

И.20

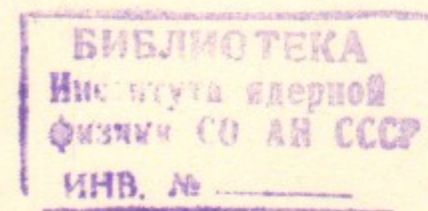
36

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

В.Я.Иванов, М.М.Карлинер, В.Е.Теряев,
В.П.Яковлев

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ДЛЯ РАСЧЕТА ВЧ-РЕЗОНАТОРОВ

ПРЕПРИНТ 83-59



НОВОСИБИРСК

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время существует достаточно много программ для расчета собственных частот и электромагнитных полей азимутально-однородных мод в аксиально-симметричных резонаторах [1-6]. Работы, посвященные расчетам аксиально-неоднородных мод в аксиально-симметричных резонаторах [7-9], демонстрируют более низкую точность расчета электродинамических параметров и существенно большую трудоемкость вычислений. Это связано с векторным характером уравнений, описывающих такие колебания. Эффективность методов конечных элементов и конечных разностей становится особенно низкой при расчетах задач в трехмерной постановке.

В настоящей работе предлагается использовать для расчета ВЧ-резонаторов метод интегральных уравнений. Основные особенности метода состоят в следующем:

а) Задача определения поля в объеме резонатора сводится к определению характеристик поверхностных источников, что понижает размерность решаемых уравнений.

б) Определение компонент электромагнитного поля в объеме резонатора не требует операции численного дифференцирования, являющейся источником дополнительной погрешности расчета.

в) Существенно упрощается техника выделения особенностей решения в окрестностях особых точек границы.

Однако, следует отметить, что использование метода интегральных уравнений приводит к большей по сравнению с другими методами сложности алгоритма, который требует для достижения высокой точности расчета выделения особенностей ядра уравнения и высокого порядка аппроксимации.

Ниже описаны алгоритмы расчета азимутально-неоднородных мод в аксиально-симметричных резонаторах произвольного вида (MAXWELL-2) и алгоритм расчета трехмерных резонаторов (MAXWELL-3). В части I приводятся основные интегральные уравнения, общие для обоих алгоритмов. В части 2 описаны способы нахождения резонансной частоты и поверхностного распределения электромагнитного поля. В частях 3 и 4 описаны варианты дискретной аппроксимации интегральных уравнений в аксиально-симметричном случае и в трехмерном случае. В части 5 приведены тесты и расчеты некоторых резонаторов.

I. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Известно [10], что если в некотором объеме V заданы два независимых распределения электрических и магнитных токов с плотностями $\vec{j}^{(e,i)}$ и $\vec{j}^{(m,i)}$ соответственно, ($i = 1, 2$) осциллирующие с одинаковой частотой ω , то имеет место лемма Лоренца:

$$\oint_S \{ [\vec{E}^{(1)} \vec{H}^{(2)}]_N - [\vec{E}^{(2)} \vec{H}^{(1)}]_N \} dS = \int_V (\vec{j}^{(e,1)} \vec{E}^{(2)} - \vec{j}^{(e,2)} \vec{E}^{(1)} - \vec{j}^{(m,1)} \vec{H}^{(2)} + \vec{j}^{(m,2)} \vec{H}^{(1)}) dV. \quad (I)$$

Интегрирование в левой части ведется по поверхности S , ограничивающей объем V ; N - внутренняя нормаль к этой поверхности; $\vec{E}^{(i)}, \vec{H}^{(i)}$ ($i = 1, 2$) - электрические и магнитные поля, соответствующие 1-му и 2-му распределениям токов. Если задать распределение токов в виде:

$$\vec{j}^{(e,2)} = \vec{a} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \quad \vec{j}^{(m,1)} = \vec{j}^{(m,2)} = 0, \quad \vec{j}^{(e,1)} = 0,$$

(Здесь \vec{a} - произвольно ориентированный вектор, \vec{r}_0 - некая точка, принадлежащая V или S), равенство (I) примет вид:

$$\vec{E}(\vec{r}_0) \vec{a} = \frac{1}{4\pi - \Omega} \oint_S \{ [\vec{H}(\vec{r}) \cdot \vec{E}^{(e)}(\vec{r}_0, \vec{r})]_N + [\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{H}^{(e)}(\vec{r}_0, \vec{r})]_N \} dS. \quad (2)$$

Если \vec{r}_0 находится в объеме, то $\Omega = 0$, если \vec{r}_0 находится на поверхности S , то Ω - телесный угол, под которым видна поверхность из этой точки. Подробнее см. [13].

Аналогично, если задать распределение токов в виде:

$$\vec{j}^{(m,2)} = \vec{a} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \quad \vec{j}^{(m,1)} = 0, \quad \vec{j}^{(e,1)} = \vec{j}^{(e,2)} = 0,$$

то равенство (I) примет вид:

$$\vec{H}(\vec{r}_0) \vec{a} = - \frac{1}{4\pi - \Omega} \oint_S \{ [\vec{E}^{(m)}(\vec{r}_0, \vec{r}) \cdot \vec{H}(\vec{r})]_N + [\vec{H}^{(m)}(\vec{r}_0, \vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r})]_N \} dS. \quad (3)$$

Пусть поверхность S имеет идеальную проводимость. (Все излагаемые рассуждения могут быть обобщены для случая, когда часть поверхности S является плоскостью симметрии с граничным условием $[\vec{H} \cdot \vec{N}] = 0$. Для краткости изложения этот случай рассматриваться не будет). Тогда на этой поверхности выполняются условия

$$[\vec{E} \cdot \vec{N}] = 0, \quad (\vec{H} \cdot \vec{N}) = 0. \quad (4)$$

Если поместить точку \vec{r}_0 на поверхность S и потребовать выполнения на поверхности условий (4), из равенств (2) и (3) получаются уравнения относительно функции $H_t(\vec{r})$ - поверхностного распределения тангенциальной к поверхности S составляющей напряженности магнитного поля:

$$\oint_S [\vec{E}^{(e)} \vec{H}(\vec{r})]_N dS = 0, \quad (5)$$

$$\vec{H}(\vec{r}_0) \vec{a} = - \frac{1}{4\pi - \Omega} \oint_S [\vec{E}^{(m)}(\vec{r}_0, \vec{r}) \vec{H}(\vec{r})]_N dS. \quad (6)$$

(При этом полагаем, что вектор \vec{a} в выражениях (2) и (3) удовлетворяет условию $(\vec{a} \cdot \vec{N}) = 0$). Эти уравнения имеют нетривиальные решения только в том случае, когда частота ω совпадает с одной из резонансных частот резонатора, образованного идеально проводящей поверхностью S . Отметим, что в силу условной корректности интегрального уравнения Фредгольма первого рода (5), получение его численного решения является более сложной процедурой, чем для уравнения второго рода (6), которое и будет рассматриваться в дальнейшем.

Введем на поверхности S криволинейную систему координат с базисом $(\vec{\eta}, \vec{\tau})$ и запишем (6) в проекциях:

$$H_{\tau}(\vec{r}_0) = - \frac{1}{4\pi - \Omega} \oint_S (E_{\tau\eta}^{(m)} H_{\tau} - E_{\tau\tau}^{(m)} H_{\eta}) dS, \quad (7)$$

$$H_{\eta}(\vec{r}_0) = - \frac{1}{4\pi - \Omega} \oint_S (E_{\eta\eta}^{(m)} H_{\tau} - E_{\eta\tau}^{(m)} H_{\eta}) dS.$$

Здесь η_0, τ_0 - значения η, τ в точке \vec{r}_0 , $E_{\alpha\beta}^{(m)}(\vec{r}_0, \vec{r})$ - проекция вектора напряженности электронного поля на вектор $\vec{\beta}$. Это электрическое поле возбуждается магнитным током $\vec{j}^{(m)} = \vec{a} \delta(\vec{r}_0)$,

H_{β} - проекция вектора напряженности магнитного поля на вектор $\vec{\beta}$.

Компонента ядра уравнения (6) равны:

$$E_{\alpha\beta}^{(m)}(\vec{r}_0, \vec{r}) = [\vec{a} \cdot \nabla \varphi] \cdot \vec{\beta}, \quad (8)$$

где $\varphi = \frac{\cos(kR)}{R}$, $k = \frac{\omega}{c}$, $R = |\vec{r} - \vec{r}_0|$.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕЗОНАНСНОЙ ЧАСТОТЫ

Запишем уравнение (6) в операторной форме:

$$[I - \mathcal{L}(\omega)] \vec{H}_t = 0. \quad (9)$$

Здесь I — единичный оператор, \vec{H}_t — тангенциальная к поверхности резонатора составляющая вектора напряженности магнитного поля. При численной аппроксимации уравнения (9) оно сводится к системе линейных алгебраических уравнений

$$A(\omega) \vec{\mathcal{H}}_t = 0. \quad (10)$$

Здесь $\vec{\mathcal{H}}_t$ — значения \vec{H}_t в узлах коллокаций; $A(\omega)$ — матрица, аппроксимирующая исходный оператор $(I - \mathcal{L}(\omega))$.

Нетривиальное решение (10) существует, если

$$\det(A(\omega)) = 0. \quad (11)$$

Определять резонансные частоты непосредственно из (11) практически сложно ввиду того, что порядок системы (10) может быть достаточно велик.

Для определения одной из собственных частот можно воспользоваться двумя способами:

а) решать задачу определения минимального по модулю собственного значения $\lambda(\omega)$ матрицы $A(\omega)$ при разных ω и определять нули $\lambda_{\min}(\omega)$. Задачу

$$A(\omega) \vec{\mathcal{H}}_t = \lambda_{\min}(\omega) \vec{\mathcal{H}}_t \quad (12)$$

можно решать, используя, например, метод обратных итераций [11]. При этом сразу определяется и собственный вектор $\vec{\mathcal{H}}(\omega_{\text{рез}})$ — резонансное распределение напряженности магнитного поля по поверхности резонатора. В этом случае при $\omega \rightarrow \omega_{\text{рез}}$ (и $\lambda_{\min}(\omega) \rightarrow 0$) скорость сходимости процесса обратных итераций велика. На практике оказывается достаточно одной-двух итераций. Начальный вектор $\vec{\mathcal{H}}_t$ должен содержать пространственные гармоники искомого резонансного распределения. Для определения $\omega_{\text{рез}}$ из уравнения

$$\lambda(\omega) = 0$$

можно использовать любой известный поисковый метод: метод секущих, парабол и т.д. В нашей вычислительной программе мы использовали метод, соответствующий на первой итерации методу парабол, модифицируемый для следующих итераций введением интерполирующе-

го сплайна, проходящего через вычисленные на предыдущих итерациях точки $\lambda_{\min}(\omega)$. Практически достаточно трех-четырех итераций по частоте для нахождения корня $\lambda_{\min}(\omega)$ с точностью 10^{-6} .

Изложенный способ не является вполне обоснованным, так как нам заранее не известны свойства функции $\lambda(\omega)$ для произвольной геометрии резонатора. В самом простейшем случае одномерного резонатора $\lambda(\omega) = \frac{1}{2} [1 \pm \sin(\frac{\ell\omega}{c})]$, (здесь ℓ — длина резонатора). При этом $0 \leq \lambda \leq 1$, и резонансная частота соответствует точке касания кривой $\lambda(\omega)$ оси абсцисс. Однако, при численных расчетах, по-видимому, вследствие неточности аппроксимации кривая $\lambda(\omega)$ оказывается смещенной вверх или вниз по оси ординат. В первом случае резонансу, очевидно, соответствуют точки минимума $\lambda(\omega)$. Во втором случае $\lambda(\omega)$ имеет в некоторой области вблизи $\omega_{\text{рез}}$ отрицательные значения и наряду с корнем, где $d\lambda/d\omega < 0$ и вектором решения, соответствующим физическому распределению напряженности магнитного поля на поверхности резонатора существует корень с $d\lambda/d\omega > 0$ с вектором решения, не соответствующим физическому распределению магнитного поля. Таким образом, можно эмпирически отбирать правильные решения по знаку производной $d\lambda/d\omega$.

б) Задачу определения резонансной частоты и распределения электромагнитного поля на поверхности резонатора можно свести к решению задачи возбуждения резонатора током, расположенным в объеме резонатора. Уравнение (9) примет в этом случае вид:

$$[I - \mathcal{L}(\omega)] \vec{H}_t = \vec{H}_{t_0}, \quad (9')$$

$$\text{где } H_{t_0, \lambda}(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_V H_{\lambda\rho}^{(e)}(\vec{r}_0, \vec{r}) J_{\rho}(\vec{r}) dV.$$

Здесь V' — объем, занятый возбуждающим током J , $H_{\lambda\rho}^{(m)}(\vec{r}_0, \vec{r})$ — соответствующее ядро — см. (1).

После дискретной аппроксимации уравнения (9) будем иметь

$$A(\omega) \vec{\mathcal{H}}_t = B(\omega) \vec{J}. \quad (11')$$

Для простоты плотность возбуждающего тока можно взять в виде $\vec{J} = \vec{J}_0 \delta(\vec{r}_0)$. После определения $\vec{\mathcal{H}}_t$ из (11') можно найти электрическое поле \vec{E} в точке \vec{r}_0 и вычислить величину $q(\omega) = \frac{|\vec{J}_0|^2}{(\vec{E} \cdot \vec{J}_0)}$. Это отношение имеет размерность проводимости. Определяемая численно зависимость $q(\omega)$ ведет себя аналогично проводимости мно-

горезонансной системы с сосредоточенными параметрами, а именно: $q(\omega_{рез}) = 0, dq/d\omega|_{\omega=\omega_{рез}} > 0$. Поиск корня $q(\omega) = 0$ в этом случае можно организовать тем же способом, что и для определения корня $\lambda(\omega) = 0$.

Оба метода (а) и (б) дают одинаковую точность определения $\omega_{рез}$. Однако практически более удобен первый способ, так как в этом случае нет необходимости вычислять электрическое поле и более прост алгоритм поиска $\omega_{рез}$ в широком диапазоне частот, вследствие того, что кривая $\lambda(\omega)$ в отличие от кривой $q(\omega)$ является гладкой.

3. ДИСКРЕТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ В ТРЕХМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Для дискретной аппроксимации (9) в трехмерном случае воспользуемся способом, предложенным в работе [12]. Предположим, что поверхность S резонатора состоит из отдельных поверхностей, описываемых параметрическими уравнениями произвольного вида

$$\begin{aligned} x &= x_\ell(\tau, \eta), \quad \tau_{o\ell} \leq \tau \leq \tau_{k\ell}, \\ y &= y_\ell(\tau, \eta), \quad \eta_{o\ell} \leq \eta \leq \eta_{k\ell}, \\ z &= z_\ell(\tau, \eta), \quad \ell = 1, 2, \dots, M. \end{aligned} \quad (I3)$$

(ℓ - номер поверхности, M - полное их число).

Здесь x_ℓ, y_ℓ, z_ℓ - однозначные непрерывные функции, осуществляющие отображение декартова пространства (x, y, z) в пространство параметров (τ, η) . Область изменения параметров покрывается равномерной ортогональной сеткой, которая в декартовых координатах, вообще говоря, является криволинейной:

$$\begin{aligned} \tau_i &= \tau_{o\ell} + i h_\tau, \quad h_\tau = \frac{\tau_{k\ell} - \tau_{o\ell}}{n_{\tau\ell}}, \\ \eta_j &= \eta_{o\ell} + j h_\eta, \quad h_\eta = \frac{\eta_{k\ell} - \eta_{o\ell}}{n_{\eta\ell}}. \end{aligned} \quad (I4)$$

На получившихся параметрических четырехугольниках искомая функция $\vec{H} = (H_\tau, H_\eta)$ аппроксимируется билинейным сплайном

$$\begin{aligned} \vec{H}(\tau, \eta) &= \{ [\vec{H}_{ij}(\tau - \tau_{i-1}) + \vec{H}_{i-1,j}(\tau - \tau)](\eta - \eta_{j-1}) + \\ &+ [\vec{H}_{i,j-1}(\tau - \tau_{i-1}) + \vec{H}_{i-1,j-1}(\tau - \tau)](\eta_j - \eta) \} / (h_\tau h_\eta), \end{aligned} \quad (I5)$$

где $\vec{H}_{ij} = \vec{H}(\tau_i, \eta_j), \tau \in [\tau_{i-1}, \tau_i], \eta \in [\eta_{j-1}, \eta_j]$.

Применение метода граничных коллокаций для решения (9) позволяет свести его к системе линейных алгебраических уравнений

$$[E - G(\omega)] \vec{H} = \vec{F}, \quad (I6)$$

где E - единичная матрица, $\vec{F} = (F_\tau, F_\eta)$ - вектор возбуждения, а элементы матрицы G определяются выражением

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{h_\tau h_\eta} \sum_{m=1}^4 \int_{S_m} \Psi_m E_{\alpha\beta}(\vec{r}_{o,k\ell}, \vec{r}_{ij}) |\mathcal{J}| d\tau d\eta, \quad (I7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= (\tau - \tau_{i-1})(\eta - \eta_{j-1}), \quad \{S_1: \tau \in [\tau_{i-1}, \tau_i], \eta \in [\eta_{j-1}, \eta_j]\}, \\ \Psi_2 &= (\tau_i - \tau)(\eta - \eta_{j-1}), \quad \{S_2: \tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \eta \in [\eta_{j-1}, \eta_j]\}, \\ \Psi_3 &= (\tau - \tau_{i-1})(\eta_j - \eta), \quad \{S_3: \tau \in [\tau_{i-1}, \tau_i], \eta \in [\eta_j, \eta_{j+1}]\}, \\ \Psi_4 &= (\tau_i - \tau)(\eta_j - \eta), \quad \{S_4: \tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \eta \in [\eta_j, \eta_{j+1}]\}. \end{aligned}$$

Интеграл по четырехугольнику S_m сводится к двукратному интегралу. Интегрирование выполняется численно с использованием трехточечной квадратурной формулы по каждой параметрической координате. Якобиан преобразования координат выражается формулой

$$|\mathcal{J}| = \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(\tau, \eta)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(\tau, \eta)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(z, x)}{\partial(\tau, \eta)} \right]^2.$$

а функциональные определители, например, $\partial(y, z) / \partial(\tau, \eta)$ можно записать в виде

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(\tau, \eta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \tau} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \tau} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{vmatrix}.$$

Индексы α и β в (I7) могут принимать последовательно значения компонент τ и η , индексы k и ℓ обозначают нумерацию узлов для точки наблюдения, а i и j - элементов интегрирования: $\vec{F} = \{F_{\tau, k\ell}(\vec{r}_o), F_{\eta, k\ell}(\vec{r}_o)\}$,

$$\vec{H} = \{H_{\tau, ij}(\vec{r}), H_{\eta, ij}(\vec{r})\}.$$

Таким образом, если число узлов поверхностей сетки равно N , то порядок системы уравнений (16) составляет $2N$. Структура системы будет следующей

$$\left[E - \begin{pmatrix} G_{\tau_0\tau} & G_{\tau_0\eta} \\ G_{\eta_0\tau} & G_{\eta_0\eta} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \mathcal{H}_\tau \\ \mathcal{H}_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_\tau \\ \mathcal{F}_\eta \end{pmatrix}.$$

Так как функции $E_{\alpha\beta}(\vec{r}_0, \vec{r})$ содержат особенность при $\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}$, целесообразно провести операцию аналитического выделения этой особенности при численных расчетах. Это можно сделать следующим образом: пусть $\tilde{E}_{\alpha\beta}(\vec{r}_0, \vec{r})$ — функция, получившаяся из $E_{\alpha\beta}(\vec{r}_0, \vec{r})$ при $\frac{\omega}{c} |\vec{r}_0 - \vec{r}| \rightarrow 0$. Обычно эта функция имеет простой вид и ее можно аналитически проинтегрировать по поверхности почти во всех практически важных случаях.

Тогда

$$\int_{S_m} \Psi_m E_{\alpha\beta}(\vec{r}_0, \vec{r}) |\mathcal{J}| dS = \int_{S_m} \Psi_m [E_{\alpha\beta}(\vec{r}_0, \vec{r}) - \tilde{E}_{\alpha\beta}(\vec{r}_0, \vec{r})] |\mathcal{J}| dS + \int_{S_m} \Psi_m \tilde{E}_{\alpha\beta}(\vec{r}_0, \vec{r}) |\mathcal{J}| dS.$$

Первый интеграл в правой части не содержит особенности, т.к. по определению $E_{\alpha\beta}(\vec{r}_0, \vec{r}) - \tilde{E}_{\alpha\beta}(\vec{r}_0, \vec{r}) \rightarrow 0$ при $\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}$. Второй интеграл берется аналитически. Конкретный вид функций $\tilde{E}_{\alpha\beta}(\vec{r}_0, \vec{r})$ для некоторых поверхностей будет приведен в следующей части.

Само решение также может иметь особенность. Это происходит в тех случаях, когда граничная поверхность имеет геометрически сингулярные точки, например, острые ребра. Пусть координаты (τ, η) выбраны так, что вектор $\vec{\eta}$ в нашей точке на острое параллельно ребру (предполагается, что ребро представляет собой гладкую кривую), а вектор $\vec{\tau}$ — перпендикулярен ребру. Как показано в [14], в окрестности острого

$$\left. \begin{aligned} H_\tau &= O(\rho^{-1+\pi/\varphi}) \\ H_\eta &= O(\rho^{\pi/\varphi}) \end{aligned} \right\} \rho \rightarrow 0.$$

Здесь ρ — расстояние от точки наблюдения до ребра (см. рис. 2). Видно, что H_η регулярно вблизи ребра, а H_τ имеет особенность, если $\varphi > \pi$. Поэтому в (7) можно сделать замену переменных:

$$H'_\eta = H_\eta, \quad H'_\tau = H_\tau \rho^{1-\pi/\varphi}.$$

В результате получим уравнение, аналогичное (7), только соответствующие компоненты $E'_{\alpha\beta}$ будут отличаться от $E_{\alpha\beta}$ на множитель $\rho^{1-\pi/\varphi}$.

После вычисления коэффициентов матрицы $A(\omega)$ и определения поверхностного распределения напряженности магнитного поля и резонансной частоты $\omega_{рез}$ необходимо вычислить поля \vec{E} и \vec{H} в объеме резонатора. Это можно сделать, используя равенства (2) и (3) и принимая во внимание граничные условия на поверхности резонатора:

$$\vec{E}(\vec{r}_0) \vec{a} = \frac{1}{4\pi} \oint_S [\vec{H}(\vec{r}) \vec{E}^{(e)}(\vec{r}_0, \vec{r})]_N dS, \quad (2)$$

$$\vec{H}(\vec{r}_0) \vec{a} = -\frac{1}{4\pi} \oint_S [\vec{H}(\vec{r}) \vec{E}^{(m)}(\vec{r}_0, \vec{r})]_N dS. \quad (3)$$

Здесь $\vec{E}^{(m)}_\beta = [\vec{a} \cdot \nabla \varphi] \vec{\beta}$,

$$E^{(e)}_\beta = (\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \left(k\varphi + \frac{1}{kR} \frac{d\varphi}{dR} \right) + \frac{(\vec{a} \cdot \vec{R})(\vec{\beta} \cdot \vec{R})}{kR^2} \left(\frac{d^2\varphi}{dR^2} - \frac{1}{R} \frac{d\varphi}{dR} \right),$$

$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0$; k, φ, R те же, что и в (8).

Вектор \vec{a} принимает значения $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ (единичные базисные вектора Декартовой системы координат). Вектор $\vec{\beta}$ принимает значения $\vec{\eta}$ и $\vec{\tau}$.

4. ДИСКРЕТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ СЛУЧАЕ

В случае, когда резонатор обладает аксиальной симметрией, мы рассмотрим как колебания без азимутальных вариаций, так и азимутально неоднородные колебания с гармонической зависимостью полей по θ :

$$H_r = H_{0r} \sin(m\theta), \quad H_z = H_{0z} \sin(m\theta), \quad H_\theta = H_{0\theta} \cos(m\theta). \quad (18)$$

(Используется цилиндрическая система координат (r, θ, z)). Меридианное сечение границы резонатора Γ предполагается состоящим из отрезков прямых с параметрическими уравнениями

$$\left. \begin{aligned} r &= a: (1-\tau) + c:\tau, \\ z &= b: (1-\tau) + d:\tau, \quad 0 \leq \tau \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

и дуг окружностей или эллипсов

$$r = a_i \cdot \sin \tau + b_i, \quad a_i \leq \tau \leq \beta_i, \quad (20)$$

$$z = c_i \cdot \cos \tau + d_i, \quad i = 1, \dots, M.$$

Введем в рассмотрение 2 компоненты напряженности магнитного поля H_τ и H_θ :

$$H_\tau = H_{0\tau} \cos(m\theta),$$

$$H_\theta = H_{0\theta} \sin(m\theta).$$

На границе Γ зададим поверхностные разбиения вида

$$\tau_j = a_i + j \frac{b_i - a_i}{n_i}, \quad i = 1, \dots, M; \quad j = 0, \dots, n_i.$$

Для компонент $H_{0\tau}$ и $H_{0\theta}$ предлагается аппроксимация в виде кубического сплайна [16] вида

$$H_{0\alpha}(\tau) = M_{\alpha, j-1} \frac{(\tau_j - \tau)^3}{6h_j} + M_{\alpha, j} \frac{(\tau - \tau_{j-1})^3}{6h_j} + \\ + (\mathcal{H}_{\alpha, j-1} - M_{\alpha, j-1} \frac{h_j^2}{6}) \frac{\tau_j - \tau}{h_j} + (\mathcal{H}_{\alpha, j} - M_{\alpha, j} \frac{h_j^2}{6}) \frac{\tau - \tau_{j-1}}{h_j}, \quad (21)$$

где $\mathcal{H}_{\alpha, j} = H_{0\alpha}(\tau_j)$, $\tau \in [\tau_{j-1}, \tau_j]$, $h_j = \tau_j - \tau_{j-1}$, (α принимает значения τ и θ).

Определенная таким образом функция непрерывна вместе со своей второй производной. Записывая условие непрерывности первой производной в узлах интерполяции, получим систему линейных уравнений для коэффициентов сплайна

$$C M_\alpha = D_\alpha,$$

где трехдиагональная матрица C дается выражением:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & \lambda_0 & 0 & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & 0 & \mu_{n_i-2} \end{pmatrix},$$

а элементы вектора D_α определяются формулами

$$D_{\alpha j} = 6 \frac{(\mathcal{H}_{\alpha, j+1} - \mathcal{H}_{\alpha, j})/h_{j+1} + (\mathcal{H}_{\alpha, j} - \mathcal{H}_{\alpha, j-1})/h_j}{h_j + h_{j+1}}, \quad j = 1, \dots, n_i - 1,$$

$$D_{\alpha 0} = D_{\alpha n_i} = 0, \quad \lambda_j = \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}}, \quad \mu_j = 1 - \lambda_j.$$

Коэффициенты сплайна будут определяться однозначно, если на концах интервала задать краевые условия, например, вида

$$2M_{\alpha 0} + \lambda_0 M_{\alpha 1} = D_{\alpha 0}, \quad \mu_{n_i} M_{\alpha, n_i-1} + 2M_{\alpha n_i} = D_{\alpha n_i}.$$

Решение системы $C M_\alpha = D_\alpha$ ищется методом прогонки

$$p_k = \mu_k q_{k-1} + 2, \quad (q_0 = 0),$$

$$q_k = -\frac{\lambda_k}{p_k}, \quad u_k = \frac{D_k - \mu_k u_{k-1}}{p_k}, \quad (u_0 = 0),$$

$$M_k = q_k M_{k+1} + u_k; \quad k = 1, \dots, n_i - 1; \quad M_{n_i} = u_{n_i}.$$

Для получения системы линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующих уравнение (7) необходимо подставить выражение $M_\alpha = C^{-1} D_\alpha$ в (21), а саму аппроксимационную формулу в (7). В результате выражение для элементов матрицы A в (10) примет вид:

$$A_{i\ell}^{\alpha\beta} = I_{i, \ell n_i}^{\alpha\beta, 3} \varepsilon_{\ell n_i} + I_{i, \ell n_i}^{\alpha\beta, 4} \varepsilon_{\ell 0} + \sum_{j=1}^{n_i} \left\{ d_{ij} \left[C_{j-1, \ell-1}^{-1} \frac{6 \varepsilon_{\ell 0} \varepsilon_{\ell 1}}{h_\ell (h_\ell + h_{\ell+1})} - \right. \right. \\ \left. \left. - C_{j-1, \ell}^{-1} \frac{6 \varepsilon_{\ell 0} \varepsilon_{\ell n_i}}{h_\ell h_{\ell+1}} + C_{j-1, \ell+1}^{-1} \frac{6 \varepsilon_{\ell, n_i-1} \varepsilon_{\ell n_i}}{h_{\ell+1} (h_{\ell+1} + h_{\ell+2})} \right] + \right. \quad (22)$$

$$\left. + \beta_{ij} \left[C_{j, \ell-1}^{-1} \frac{6 \varepsilon_{\ell 0} \varepsilon_{\ell 1}}{h_\ell (h_\ell + h_{\ell+1})} - C_{j, \ell}^{-1} \frac{6 \varepsilon_{\ell 0} \varepsilon_{\ell n_i}}{h_\ell h_{\ell+1}} + C_{j, \ell+1}^{-1} \frac{6 \varepsilon_{\ell, n_i-1} \varepsilon_{\ell n_i}}{h_{\ell+1} (h_{\ell+1} + h_{\ell+2})} \right] \right\},$$

где

$$d_{ij} = I_{ij}^{\alpha\beta, 1} - \frac{h_j^2}{6} I_{ij}^{\alpha\beta, 3}, \quad \beta_{ij} = I_{ij}^{\alpha\beta, 2} - \frac{h_j^2}{6} I_{ij}^{\alpha\beta, 4},$$

$$I_{ij}^{\alpha\beta, k} = \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \int_0^{2\pi} E_{\alpha\beta}^{(m)}(\tau_i, \tau) \psi_{kj} |\mathcal{J}| d\tau d\theta, \quad (23)$$

$$\psi_{1j} = \frac{(\tau_j - \tau)^3}{6h_j}, \quad \psi_{2j} = \frac{(\tau - \tau_{j-1})^3}{6h_j}, \quad \psi_{3j} = \frac{\tau_j - \tau}{h_j}, \quad \psi_{4j} = \frac{\tau - \tau_{j-1}}{h_j},$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j, \\ 1, & i \neq j. \end{cases}$$

Выражение (23) можно переписать в виде:

$$I_{ij}^{\alpha\beta, k} = \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} G_{ij}^{\alpha\beta} |\mathcal{J}| d\tau.$$

Здесь

$$G_{ij}^{\tau\theta} = \int_0^\pi \cos(m\theta) \cdot f \cdot \{ r_i \cos d_j - [r_j \cos d_j - (z_j - z_i) \sin d_j] \cos \theta \} d\theta,$$

$$G_{ij}^{\theta\theta} = \left\{ \sin d_i [(z_j - z_i) \sin d_j - r_j \cos d_j] - \sin d_j \cos d_i \right\} \int_0^\pi f \cdot \sin(m\theta) \sin \theta d\theta,$$

$$G_{ij}^{\tau\tau} = (z_j - z_i) \int_0^\pi f \cdot \sin(m\theta) \sin \theta d\theta,$$

$$G_{ij}^{\theta\tau} = \int_0^\pi \cos(m\theta) \cdot f \cdot \{ r_j \cos d_i - [r_i \cos d_i + (z_j - z_i) \sin d_i] \cos \theta \} d\theta,$$

$$f = \frac{r_j}{2\pi R^3} [\cos(kR) - kR \sin(kR)],$$

$$R = [r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos \theta + (z_i - z_j)^2]^{1/2},$$

r_i, z_i — координаты точки с индексом i , d_i — угол касательной к Γ в точке с индексом i . Интегрирование в (23) ведется численно с использованием Гауссовых квадратур.

Таким образом, порядок системы линейных уравнений так же, как и в трехмерном случае, равен $2N$, где N — число узлов коллокации на границе Γ . В случае аксиально-симметричных колебаний ($m=0$) имеется лишь одна компонента (H_τ или H_θ в зависимости от типа колебаний) и порядок системы равен N . После нахождения резонансной частоты и распределения магнитного поля на границе необходимо определить компоненты полей \vec{E} и \vec{H} в объеме резонатора. Как и в трехмерном случае, это можно сделать, используя соотношения (2') и (3'). Соответствующие коэффициенты $G_{\lambda\beta}^{(H)}$ и $G_{\lambda\beta}^{(E)}$ даны в Приложении I.

Техника выделения особенностей ядра аналогична трехмерному случаю. Приведем выражения для функций $\tilde{E}_{\lambda\beta}$ в случае конической и сферической поверхности:

$$\tilde{E}_{\theta\tau} = -c \frac{m \theta^2 t r_0}{(r_0^2 \theta^2 + t^2)^{3/2}},$$

$$\tilde{E}_{\theta\theta} = \frac{r_0^2 \theta^2 \cos d - t^2 c}{2(r_0^2 \theta^2 + t^2)^{3/2}},$$

$$\tilde{E}_{\tau\tau} = -\tilde{E}_{\theta\theta},$$

$$\tilde{E}_{\tau\theta} = \frac{\cos d}{c} \tilde{E}_{\theta\tau},$$

где в случае конической поверхности $t = r/L$, $c = 0$, а для сферы $t = r/\rho$, $c = r/\rho$, ρ — радиус сферы, L — длина образующей конуса. Коэффициенты $\tilde{I}_{ij}^{\lambda\beta, k}$ даны в Приложении 2.

5. ТЕСТИРОВАНИЕ ПРОГРАММ MAXWELL-2 И MAXWELL-3

Для тестирования программ и проверки точности расчетов резонансных частот и электромагнитных полей резонаторов были проделаны расчеты простых резонаторов, для которых известны аналитические решения, а также резонаторы более сложных конфигураций, параметры которых получены путем измерения.

а) MAXWELL-2. Для проверки точности программы был проделан расчет десяти гармоник сферического резонатора для $m=1$ (см. Таблицу I). В расчетах поверхность образующей сферы разбивалась на 5 элементов. При этом относительная погрешность вычисления частоты составляла $\sim 10^{-3}$. Был также проделан расчет первых четырех гармоник цилиндрического резонатора для $m=1$ (Таблица 2). При разбиении поверхности на 15 элементов в меридианной плоскости сечения относительная погрешность определения частоты составила $\sim 10^{-2}$. Для резонатора непрерывного гирокона [15], изображенного на рис. 2 измеренное значение частоты для моды E_{110} равнялось 432 МГц. Расчеты с числом элементов $N=50$ дали значение 435 МГц.

б) MAXWELL-3. Для проверки работы программы был проделан расчет цилиндрического резонатора (Таблица 4). Поверхность разбивалась на 48 элементов. Погрешность расчета моды E_{010} составила $\sim 5 \cdot 10^{-3}$. Погрешность расчета моды E_{211} сферического резонатора составила $\sim 10^{-3}$ при разбиении сферы на 16 элементов (Таблица 5).

Для ячейки бипериодической структуры с индуктивной связью (см. рис. 3) [17] измеренная частота на типе колебаний $\pi/2$ равня-

лась 430 МГц. Расчеты, сделанные программой MAXWELL -3 дали значение 434 МГц. Поверхность резонатора была разбита на 40 элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Halbach K., Holsinger R.F. - Part. Acc. 1976, vol.7, pp.213-222.
2. Fomel B.M. et al. - Part. Acc. 1981, vol.11, p.p. 172-179.
3. Konrad A. IEEE Trans. Nucl. Sci., 1973, vol. NS-20, pp.802-808.
4. Касчиева В.А. и др. Препринт ИФВЭ, 82-92, 1982.
5. Григорьев А.Д. и др. Электронная техника, сер. I, 1978, вып.10, с.101-103.
6. Лысенко В.Я. и др. Электронная техника, сер. I, 1975, вып.4, с.118-120.
7. Дайковский А.Г. и др. Препринт ИФВЭ, 80-107, 1980.
8. Davies J.B. et al. IEEE Trans. Microwave Theory Tech, 1980, v.30, p.1975.
9. Лысенко В.Я. и др. Электронная техника, сер. I, 1980, вып. II, с.34-38.
10. Каценеленбаум Б.З. Высокочастотная электродинамика М., Наука, 1966, с.117.
11. Калиткин И.И. Численные методы. М., Наука, 1978, с.191.
12. Иванов В.Я. Препринт ВЦ СО АН СССР № 8, 1976.
13. Поджо А., Миллер Е. В кн. Вычислительные методы в электродинамике, М., Мир, 1977, с.182.
14. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М., Мир, 1974, с.14-22.
15. Карлинер М.М. и др. Препринт ИЯФ СО АН СССР 82-147, 1982.
16. Иванов В.Я. Решение смешанных краевых задач для уравнения Лапласа методом интегральных уравнений. Сб. Типовые программы решения задач мат. физики. Изд. ВЦ СО АН СССР, 1975, с.5-35.
17. Вещеревич В.Г. и др. Вопросы атомной науки и техники. Серия линейные ускорители, вып.2(5), Харьков, 1977, стр.17.

Приложение I

Коэффициенты $G_{\alpha\beta}^{(H)}$ и $G_{\alpha\beta}^{(E)}$ для вычисления магнитного и электрического поля в объеме резонатора:

$$G_{r\tau}^{(H)} = (z_j - z_0) \int_0^\pi \cos \theta \cdot \cos(m\theta) \cdot f \cdot d\theta,$$

$$G_{r\theta}^{(H)} = [r_0 \cos d_j - (z_j - z_0) \sin d_j] \int_0^\pi f \cdot \sin \theta \cdot \sin(m\theta) d\theta,$$

$$G_{\theta\tau}^{(H)} = (z_j - z_0) \int_0^\pi f \cdot \sin \theta \cdot \sin(m\theta) d\theta,$$

$$G_{\theta\theta}^{(H)} = \int_0^\pi f \cdot \cos(m\theta) [r_j \cos d_j - (r_0 \cos d_j - (z_j - z_0) \sin d_j) \cos \theta] d\theta,$$

$$G_{z\tau}^{(H)} = \int_0^\pi f \cdot \cos(m\theta) (r_j - r_0 \cos \theta) d\theta,$$

$$G_{z\theta}^{(H)} = \sin d_j \int_0^\pi f \cdot \sin \theta \cdot \sin(m\theta) d\theta,$$

$$G_{r\tau}^{(E)} = \int_0^\pi \{ -f_1 (r_0 - r_j \cos \theta) r_0 + f_2 [(z_j - z_0)^2 + r_j (r_j - r_0 \cos \theta)] \} \sin \theta d\theta,$$

$$G_{r\theta}^{(E)} = \int_0^\pi \{ f_1 [\cos d_j (z_j - z_0) - \sin d_j (r_0 \cos \theta - r_j)] (r_0 - r_j \cos \theta) + f_2 (z_j - z_0) [\cos d_j \cdot r_0 - \cos \theta (\sin d_j (z_j - z_0) + r_j \cos d_j) + r_0 \sin d_j \sin^2 \theta] \} d\theta,$$

$$G_{z\tau}^{(E)} = - \int_0^\pi r_0 (z_j - z_0) (f_1 \sin \theta + f_2 \cos \theta) d\theta,$$

$$G_{z\theta}^{(E)} = \int_0^\pi \{ f_1 (z_j - z_0) [\cos d_j (z_j - z_0) - \sin d_j (r_0 \cos \theta - r_j)] - f_2 [(\sin d_j (z_j - z_0) + \cos d_j r_j) (r_j - r_0 \cos \theta) + r_0 (r_0 - r_j \cos \theta) \cos d_j] \} d\theta,$$

$$G_{\theta\tau}^{(E)} = \int_0^\pi \{ f_1 r_0 r_j \sin^2 \theta + f_2 [(r_j - r_0 \cos \theta) (r_0 - r_j \cos \theta) - (z_j - z_0)^2 \cos \theta] \} d\theta,$$

$$G_{\theta\theta}^{(E)} = - \int_0^\pi \sin \theta \{ f_1 [\cos d_j (z_j - z_0) - \sin d_j (r_0 \cos \theta - r_j)] r_j + f_2 [(z_j - z_0) (r_j \cos d_j + (z_j - z_0) \sin d_j) + r_0 \sin d_j (r_0 - r_j \cos \theta)] \} d\theta,$$

$$f_1 = \frac{2r_j}{R^4} \left[\frac{\cos(kR)}{kR} + \sin(kR) \right],$$

$$f_2 = \frac{k r_j}{R^3} \left[\left(\frac{1}{(kR)^2} - 1 \right) \cos(kR) + \frac{1}{kR} \sin(kR) \right],$$

$$R = (r_j^2 + r_0^2 - 2r_0 r_j \cos \theta + (z_j - z_0)^2)^{1/2}.$$

Приложение 2

Коэффициенты $\tilde{J}_{ij}^{\alpha\beta\gamma}$ для выделения особенности ядра интегрального уравнения в аксиально-симметричном случае.

$$\tilde{J}_{ii}^{\varphi\tau 1} = -\frac{m c}{6\Gamma_0} (\pi^3 A_{21} - 3\pi^2 A_{22} + 3\pi A_{23} - A_{24}),$$

$$\tilde{J}_{ii}^{\varphi\tau 2} = -\frac{m c}{6\Gamma_0} A_{24},$$

$$\tilde{J}_{ii}^{\varphi\tau 3} = -\frac{m c}{6\Gamma_0} (\pi A_{21} - A_{22}),$$

$$\tilde{J}_{ii}^{\varphi\tau 4} = -\frac{m c}{\Gamma_0} A_{22},$$

$$\tilde{J}_{ii}^{\varphi\varphi 1} = \frac{1}{12} \cos d_i (\pi^3 A_{20} - 3\pi^2 A_{21} + 3\pi A_{22} - A_{23}) + \frac{c}{12} (\pi^3 A_{02} - 3\pi^2 A_{03} + 3\pi A_{04} - A_{05}),$$

$$\tilde{J}_{ii}^{\varphi\varphi 2} = \frac{1}{12} \cos d_i A_{23} + \frac{c}{12} A_{05},$$

$$\tilde{J}_{ii}^{\varphi\varphi 3} = \frac{1}{2} [\cos d_i (\pi A_{20} - A_{21}) + c (\pi A_{02} - A_{03})],$$

$$\tilde{J}_{ii}^{\varphi\varphi 4} = \frac{1}{2} [\cos d_i A_{21} - c A_{03}],$$

$$\tilde{J}_{ii}^{\tau\tau 1} = \frac{1}{12} \cos d_i [\pi^3 A_{20} - 3\pi^2 A_{21} + 3\pi A_{22} - A_{23}] + \frac{c}{12} (\pi^3 A_{02} - 3\pi^2 A_{03} + 3\pi A_{04} - A_{05}),$$

$$\tilde{J}_{ii}^{\tau\tau 2} = \frac{1}{12} \cos d_i A_{23} + \frac{c}{12} A_{05},$$

$$\tilde{J}_{ii}^{\tau\tau 3} = \frac{1}{2} [\cos d_i (\pi A_{20} - A_{21}) + c (\pi A_{02} - A_{03})],$$

$$\tilde{J}_{ii}^{\tau\tau 4} = \frac{1}{2} (\cos d_i A_{21} + c A_{03}),$$

$$\tilde{J}_{ii}^{\tau\varphi 1} = -\frac{m \cos d_i}{6\Gamma_0} (\pi^3 A_{21} - 3\pi^2 A_{22} + 3\pi A_{23} - A_{24}),$$

$$\tilde{J}_{ii}^{\tau\varphi 2} = -\frac{m \cos d_i}{6\Gamma_0} A_{24},$$

$$\tilde{J}_{ii}^{\tau\varphi 3} = -\frac{m \cos d_i}{6\Gamma_0} (\pi A_{21} - A_{22}),$$

$$\tilde{J}_{ii}^{\tau\varphi 4} = -\frac{m \cos d_i}{6\Gamma_0} A_{22},$$

$$A_{20} = \pi \operatorname{arsh} \left(\frac{h_i}{\pi} \right),$$

$$A_{21} = \frac{1}{2} [h_i^2 - h_i (\pi^2 + h_i^2)^{1/2} + \pi^2 \operatorname{arsh} \left(\frac{h_i}{\pi} \right)],$$

$$A_{22} = \frac{1}{3} [h_i^3 \operatorname{arsh} \left(\frac{\pi}{h_i} \right) - \pi h_i (\pi^2 + h_i^2)^{1/2} + \pi^3 \operatorname{arsh} \left(\frac{h_i}{\pi} \right)],$$

$$A_{23} = \frac{1}{4} [(h_i^2 + \pi^2)^{1/2} h_i (2h_i^2 - \pi^2) - 2h_i^4 + \pi^4 \operatorname{arsh} \left(\frac{h_i}{\pi} \right)],$$

$$A_{24} = \frac{1}{40} [17\pi^5 \operatorname{arsh} \left(\frac{h_i}{\pi} \right) + 12h_i^5 \operatorname{arsh} \left(\frac{\pi}{h_i} \right) + \pi h_i (\pi^2 + h_i^2)^{1/2} (12h_i^2 - 17\pi^2)],$$

$$A_{02} = h_i \operatorname{arsh} \left(\frac{\pi}{h_i} \right),$$

$$A_{03} = h_i [(\pi^2 + h_i^2)^{1/2} - h_i],$$

$$A_{04} = \frac{1}{2} [\pi h_i (\pi^2 + h_i^2)^{1/2} - h_i^3 \operatorname{arsh} \left(\frac{\pi}{h_i} \right)],$$

$$A_{05} = \frac{1}{3} [2h_i^4 - h_i (\pi^2 + h_i^2)^{1/2} (2h_i^2 - \pi^2)].$$

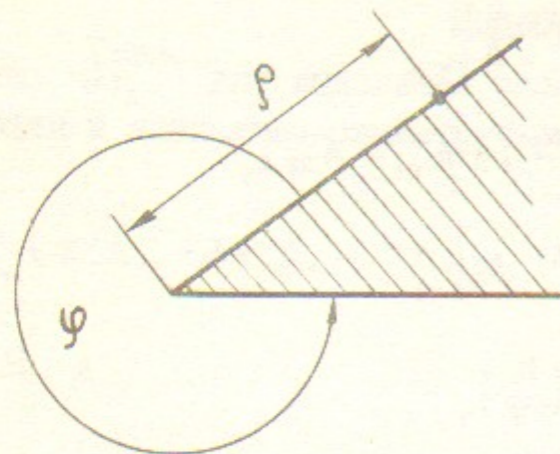


Рис. 1.

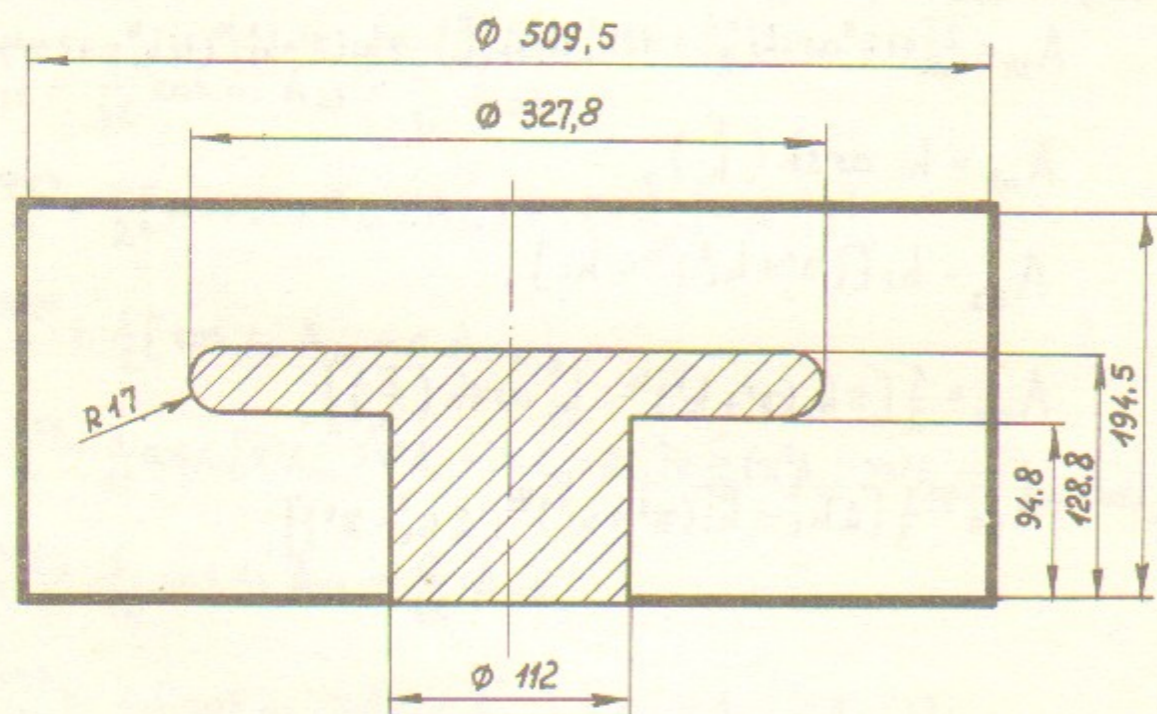


Рис.2. Модель резонатора развертки непрерывного гирокона.

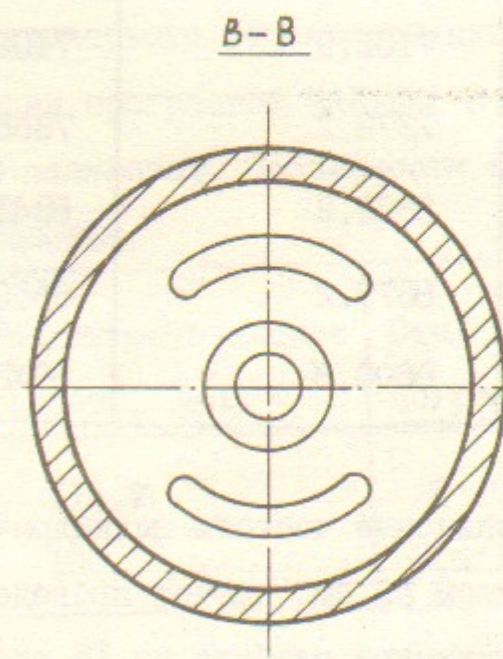
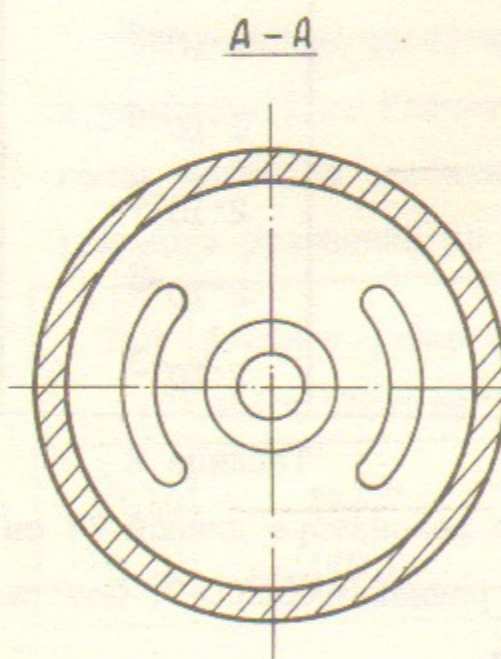
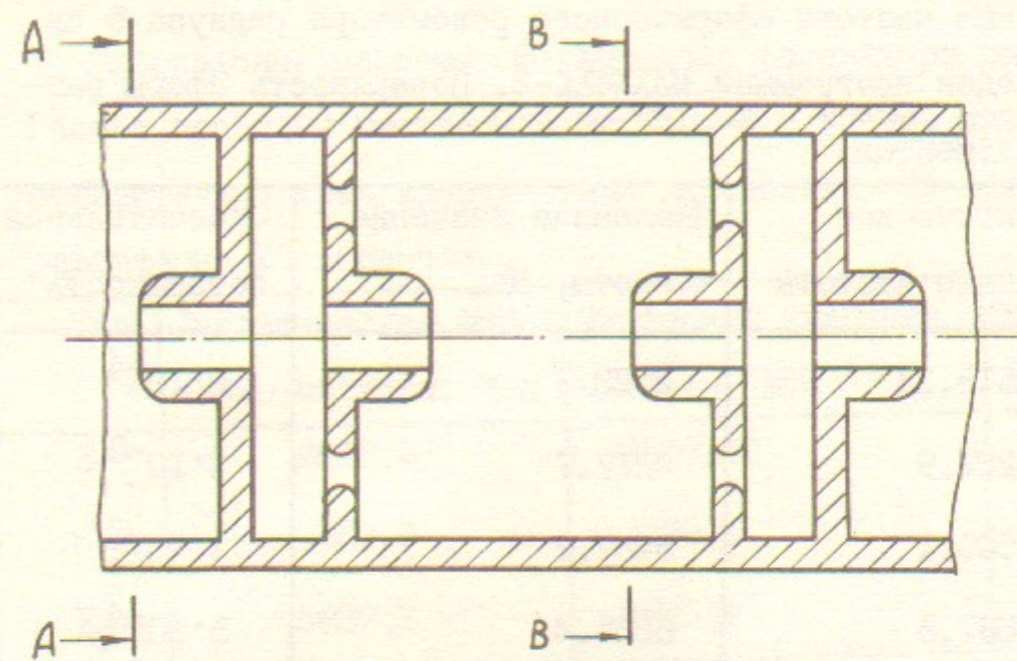


Рис.3. Бипериодическая ускоряющая структура с индуктивной связью.

Таблица 1

Резонансные частоты сферического резонатора радиуса 5 см. Расчет проведен программой MAXWELL-2. Поверхность сферы разбита на 5 элементов.

Тип	Аналитическое значение частоты	Численное значение частоты, Мгц	Относительная погрешность
E _{III}	2618.23	2620.3	$8 \cdot 10^{-4}$
H _{III}	4287.9	4277.7	$2 \cdot 10^{-3}$
H _{I2I}	5500.1	5487.2	$2 \cdot 10^{-3}$
E _{2II}	5837.3	5835.4	$3 \cdot 10^{-4}$
H _{I3I}	6668.5	6646.3	$3 \cdot 10^{-3}$
E _{22I}	7102.9	7108.1	$7 \cdot 10^{-4}$
H _{2II}	7372.2	7365.4	$9 \cdot 10^{-4}$
E _{23I}	8323.2	8341.6	$2 \cdot 10^{-3}$
H _{22I}	8679.2	8660.0	$2 \cdot 10^{-3}$
E _{33I}	8890.8	8873.3	$2 \cdot 10^{-3}$

Таблица 2

Резонансные частоты цилиндрического резонатора длиной 70 см и радиусом 59 см. Расчет проведен программой MAXWELL-2. Поверхность цилиндра разбита на 15 элементов.

Тип	Аналитическое значение частоты, Мгц	Численное значение частоты, Мгц	Относительная погрешность
H _{III}	363.6	360.8	$8 \cdot 10^{-3}$
E _{II0}	310.0	309.9	$3 \cdot 10^{-4}$
E _{III}	376.9	376.7	$5 \cdot 10^{-4}$
H _{II2}	450.7	453.4	$6 \cdot 10^{-3}$

Таблица 3

Резонансные частоты сферического резонатора радиуса 5 см. Расчет проведен программой MAXWELL-3 с учетом симметрии поля относительно трех координатных плоскостей. Поверхность сферы разбита на 16 элементов.

Тип	Аналитическое значение частоты, Мгц	Численное значение частоты, Мгц	Относительная погрешность
E _{II0}	2618.23	2618.52	10^{-4}
H _{II0}	4287.9	4288.3	10^{-4}
E _{2II}	5837.3	5843.9	10^{-3}

Таблица 4

Резонансные частоты цилиндрического резонатора длиной 2 м и радиусом 1 м. Расчет проведен программой MAXWELL-3. Поверхность цилиндра разбита на 48 элементов. Особенности ядра интегрального уравнения не учитывались.

Тип	Аналитическое значение частоты, Мгц	Численное значение частоты, Мгц	Относительная погрешность
E ₀₁₀	114.7	115.2	$5 \cdot 10^{-3}$
E ₂₁₀	118.8	195.5	$3.6 \cdot 10^{-2}$

В.Я.Иванов, М.М.Карлинер, В.Е.Теряев,
В.П.Яковлев

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ДЛЯ РАСЧЕТА ВЧ-РЕЗОНАТОРОВ

Препринт
№ 83-59

Работа поступила - 16 мая 1983 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати 1.06-1983 г. МН 17566
Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.1,5 печ.л., 1,2 учетно-изд.л.
Заказ №59 . Тираж 290 экз.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90