e^2}{8\pi m T} \left( \frac{\vec{k}\vec{k}_1}{kk_1} \right)^2 \delta(\vec{k} - \vec{k}_1 - \vec{x}) \delta(\omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}_1} - \omega_s). \quad (42)$$

Вероятность (42) вычислена в предположении, что частота звука велика по сравнению с циклотронной частотой ионов. Это дает возможность пренебречь влиянием магнитного поля на закон дисперсии звука.

В стационарном состоянии спектр возмущений плотности полностью определяется спектром ленгмюровских волн. Пренебрегая вкладом ленгмюровских волн в затухание звука, что оправдывается получающимся результатом, имеем

$$n_{\vec{x}} = \frac{e^2 \omega_s^2}{16\pi m n T^2 \gamma_s} \int d\vec{k} d\vec{k}_1 N_{\vec{k}} N_{\vec{k}_1} \left( \frac{\vec{k}\vec{k}_1}{kk_1} \right)^2 \delta(\vec{k} - \vec{k}_1 - \vec{x}) \delta(\omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}_1}). \quad (43)$$

В этой формуле учтена малость частоты звука по сравнению с дисперсионной добавкой к частоте ленгмюровских волн. Заметим, что возмущения плотности порождаются преимущественно нерезонансными волнами, т.к. при  $\gamma_{\vec{k}} \approx \nu$  энергия нерезонансных волн превосходит энергию резонансных (см. (38)). Вычисляя  $n_{\vec{x}}$ , можно считать спектр нерезонансных волн эргодическим, т.к. частота упругого рассеяния этих волн, равная  $\nu_{\text{eff}}$ , велика по сравнению с  $\nu$ . Учитывая, что характерное волновое число нерезонансных волн равно  $\omega_{pe}/c \beta^{1/2}$  и ограничиваясь случаем изотермической плазмы, где  $\gamma_s \sim \omega_s$ , нетрудно получить из формулы (43) оценку

$$\left( \frac{\delta n}{n} \right)^2 \sim \omega_{ne} \left( \frac{m}{M} \right)^{1/2} \left( \frac{W_N}{nT} \right)^2 \left( \frac{\omega_{pe}}{\omega_{ne}} \right)^2 \quad (44)$$



Объединив теперь соотношения (38), (40) и (44), получим окончательно, что

$$\frac{W_N}{nT} \sim \left(\frac{\omega_{He}}{\omega_{pe}}\right)^2 \left(\frac{\gamma_{\vec{k}}}{\omega_{He}}\right)^{1/2} \left(\frac{M}{m}\right)^{1/4}, \quad (45)$$

$$\frac{W_R}{nT} \sim \frac{\nu}{\gamma_{\vec{k}}} \left(\frac{\omega_{He}}{\omega_{pe}}\right)^2 \left(\frac{\gamma_{\vec{k}}}{\omega_{He}}\right)^{1/2} \left(\frac{M}{m}\right)^{1/4}. \quad (46)$$

Эти оценки необходимо дополнить двумя условиями применимости. Первое из них состоит в том, что энергия ленгмюровских волн лежит ниже порога модуляционной неустойчивости:

$$W_N < nT \left(\frac{\omega_{He}}{\omega_{pe}}\right)^2. \quad (47)$$

Второе ограничение — это условие малости частоты спектральной перекачки нерезонансных волн по сравнению с декрементом их затухания. Оценив скорость спектральной перекачки с помощью уравнения (24), можно записать данное условие в виде

$$\omega_{pe} \frac{W_N}{nT} \frac{m}{M} \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_{He}}\right)^2 < \nu. \quad (48)$$

Неравенства (47) и (48) приводят к следующим ограничениям на параметры пучка и плазмы

$$\gamma_{\vec{k}} < \omega_{He} \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2}, \quad (49)$$

$$\nu > \omega_{pe} \left(\frac{m}{M}\right)^{3/4} \left(\frac{\gamma_{\vec{k}}}{\omega_{He}}\right)^{1/2}. \quad (50)$$

Если предположить, что затухание нерезонансных волн связано с кулоновскими столкновениями, то неравенство (50) оказывается весьма жестким; оно, в частности, не выполняется в интересующих нас экспериментах /9,10,11/. При этом индуцированное рассеяние ленгмюровских волн на ионах должно приводить к существенному стоку энергии в длинноволновую часть спектра, где, как показывают оценки, нарушаются условия применимости теории слабой турбулентности и развивается модуляционная неустойчивость, перехо-

дящая в ленгмюровский коллапс /12/. В процессе коллапса энергия ленгмюровских волн передается небольшой группе горячих электронов. При учете вклада этих электронов в затухание нерезонансных волн неравенство (50) приводит к следующему ограничению на их концентрацию  $n_r$ :

$$\frac{n_r}{n} > \left(\frac{m}{M}\right)^{3/4} \left(\frac{\gamma_{\vec{k}}}{\omega_{He}}\right)^{1/2}. \quad (51)$$

Входящий сюда инкремент  $\gamma_{\vec{k}}$  в случае релятивистского электронного пучка равен

$$\gamma_{\vec{k}} = \omega_{pe} \frac{n_b}{n} \frac{mc^2}{mc^2 + E} \frac{1}{(\Delta\theta)^2}$$

(см. /3/). После того, как концентрация горячих электронов достигнет уровня (51), становится применимой рассмотренная в данном разделе слаботурбулентная модель спектра.

Таким образом, коллапс может служить естественным механизмом, поставляющим электроны в ту область энергий, где они начинают взаимодействовать с нерезонансными волнами слаботурбулентного спектра. Граница этой области определяется минимальной фазовой скоростью нерезонансных волн и соответствует энергии

$$T \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_{He}}\right)^2.$$

Подчеркнем, что после образования "горячего хвоста" энергия, диссипируемая за счет коллапса, должна составлять лишь малую часть энергетических потерь пучка.

Принимая во внимание, что измеренная в экспериментах /9,10,11/ концентрация горячих электронов удовлетворяет условию (51), можно оценить величины  $W_R$  и  $W_N$  в этих экспериментах с помощью формул (45) и (46), полагая

$$\nu = \omega_{pe} n_r / n,$$

где  $n_r$  — экспериментальное значение концентрации. Получающиеся в результате численные значения  $W_R$  и  $W_N$  оказываются сопоставимыми друг с другом, что хорошо соответствует экспериментальной ситуации. Напомним, что в экспериментах величина  $W_R$  оценивается по измерениям углового и энергетического разброса



пучка на выходе из плазмы, а полная энергия волн — по наблюдению нагрева основной массы электронов плазмы за счет столкновительного затухания ленгмюровских колебаний.

Оцененный по полной концентрации горячих электронов декремент затухания нерезонансных волн может оказаться больше инкремента пучковой неустойчивости. В этом случае, проводя оценки, следует учитывать структуру распределения горячих электронов. Поскольку плотность этих электронов падает с ростом их энергии, то и затухание на них падает с уменьшением волнового числа. При некотором волновом числе  $k_*$  оно оказывается равным  $\gamma_{\vec{k}}$ . В этой точке спектр нерезонансных волн обрывается, так как волны с большими  $k$  затухают быстрее, чем им на смену приходят волны из резонансной области. Исходя из этих соображений, нетрудно модифицировать оценки (45) и (46), заменив в них максимальное волновое число нерезонансных волн величиной  $k_*$  и положив

$$\nu = \gamma_{\vec{k}}.$$

Отметим, что сопоставление наших оценок с экспериментальными результатами оправдано лишь при

$$\gamma_{\vec{k}} < \omega_{He} \left( \frac{m}{M} \right)^{1/2}, \quad (52)$$

так как при больших значениях  $\gamma_{\vec{k}}$  становится несправедливым приближение слабой турбулентности (см. (45)). Условие (52) хорошо выполняется в экспериментах на установке ГОЛ-1. В экспериментах на установке ИНАР оно выполняется лишь при достаточно большом угловом разбросе пучка ( $\Delta\theta > 20^\circ$ ). В случае же малого углового разброса на установке ИНАР должна наблюдаться сильная турбулентность, что подтверждается экспериментальной оценкой плотности энергии резонансных волн. Эта энергия оказывается выше порога модуляционной устойчивости (см. /II/).

Для более последовательной интерпретации экспериментальных данных необходимо дополнить соотношения (45) и (46) независимой оценкой концентрации горячих электронов. Такая оценка должна получаться из рассмотрения динамики нагрева электронов с учетом торможения на холодной плазме и ухода из ловушки. Решение соответствующей задачи представляет интерес еще и потому, что оно позволило бы сопоставить с экспериментом не только значение концентрации, но и энергетическое распределение горячих частиц. Этот вопрос, однако, требует отдельного обсуждения и выходит за рамки данной работы.

## Приложение I

В безразмерных переменных (II) инкремент пучковой неустойчивости в плазме со слабым магнитным полем ( $\omega_{He} \ll \omega_{pe}$ ) имеет вид

$$\gamma_{\vec{k}} = \frac{1}{k^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d\vec{p} \delta(1 - k_{||} v_{||} - n\nu) \cdot J_n^2 \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\nu} \right) \left( k_{||} \frac{\partial f}{\partial p_{||}} + \frac{n\nu}{v_{\perp}} \frac{\partial f}{\partial p_{\perp}} \right), \quad (I.1)$$

где  $\nu$  — отношение циклотронной частоты электронов пучка  $\Omega_n$  к плазменной частоте  $\omega_{pe}$ ; величина  $\nu$  в интересующей нас задаче мала ( $\nu \ll 1$ ).

Формула (I.1) легко получается из общего выражения для диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы, приведенного в обзоре /I3/. С учетом этой формулы интегральный инкремент (6) принимает вид

$$\Gamma(\omega) = \iint d\vec{p} d\vec{k} \delta(\omega - \omega_{\vec{k}}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2} J_n^2 \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\nu} \right) \cdot \delta(1 - k_{||} v_{||} - n\nu) \left( k_{||} \frac{\partial f}{\partial p_{||}} + \frac{1 - k_{||} v_{||}}{v_{\perp}} \frac{\partial f}{\partial p_{\perp}} \right). \quad (I.2)$$

Выделим входящую в это выражение сумму

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n) J_n^2(z), \quad (I.3)$$

где  $x = (1 - k_{||} v_{||})/\nu$ ;  $z = k_{\perp} v_{\perp}/\nu$ , и перепишем ее, воспользовавшись интегральным представлением  $\delta$  — функции:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n) J_n^2(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\tau} d\tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\tau} J_n^2(z) \quad (I.4)$$

Ряд, стоящий под знаком интеграла (I.4), удастся просуммировать

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(z) e^{in\tau} = J_0 \left( 2z \sin \frac{\tau}{2} \right)$$



(см. /14/, стр. II7).

Заменяя теперь функцию Бесселя  $J_0$  ее интегральным представлением

$$J_0(2z \sin \frac{\tau}{2}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{2iz \sin \varphi \sin \frac{\tau}{2}}$$

(см. /14/, стр. 22), получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n) J_n^2(z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-ix\tau + 2iz \sin \varphi \sin \frac{\tau}{2}} \quad (I.5)$$

При вычислении  $\Gamma(\omega)$  (см. (I.2)) выражение (I.5) интегрируется по  $K_{\perp}$  и  $K_{\parallel}$ . Поскольку под знак интеграла входит  $\delta(\omega - \omega_{\vec{k}})$ , интегрирование по  $K_{\perp}$  приводит к замене  $K_{\perp}$  на соответствующую функцию от  $K_{\parallel}$  и  $\omega$ . При дальнейшем интегрировании по  $K_{\parallel}$  величина  $x$  вследствие малости параметра  $\nu$  пробегает очень широкий интервал значений ( $\Delta x \approx \nu^{-1} \gg 1$ ). Поэтому в интеграле (I.5) существенны лишь малые значения  $\tau$ , что позволяет заменить  $\sin \frac{\tau}{2}$  на  $\tau/2$ . Таким образом, вместо суммы (I.3) достаточно подставить в формулу (I.2) следующий интеграл:

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-ix\tau + iz\tau \sin \varphi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(x - z \sin \varphi) d\varphi.$$

В результате  $\Gamma(\omega)$  приобретает вид

$$\Gamma(\omega) = \iint d\vec{p} d\vec{k} \frac{1}{k^2} \delta(\omega - \omega_{\vec{k}}) \delta(1 - k_{\parallel} v_{\parallel} - \vec{k}_{\perp} \vec{v}_{\perp}) \cdot \left( k_{\parallel} \frac{\partial f}{\partial p_{\parallel}} + \frac{1 - k_{\parallel} v_{\parallel}}{v_{\perp}} \frac{\partial f}{\partial p_{\perp}} \right).$$

С учетом аксиальной симметрии функции  $f$  эта формула совпадает с формулой (I3), что доказывает правомерность использования инкремента (I0) для вычисления  $\Gamma(\omega)$ .

## Приложение 2

Выполнив в формуле (I3) интегрирование по переменным  $\varphi$  и  $K_{\perp}$ , где  $\varphi$  - угол между векторами  $\vec{k}_{\perp}$  и  $\vec{p}_{\perp}$ , можно представить  $\Gamma(\omega)$  в следующем виде:

$$\Gamma = \int \left( A \frac{\partial f}{\partial p_{\parallel}} + B \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} \frac{\partial f}{\partial p_{\perp}} \right) d\vec{p} \quad (2.1)$$

$$A = \int \frac{k_{\parallel} dk_{\parallel}}{k^2 \left( \frac{\partial \omega}{\partial k_{\perp}^2} \right)_{k_{\parallel}} \left[ k_{\perp}^2 v_{\perp}^2 - (1 - k_{\parallel} v_{\parallel})^2 \right]^{1/2}} \quad (2.2)$$

$$B = \int \frac{(k_{\parallel} - 1/v_{\parallel}) dk_{\parallel}}{k^2 \left( \frac{\partial \omega}{\partial k_{\perp}^2} \right)_{k_{\parallel}} \left[ k_{\perp}^2 v_{\perp}^2 - (1 - k_{\parallel} v_{\parallel})^2 \right]^{1/2}} \quad (2.3)$$

Входящие сюда величины  $k_{\perp}^2$  и  $k^2 (\partial \omega / \partial k_{\perp}^2)$  следует считать функциями переменных  $K_{\parallel}$  и  $\omega$ ; вид этих функций задается законом дисперсии (I2).

Проанализируем поведение  $\Gamma(\omega)$  в диапазоне частот  $|\omega - 1| \ll 1$ , предполагая дополнительно, что  $\beta \ll v^2$  и  $(\Delta \theta)^4 \gg \beta / v^2$ . Именно в этой области параметров  $\Gamma$  существенно зависит от углового разброса пучка  $\Delta \theta$  \*).

Для интересующих нас частот дисперсионное соотношение (I2) дает

$$\omega - 1 = - \frac{1 + k_{\parallel}^2}{k^2} + \beta k^2 \quad (2.4)$$

Отсюда

$$k^2 = \frac{1}{2\beta} \left[ \omega - 1 + \sqrt{(\omega - 1)^2 + 4\beta(1 + k_{\parallel}^2)} \right] \quad (2.5)$$

$$k^2 \left( \frac{\partial \omega}{\partial k_{\perp}^2} \right)_{k_{\parallel}} = \sqrt{(\omega - 1)^2 + 4\beta(1 + k_{\parallel}^2)} \quad (2.6)$$

\* Напомним, что при  $(\Delta \theta)^4 \ll \beta / v^2$  угловой разброс практически не влияет на величину  $\Gamma$  (см. раздел 2.2).



Предположим сначала, что

$$(\Delta\theta)^2 \ll \omega - 1 \ll 1 \quad (2.7)$$

При этом в формулах (2.5), (2.6) можно провести разложение по малому параметру  $\beta(1+\kappa_{||}^2)/(\omega-1)^2$ :

$$\kappa_{\perp}^2 \approx \kappa^2 = \frac{\omega-1}{\beta} + \frac{1+\kappa_{||}^2}{\omega-1}$$

$$\kappa^2 \left( \frac{\partial \omega}{\partial \kappa_{\perp}^2} \right)_{\kappa_{||}} = \omega - 1 + 2\beta(1+\kappa_{||}^2)/(\omega-1)$$

Подставив величины  $\kappa_{\perp}^2$  и  $\kappa^2(\partial\omega/\partial\kappa_{\perp}^2)_{\kappa_{||}}$  в формулы (2.2), (2.3) и выполнив интегрирование по  $\kappa_{||}$ , получим

$$A = \frac{\pi}{\omega-1} \frac{1}{v_{||}|v_{||}|},$$

$$B = -\frac{\pi}{(\omega-1)^2} \frac{v_{\perp}^2}{v_{||}^3 |v_{||}|}.$$

Здесь выписаны лишь старшие члены разложения коэффициентов A и B по степеням малых параметров  $\beta/v^2(\Delta\theta)^4$  и  $(\Delta\theta)^2/(\omega-1)$ . Подстановка этих коэффициентов в формулу (2.1) дает

$$\Gamma(\omega) = -\frac{2\pi}{(\omega-1)^2 \rho v^2}; \quad (\Delta\theta)^2 \ll \omega - 1 \ll 1 \quad (2.8)$$

Аналогичным способом нетрудно найти  $\Gamma(\omega)$  при

$$(\Delta\theta)^2 \ll 1 - \omega \ll 1. \quad (2.9)$$

Результат соответствующих вычислений имеет вид

$$\Gamma(\omega) = \frac{2\pi}{(\omega-1)^2 \rho v^2}. \quad (2.10)$$

Отметим, что формулы (2.8) и (2.10) с точностью до несущественных добавок совпадают с формулой (2I).

Рассмотрим теперь поведение  $\Gamma(\omega)$  в диапазоне

$$|\omega - 1| \ll (\Delta\theta)^2 \quad (2.11)$$

Так же, как и в областях (2.7) и (2.9), основной вклад в  $\Gamma$  здесь связан со вторым слагаемым в формуле (2.1). Перепишем это

слагаемое, введя вместо  $\rho_{\perp}$  новую переменную интегрирования

$$x = \rho_{\perp}^2 - (1 + \rho_{||}^2)(1 - \kappa_{||}v_{||})^2 / \kappa_{\perp}^2 \quad :$$

$$\Gamma(\omega) = -2\pi \int \frac{\rho_{||}(1 + \rho_{||}^2)^{1/2}}{\kappa_{\perp}} \frac{(\kappa_{||} - 1/v_{||}) d\rho_{||} d\kappa_{||}}{[(\omega - 1)^2 + 4\beta(1 + \kappa_{||}^2)]^{1/2}} \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{x^{1/2}} \frac{\partial}{\partial x} f \left[ x + \frac{1 + \rho_{||}^2}{\kappa_{\perp}^2} (1 + \kappa_{||}^2 v_{||}^2) - 2 \frac{1 + \rho_{||}^2}{\kappa_{\perp}^2} \kappa_{||} v_{||}; \rho_{||} \right] dx \quad (2.12)$$

Учитывая малость углового разброса пучка, мы пренебрегли в этой формуле зависимостью энергии и продольной скорости электрона от поперечной составляющей импульса.

Неравенство (2.11) позволяет утверждать, что при  $|\kappa_{||}| \sim 1/v$

величина  $2 \frac{1 + \rho_{||}^2}{\kappa_{\perp}^2} \kappa_{||} v_{||}$  мала по сравнению с характерным значением  $\rho_{\perp}^2$ . Что же касается областей  $|\kappa_{||}| \ll 1/v$  и  $|\kappa_{||}| \gg 1/v$ , то в них

$$2 \frac{1 + \rho_{||}^2}{\kappa_{\perp}^2} |\kappa_{||} v_{||}| \ll \frac{(1 + \rho_{||}^2)(1 + \kappa_{||}^2 v_{||}^2)}{\kappa_{\perp}^2}.$$

Пренебрегая поэтому в аргументе функции  $f$  малой добавкой

$2 \kappa_{||} v_{||} (1 + \rho_{||}^2) / \kappa_{\perp}^2$ , получим

$$\Gamma(\omega) = 2\pi (2\beta)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa_{||} [(\omega - 1)^2 + 4\beta(1 + \kappa_{||}^2)]^{-1/2} \left[ \omega - 1 + \sqrt{(\omega - 1)^2 + 4\beta(1 + \kappa_{||}^2)} \right]^{-1/2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \rho_{||}^2) d\rho_{||} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{1/2}} \frac{\partial}{\partial x} f \left[ x + \frac{2\beta(1 + \rho_{||}^2)(1 + \kappa_{||}^2 v_{||}^2)}{\omega - 1 + \sqrt{(\omega - 1)^2 + 4\beta(1 + \kappa_{||}^2)}}; \rho_{||} \right] \quad (2.13)$$

Функцию распределения  $f$  естественно считать монотонно убывающей функцией поперечного импульса. При этом во всей области (2.11) интегральный инкремент оказывается отрицательным.

Рассмотренные предельные случаи дают в совокупности следующую качественную картину поведения  $\Gamma(\omega)$  в области  $|\omega - 1| \ll 1$ . По мере увеличения частоты функция  $\Gamma(\omega)$  сначала возрастает в соответствии с формулой (2.10). Достигнув максимума при  $1 - \omega \sim (\Delta\theta)^2$ , она затем меняет знак, что также происходит при  $1 - \omega \sim (\Delta\theta)^2$ . При дальнейшем увеличении частоты интегральный инкремент остается отрицательным (см. формулы (2.13), (2.8)).



### Л и т е р а т у р а

1. Рютов Д.Д. В кн.: Проблемы теории плазмы: Труды II Международной конференции. Киев, 1974. Наукова думка, 1976, с.168.
2. Nishikawa K., Ryutov D.D. J. Phys. Soc. Japan, 1976, 41, 1757.
3. Breizman B.N., Ryutov D.D. Nucl. Fusion, 1974, 14, 873.
4. Breizman B.N., Ryutov D.D. In: Proc. of the Int. Conf. on Plasma Physics. Nagoya, 1980, v. 2, p. 55.
5. Брейзман Б.Н. Диссертация, Новосибирск, 1977.
6. Галеев А.А., Каршман В.И., Сагдеев Р.З. Ядерный синтез, 1965, 5, с.29.
7. Малкин В.М. ЭЭТФ, 1982, 83, с.88.
8. Цытович В.Н. Нелинейные эффекты в плазме. М.: Наука, 1967, с.279.
9. Breizman B.N., Kruglyakov Eh.P. In: Proc. of the XV Int. Conf. on Phenomena in Ionized Gases. Invited papers. Minsk, 1981, p. 93.
10. Arzhannikov A.V., Burdakov A.V., Koidan V.S., Vyacheslavov L.N. Phys. Scripta, 1982, 2, 303.
11. Arzhannikov A.V., Burdakov A.V., Burmasov V.S., Koidan V.S., Konyukhov V.V., Mekler K.I., Rogozin A.I., Vyacheslavov L.N. In: Proc. of the 3-rd Int. Topical Conf. on High Power Electron and Ion Beam Research and Technology. Novosibirsk, 1979, v. 1, p. 29.
12. Захаров В.Е. ЭЭТФ, 1972, 62, с.1745.
13. Шафранов В.Д. В кн.: Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1963, вып.3, с.76.
14. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. т. II, М.: Наука, 1966.

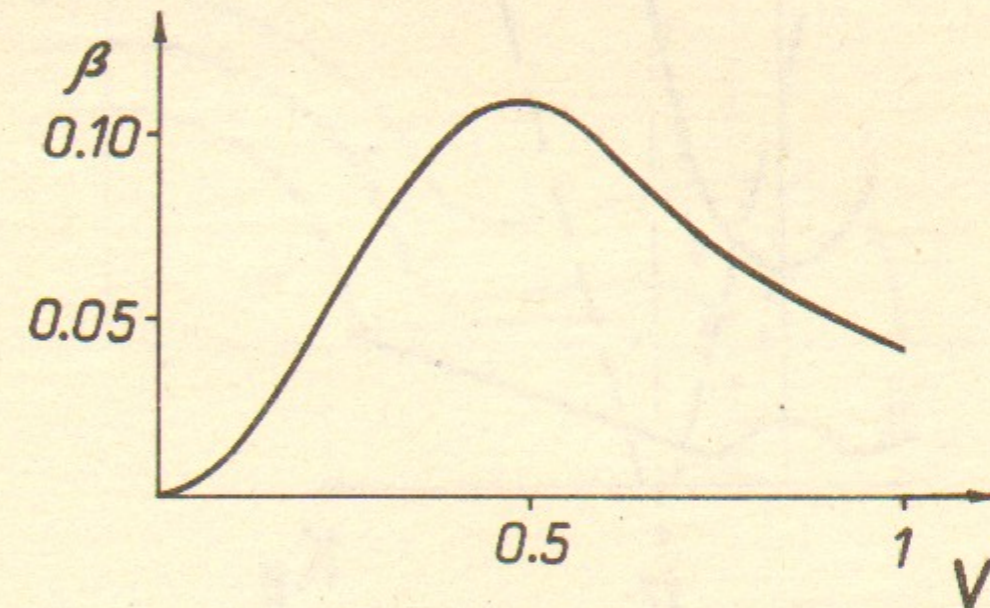


Рис. I. Зависимость граничного значения  $\beta$  от скорости пучка  $v$ , измеренной в единицах скорости света. В области, лежащей выше кривой  $\beta(v)$ , интегральный инкремент отрицателен при всех  $\omega$ . При малых скоростях пучка ( $v \ll 1$ )  $\beta(v) \approx v^2$ .



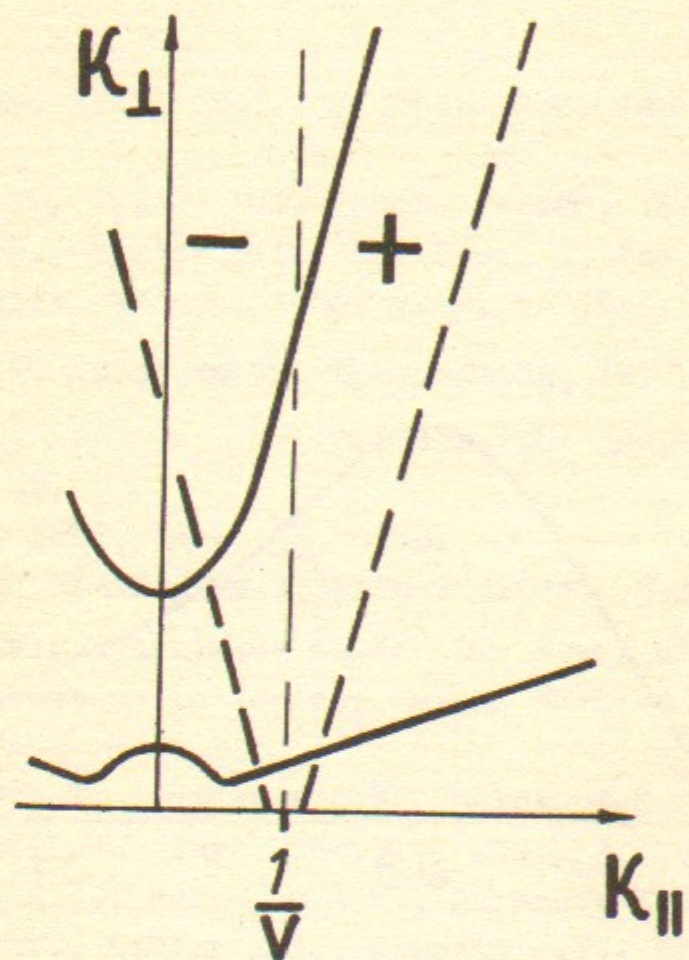


Рис.2. Резонансная область (показана штриховой линией) и линии постоянной частоты при  $\omega \gg \beta/v^2$ . Знаки "+" и "-" указывают области возбуждения и поглощения волн пучком. Компоненты волнового вектора  $K_{||}$  и  $K_{\perp}$  измеряются в единицах  $\omega_{pe}/c$ ; скорость пучка  $v$  - в единицах скорости света.

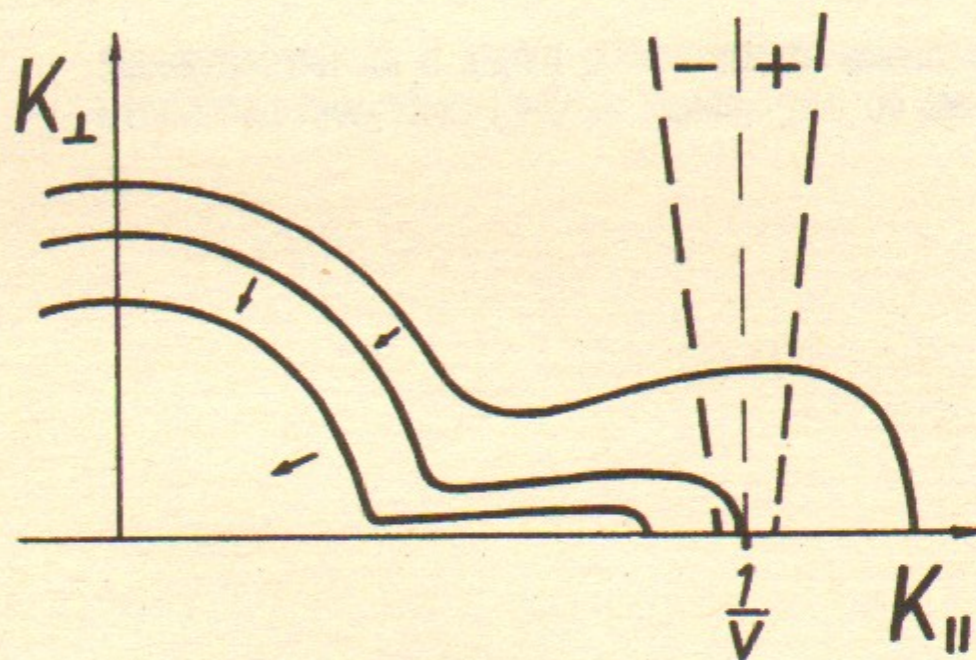


Рис.3. Резонансная область и линии постоянной частоты при малых  $\omega$ . Стрелками показано направление уменьшения частоты.



Б.Н.Брейзман, В.И.Ерофеев

РЕЛАКСАЦИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В МАГНИТОАКТИВНОЙ  
ПЛАЗМЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ ПЛОТНОСТИ

Препринт  
№ 83- 52

Работа поступила 25 июня 1982г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов

Подписано к печати 3.05-1983 г. МН 17525

Формат бумаги 60x90 1/16 Усл. 1,9 печ.л., 1,5 учетно-изд.л.

Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 52.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90