35

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

ИЯФ

В.М.Малкин

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕЛАКСАЦИЯ ПУЧКА РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ В ПЛАЗМЕ: ЛЕНГМЮРОВСКИЙ КОНДЕНСАТ

ПРЕПРИНТ 83—58

НОВОСИБИРСК

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕЛАКСАЦИЯ ПУЧКА РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ В ПЛАЗМЕ: ЛЕНГМЮРОВСКИЙ КОНДЕНСАТ

В.М.Малкин

А Н Н О Т А Ц И Я

Найден спектр длинноволновой ленгмюровской турбулентности ("конденсата") в зависимости от поступающего извне потока энергии. Исследовано взаимодействие пучка релятивистских электронов с плазмой в условиях, когда оно сопровождается конденсацией ленгмюровских волн, - тем самым закрыта обширная брешь в теории релаксации.

NONLINEAR RELAXATION OF A RELATIVISTIC ELECTRON BEAM IN A PLASMA: LANGMUIR CONDENSATE

V.M.Malkin

A b s t r a c t

The spectrum of longwave Langmuir turbulence ("condensate") is found as a function of the incoming energy flow. The interaction of a relativistic electron beam with a plasma is studied under conditions when Langmuir condensate is formed; thus a considerable gap in the theory of relaxation is filled

В в е д е н и е

После появления работ [I,2] в теории взаимодействия пучков релятивистских электронов с плазмой сложилось необычное положение дел: релаксация достаточно концентрированных пучков оказалась изученной при любых значениях параметра γ/ν_e (где γ – инкремент пучковой неустойчивости, ν_e – частота кулоновских столкновений), в то время как для относительно слабых пучков теория (см., например, [3,4]) по-прежнему охватывала лишь узкий диапазон значений этого параметра ($\gamma/\nu_e \sim 1$). "Слабыми" здесь названы пучки, в стабилизации неустойчивости которых существенную роль играет нелинейный процесс низшего порядка по энергии ленгмюровских волн – их индуцированное рассеяние на ионах. Согласно [I], таковы пучки, удовлетворяющие условию

$$\gamma < \frac{\nu_s}{\Omega_s} g^3 \omega_0 \qquad \text{(I)}$$

(Здесь $\omega_0 \sim \omega_p k_0^2 r_D^2$ – ширина ленгмюровского спектра, $k_0^{-1} \sim c/\omega_p$ – характерная длина возбуждаемых пучком ленгмюровских волн, Ω_s и ν_s – частота и декремент затухания флуктуаций плотности с пространственным масштабом k_0^{-1}, $g \sim \frac{\Omega_s}{\omega_0} \ll 1$). Неравенство (I), особенно при $\nu_s \sim \Omega_s$, может выполняться для весьма мощных пучков, представляющих интерес во многих, в том числе и термоядерных, приложениях.

Цель настоящей работы состоит в исследовании релаксации таких пучков при произвольных значениях параметра γ/ν_e. Поскольку случай $\gamma/\nu_e \ll 1$ неинтересен (нет неустойчивости), а случай $\gamma/\nu_e \sim 1$ изучен, ниже предполагается

$$\frac{\gamma}{\nu_e} \gg 1 \qquad (2)$$

При этом создаваемый индуцированным рассеянием на ионах поток энергии вниз по частоте не успевает поглотиться за счет столкновений и приводит к появлению длинных ленгмюровских волн – конденсата.

Исследованию конденсата и его влияния на спектр коротких ленгмюровских волн посвящено большое количество работ (см., например, [5-8]). Не вдаваясь в их критический анализ, отметим, что при ближайшем рассмотрении все известные нам концепции конденсата оказались внутренне противоречивыми. В следующем разделе будет предложена схема конденсата, которая представляется нам свободной от противоречий. В § 3 эта схема будет использована при отыскании спектра плазменной турбулентности, возбуждаемой пучком релятивистских электронов. Для того, чтобы сущность рассматриваемых эффектов не затемнялась обилием возможных спектров и техническими деталями, мы ограничимся случаем изотермической плазмы:

$$\nu_s \sim \Omega_s , \quad \gamma \ll g^3 \omega_0 , - \qquad (1')$$

и будем работать на уровне оценок, - точные выкладки будут приводиться лишь в той мере, в какой они необходимы для обоснования используемых предположений.

2. Как устроен конденсат?

В данном разделе будут изучены стационарные спектры длинноволновой ленгмюровской турбулентности при различных значениях втекающего в конденсат потока энергии Π.

Предположим, что полная плотность энергии волн в конденсате гораздо меньше порога модуляционной неустойчивости конденсата как целого:

$$\frac{W_c}{n_0 T} \ll k_c^2 r_D^2 \qquad (3)$$

В дальнейшем выяснится, что это условие эквивалентно предположению о малости характерного волнового числа в конденсате k_c по сравнению с шириной ядра индуцированного рассеяния на ионах k_*:

$$k_c \ll k_* \equiv g k_0 \equiv \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} r_D^{-1} \qquad (4)$$

При условии (3) турбулентность в большей части конденсата будет слабой и окажется применимым кинетическое уравнение

$$\frac{dN_{\vec{k}}}{dt} = \left[\gamma_*(\vec{k}) - \nu_e\right] N_{\vec{k}} + \gamma_i(\vec{k}) N_{\vec{k}} + I_{\vec{k}} \qquad (5)$$

Здесь $N_{\vec{k}}$ - спектральная плотность ленгмюровских волн;

$$\gamma_i(\vec{k}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_p^2}{8 n_0 T} \int\limits_{k_1 \ll k_*} d^3 k_1 \left(\frac{\vec{k}\vec{k}_1}{k k_1}\right)^2 \frac{\omega_{k_1} - \omega_k}{|\vec{k}_1 - \vec{k}| v_{Ti}} N_{\vec{k}_1} - \qquad (6)$$

инкремент индуцированного рассеяния на ионах волн конденсата друг в друга,

$$\omega_k = \frac{3}{2} \omega_p k^2 r_D^2 -$$

дисперсионная добавка к частоте ленгмюровских волн;

$$I_{\vec{k}} = \frac{\pi}{2^6} \frac{\omega_p^4}{(n_0 T)^2} \int d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 k_3 \, \delta(\vec{k} - \vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3) \times$$

$$\times \delta(\omega_k - \omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3}) \left[\frac{(\vec{k}\vec{k}_1)(\vec{k}_2\vec{k}_3) + (\vec{k}\vec{k}_3)(\vec{k}_1\vec{k}_2)}{k k_1 k_2 k_3}\right]^2 \times \qquad (7)$$

$$\times \left(N_{\vec{k}_1} N_{\vec{k}_2} N_{\vec{k}_3} - N_{\vec{k}} N_{\vec{k}_1} N_{\vec{k}_2} + N_{\vec{k}} N_{\vec{k}_1} N_{\vec{k}_3} - N_{\vec{k}} N_{\vec{k}_2} N_{\vec{k}_3}\right) -$$

столкновительный член, описывающий четырехплазмонное взаимодействие в конденсате;

$$\gamma_*(\vec{k}) = \frac{\omega_p^2}{2 n_0 T} \int\limits_{k_1 \gtrsim k_*} d^3 k_1 \left(\frac{\vec{k}\vec{k}_1}{k k_1}\right)^2 U_{\vec{k}_1 - \vec{k}, \omega_{k_1} - \omega_k} N_{\vec{k}_1} - \qquad (8)$$

инкремент индуцированного рассеяния на ионах волн из области $k \gtrsim k_*$ в конденсат,

$$U_{\vec{k}\omega} = \operatorname{Im} \frac{\rho_{\vec{k}\omega}}{1 + \rho_{\vec{k}\omega}} , \quad \rho_{\vec{k}\omega} = T \int d^3 p \, \frac{\vec{k} \frac{\partial f}{\partial \vec{p}}}{\omega - \vec{k}\vec{v} + i0} ,$$

$f(\vec{p})$ - функция распределения ионов по импульсу, нормированная на единицу[1].

В области $k \ll k_*$ можно пренебречь зависимостью ядра $U_{\vec{k}_1 - \vec{k}, \omega_{k_1} - \omega_k}$ от $\vec{k}$ и считать инкремент $\gamma_*(\vec{k})$ зависящим лишь от направления $\vec{k}$. Характер угловой зависимости $\gamma_*(\vec{k})$

---

1) При выводе формулы (6) функция f считалась для определенности максвелловской.

определяется видом ленгмюровского спектра в области $k_1 \sim k_*$, по которой реально ведется интегрирование в (8). Если спектр в этой области анизотропен или даже сингулярен, то $\gamma_*(\vec{k})$ является функцией с анизотропией порядка единицы. При изотропном спектре $\gamma_*(\vec{k})$ можно считать константой.

Исследование конденсата мы начнем с наиболее интересного случая $\gamma_* \gg \nu_e$, когда столкновения несущественны и поглощение волн может быть только нелинейным. Как выяснится в дальнейшем, оно происходит в области $k \sim k_m \ll k_c$ посредством ленгмюровского коллапса [9], причем коллапсирующие каверны почти не влияют на спектр слабой турбулентности в области $k \gg k_m$, который благодаря этому может быть найден из уравнения (5).

При $k \sim k_c$ для входящих в уравнение (5) нелинейных инкрементов справедливы оценки:

$$\gamma_i(k_c) \sim \omega_p \frac{W_c}{n_0 T} \frac{k_c}{k_*}, \qquad \gamma_f(k_c) \sim \frac{I_{k_c}}{N_{k_c}} \sim \omega_p \left(\frac{W_c}{n_0 T}\right)^2 \frac{1}{(k_c r_D)^2}. \tag{9}$$

Использованное здесь предположение о малости энергии волн с $k_c \ll k \ll k_*$ (которое в итоге окажется верным) выполнимо, если время ухода этих волн в основную часть конденсата вследствие индуцированного рассеяния на ионах не превышает времени четырехплазмонного взаимодействия. Приближая $k \to k_c$ сверху, находим:

$$\gamma_i(k_c) \gtrsim \gamma_f(k_c). \tag{10}$$

С другой стороны, при уменьшении k в несколько раз в области $k \sim k_c$ нелинейный инкремент $\gamma_i(\vec{k})$ изменяется на величину порядка своего характерного значения (и даже меняет знак). Для обеспечения стационарности это изменение должно компенсироваться четырехплазмонным процессом. Последнее возможно только при

$$\gamma_i(k_c) \lesssim \gamma_f(k_c). \tag{11}$$

Из условий (10) и (11) следует

$$\gamma_i(k_c) \sim \gamma_f(k_c). \tag{12}$$

Эта оценка в сочетании с (9) дает связь между W_c и k_c:

$$\frac{W_c}{n_0 T} \sim (k_c r_D)^2 \frac{k_c}{k_*}. \tag{13}$$

Для установления связи γ_* с k_c заметим, что четырехплазмонное взаимодействие сохраняет $\int d^3k\, \omega_k N_{\vec{k}}$, а индуцированное рассеяние на ионах уменьшает этот интеграл вдвое за время $\sim \gamma_i^{-1}(k_c)$. В стационарном режиме величина $\int d^3k\, \omega_k N_{\vec{k}}$ поддерживается на постоянном уровне за счет прихода волн из области $k \gtrsim k_*$, следовательно,

$$\gamma_* \sim \gamma_i(k_c) \sim \omega_p (k_c r_D)^2 \left(\frac{k_c}{k_*}\right)^2. \tag{14}$$

Подставив оценки (13), (14) в формулу $\Pi \sim \gamma_* W_c$ для втекающего в конденсат потока энергии, выразим k_c через Π:

$$k_c \sim k_* \left(\frac{\Pi}{\Pi_*}\right)^{1/7} \tag{15}$$

Предположения (3), (4) оправданы при

$$\Pi \ll \Pi_* \equiv \omega_p n_0 T (k_* r_D)^4 \tag{16}$$

Далее выяснится, что в интересующей нас задаче о релаксации неравенство $\Pi < \Pi_*$ совпадает с (1'). Поэтому мы будем считать условие (16) выполненным и займемся обсуждением других вопросов, оставшихся открытыми при выводе оценок (13)-(15).

Для выяснения того, насколько быстро спадает спектр вглубь области $k \gg k_c$, заметим, что в ней нелинейный инкремент $\gamma_i(\vec{k})$ гораздо больше γ_*:

$$\gamma_i(\vec{k}) \sim \omega_p \frac{W_c}{n_0 T} \frac{k}{k_*} \sim \frac{k}{k_c} \gamma_* \gg \gamma_*$$

Поэтому форма "хвоста" конденсата определяется из условия баланса между индуцированным рассеянием волн внутри конденсата и четырехплазмонным процессом. Результат можно угадать без вычислений. Действительно, в отсутствие потока энергии из коротковолновой ($k \gtrsim k_*$) области в конденсат величина k_c уменьшалась бы вдвое за время $\sim \gamma_i^{-1}(k_c)$, большое по сравнению со временем нелинейного взаимодействия волн "хвоста". Уменьшение k_c можно интерпретировать как остывание газа плазмонов вследствие их трения о "термостат", роль которого играют ионы плазмы. Ввиду медленности остывания в указанном выше смысле, распределение "хвостовых" плазмонов должно успевать приблизиться к равновесному. Естественно предположить, что последнее окажется больцмановским[2)]:

$$N_k \propto \exp(-k^2/k_c^2) . \tag{I7}$$

Точный расчет, описанный в Приложении, подтверждает эту догадку.

Отметим, что решенная в Приложении задача отыскания коротковолновой асимптотики конденсата обсуждалась ранее в статье [II], причем результат был другим: спектр спадал степенным образом. Причина расхождения состоит в ошибке, допущенной авторами [II] при усреднении по углам ядра четырехплазмонного взаимодействия. Позднее использование той же неправильной формулы для усредненного ядра привело к выводу о существовании стационарного конденсата без прихода волн из области $k \gtrsim k_*$ (см. [5], стр.I93)[3)]. Невозможность такого стационара даже в отсутствие столкновений следует из уже упоминавшегося факта сохранения $\int d^3k\, \omega_k N_{\vec{k}}$ при четырехплазмонном взаимодействии и уменьшения этой величины при индуцированном рассеянии на ионах.

Переходя к обсуждению вида спектра в области $k \ll k_c$, предположим, что в ней поток энергии практически не зависит от k вплоть до некоторого $k_m \ll k_c$ и создается локальным четырехплазмонным взаимодействием. Пусть $W(k)$ - полная плотность энергии волн с длинами порядка k^{-1}:

$$W(k) \sim \omega_p k^3 N_{\vec{k}} .$$

Для обратного времени локального четырехплазмонного взаимодействия справедлива оценка

$$\gamma_f(\vec{k}) \sim \omega_p \left[\frac{W(k)}{n_0 T}\right]^2 \frac{1}{(k r_D)^2} . \tag{I8}$$

Из условия постоянства потока энергии по спектру $\gamma_f(k) W(k) \sim \sim \Pi \sim \gamma_* W_c$ находим:

$$W(k) \sim W_c \left(\frac{k}{k_c}\right)^{2/3}, \quad N_{\vec{k}} \sim \frac{W_c}{\omega_p k_c^3}\left(\frac{k_c}{k}\right)^{7/3}, \tag{I9}$$

$$\gamma_f(\vec{k}) \sim \gamma_* \left(\frac{k_c}{k}\right)^{2/3} .$$

В соответствии со сделанным выше предположением, четырехплазмонное взаимодействие оказывается при $k \ll k_c$ самым быстрым:

$$\gamma_f(k) \gg \gamma_i(k) \sim \gamma_* .$$

Подставив найденный спектр в четырехплазмонный столкновительный член, нетрудно проверить, что предположение о локальности взаимодействия по k также выполняется: основной вклад в интеграл дает область $k_1 \sim k_2 \sim k_3 \sim k$. Наконец, поток энергии $\delta\Pi(k) \sim \gamma_* W(k)$, поступающий из области $k \gtrsim k_*$ в масштаб $k \ll k_c$, гораздо меньше переносимого по спектру потока $\Pi \sim \gamma_* W_c$ и потому последний можно считать постоянным. Действуя по схеме, предложенной в [I2], нетрудно показать, что поток Π действительно направлен в длинноволновую область, а также вычислить коэффициенты в формулах (I9).

Нижняя граница k_m спектра (I9) определяется из условия его модуляционной устойчивости, которое для волн с длинами порядка k^{-1} имеет вид

$$W(k) < W_*(k) \sim n_0 T (k r_D)^2 .$$

Отношение

$$\frac{W(k)}{W_*(k)} \sim \frac{W_c}{W_*(k_c)} \left(\frac{k_c}{k}\right)^{4/3}$$

[2)] Эти рассуждения не связаны со спецификой взаимодействия и потому применимы во всех случаях, когда квазичастицы в какой-либо части спектра взаимодействуют быстрее, чем эволюционирует спектр в целом. Например, можно, не проводя вычислений, утверждать, что рассмотренная в [I0] коротковолновая асимптотика автомодельного спектра капиллярных волн должна бысть больцмановской. Отличие полученного в [I0] результата от данного связано с незаконностью использованного авторами диффузионного приближения.

[3)] Этот вывод не был сформулирован явно, хотя прямо следовал из полученных результатов.

растет с уменьшением k и при $k \sim k_m$ становится величиной порядка единицы. Учитывая (I3) и (I5), находим

$$k_m \sim k_* \left(\frac{\Pi}{\Pi_*}\right)^{1/4}. \tag{20}$$

При $k \sim k_m$ инкремент четырехплазмонного процесса оценочно равен дисперсионной добавке к частоте волн:

$$\gamma_f(k_m) \sim \omega_m \sim \omega_p (k_m r_D)^2.$$

Инкремент модуляционной неустойчивости является величиной того же порядка при $\frac{W(k)}{W_*(k)} - 1 \sim 1$. Надпороговость порядка единицы, очевидно, достигается уже при $k \sim k_m$, после чего весь поток энергии поглощается посредством коллапса. Находящиеся на начальной стадии коллапса каверны имеют пространственный масштаб k_m^{-1} и плотно заполняют все пространство. Рассеяние волн с $k \gg k_m$ на этих кавернах слабее четырехплазмонного взаимодействия:

$$\gamma_m(k) \sim \omega_m \left(\frac{k_m}{k}\right)^3 \ll \gamma_f(k), -$$

и потому практически не влияет на спектр слабой турбулентности в области $k \gg k_m$. Влияние более глубоких каверн также оказывается несущественным, поскольку они занимают малую долю объема плазмы: для каверн размера $k^{-1} \ll k_m^{-1}$ эта доля порядка $(k_m/k)^5$.

Итак, мы согласованно выразили все параметры конденсата через втекающий в него поток энергии Π и, сверх того, установили необходимую для однозначного определения спектра в области $k \gtrsim k_*$ связь между внешними по отношению к конденсату параметрами γ_* и Π:

$$\gamma_* \sim \omega_p (k_* r_D)^2 \left(\frac{\Pi}{\Pi_*}\right)^{4/7}. \tag{21}$$

Эти результаты были получены в предположении $\gamma_* \gg \nu_e$, которое выполняется для не слишком слабых потоков энергии[4]:

$$\Pi \gg \Pi_\nu \equiv \left(\frac{\nu_e}{g^2\omega_0}\right)^{7/4} \Pi_* \sim \omega_p n_0 T (k_* r_D)^{1/2} \left(\frac{\nu_e}{\omega_p}\right)^{7/4}. \tag{22}$$

При уменьшении потока Π все оценки остаются пригодными до тех пор, пока входящая в уравнение (5) разность $\gamma_* - \nu_e$ является положительной величиной, оценочно равной γ_*, т.е. пока $\gamma_* - \nu_e \gtrsim \nu_e$. Противоположный случай:

$$\delta\gamma_* \equiv \max \gamma_* - \nu_e, -$$

соответствует малому потоку энергии по спектру и, как выяснится ниже, возможен лишь для чрезвычайно слабых пучков. Поэтому мы не будем подробно описывать данный случай, а просто приведем основные оценки.

Полная плотность энергии волн в конденсате сразу определяется из условия энергетического баланса

$$W_c \sim \frac{\Pi}{\nu_e} \tag{23}$$

Рассуждая в том же духе, что и при выводе (I2), (I4), нетрудно установить, что спектр сосредоточен в области, где

$$\gamma_* - \nu_e \sim \delta\gamma_*, \tag{24}$$

и удовлетворяет соотношениям

$$\gamma_i(k_c) \sim \gamma_f(k_c) \sim \delta\gamma_* \tag{25}$$

Условие (24) дает связь угловой ширины спектра ψ с $\delta\gamma_*$, а условия (25) в сочетании с (23) позволяют выразить эти величины и k_c через поток Π. Результат, очевидно, зависит от симметрии γ_*.

Если инкремент γ_* изотропен, то изотропен и конденсат. При этом остаются в силе оценки (9), а значит и соотношение (I3). Определив из (I3) и (23) k_c, можно затем вычислить с помощью (25) $\delta\gamma_*$:

$$\delta\gamma_* \sim \nu_e \left(\frac{\Pi}{\Pi_\nu}\right)^{4/3} \tag{26}$$

Если γ_* не обладает какими-либо свойствами симметрии, то максимум этой функции достигается на некотором луче $\vec{e}$, и спектр сосредоточен в конусе с раствором

[4] Отметим, что в силу (I), (2) - автоматически $\Pi_\nu \ll \Pi_*$.

$$\psi \sim \left(\frac{\delta\gamma_*}{\nu_e}\right)^{1/2}. \qquad (27)$$

вблизи данного луча. Первая из оценок (9) остается в силе и для такого спектра, а в правой части второй оценки появляется дополнительный множитель[5] $\ln\psi^{-1}$. В результате аналогичный множитель появляется и в оценке (26):

$$\delta\gamma_* \sim \nu_e\left(\frac{\Pi}{\Pi_\nu}\ln\frac{\Pi_\nu}{\Pi}\right)^{4/3}. \qquad (28)$$

Критерий устойчивости конденсата как целого относительно модуляции в направлениях, перпендикулярных лучу $\vec{e}$, имеет вид

$$\frac{W_c}{n_0 T} < (\psi k_c r_D)^2. \qquad (29)$$

Из-за множителя ψ^2 в правой части, этот критерий дает ограничение снизу поток Π:

$$\frac{\Pi}{\Pi_\nu}\ln\frac{\Pi_\nu}{\Pi} > \left(\frac{\nu_e}{g^2\omega_0}\right)^{1/4}.$$

В пренебрежении логарифмическим фактором отсюда следует

$$\Pi > \Pi_m \equiv \omega_p n_0 T\left(\frac{\nu_e}{\omega_p}\right)^2. \qquad (30)$$

Ниже будет показано, что при пучковом возбуждении турбулентности последнее неравенство выполняется автоматически и с большим запасом, в силу (2).

3. Турбулентность, возбуждаемая пучком релятивистских электронов

Кинетика ленгмюровской турбулентности в коротковолновой области $(k \gg k_*)$ могла бы, в принципе, определяться следующими процессами[6]: индуцированным рассеянием волн на ионах, рассеянием на вынужденных флуктуациях плотности с пространственным масштабом $k^{-1} \ll k_*^{-1}$ и рассеянием на длинноволновых флуктуациях плотности, связанных с конденсатом. Для обратных времен перечисленных процессов справедливы такие оценки:

$$\gamma_i(k) \sim \omega_p \frac{W(k)}{n_0 T} g^2(k);$$

$$\gamma_f(k) \sim \omega_p \left[\frac{W(k)}{n_0 T}\right]^2 \frac{g(k)}{(k r_D)^2}; \qquad (31)$$

$$\gamma_c(k) \sim \frac{D}{\psi^2}, \quad D \sim \omega_p\left(\frac{W_c}{n_0 T}\right)^2 \frac{k_c}{k}\frac{1}{(k r_D)^2}.$$

Здесь $g(k) = \frac{k^2 r_i}{\omega_k} \sim \frac{k_*}{k}$, $\psi(k)$ – масштаб изменения спектральной плотности волн $N_{\vec{k}}$ по углу. Поскольку последние два процесса не меняют частоты ленгмюровских волн, поток энергии по частоте создается индуцированным рассеянием на ионах. Плотность энергии $W(k)$ волн с длинами порядка k^{-1} определяется из условия постоянства этого потока:

$$W(k) \sim n_0 T\left(\frac{\Pi}{\omega_p n_0 T}\right)^{1/2}\frac{1}{g(k)} \qquad (32)$$

Спектр (32) простирается в область малых волновых чисел вплоть до масштаба $\tilde{k}$, при котором затухание волн из-за их индуцированного рассеяния в конденсат сравнивается со временем спектральной перекачки и спектр обрывается. Оценивая $\tilde{k}$, можно не возвращаться к рассмотрению конденсата, а воспользоваться полученной выше связью между внешними по отношению к нему параметрами γ_* и Π. Учитывая (8), (21), (32), получаем следующее уравнение для $\tilde{k}$:

$$\frac{V_{\tilde{k}\omega_{\tilde{k}}}}{g(\tilde{k})} \sim \left(\frac{\Pi}{\Pi_*}\right)^{1/14} \qquad (33)$$

Даже без предположения о максвелловском виде функции распределения ионов и экспоненциальном затухании ядра $V_{k\omega_k}$ по параметру $(k/k_*)^2$ отсюда видно, что $\tilde{k}$ очень слабо зависит от потока Π и практически совпадает с k_*.

Подставив спектр (32) в оценки (31), выразим нелинейные инкременты через поток Π:

[5] Отметим, что главная по параметру $\ln\psi^{-1}$ часть четырехплазмонного взаимодействия не меняет волнового числа k, она только "регулирует" толщину струи ψ. Это обстоятельство сильно упрощает задачу аналитического отыскания спектра.

[6] Подразумевается, что электронные нелинейности несущественны.

$$\gamma_i(k) \sim \omega_p \left(\frac{\Pi}{\omega_p n_o T}\right)^{1/2} \frac{k_*}{k} ;$$

$$\gamma_f(k) \sim \omega_p \frac{\Pi}{\omega_p n_o T} \frac{1}{(k_* r_D)^2} \frac{k_*}{k} ; \quad (34)$$

$$\gamma_c(k)\psi^2(k) \sim D \sim \omega_p \frac{\Pi}{\omega_p n_o T} \frac{1}{(k_* r_D)^2} \left(\frac{k_*}{k}\right)^3 .$$

Отношение времен первых двух процессов не зависит от k :

$$\frac{\gamma_f(k)}{\gamma_i(k)} \sim \left(\frac{\Pi}{\Pi_*}\right)^{1/2} . \quad (35)$$

Это отношение мало, в силу предположения (I') о медленности четырехплазмонного процесса при $k \sim k_o$ [7]. Таким образом, неравенство $\Pi < \Pi_*$ в интересующем нас случае действительно выполняется.

Отношение $\frac{D}{\gamma_f} \sim \left(\frac{k_*}{k}\right)^2$ растет с уменьшением k , но все же остается малым во всей области $k \gg k_*$. Поэтому рассеяние на конденсате может иметь какое-нибудь значение только для сильно анизотропных спектров.

Если оно несущественно в резонансной области, т.е.

$$\gamma_c(k_o) < \gamma_f(k_o) , \quad (36)$$

то угловая ширина спектра в этой области дается оценкой

$$\psi \sim \Delta\theta \left[\frac{\gamma_f(k_o)}{\gamma_i(k_o)}\right]^{1/2} . \quad (37)$$

Подставив (37) в последнюю из оценок (34), нетрудно установить, что (36) выполняется при $\Pi > (g/\Delta\theta)^4 \Pi_*$.

Если $\Pi < (g/\Delta\theta)^4 \Pi_*$, то $\gamma_f(k_o) < \gamma_c(k_o)$ и толщина струи ленгмюровских волн, лежащей вблизи максимума инкремента пучковой неустойчивости, определяется из условия $\gamma_i(k_o)(\psi/\Delta\theta)^2 \sim \gamma_c(k_o)$:

$$\psi \sim (g\Delta\theta)^{1/2} \left(\frac{\Pi}{\Pi_*}\right)^{1/8} . \quad (38)$$

Использованное здесь предположение $\psi < \Delta\theta$ сводится к неравенству

$$\Delta\theta > g\left(\frac{\Pi}{\Pi_*}\right)^{1/4} \quad (39)$$

и заведомо выполняется при $\Delta\theta > g$. Таким образом, конденсат не влияет на стабилизацию неустойчивости пучков с не слишком малым угловым разбросом $\Delta\theta$.

Условие стабилизации $\gamma_i(k_o) \sim \gamma$ позволяет связать поток Π с инкрементом пучковой неустойчивости γ :

$$\Pi \sim \omega_p n_o T \left(\frac{\gamma}{g\omega_p}\right)^2 \quad (40)$$

Поскольку все параметры спектра уже выражены через Π , их нетрудно выразить и через γ. Как уже отмечалось ранее, при этом ограничение $\Pi < \Pi_*$ сводится к неравенству (I'); столкновения не влияют на конденсат ($\Pi > \Pi_\nu$) в широком диапазоне параметров:

$$\gamma > g^{10} \omega_o \left(\frac{\nu_e}{\gamma}\right)^7 , - \quad (41)$$

а предполагавшееся при исследовании случая $\Pi < \Pi_\nu$ неравенство (30) автоматически выполняется с запасом в $(\gamma / g\nu_e)^2$ раз.

Мы не станем приводить формулы для углового разброса пучка, энерговыделения, ~~длины~~ релаксации и т.д., поскольку все они определяются спектром в резонансной области и, согласно сказанному выше, остаются такими же, как в отсутствие конденсата.

4. Заключение

Основные результаты настоящей работы состоят в следующем.

Появление конденсата не меняет механизма стабилизации пучковой неустойчивости. Поглощение волн, выведенных из резонанса с пучком индуцированным рассеянием на ионах, происходит в длинноволновой части конденсата посредством ленгмюровского коллапса. Коллапсирующие каверны практически не влияют на спектр большинства сконденсировавшихся волн. Этот спектр удается найти, не выходя за рамки теории слабой турбулентности. Он зависит от поступающего в конденсат из коротковолновой области потока энергии. При увеличении потока конденсат "разбухает". Если поток не слишком мал (так что столкновения не существенны), то

---
[7] Напомним, что противоположный случай исследован в [I].

имеет место подобие: спектр "разбухающего" конденсата остается неизменным по форме, - последняя определяется лишь симметрией возбуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Коротковолновая асимптотика конденсата

Как явствует из оценок раздела 2, спектр в области $k_c \ll k \ll k_*$ с достаточной точностью удовлетворяет уравнению

$$\gamma_i(\vec{k}) N_{\vec{k}} + I_{\vec{k}} = 0. \qquad (\text{П.I})$$

Сейчас мы получим угаданную в том же разделе больцмановскую асимптотику конденсата и предэкспоненту непосредственно из кинетического уравнения (П.I).

Для упрощения формул введем безразмерные переменные

$$\vec{x} = \frac{\vec{k}}{k_c}, \quad w_{\vec{x}} = \frac{k_c^3 \omega_p}{W_c} N_{\vec{k}}. \qquad (\text{П.2})$$

Подставив (П.2) в (6), (7), (П.I) и положив

$$\frac{W_c}{n_0 T} = \frac{18}{\sqrt{2\pi}} (k_c r_D)^2 \frac{k_c}{k_*}, \qquad (\text{П.3})$$

получим для $w_{\vec{x}}$ следующее уравнение:

$$w_{\vec{x}} \int d^3x_1 \left(\frac{\vec{x}\vec{x}_1}{x x_1}\right)^2 \frac{x^2 - x_1^2}{|\vec{x} - \vec{x}_1|} w_{\vec{x}_1} =$$

$$= \int d^3x_1 d^3x_2 d^3x_3 \, \delta(\vec{x} - \vec{x}_1 + \vec{x}_2 - \vec{x}_3) \, \delta(x^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) \times \qquad (\text{П.4})$$

$$\times \left[\frac{(\vec{x}\vec{x}_1)(\vec{x}_2\vec{x}_3) + (\vec{x}\vec{x}_3)(\vec{x}_1\vec{x}_2)}{x x_1 x_2 x_3} \right]^2 \times$$

$$\times \left(w_{\vec{x}_1} w_{\vec{x}_2} w_{\vec{x}_3} - w_{\vec{x}} w_{\vec{x}_1} w_{\vec{x}_2} + w_{\vec{x}} w_{\vec{x}_1} w_{\vec{x}_3} - w_{\vec{x}} w_{\vec{x}_2} w_{\vec{x}_3} \right)$$

Единственно возможное решение (П.4) в области $x \gg 1$ имеет вид

$$w_{\vec{x}} = \Phi\left(\frac{\vec{x}}{x}\right) x^a \exp(-x^2). \qquad (\text{П.5})$$

Равенство единице коэффициента перед $-x^2$ в показателе экспоненты следует рассматривать, как количественное определение величины k_c. При таком определении k_c величина W_c, вычисленная по формуле (П.3), отличается от полной плотности энергии волн в конденсате множителем

$$\int d^3x\, w_{\vec x} \sim 1$$

Подставим (П.5) в (П.4) и удержим главные по параметру $x \gg 1$ члены[8]. Так, в правой части (П.4) из всех комбинаций спектральных функций $w_{\vec x}$ оставим лишь первую. Сократив одинаковые экспоненты, получим:

$$x^{a+1}\phi\left(\frac{\vec x}{x}\right)\int d^3x_1\left(\frac{\vec x\vec x_1}{x x_1}\right)^2 w_{\vec x_1} =$$

$$=\int d^3x_1 d^3x_3\,\delta(\vec x-\vec x_1-\vec x_3)\,\delta(x^2-x_1^2-x_3^2)\,\phi\left(\frac{\vec x_1}{x_1}\right)\phi\left(\frac{\vec x_3}{x_3}\right)x_1^a x_3^a \times$$

$$\times\int d^3x_2\, e^{-x_2^2} w_{\vec x_2}\left[\frac{(\vec x\vec x_1)(\vec x_2\vec x_3)+(\vec x\vec x_3)(\vec x_1\vec x_2)}{x x_1 x_2 x_3}\right]^2 \qquad (П.6)$$

Правая часть (П.6) ведет себя в зависимости от x как x^{2a+1}. Приравняв показатели степеней x в (П.6), найдем

$$a = 0 \qquad (П.7)$$

Условие равенства коэффициентов при степенях x дает уравнение для функции $\phi(\vec n)$:

$$A_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta\phi(\vec n) = \frac{B_{\alpha\beta}}{8}\int d^2\vec n'\,\phi\left(\frac{\vec n+\vec n'}{|\vec n+\vec n'|}\right)\phi\left(\frac{\vec n-\vec n'}{|\vec n-\vec n'|}\right)\times$$

$$\times\frac{n_\alpha n_\beta-(n_\alpha n'_\beta+n'_\alpha n_\beta)(\vec n\vec n')+n'_\alpha n'_\beta(\vec n\vec n')^2}{1-(\vec n\vec n')^2} \qquad (П.8)$$

Здесь $\vec n = \frac{\vec x}{x}$; $\int d^2\vec n'$ означает интегрирование по всем направлениям единичного вектора $\vec n'$; коэффициенты

$$A_{\alpha\beta}=\int d^3x\, n_\alpha n_\beta w_{\vec x};\quad B_{\alpha\beta}=\int d^3x\, n_\alpha n_\beta e^{-x^2} w_{\vec x} \qquad (П.9)$$

определяются спектром в области $x \sim 1$, их симметрия зависит от симметрии γ_*. Решив уравнение (П.8), можно выразить предэкспоненциальный коэффициент $\phi(\vec n)$ в асимптотике (П.5) через интегральные характеристики конденсата (П.9). Например, при изотропном γ_* и, соответственно, конденсате находим

$$\phi(\vec n) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dx\,x^2 w_x \Big/ \int_0^\infty dx\,x^2 e^{-x^2} w_x . \qquad (П.10)$$

---

[8] Учет поправок является превышением точности (П.I).

Литература

I. Малкин В.М. ЖЭТФ, I982, 83, 88.

2. Малкин В.М. ЖЭТФ, I982, 83, I725.

3. Брейзман Б.Н., Захаров В.Е., Мушер С.Л. ЖЭТФ, I973, 64, I297.

4. Брейзман Б.Н., Рютов Д.Д. Ядерный синтез, I974, I4, 873.

5. Цытович В.Н. Теория турбулентной плазмы. М.: Атомиздат, I97I, гл.4.

6. Хакимов Ф.Х., Цытович В.Н. ЖТФ, I973, 43, 248I.

7. Хакимов Ф.Х., Цытович В.Н. ЖЭТФ, I975, 68, 95.

8. Nishikawa K., Ryutov D.D. J. Phys. Soc. Japan, 1976, 41, 1757.

9. Захаров В.Е. ЖЭТФ, I972, 62, I745.

I0. Брейзман Б.Н., Розенраух Ю.М. "Взрывная" динамика спектра турбулентности при распадном взаимодействии волн. Новосибирск. Препринт ИЯФ 83-08.

II. Пикельнер С.Б., Цытович В.Н. ЖЭТФ, I968, 55, 977.

I2. Кац А.В. ЖЭТФ, I976, 7I, 2I04.

В.М.Малкин

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕЛАКСАЦИЯ ПУЧКА РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ В ПЛАЗМЕ: ЛЕНГМЮРОВСКИЙ КОНДЕНСАТ

Препринт
№ 83-58

Работа поступила - 7 апреля 1983 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов

Подписано к печати 18.05-1983 г. МН 17551
Формат бумаги 60х90 1/16 Усл.1,1 печ.л., 0,9 учетно-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ №58.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90