

45

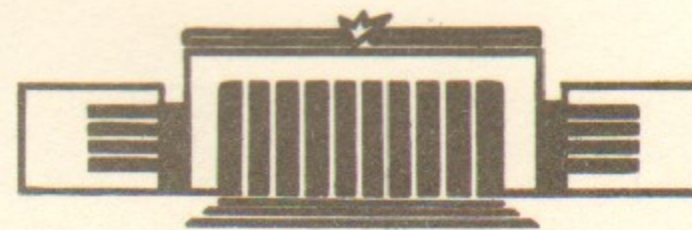


ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

В.П.Нагорный, Д.Д.Рютов, Г.В.Ступаков

ЖЕЛОБКОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ  
В ГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ ЛОВУШКЕ

ПРЕПРИНТ 83—73



НОВОСИБИРСК

THE FLUTE INSTABILITY IN A "GASDYNAMIC" TRAP

V.P.Nagorny, D.D.Ryutov, G.V.Stupakov

Institute of Nuclear Physics,  
630090, Novosibirsk 90, USSR

ABSTRACT

The flute instability in a "gasdynamic" trap (which is characterized by that the mean free path  $\lambda$  is smaller than the trap length  $L$ ) is studied. Two new effects are taken into account: a) the influence on the flute instability of the energy and particles injection maintaining the stationary state; b) the wave convection by the plasma outflowing from the system. The expression for the instability growth rate is obtained and the necessary and sufficient criterium for stability is formulated. It is found that even when the flute instability is stabilized a slow instability having growth rate of order of the reciprocal of the particles' lifetime can be driven. Some effects considered in this paper are also of interest for mirror traps with  $\lambda \geq L$ .

## I. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1,2] была рассмотрена открытая ловушка с очень большим пробочным отношением  $R$  и с длиной  $L$ , превышающей длину свободного пробега частиц плазмы  $\lambda$ . Стационарное состояние плазмы в такой системе должно поддерживаться как результат баланса между инжекцией частиц на участке однородного магнитного поля и вытеканием плазмы через пробки (рис.1).

Время жизни плазмы в ловушке определяется простой газодинамической оценкой

$$\tau \sim RL/c_s, \quad (1)$$

где  $c_s$  - скорость звука в плазме (именно по этой причине ловушку указанного типа было предложено называть "газодинамической" [1,2]). При больших  $R$  значение времени жизни, определяемое оценкой (1), представляет интерес для термоядерных приложений. Существенно, что оценка (1) нечувствительна к микронеустойчивостям плазмы, которые во многих случаях заметно ограничивают продольное время жизни в ловушках другого типа.

Еще одно достоинство газодинамической ловушки связано с тем, что она, в принципе, допускает обеспечение устойчивости плазмы по отношению к желобковым возмущениям в рамках аксиально-симметричной конфигурации. Эта возможность связана с тем, что при условии

$$\lambda < L \quad (2)$$

плотность плазмы в пробке и непосредственно за пробкой по порядку величины та же, что и внутри ловушки, вследствие чего при вычислении "выталкивающей силы", действующей на желобок (ср [3]), нужно учитывать не только внутреннюю область ловушки (которая сама по себе обычно неустойчива), но и область за пробками, где силовые линии имеют благоприятную кривизну и которая поэтому оказывает стабилизирующий эффект. В этом отношении газодинамическая ловушка сильно отличается от обычного короткого ( $L \ll \lambda$ ) пробкотрона, где плотность плазмы за пробкой мала по параметру  $L/\lambda$  по сравнению с плотностью плазмы внутри ловушки и где вклад в критерий устойчивости вносит только внутренняя область ловушки.

С целью получения качественного представления об условиях стабилизации, в работе [2] был использован известный критерий Розенблюта-Лонгмайра [4] (в варианте для плазмы с резкой границей):

$$\int \frac{dl}{H^2 r} \alpha (p_{||} + p_{\perp}) > 0, \quad (3)$$

в котором под  $p_{||}$  и  $p_{\perp}$  предлагалось понимать продольный и поперечный поток импульса (с учетом течения плазмы):

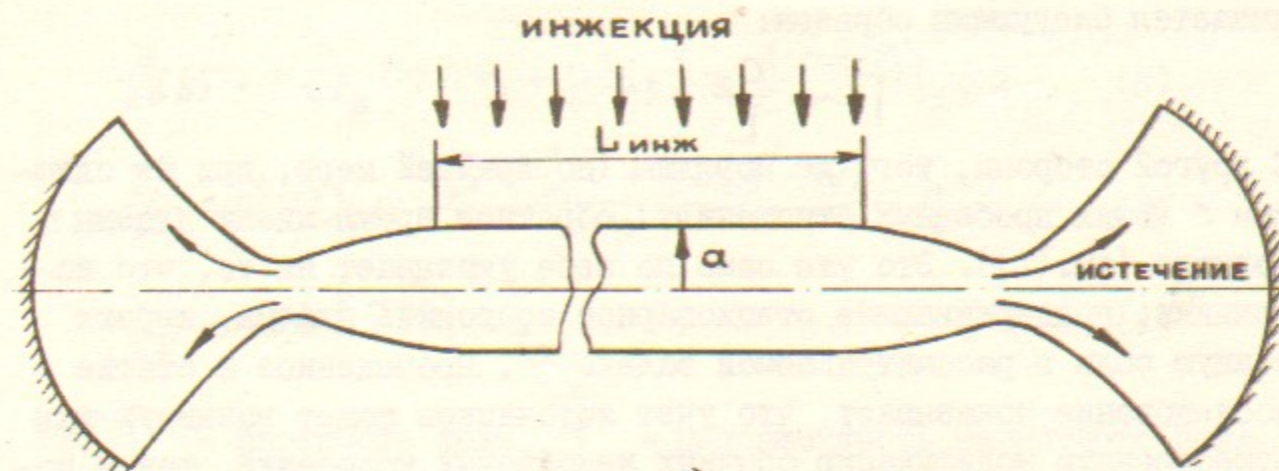
$$p_{||} = p + \rho v^2, \quad p_{\perp} = p.$$

Здесь  $p$ ,  $\rho$  и  $v$ , соответственно, гидродинамические давление, плотность и скорость плазмы, а остальные обозначения имеют следующий смысл:  $r = r(l)$  - расстояние от граничной силовой линии до оси системы,  $\alpha = \alpha(l)$  - кривизна этой силовой линии,  $H = H(l)$  - напряженность магнитного поля на силовой линии,  $l$  - длина дуги силовой линии. С помощью соотношения (3) были сформулированы некоторые условия на профиль магнитного поля в пробке, при выполнении которых можно ожидать стабилизации. Качественно рекомендация состоит в том, чтобы делать поле плавно нарастающим от центра к пробке, а затем резко спадающим за пробкой (как это и показано на рис.1). Позже О.А.Бушковой и В.В.Мирновым при анализе устойчивости ГД на основе выражения (3) было отмечено, что в случае достаточно быстрого спада магнитного поля в расширителе основной вклад в стабилизацию дает область малого магнитного поля, т.е. область вблизи поглотителя.

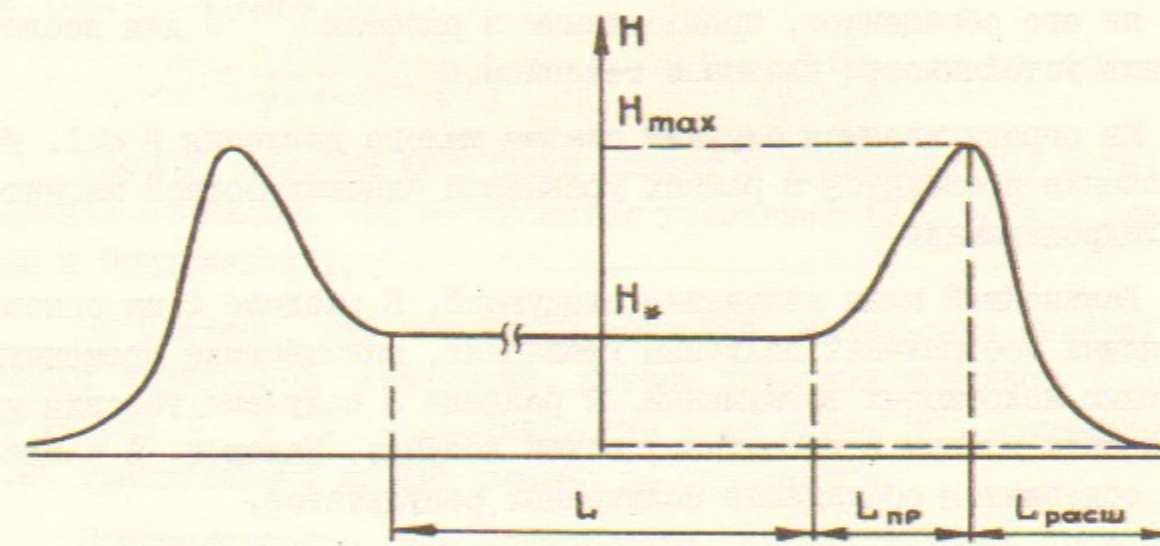
Цель настоящей работы состоит в количественном анализе МГД-устойчивости плазмы относительно желобковых возмущений в аксиально-симметричной газодинамической ловушке. Отличие этой задачи от стандартной задачи на МГД-устойчивость заданной равновесной конфигурации связано с двумя обстоятельствами.

Первое из них - наличие истечения плазмы через пробки, приводящее к выносу возмущений из внутренних областей ловушки и изменению характера временной эволюции возмущений по сравнению с "классической" постановкой.

Второе обстоятельство связано с необходимостью учета инжекции частиц в плазму на линейном участке. Действительно, как известно, характерный инкремент  $\Gamma$  желобковой неустойчивости оце-



а)



б)

Рис.1. Газодинамическая ловушка

- а) силовые линии магнитного поля.  
Поглощающие поверхности заштрихованы;  
б) напряженность магнитного поля на оси системы.

Обозначения:  $H_{max}$ ,  $H_*$ ,  $H_{п}$  - значение магнитного поля в пробке, на однородной части ловушки и на поглотителе;  $L$ ,  $L_{пр}$ ,  $L_{расш}$  - длины, соответственно, однородного участка, пробки и расширителя;  $a$  - поперечный размер плазмы на однородном участке.

нивается следующим образом:

$$\Gamma \sim \frac{c_s}{L} \quad (4)$$

С другой стороны, того же порядка (по крайней мере, при не слишком больших пробочных отношениях) обратное время жизни плазмы в ловушке (см. (1)). Это уже само по себе указывает на то, что источники, поддерживающие стационарное состояние плазмы, играют важную роль в рассматриваемой задаче \*). Проведенное в статье исследование показывает, что учет источников может вызывать как существенную модификацию обычных желобковых колебаний, так и появление новых низкочастотных неустойчивостей.

Отмеченные особенности рассматриваемой задачи не позволяют пользоваться при ее анализе ни обычным энергетическим принципом [3], ни его обобщением, предложенным в работах [5,6] для исследования устойчивости плазмы с течением.

Мы ограничиваемся случаем плазмы малого давления  $\beta \ll 1$ . Исследование проводится в рамках уравнений одножидкостной магнитной гидродинамики.

Дальнейший план изложения следующий. В разделе 2 на основе наглядных соображений получены уравнения, описывающие временную эволюцию желобковых возмущений. В разделе 3 получены условия устойчивости плазмы в газодинамической ловушке. Наконец, в разделе 4 содержится обсуждение полученных результатов.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

### 2.1. Система уравнений магнитной гидродинамики

Уравнения, описывающие нашу задачу, отличаются от обычных уравнений магнитной гидродинамики наличием источников, связанных с инъекцией частиц в плазму. Обозначая через  $q_m$ ,  $\vec{q}_p$  и  $q_E$  массу, импульс и энергию, поглощаемые единицей объема плазмы в единицу времени, можно записать эти уравнения в виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \vec{v} = q_m \quad (5)$$

\* ) Которая в этом отношении существенно отличается от задачи о желобковой неустойчивости короткого ( $L \ll \lambda$ ) пробкотрона, где инкремент на много порядков превышает обратное время жизни плазмы, и поэтому инъекцией частиц за время развития неустойчивости можно пренебречь.

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_\alpha + \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\rho v_\alpha v_\beta + p \delta_{\alpha\beta}) = \frac{1}{c} [\vec{j} \vec{H}]_\alpha + q_{p\alpha}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) S = \frac{q_E - \vec{q}_p \vec{v} + q_m (\frac{v^2}{2} - W)}{\rho} \equiv q_s, \quad (7)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \text{rot} [\vec{v} \vec{H}], \quad (8)$$

где  $\vec{j}$  - плотность тока,  $\vec{H}$  - напряженность магнитного поля,  $S$  и  $W$ , соответственно, энтропия и энтальпия плазмы.

Плазма считается идеальным газом с показателем адиабаты  $\gamma$ . При этом для  $S$  и  $W$  можно пользоваться следующими соотношениями (см. [7], стр. 390):

$$S = \frac{1}{\gamma-1} \ln p / \rho^\gamma, \quad W = \frac{\gamma p}{(\gamma-1) \rho}. \quad (9)$$

Способ, которым источники входят в уравнения (5) и (6), заранее очевиден. Что же касается уравнения (7), то его вывод дан в Приложении I.

Мы считаем, что источники вещества, импульса и энергии обладают аксиальной симметрией, причем источник импульса  $\vec{q}_p$  имеет только  $\Gamma$  и  $Z$  - составляющие и не имеет  $\varphi$  - составляющей, т.е. вращательный момент плазме не сообщается.

Предполагается, что поверхности, ограничивающие продольный размер плазмы (рис. I), полностью поглощают падающие на них частицы и сами не являются источниками частиц, так что плотность тока на них обращается в нуль. Считается также, что они ортогональны силовым линиям магнитного поля.

В реальной газодинамической ловушке (ср. [1,2]), вследствие высокой продольной теплопроводности электронов, их температура будет однородна по длине установки (тогда как для ионов можно с хорошей точностью пользоваться адиабатическим приближением). Это обстоятельство можно учесть путем соответствующего изменения выражений для  $S$  и  $W$ . Мы, однако, не будем этого делать, поскольку это не вносит принципиально новых особенностей в задачу об устойчивости плазмы и вызывает лишь появление излишне громоздких формул.

С целью минимизации энергетических затрат на создание магнитного поля длина участков сильного магнитного поля в области пробок будет делаться много меньше длины центральной части, т.е. будут выполняться неравенства

$$L_{пр}, L_{расш} \ll L \quad (10)$$

(обозначения см. на рис.1). Ниже в ряде случаев мы будем пользоваться неравенствами (10).

## 2.2. Стационарное состояние

Для рассматриваемого в статье случая плазмы низкого давления ( $\beta \ll 1$ ) магнитное поле можно считать вакуумным и, соответственно, потенциальным:

$$\text{rot } \vec{H} = 0. \quad (11)$$

Мы будем дополнительно считать, что пробки разделены участком однородного магнитного поля (как это и показано на рис.1).

В аксиально-симметричном магнитном поле силовые линии — плоские кривые, лежащие в меридиональных плоскостях  $\varphi = \text{const}$ . Рассмотрим семейство силовых линий в одной из таких плоскостей. Будем маркировать каждую силовую линию радиусом  $r_*$  точки ее пересечения с экваториальной плоскостью  $z=0$ , т.е. будем записывать уравнение силовой линии в виде:

$$r = r(r_*, l)$$

где  $l$  — длина дуги силовой линии, отсчитываемая от плоскости  $z=0$  (т.е.  $r(r_*, 0) = r_*$ ). Пусть другая силовая линия пересекает экваториальную плоскость на малом расстоянии  $\xi_*$  от точки  $r_*$ . Из условия сохранения магнитного потока между соседними магнитными поверхностями легко заключить, что в произвольной точке  $l$  расстояние между этими двумя силовыми линиями (рис.2) может быть определено из соотношения:

$$\xi(l) = \xi_* \frac{H_* r_*}{H(r_*, l) r(r_*, l)}. \quad (12)$$

Введем единичный вектор касательной к силовой линии

$$\vec{h} = \vec{H}/H$$

и единичный вектор внешней нормали

$$\vec{n} = \frac{1}{\epsilon} (\vec{h} \nabla) \vec{h}, \quad (13)$$

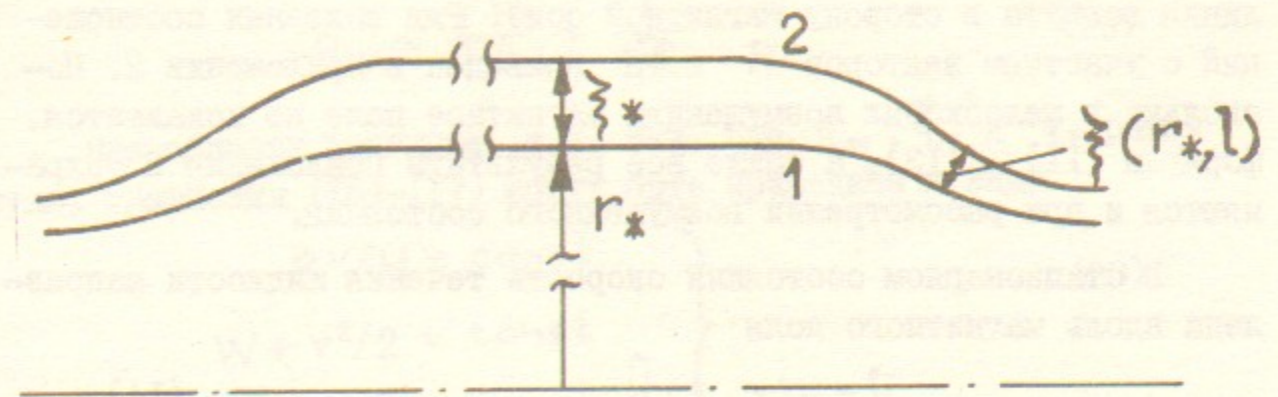


Рис.2. После смещения силовая трубка в точности совмещается с новой силовой линией:

1 — исходное положение;

2 — конечное положение силовой трубки.

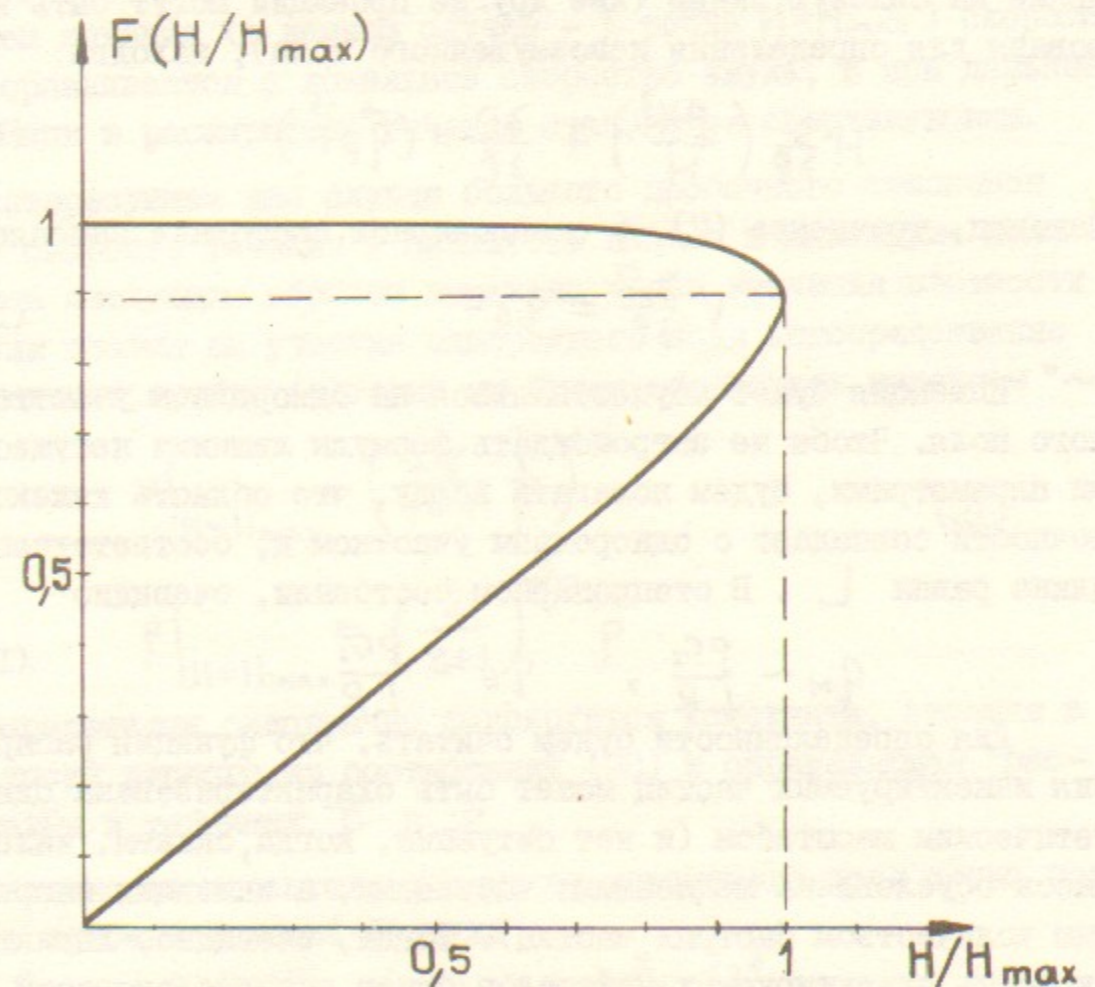


Рис.3. График функции  $F(H/H_{max})$  для  $\gamma = 5/3$ .

где  $\mathcal{K}$  — кривизна силовой линии (положительная, если силовая линия вогнута в сторону магнитной оси). Ряд полезных соотношений с участием векторов  $\vec{n}$  и  $\vec{h}$  приведен в Приложении 2. Поскольку в желобковых возмущениях магнитное поле не искажается, формулы (II) — (I3), а также все результаты Приложения 2 сохраняются и при рассмотрении возмущенного состояния.

В стационарном состоянии скорость течения жидкости направлена вдоль магнитного поля

$$\vec{v} = v(r_*, \ell) \vec{h}. \quad (I4)$$

Здесь и ниже мы пользуемся тем, что в невозмущенном состоянии все характеристики плазмы суть функции  $r_*$  и  $\ell$ . Подставляя (I4) в (5) и учитывая соотношение (П.2.5), получаем

$$H \frac{\partial}{\partial \ell} \frac{\rho v}{H} = q_m. \quad (I5)$$

Аналогично, подставляя (I4) в (6) и проектируя полученное уравнение на силовую линию (две другие проекции могут быть использованы для определения невозмущенного тока), находим:

$$H \frac{\partial}{\partial \ell} \left( \frac{\rho v^2}{H} \right) + \frac{\partial P}{\partial \ell} = (\vec{q}_p \vec{h}). \quad (I6)$$

Наконец, уравнение (7) в стационарном состоянии заменяется на

$$v \frac{\partial S}{\partial \ell} = q_s. \quad (I7)$$

Инжекция будет осуществляться на однородном участке магнитного поля. Чтобы не загромождать формулы лишними несущественными параметрами, будем полагать всюду, что область инжекции в точности совпадает с однородным участком и, соответственно, ее длина равна  $L$ . В стационарном состоянии, очевидно

$$q_m \sim \frac{\rho c_s^2}{LR}, \quad q_E \sim \frac{\rho c_s^3}{LR} \quad (I8)$$

Для определенности будем считать, что функция распределения инжектируемых частиц может быть охарактеризована одним энергетическим масштабом (и нет ситуации, когда, скажем, инжекция массы обусловлена медленными частицами, а инжекция энергии — малым количеством быстрых частиц). Тогда, очевидно, характерная скорость инжектируемых нейтралов будет порядка скорости звука в плазме, и для  $q_p$  может быть записана оценка

$$q_p \sim \frac{\rho c_s^2}{LR} \sim \frac{P}{LR}. \quad (I9)$$

Вне области инжекции, т.е. там, где  $q_m$ ,  $\vec{q}_p$  и  $q_E$  равны нулю, уравнения (I5)–(I7) могут быть приведены к виду

$$\left. \begin{aligned} \rho v/H &= \text{const} \\ W + v^2/2 &= \text{const} \\ S &= \text{const} \end{aligned} \right\}. \quad (20)$$

Эти соотношения следует понимать в том смысле, что величины, стоящие в левых частях равенств, постоянны вдоль каждой силовой линии (но, вообще говоря, меняются от линии к линии).

Соотношения (20) идентичны тем, которые описывают истечение газа из сопла с сечением, пропорциональным  $1/H$  (ср. [7], стр. 427). В частности, сохраняется утверждение о том, что в наименьшем сечении (в данном случае — в точке  $H = H_{\max}$ ) скорость течения сравнивается с локальной скоростью звука, а при дальнейшем движении в расширитель течение становится сверхзвуковым.

В интересующем нас случае большого пробочного отношения ( $R \gg 1$ ) скорость течения и плотность плазмы в максимуме поля могут быть следующим образом выражены через значения плотности и давления плазмы на участке однородного поля непосредственно перед входом в пробку (которые мы будем обозначать индексом “~”)

$$v|_{H=H_{\max}} = \left( \frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{\tilde{P}}{\tilde{\rho}} \right)^{1/2}, \quad (21)$$

$$\rho|_{H=H_{\max}} = \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{1/\gamma} \tilde{\rho}.$$

Этими выражениями однозначно фиксируется константа, стоящая в правой части первого из соотношений (20) и определяющая “расход” плазмы в терминах  $\tilde{\rho}$  и  $\tilde{P}$ .

Зависимость плотности плазмы от магнитного поля легко получается с помощью неявной формулы

$$\left( \frac{\rho}{\tilde{\rho}} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{\rho}{\tilde{\rho}} \right)^{\gamma-1} \right] = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{2/\gamma-1} \frac{H^2}{H_{\max}^2}, \quad (22)$$

следующей из соотношений (20) и (21). Функция отношения  $\rho/\tilde{\rho}$ , стоящая в левой части равенства, немонотонна. При определении зависимости  $\rho(H)$  в области перед максимумом магнитного поля следует брать убывающую ветвь этой функции, а в области за максимумом (в расширителе) — возрастающую ветвь (ср. [7], § 80). В расширителе, при  $H \ll H_{\max}$ , имеет место приближенная формула

$$\frac{\rho}{\tilde{\rho}} \approx \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{H}{H_{\max}} \quad (23)$$

Скорость течения плазмы здесь достигает предельного значения

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{\tilde{\rho}}{\rho}} \quad (24)$$

Для дальнейшего нам потребуется знание зависимости от магнитного поля функции  $2\rho + \rho v^2$ . Посредством соотношений (20) и (21) эту функцию можно выразить через  $\rho/\tilde{\rho}$

$$2\rho + \rho v^2 = \frac{2\tilde{\rho}}{\gamma-1} \left[ \gamma \rho/\tilde{\rho} - (\rho/\tilde{\rho})^\gamma \right] \quad (25)$$

и, далее, с помощью (22), через  $H/H_{\max}$ . Результат имеет вид

$$2\rho + \rho v^2 = 2\tilde{\rho} F(H/H_{\max}). \quad (26)$$

Функция  $F(H/H_{\max})$ , определяется формулами (22) и (25). Её график приведен на рис. 3 (две ветви). При движении в глубь ловушки функция  $F$  быстро достигает единицы; при движении в расширитель  $F$  убывает пропорционально  $H$ :

$$F \approx \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2-1}} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{H}{H_{\max}} \quad (26)$$

Давление  $\rho$  убывает пропорционально  $(H/H_{\max})^\gamma$  (см. (23)), т.е. быстрее динамического "напора"  $\rho v^2$ .

Существенно, что при достаточно больших степенях расширения "напор" становится сравнимым с магнитным давлением. Это происходит при

$$H/H_{\max} \sim \beta_*/R^2. \quad (27)$$

Поскольку в газодинамической ловушке предполагается использование пробочных отношений 30-100, условие (27) соответствует очень малым полям. Повидимому, в реальных условиях поглощающая

поверхность будет стоять в магнитном поле, превышающем значение (27). Если же это не так, то при анализе устойчивости становится необходимым учет возмущений магнитного поля в области расширителя (см. раздел 2.4).

При большом пробочном отношении скорость течения на однородном участке, грубо говоря, в  $R$  раз меньше скорости звука. Это позволяет пренебречь здесь первым слагаемым в левой части уравнения (16) по сравнению со вторым. Ввиду оценки (19), мала также правая часть (16), так что на однородном участке это уравнение сводится просто к условию  $\rho = \text{const} = \tilde{\rho}$ . При учете этого обстоятельства и соотношений (7) и (9), из (17) находим, что на однородном участке

$$-\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{v}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \ell} = \frac{q_E}{\tilde{\rho}} - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{q_M}{\rho}$$

(в правой части мы пренебрегли слагаемыми  $\vec{q}_p \vec{v}$  и  $q_M v^2/2$ , малыми по параметру  $1/R^2$ ). Подставляя вместо  $q_M$  величину  $\lambda(\rho v)/\lambda \ell$ , приводим это уравнение к виду:

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\partial v}{\partial \ell} = \frac{q_E}{\tilde{\rho}} \quad (28)$$

Совместно с (15) это уравнение позволяет выразить  $\rho$  и  $v$  на однородном участке через предполагаемые известными функции  $q_E$  и  $q_M$  и константу  $\tilde{\rho}$ . В частном случае, когда на участке инжекции  $q_E$  и  $q_M$  не зависят от  $\ell$ , из (15) и (28) находим

$$v = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{q_E \ell}{\tilde{\rho}}, \quad |\ell| < \frac{L}{2}, \quad (28)$$

$$\rho = \frac{q_M \tilde{\rho}}{q_E} \frac{\gamma}{\gamma-1}. \quad (29'')$$

Эти соотношения совместно с формулами (21) и условием  $(\rho v)|_{H=H_{\max}} = R \tilde{\rho} \tilde{v}$  позволяют выразить единственную не определенную пока константу  $\tilde{\rho}$  через внешние параметры задачи —  $q_M$  и  $q_E$ . Результат имеет вид:

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma^2-1}{2\gamma^2}} \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} L R \sqrt{q_M q_E} \quad (30)$$



### 2.3. Уравнения для желобковых возмущений

Рассмотрим трубку силовых линий (рис.4), опирающуюся на некоторую малую площадку в экваториальной плоскости ловушки. В случае плазмы низкого давления допустимы только такие перемещения этой трубки, которые не вызывают искажений магнитного поля.

Пусть точки экваториального сечения испытывают некоторые смещения по радиусу,

$$\vec{\xi}_* = \xi_*(r_*) \vec{n}.$$

Условия того, что магнитное поле в этом сечении не возмущается, есть  $\text{div } \vec{\xi}_* = 0$  (напомним, что магнитное поле в экваториальном сечении однородно), откуда сразу следует, что  $\xi_* \propto 1/r_*$ . Обозначая радиус средней точки сечения желобка через  $\bar{r}_*$  (рис.4), а ее смещение через  $\bar{\xi}_*$ , можно поэтому записать, что

$$\xi_* = \bar{\xi}_* \frac{\bar{r}_*}{r_*}.$$

Что касается смещений в других сечениях трубки, то они должны удовлетворять соотношению (II), откуда следует, что внутри желобка

$$\xi = \bar{\xi}_* \frac{\bar{r}_* H_*}{r H}. \quad (31)$$

Напомним, что  $\xi_*$  отсчитывается по нормали к силовой линии.

Существенно, что сечение трубки экваториальной плоскостью имеет форму, изображенную на рис.4: в азимутальном направлении оно намного уже, чем в радиальном. Этим достигается малость возмущения окружающей плазмы при радиальных перемещениях трубки.

Обозначим через  $\delta \vec{v}$  возмущение скорости плазмы внутри трубки (вне трубки все возмущения пренебрежимо малы в силу отмеченной выше силоснотности экваториального сечения трубки). Для рассматриваемого класса движений трубки вектор  $\delta \vec{v}$  лежит в плоскости  $(r, z)$  и может быть разложен в каждой точке на составляющие, направленные вдоль местных значений  $\vec{h}$  и  $\vec{n}$ :

$$\delta \vec{v} = \vec{h} \delta v_{||} + \vec{n} \delta v_{\perp}. \quad (32)$$

При этом из соотношения (I2) следует, что

$$\delta v_{\perp} = \dot{\xi} = \dot{\xi}_* \frac{H_* \bar{r}_*}{H(r_*, l) r(r_*, l)}, \quad (33)$$

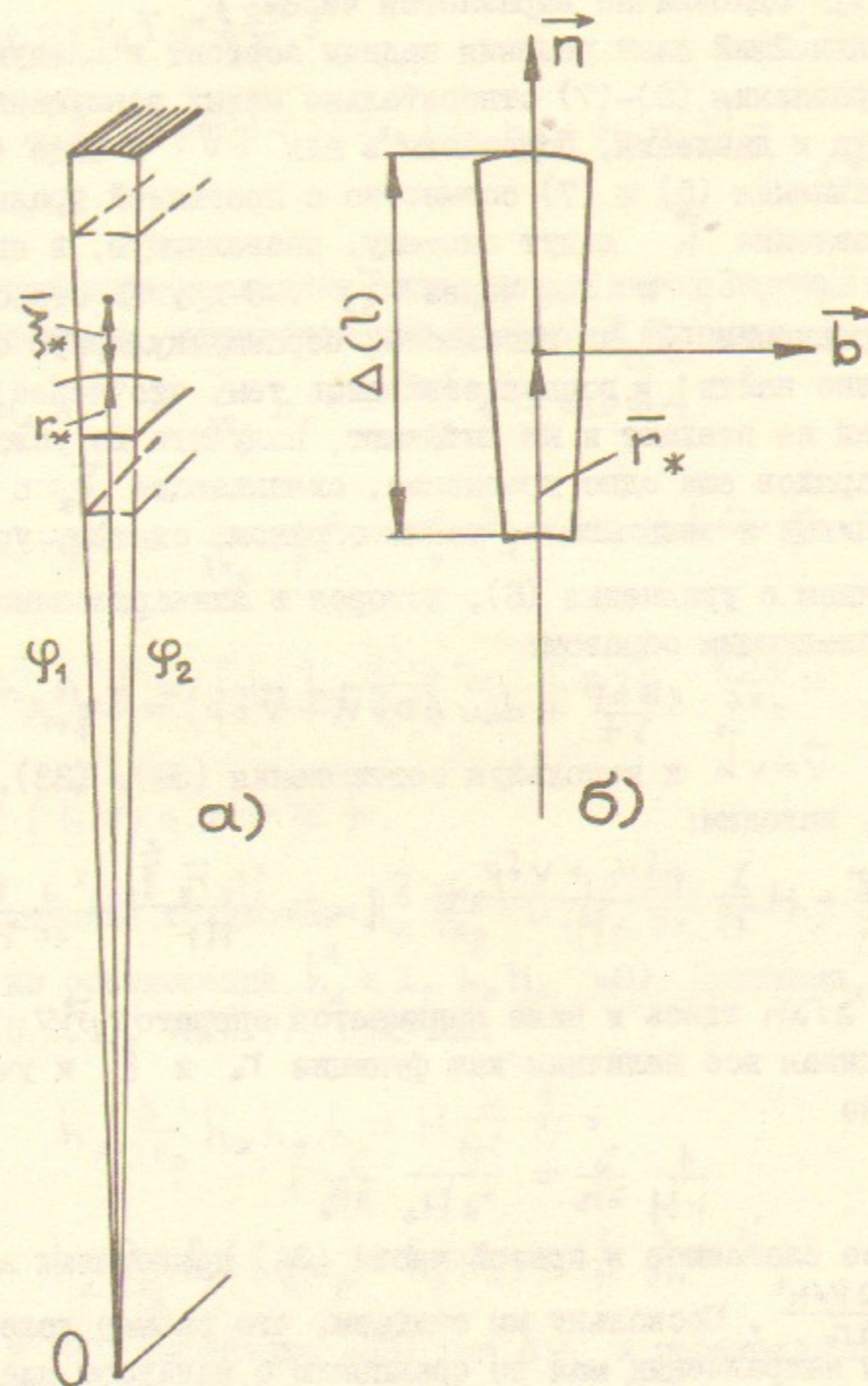


Рис.4. Силовая трубка, испытывающая желобковое смещение (а), и ее сечение экваториальной плоскостью ловушки (б). Точка 0 лежит на оси ловушки. Азимутальный размер желобка  $\bar{r}_* (\varphi_2 - \varphi_1)$  мал по сравнению с его размером в радиальном направлении  $\Delta$ . Вектор  $\vec{b}$  направлен по бинормали к силовой линии.

т.е.  $\delta v_{\perp}$  однозначно выражается через  $\xi_*$ .

Дальнейший план решения задачи состоит в следующем. Линеаризуя уравнения (5)–(7) относительно малых возмущений скорости, плотности и давления, подставим в них  $\delta \vec{v}$  в виде (32). При этом уравнения (5) и (7) совместно с проекцией уравнения (6) на направление  $\vec{h}$  дадут систему, позволяющую, в принципе, выразить  $\delta \rho$ ,  $\delta p$  и  $\delta v_{\parallel}$  через  $\xi_*$ . С другой стороны, проектируя уравнение (6) на плоскость, перпендикулярную силовой линии, можно найти  $\delta v_{\perp}$  и, воспользовавшись тем, что через концы системы токи не втекают и не вытекают, получить из условия сохранения зарядов еще одно уравнение, связывающее  $\xi_*$  с остальными возмущениями и замыкающее, таким образом, систему уравнений.

Начнем с уравнения (5), которое в линеаризованном виде выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \delta \vec{v} + \vec{v} \delta \rho) = \delta q_m.$$

Полагая  $\vec{v} = v \vec{h}$  и используя соотношения (32), (33), (П.2.4) и (П.2.5), находим:

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + H \frac{\partial}{\partial \ell} \frac{\rho \delta v_{\parallel} + v \delta \rho}{H} = \delta q_m - \frac{H_* \bar{r}_* \xi_*}{H r} H^2 \frac{\partial}{\partial n} \frac{\rho}{H^2}, \quad (34)$$

где под  $\partial/\partial n$  здесь и ниже понимается оператор  $\vec{h} \nabla$ . Рассматривая все величины как функции  $r_*$  и  $\ell$  и учитывая соотношение

$$\frac{1}{r H} \frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{r_* H_*} \frac{\partial}{\partial r_*}, \quad (35)$$

последнее слагаемое в правой части (34) представим в виде  $-\xi_* \frac{\bar{r}_* H^2 \partial \rho / H^2}{r_* H_* \partial r_*}$ . Поскольку мы считаем, что размер желобка в радиальном направлении мал по сравнению с радиусом плазмы, здесь можно положить  $\bar{r}_*/r_* \approx 1$ . По той же причине можно опустить черточку над  $\xi_*$ . В результате получаем уравнение непрерывности в виде:

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + H \frac{\partial}{\partial \ell} \frac{\rho \delta v_{\parallel} + v \delta \rho}{H} = \delta q_m - \xi_* H^2 \frac{\partial}{\partial r_*} \frac{\rho}{H^2}. \quad (36)$$

Перейдем к уравнению движения (6). Линеаризуя его и проектируя на направление  $\vec{h}$ , получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\delta \rho \cdot v + \rho \delta v_{\parallel}) + \frac{\partial \delta p}{\partial \ell} + \\ & + h_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} [h_{\alpha} h_{\beta} \delta(\rho v_{\parallel}^2) + \rho v \delta v_{\perp} (h_{\alpha} n_{\beta} + h_{\beta} n_{\alpha})] = \\ & = \delta \vec{q}_p \cdot \vec{h}. \end{aligned} \quad (37)$$

Чтобы преобразовать последнее слагаемое в левой части, воспользуемся тождествами, справедливыми для любой функции  $f$ :

$$h_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} h_{\alpha} h_{\beta} f = \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} h_{\beta} f = \frac{\partial f}{\partial \ell} + f \text{div} \vec{h},$$

$$h_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} h_{\alpha} n_{\beta} f = \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} n_{\beta} f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial n} r f + r f \text{div} \frac{\vec{h}}{r},$$

$$h_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} h_{\beta} n_{\alpha} f = f h_{\alpha} h_{\beta} \frac{\partial n_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} = -f n_{\alpha} h_{\beta} \frac{\partial h_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} =$$

$$= -f \vec{n} (\vec{h} \nabla) \vec{h} = -\kappa f.$$

(мы учли очевидные тождества  $h_{\alpha} \frac{\partial h_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} = 0$ ,  $h_{\alpha} \frac{\partial n_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} = -n_{\alpha} \frac{\partial h_{\alpha}}{\partial x_{\beta}}$ , вытекающие из соотношений  $h_{\alpha}^2 = I$ ,  $h_{\alpha} n_{\alpha} = 0$ ). Применяя, далее, выражения (П.2.4), (П.2.7), получим:

$$h_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} h_{\alpha} h_{\beta} f = H \frac{\partial}{\partial \ell} \frac{f}{H},$$

$$h_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} f (h_{\alpha} n_{\beta} + h_{\beta} n_{\alpha}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial n} r f.$$

Подставляя в (37) выражение (33) для  $\delta v_{\perp}$  и переходя, согласно (35), от производных  $\partial/\partial n$  к производным  $\partial/\partial r_*$ , запишем окончательно:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (v \delta \rho + \rho \delta v_{\parallel}) + \frac{\partial \delta p}{\partial \ell} + H \frac{\partial}{\partial \ell} \frac{2 \rho v \delta v_{\parallel} + v^2 \delta \rho}{H} = \\ & = \vec{h} \delta \vec{q}_p - \xi_* H^3 \frac{\partial}{\partial r_*} \frac{\rho v}{H^3}. \end{aligned} \quad (38)$$

Уравнение (7) после линеаризации превращается в

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta S + v \frac{\partial \delta S}{\partial \ell} + \delta v_{\parallel} \frac{\partial S}{\partial \ell} = \delta q_s - \xi_* \frac{\partial S}{\partial r_*}, \quad (39)$$

где  $q_s$  определяется согласно (7).

Возмущения  $\delta q_m$ ,  $\delta \vec{q}_p$  и  $\delta q_e$  линейно связаны с возмущениями параметров плазмы:

$$\delta q_m = q_m \left( A_m \frac{\delta p}{p} + B_m \frac{\delta p}{p} + C_m \frac{\delta v_{||}}{c_s} + D_m \frac{\delta v_{\perp}}{c_s} \right),$$

$$\delta q_{p||} = \vec{h} \delta \vec{q}_p = \vec{h} \vec{q}_p \left( A_{p||} \frac{\delta p}{p} + B_{p||} \frac{\delta p}{p} + C_{p||} \frac{\delta v_{||}}{c_s} + D_{p||} \frac{\delta v_{\perp}}{c_s} \right),$$

$$\delta q_{p\perp} = \vec{n} \delta \vec{q}_p = \vec{n} \vec{q}_p \left( A_{p\perp} \frac{\delta p}{p} + B_{p\perp} \frac{\delta p}{p} + C_{p\perp} \frac{\delta v_{||}}{c_s} + D_{p\perp} \frac{\delta v_{\perp}}{c_s} \right), \quad (40)$$

$$\delta q_s = q_s \left( A_s \frac{\delta p}{p} + B_s \frac{\delta p}{p} + C_s \frac{\delta v_{||}}{c_s} + D_s \frac{\delta v_{\perp}}{c_s} \right).$$

Физически появление этой связи обусловлено изменением условий захвата нейтралов из-за изменения плотности, температуры и направленной скорости плазмы. Безразмерные коэффициенты  $A, B, C, D$  в формулах (40) вещественны и по порядку величины равны единице.

Оценим вклад различных слагаемых в (40). Из уравнений (36) и (39) следует, что  $\delta p/p \sim \delta r/p \sim \xi_x/a$ , где  $a$  — радиус плазмы на однородном участке. С другой стороны  $\delta v_{||}/c_s \leq \delta v_{\perp}/c_s \sim \omega \xi_x/c_s$ . Поскольку рассматриваемые нами частоты всегда меньше  $c_s/a$ , то членами, содержащими  $\delta v_{||}/c_s$  и  $\delta v_{\perp}/c_s$ , можно пренебречь.

Перейдем теперь к выводу "замыкающего" уравнения, выражающего собой условие сохранения заряда. Это условие возникает как следствие требования, чтобы на поглощающих поверхностях (рис. I), ограничивающих плазму в продольном направлении, продольные токи обращались в нуль.

Прежде всего, из уравнения (6) найдем возмущение поперечной составляющей тока  $\delta \vec{j}_{\perp}$ . Так как, согласно (32), азимутальная составляющая скорости внутри желобка равна нулю, а возмущения всех величин от азимута не зависят, то левая часть уравнения (6) имеет только  $r$  и  $z$  — составляющие. Согласно сказанному в конце раздела 2.1, то же самое относится и к  $\delta \vec{q}_p$ . Поэтому вектор  $\delta \vec{j}_{\perp}$  имеет только  $\varphi$  — составляющую, т.е. направлен по бинормали  $\vec{b}$ . Линеаризуя уравнение (6), подставляя в него  $\delta \vec{v}$  в виде (32) и умножая результат скалярно на  $\vec{n}$ , по-

лучим

$$\delta \vec{j}_{\perp} = \vec{b} \frac{c}{H} \left\{ -\delta q_{p\perp} + \frac{\partial}{\partial t} \rho \delta v_{\perp} + n_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left[ h_{\alpha} h_{\beta} \delta(\rho v_{||}^2) + (h_{\alpha} n_{\beta} + h_{\beta} n_{\alpha}) \rho v \delta v_{\perp} + \delta p \delta_{\alpha\beta} \right] \right\}.$$

При преобразовании слагаемого в квадратных скобках воспользуемся тождествами

$$n_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} f h_{\alpha} h_{\beta} = f n_{\alpha} h_{\beta} \frac{\partial h_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} = \varkappa f,$$

$$n_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} f h_{\alpha} n_{\beta} = f n_{\alpha} n_{\beta} \frac{\partial h_{\alpha}}{\partial x_{\beta}},$$

$$n_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} f n_{\alpha} h_{\beta} = \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} f h_{\beta}$$

Применяя далее формулы (П.2.8) и (П.2.5), найдем:

$$\delta \vec{j}_{\perp} = \vec{b} \frac{c}{H} \left\{ -\delta q_{p\perp} + \rho \frac{\partial \delta v_{\perp}}{\partial t} + r H^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{\rho v \delta v_{\perp}}{r H^2} + \varkappa \delta(\rho v_{||}^2) + \frac{\partial \delta p}{\partial n} \right\} \quad (41)$$

Так как внутри желобка  $\delta \vec{j}_{\perp}$  имеет только азимутальную составляющую и не зависит от  $\varphi$ , то здесь автоматически выполняется условие  $\text{div} \delta \vec{j}_{\perp} = 0$ , и продольных токов в плазме вообще не возникает. То же самое можно сказать и о внешней области, где возмущение тока также равно нулю. Проблема возникает только на боковой поверхности желобка, где  $\delta \vec{j}_{\perp}$  терпит разрыв (от значения (41) до нуля) и где, соответственно, возникают продольные поверхностные токи. Так как на торцевых поверхностях эти токи обращаются в нуль, то условие отсутствия накопления зарядов на поверхности желобка записывается просто как

$$\int \delta \vec{j}_{\perp} dS_{\perp} = 0, \quad (42)$$

где  $\delta \vec{j}_{\perp}$  определяется формулой (42), а интегрирование ведется по боковой поверхности желобка.

Для преобразования последнего слагаемого в (41) используем тождество

$$\vec{b} \frac{\partial \delta p}{\partial n} = \left[ \frac{\vec{H}}{H^2} \times \nabla \delta p \right] = \delta p \cdot \text{rot} \frac{\vec{H}}{H^2} - \text{rot} \left( \delta p \frac{\vec{H}}{H^2} \right) =$$

$$= -\delta p \left[ \vec{H} \times \nabla \frac{1}{H^2} \right] - \text{rot} \left( \delta p \frac{\vec{H}}{H^2} \right) = 2\vec{b} \frac{\alpha}{H} \delta p - \text{rot} \left( \delta p \frac{\vec{H}}{H^2} \right)$$

(см. (П.2.7)). Отсюда видно, что вклад в интеграл (42) от этого слагаемого может быть представлен в форме

$$\int \frac{1}{H} \frac{\partial \delta p}{\partial n} \vec{b} dS_{\perp} = \int 2 \frac{\alpha}{H} \delta p (\vec{b} dS_{\perp}) \quad (43)$$

(интеграл от  $\text{rot}(\delta p \vec{H}/H^2)$  обращается в нуль, так как может быть преобразован в интеграл по контуру, проходящему по силовым линиям, непосредственно примыкающим к верхней и нижней границам желобка, где уже  $\delta p = 0$ , и по замыкающим участкам на торцах, которые перпендикулярны  $\vec{H}$ ). С помощью соотношения (43) можно объединить в интеграле (42) вклады от последнего и предпоследнего слагаемых из (4I), записав их сумму как  $\alpha \delta(2p + \rho v_{||}^2)$ .

Имея в виду, что вследствие малой, по сравнению с  $a$ , протяженности желобка в направлении  $\vec{n}$ , все возмущения внутри него мало меняются на его ширине  $\Delta(\ell)$  в направлении  $\vec{n}$ , можно представить интеграл (42) в виде:

$$\int \delta \vec{j}_{\perp} dS_{\perp} = \int \Delta(\ell) (\vec{b} \delta \vec{j}_{\perp}) d\ell,$$

где интегрирование по  $d\ell$  ведется вдоль средней силовой линии желобка. Подставляя в  $\delta \vec{j}_{\perp}$  выражение для  $\delta \vec{v}$  в виде (32) с  $\delta v_{\perp}$  в виде (33) и учитывая, что  $\Delta(\ell) = \Delta_* H_* r_* / H r$ , получаем окончательно следующее условие замыкания токов:

$$H_* r_* \xi_* \int \frac{\rho d\ell}{H^3 r^2} + H_* r_* \xi_* \int d\ell \frac{\partial}{\partial \ell} \frac{\rho v}{H^3 r^2} = \\ = \int \frac{d\ell}{H^2 r} \left[ \delta q_{\perp} - \alpha \delta(2p + \rho v_{||}^2) \right]. \quad (44)$$

#### 2.4. Учет возмущений магнитного поля в расширителе

Как отмечалось в разделе 2.2., при очень больших степенях расширения, в области, где

$$\frac{H}{H_*} < \frac{\beta_*}{R} \quad (45)$$

динамический "напор" плазмы  $\rho v^2$  делается больше магнитного давления  $H^2/8\pi$ . В этой области следует учитывать возмущение магнитного поля в колебаниях. Соответственно, смещение силовой трубки относительно своего равновесного состояния перестает иметь желобковый характер, и, вообще говоря, перестает быть справедливым приведенный выше вывод соотношения (44). Поскольку теперь силовая трубка изгибается, то необходимо получить уравнение, описывающее зависимость поперечного смещения  $\xi_{\perp}$  от  $\ell$ . Разумеется, в области, где  $p + \rho v^2 \ll H^2/8\pi$  решение этого уравнения будет переходить в чисто желобковое смещение, определяемое формулой (33).

В области, где  $\rho v^2 \gg H^2/8\pi$ , поток плазмы вытягивает силовые линии и делает их прямыми. Чтобы не решать сложную задачу об отыскании равновесного распределения поля на переходном участке, где  $\rho v^2 \sim H^2/8\pi$ , мы будем считать, что уже вакуумное магнитное поле устроено так, что силовые линии становятся прямыми, исходящими из одной точки ("коническое" магнитное поле, рис.5) раньше, чем нарушается условие  $\rho v^2 < H^2/8\pi$ . В этом случае поток плазмы не искажает магнитного поля даже там, где  $\rho v^2 > H^2/8\pi$ , так что невозмущенное магнитное поле может повсюду считаться вакуумным\*. В "коническом" магнитном поле зависимость  $H$  от  $\ell$  имеет вид

$$H \sim \ell^{-2},$$

где  $\ell$  отсчитывается от точки пересечения силовых линий.

Перейдем к выводу уравнений, которые описывали бы возмущения в "коническом" магнитном поле как при  $\rho v^2 \ll H^2/8\pi$ , так и при  $\rho v^2 \geq H^2/8\pi$ . При этом давлением плазмы  $p$  будем пренебрегать, поскольку, согласно сказанному в разделе 2.2, на некотором расстоянии от пробки оно становится много меньше  $\rho v^2$ .

Разложим возмущение скорости внутри смещенной силовой

\* В области совсем малых полей,  $H/H_* < \beta^{1/(2-\gamma)}/R^{1/(2-\gamma)}$  (при  $\gamma = 5/3$   $H/H_* < \beta^3/R^5$ ), становится существенным расталкивание магнитного поля остаточным газокинетическим давлением плазмы. Однако, это происходит при столь малых полях, что вряд ли соответствующие эффекты могут представлять практический интерес.

трубки по невозмущенным значениям  $\vec{h}$  и  $\vec{n}$  согласно формуле (32). Поскольку теперь, вообще говоря, смещение  $\xi_{\perp}$  не имеет желобкового характера, связь  $\xi_{\perp}$  с  $\delta v_{\perp}$  делается отличной от (33). А именно, как это следует из простого кинематического рассмотрения, в общем случае

$$\delta v_{\perp} = \frac{\partial \xi_{\perp}}{\partial t} + \vec{n}(\vec{v} \nabla) \vec{n} \xi_{\perp} - \vec{n}(\vec{n} \xi_{\perp} \nabla) \vec{v}.$$

Имея в виду, что  $\vec{v} = v \vec{h}$  и учитывая соотношения (П 2.6) и  $\vec{n}(\vec{h} \nabla) \vec{n} = 0$ , отсюда получаем, что

$$\delta v_{\perp} = \frac{\partial \xi_{\perp}}{\partial t} + \frac{v}{Hr} \frac{\partial}{\partial \ell} Hr \xi_{\perp}. \quad (46)$$

Для чисто желобкового смещения  $\xi_{\perp} \sim 1/Hr$ , и  $\delta v_{\perp} = \partial \xi_{\perp} / \partial t$  — в согласии с (33).

Пользуясь, далее, уравнением вмороженности

$$\delta \vec{H} = \text{rot} [\vec{\xi}_{\perp} \vec{H}],$$

находим с помощью (П 2.6)):

$$\begin{aligned} \delta \vec{H} &= -\vec{H} \text{div} \vec{\xi}_{\perp} - (\vec{\xi}_{\perp} \nabla) \vec{H} + (\vec{H} \nabla) \vec{\xi}_{\perp} = \\ &= -\vec{H} \text{div} \vec{\xi}_{\perp} - \xi_{\perp} (\vec{n} \nabla) H \vec{h} + H (\vec{h} \nabla) \xi_{\perp} \vec{n} = \\ &= -\vec{H} \text{div} \vec{\xi}_{\perp} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \ell} Hr \vec{\xi}_{\perp}. \end{aligned} \quad (47)$$

Дивергенцию  $\vec{\xi}_{\perp}$  можно всегда обратить в нуль, выбирая нужную зависимость  $\xi_{\perp}$  от  $r$  внутри желобка, что мы будем предполагать выполненным. При этом, как видно из формулы (47), будет возмущаться только поперечная составляющая магнитного поля:

$$\delta \vec{H} = \delta \vec{H}_{\perp} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \ell} Hr \vec{\xi}_{\perp} = \frac{\vec{n}}{r} \frac{\partial}{\partial \ell} Hr \xi_{\perp}. \quad (48)$$

Подставим теперь выражение (48) в уравнение движения (записанное с учетом того, что  $\delta p = p = 0$ ):

$$\rho \left( \frac{\partial \delta \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \delta \vec{v} + (\delta \vec{v} \nabla) \vec{v} \right) = \frac{1}{4\pi} [\text{rot} \delta \vec{H}_{\perp}, \vec{H}].$$

Пользуясь тождеством

$$[\text{rot} \delta \vec{H}_{\perp}, \vec{H}] = (\vec{H} \nabla) \delta \vec{H}_{\perp} + (\delta \vec{H} \nabla) \vec{H},$$

следующим из того, что  $(\vec{H} \delta \vec{H}_{\perp}) = 0$ , правую часть этого уравнения преобразуем к виду:

$$[\text{rot} \delta \vec{H}_{\perp}, \vec{H}] = H^2 r \frac{\partial}{\partial \ell} \frac{1}{Hr^2} \frac{\partial}{\partial \ell} Hr \vec{\xi}_{\perp}. \quad (49)$$

Левая же его часть легко трансформируется в

$$\rho \left( \frac{\partial \delta v_{\perp}}{\partial t} + Hr v \frac{\partial}{\partial \ell} \frac{\delta v_{\perp}}{Hr} \right).$$

Таким образом, система уравнений, описывающая возмущения в расширителе, есть:

$$\rho \frac{\partial \delta v_{\perp}}{\partial t} + r H^2 \frac{\partial}{\partial \ell} \frac{\rho v \delta v_{\perp}}{r H^2} = \frac{H^2 r}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \ell} \frac{1}{Hr^2} \frac{\partial}{\partial \ell} r H \xi_{\perp}, \quad (50)$$

$$\frac{\partial \xi_{\perp}}{\partial t} + \frac{v}{Hr} \frac{\partial}{\partial \ell} Hr \xi_{\perp} = \delta v_{\perp}. \quad (51)$$

На поглощающей непроводящей поверхности выполняется граничное условие

$$\frac{\partial}{\partial \ell} Hr \xi_{\perp} = 0, \quad (52)$$

следующее из отсутствия поверхностного тока (если бы поверхность была идеально проводящей, на ней должно было бы выполняться условие  $\xi_{\perp} = 0$ ).

Отметим, что формула (49) позволяет связать токи, текущие по плазме, с отклонением возмущения от чисто желобкового:

$$\delta j_{\perp} = \frac{c Hr}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \ell} \frac{1}{Hr^2} \frac{\partial}{\partial \ell} Hr \xi_{\perp} \quad (53)$$



Рассмотрим сначала ситуацию, когда поглощающая поверхность расположена между пробкой и особенностью. В соответствии со сказанным выше, надлежит найти решение уравнения (56), удовлетворяющее условию (52) и условию  $\xi_{\perp}|_{r_1} = \xi_* \frac{r_* H_*}{r H}$ . При  $\omega \ll c_s / L_{расш}$  левая часть (56) содержит малый параметр  $\omega L_{расш} / c_s$  по сравнению с правой, причем первым слагаемым в левой части можно пренебречь по сравнению со вторым. Если бы левая часть была просто равна нулю, то искомое решение имело бы вид  $\xi = \xi_{ж} \equiv \xi_* r_* H_* / r H$ . Подставляя это решение в левую часть, находим, что в следующем приближении по параметру  $\omega L_{расш} / c_s$

$$\delta \xi_{\perp} \equiv \xi_{\perp} - \xi_{ж} = i \xi_{ж} \frac{\omega}{v} \left\{ |l - l_r| + \frac{l_r}{2\sqrt{\beta_r}} (\beta_{\Pi} - 1) \ln \left| \frac{1 + \sqrt{\beta_r} l / l_r}{1 + \sqrt{\beta_r}} \cdot \frac{1 - \sqrt{\beta_r}}{1 - \sqrt{\beta_r} l / l_r} \right| \right\}, \quad (57)$$

где  $\beta = 4\pi r v^2 / H^2$ , а индексы "Г" и "П" указывают на то, что данная величина берется на поверхности  $\Gamma_1$  ( $\Gamma_2$ ) или на поглотителе, соответственно. Учитывая, что в коническом поле  $\sqrt{\beta_r} l / l_r = \sqrt{\beta}$ , разложим логарифм при  $\beta_{\Pi} < 1$ . Имеем

$$\delta \xi_{\perp} \approx i \xi_{ж} \frac{\omega}{v} (l - l_r) \beta_{\Pi},$$

откуда следует, что решение близко к  $\xi_{ж}$  (добавка мала по параметру  $\omega L_{расш} / c_s$ ).

Замечательно, что решение (57) остается регулярным даже в том случае, когда поглотитель сколь угодно близко приближается к особой точке, поскольку коэффициент при особом решении (логарифм в формуле (57)) при  $l_{\Pi} \rightarrow l_A$  ( $\beta_{\Pi} \rightarrow 1$ ) стремится к нулю. Через  $l_A$  обозначена точка, в которой  $v = v_A$ . Это, с одной стороны, означает, что все результаты раздела 2.3, включая формулу (44), могут быть без изменений применены к рассматриваемому случаю, а, с другой стороны, подсказывает характер решения, когда поглощающая поверхность находится за особой точкой.

Исследуем теперь эту последнюю ситуацию. При  $l_{\Pi} > l_A$  одно из двух линейно-независимых решений уравнения (56) можно выбрать регулярным в точке  $l = l_A$ , при этом другое имеет в

ней логарифмическую особенность:

$$\xi_1 \approx \xi_{ж}$$

и

$$\xi_2 \approx \xi_{ж} \ln |l - l_A|$$

Решение  $\xi_2$  обладает нефизической особенностью, поскольку плотность энергии возмущения в нем расходится как  $1/(l - l_A)^2$  и энергия этого возмущения бесконечна. Поэтому новое граничное условие состоит теперь в том, чтобы решение не имело особенности в точке  $l = l_A$  ( $v = v_A$ ). В результате получаем, что решение  $\xi_2$  следует отбросить и  $\xi_1$  вновь оказывается очень близким к желобковому.

Объединяя (41) с (56) и интегрируя между точками  $|l| = l_A$  с учетом регулярности решения в этих точках, вновь приходим к условию (44). Таким образом, как это ни парадоксально, условие (44) остается справедливым и в этом случае, только интегрирование в (44) следует распространять до особой поверхности, а не до поглотителя. Это становится понятным, если вспомнить, что за особой поверхностью ( $l = l_A$ ) скорость потока делается больше альфвеновской (и тем более скорости звука); при этом, поскольку возмущения перестают распространяться вниз по потоку, наличие границы вообще перестает ощущаться.

### 3. УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ В ГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ ЛОВУШКЕ

#### 3.1. Качественное рассмотрение

Для качественного анализа устойчивости воспользуемся уравнением (44). Коэффициент при  $\xi_*$  характеризует инерцию желобка, коэффициент при  $\dot{\xi}_*$  описывает затухание колебаний вследствие выноса поперечного импульса при истечении плазмы через расширитель, а правая часть уравнения дает "выталкивающую силу", действующую на желобок, причем первое слагаемое связано с наличием инъекции, а второе с обычно только и учитываемым эффектом кривизны силовых линий. Начнем с оценки именно этого слагаемого.

В соответствии с уравнениями (36) и (39), во внутренней области ловушки (до максимума магнитного поля)

$$\delta(2p + pv^2) \sim p \frac{\xi_*}{a}, \quad (58)$$

где  $a$  — радиус плазмы на однородном участке. Кривизна силовой линии в области пробок оценивается как  $a/L_{np}^2$  (обозначение  $L_{np}$  см. на рис. I), а вклад этого участка в интеграл в правой части уравнения (44) — как

$$\int_{L_{np}} \frac{dl}{H^2 r} \approx \delta(2p + pv^2) \sim - \frac{p}{H_*^2 a L_{np}} \xi_* \quad (59)$$

Поскольку на этом участке кривизна в целом неблагоприятна, коэффициент при  $\xi_*$  в оценке (59) отрицателен.

Область расширителя вносит положительный (стабилизирующий) вклад в интеграл. В расширителе давление быстро становится много меньше динамического "напора" (см. разд. 2.2), скорость достигает своего предельного значения (24) (порядка скорости звука), а плотность, согласно (23), падает пропорционально  $H/H_{max}$  от своего значения в максимуме магнитного поля. Соответственно, в области расширителя имеем

$$\delta(2p + pv^2) \approx \delta(pv^2) \sim p_0 \frac{H}{H_{max}} \frac{\xi_*}{a};$$

здесь и ниже индекс "0" обозначает невозмущенные величины на однородной части ловушки. Для степенных законов спада магнитного поля в расширителе  $H \sim l^{-\alpha}$  (где  $\alpha > 2$ , иначе силовые линии имеют неблагоприятную кривизну), поэтому имеем\*

$$\int_{L_{расш}} \frac{dl}{H^2 r} \approx \delta(2p + pv^2) \sim \frac{p_0 \xi_*}{H_{max} H_p L_{расш} a}, \quad (60)$$

где  $H_p$  — напряженность магнитного поля на поглотителе. Стабилизирующее влияние расширителя преобладает при

$$L_{расш} < L_{np} \frac{H_*}{R H_p}$$

\* Эта оценка, очевидно, несправедлива при  $\alpha = 2$ , т.е. когда силовые линии прямые и  $\approx \equiv 0$ .

Перейдем теперь к оценке роли инжекции. Для этого воспользуемся соотношениями (19) и (58), из которых следует, что

$$\delta q_{p\perp} \sim \frac{p_0}{a L R} \xi_*$$

т.е.

$$\int_L \frac{dl}{H^2 r} \delta q_{p\perp} \sim \frac{p_0}{a^2 R H_*^2} \xi_* \quad (61)$$

Знак этого выражения может быть тем или другим в зависимости от конкретных деталей функции распределения инжектируемых частиц и от температуры плазмы. Поскольку мы подразумеваем, что  $a \ll L_{расш}, L_{np}$ , то возможны условия, когда вклад в "выталкивающую силу" от поперечного импульса, вносимого в плазму инжектируемыми частицами, будет больше, чем стандартный вклад, обусловленный кривизной силовых линий. Это осуществляется при выполнении двух условий:

$$R \lesssim \frac{L_{np}}{a}, \quad \frac{H_p}{H_*} \gtrsim \frac{a}{L_{расш}} \quad (62)$$

Вклад в коэффициент при  $\xi_*$  в уравнении (61) (который характеризует инерцию желобка) от участка между максимумами магнитного поля оценивается как

$$H_* r_* \int_L \frac{p dl}{H^3 r^2} \sim \frac{p_0 L}{H_*^2 a}, \quad (63)$$

а аналогичный вклад от области расширителя — как

$$H_* r_* \int_{L_{расш}} \frac{p dl}{H^3 r^2} \sim \frac{p_0 L_{расш}}{a H_{max} H_p} \quad (64)$$

Из сравнения соотношений (63) и (64) видно, что при очень больших степенях расширения,



$$\frac{H_n}{H_*} < \frac{1}{R} \frac{L_{расш}}{L},$$

основной вклад в инерцию желобка вносит область расширителя. Эта возможность (впрочем, не слишком вероятная для реальных параметров ловушки) обусловлена тем, что из-за быстрого спада поля в заправочной области здесь значительно растет амплитуда желобковых смещений.

Оценим, наконец, коэффициент при втором слагаемом в левой части (44), определяющий затухание колебаний из-за их выноса на поглотитель:

$$H_* r_* \int dl \frac{\partial}{\partial l} \frac{p v}{H^3 r^2} \sim \frac{p_0 c_s}{a H_{max} H_n}. \quad (65)$$

Рост затухания при уменьшении  $H_n$  обусловлен тем, что амплитуда желобковых смещений растет с уменьшением поля, а масса на единицу длины желобка в расширителе остается постоянной, т.к. падение плотности в желобке в точности компенсируется увеличением его сечения.

Собирая вместе вышеприведенные оценки, можно записать уравнение (44) в виде:

$$\ddot{\xi}_* + \nu \dot{\xi}_* + \Omega^2 \xi_* = 0,$$

где для коэффициентов  $\Omega^2$  и  $\nu$  имеют место следующие схематические выражения:

$$\Omega^2 = \frac{c_{s0}^2}{L^2} \frac{\frac{L}{L_{расш}} \frac{H_*}{R H_n} - \frac{1}{L_{np}} + \alpha \frac{L}{R a}}{1 + \frac{L_{расш}}{L} \frac{H_*}{R H_n}}, \quad (66)$$

$$\nu \sim \frac{c_{s0}}{L} \frac{1}{R \frac{H_n}{H_*} + \frac{L_{расш}}{L}}. \quad (67)$$

Знаки отдельных слагаемых соответствуют тому, что было сказано о знаках интегралов (60)–(61) и (63)–(65). Коэффициент  $\alpha$  (порядка единицы) может быть как положительным, так и отрица-

тельным. Его знак учитывает возможность как стабилизирующего, так и дестабилизирующего влияния инжекции.

Для решения вида  $\xi_* \sim e^{-i\omega t}$  получаем дисперсионное соотношение

$$\omega^2 + i\omega\nu - \Omega^2 = 0, \quad (68)$$

из выражения для корней которого

$$\omega_{1,2} = -i \frac{\nu}{2} \pm \sqrt{-\frac{\nu^2}{4} + \Omega^2}$$

следует, что граница устойчивости определяется знаком  $\Omega^2$ . При  $\Omega^2 > 0$  оба решения соответствуют устойчивости:  $\text{Im} \omega_{1,2} < 0$ , при  $\Omega^2 < 0$  одно из решений экспоненциально нарастает со временем, что соответствует неустойчивости.

Из формул (66) и (67) видно, что для достаточно коротких пробок и расширителей частота  $\omega$  колебаний обратно пропорциональна квадратному корню из их длины. Чтобы убедиться в этом, достаточно устремить к нулю  $L_{np}$  и  $L_{расш}$  при фиксированных остальных параметрах. При этом в первом случае  $\Omega^2 \sim c_s^2 / L L_{np}$ , а во втором  $\Omega^2 \sim c_s^2 / L L_{расш}$ . Поскольку в обоих случаях  $\nu \ll \Omega^2$ , то  $\omega \approx \Omega \approx 1/\sqrt{L_{np}}$ , или  $1/\sqrt{L_{расш}}$ . Соответственно, для достаточно коротких пробок и расширителей непременно будут выполнены условия

$$|\omega| \ll c_s / L_{np}, \quad c_s / L_{расш}. \quad (69)$$

Мы не будем приводить конкретных ограничений на параметры системы ( $L, L_{np}, L_{расш}, R, H_n/H_*, a$ ), которые должны выполняться, чтобы удовлетворялись условия (69). Их легко получить из оценок (66) и (67)\*. Заметим только, что для более или менее реалистических предположений о параметрах газодинамической ловушки они выполняются. Поэтому ниже, в разделах 3.2 и 3.3, основное внимание уделяется именно этому случаю.

\* Например, в частном случае, когда  $H_n/H_* = 1/R$  ограничения имеют вид:  $\max(L_{расш}^2/L_{np}, L_{np}^2/L_{расш}) \ll L$ ,  $\max(L_{расш}, L_{np}) < \sqrt{R L a}$ .

### 3.2. Высокочастотные колебания

Если система находится достаточно далеко (по ту или другую сторону) от границы устойчивости, то, одновременно с выполнением условий (69), выполняется неравенство

$$\omega \gg c_s/L \quad (70)$$

Колебания такого типа мы называем высокочастотными.

При выполнении неравенства (70) на длинной однородной части пробкотрона можно пренебречь продольным смещением частиц плазмы за период колебаний, т.е. в уравнениях (36) и (39) пренебречь слагаемыми, содержащими члены  $v$  и  $\delta v_{||}$  <sup>\*)</sup>. Одновременно можно пренебречь величинами  $\delta q_m$  и  $\delta q_s$  (они в  $\omega L R / c_s$  раз меньше оставленных). В результате уравнения (36) и (39) приводятся на однородном участке к виду:

$$\delta S = -\xi_* \frac{\partial S_0}{\partial r_*}, \quad \delta p = -\xi_* \frac{\partial p_0}{\partial r_*}, \quad (71)$$

откуда получаем, что

$$\delta p = -\xi_* \frac{\partial p_0}{\partial r_*}. \quad (72)$$

Соотношение (72), взятое непосредственно перед входом в пробку, является тем граничным условием, которое позволяет найти возмущение величины  $2p + \rho v^2$  в пробке и расширителе. Действительно, при выполнении условий (69) возмущения в пробке и расширителе являются квазистатическими и, таким образом, определяются возмущениями соответствующих величин на входе в пробку. Имея в виду это обстоятельство, из (26) находим

$$\delta(2p + \rho v^2) = 2\delta\tilde{p} F(H/H_{max}) = -2\xi_* \frac{\partial p_0}{\partial r_*} F(H/H_{max}), \quad (73)$$

<sup>\*)</sup> В принципе, из-за изменения сечения желобка в области пробки, желобковые колебания могли бы возбуждать звук на однородной части ловушки, однако, этого не происходит, так как ширина резонанса для звуковых колебаний  $\delta\omega \sim \omega a / \sqrt{LL_{np}} \sim c_s a / LL_{np}$  много меньше декремента затухания  $\nu \geq c_s / L$ .

что позволяет сразу вычислить второй из интегралов в правой части (44):

$$\int \frac{dl}{H^2 r} \approx \delta(2p + \rho v^2) = -2\xi_* \frac{\partial p_0}{\partial r_*} \left[ \int \frac{dl}{H^2 r} \approx F\left(\frac{H}{H_{max}}\right) \right]. \quad (74)$$

Здесь интегрирование можно проводить по всей длине установки (от поглотителя до поглотителя), поскольку кривизна  $\approx$  все равно обращается в нуль на однородной части. Заметим, что в парааксиальном приближении выражение (73) для  $\delta(2p + \rho v^2)$  есть не что иное как  $-\xi_* \frac{\partial}{\partial r_*} (2p + \rho v^2)$ .

Вычислим первый из интегралов в правой части (44). Для этого заметим, что, как отмечено в разд. 2.3, вклад в  $\delta q_{r\perp}$  от возмущений скорости мал, так что можно пользоваться приближенной формулой

$$\delta q_{r\perp} = q_{r\perp} \left( A_{r\perp} \frac{\delta p}{p} + B_{r\perp} \frac{\delta p}{p} \right)$$

или, при учете (71) и (72)

$$\delta q_{r\perp} = -q_{r\perp} \xi_* \left( A_{r\perp} \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial r_*} + B_{r\perp} \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial r_*} \right)$$

В результате первый из интегралов в правой части (44) легко вычисляется.

Приведем сразу окончательное выражение для  $\Omega^2$ :

$$\Omega^2 = -\frac{1}{H_* r_*} \left[ \int \frac{\rho dl}{H^3 r^2} \right]^{-1} \left[ 2 \frac{\partial p_0}{\partial r_*} \int \frac{dl}{H^2 r} F(H/H_{max}) - \int q_{r\perp} \left( \frac{A_{r\perp}}{p_0} \frac{\partial p_0}{\partial r_*} + \frac{B_{r\perp}}{p_0} \frac{\partial p_0}{\partial r_*} \right) dl \right]. \quad (75)$$

### 3.3. Низкочастотные колебания

При рассмотрении низкочастотных колебаний, т.е. колебаний с частотой  $\omega \leq c_s / L$ , мы ограничимся случаем, когда источники распределены однородно вдоль участка инжекции, т.е.

$q_m$ ,  $q_E$  и  $\vec{q}_p$  не зависят от  $l$  (напомним, что при выводе формулы (75) этого предположения не делалось). Как показано в разделе 2.2., при однородной инжекции величины  $S_0$ ,  $\rho_0$  и  $p_0$  с точностью до членов порядка  $1/R$  также не зависят от координат, а скорость  $V_0$  представляет собой линейную функцию  $l$ , определяемую формулой (29). Соответственно, линеаризованное уравнение для энтропии приобретает вид:

$$-i\omega \delta S + v_0' l \frac{\partial \delta S}{\partial l} = \delta q_s + i\omega \xi_* \frac{\partial S_0}{\partial r_*}, \quad (76)$$

где  $v_0'$  — постоянная производная скорости на участке инжекции.

Возмущение давления в низкочастотных колебаниях на участке однородного магнитного поля оказывается также однородным (что легко усмотреть из уравнения движения (38)):

$$\delta p = \text{const.} \quad (77)$$

Из (76) и (77) находим уравнение для  $\delta p$ :

$$\begin{aligned} -\gamma v_0' l \frac{\partial}{\partial l} \delta p + (i\omega \gamma - (\gamma-1)\rho_0 \frac{\partial q_s}{\partial p}) \delta p = \\ = i\omega \xi_* (\gamma-1)\rho_0 \frac{\partial S_0}{\partial r_*} + (i\omega \frac{\rho_0}{p_0} + (\gamma-1)\rho_0 \frac{\partial q_s}{\partial p}) \delta p. \end{aligned} \quad (78)$$

Неоднородные члены в этом уравнении (его правая часть) не зависят от координат. Легко видеть, что поэтому оно имеет следующее частное решение (не зависящее от координат):

$$\frac{\delta p}{\rho_0} = \frac{\delta p}{\rho_0} \frac{i\omega + (\gamma-1)\rho_0 \frac{\partial q_s}{\partial p}}{i\omega \gamma - (\gamma-1)\rho_0 \frac{\partial q_s}{\partial p}} + \xi_* \frac{i\omega (\gamma-1) \frac{\partial S_0}{\partial r_*}}{i\omega \gamma - (\gamma-1)\rho_0 \frac{\partial q_s}{\partial p}}. \quad (79)$$

Общее решение однородного уравнения, полученного путем опускания правой части в (78), есть

$$\delta p = \text{const.} \cdot l^\xi,$$

где

$$\xi = \frac{i\omega \gamma - (\gamma-1)\rho_0 \frac{\partial q_s}{\partial p}}{\gamma v_0'}$$

Условие отсутствия особенности в точке  $l = 0$  приводит к необходимости положить постоянный множитель в этом решении равным нулю. Таким образом, искомое решение уравнения (78) на однородном участке определяется формулой (79).

Чтобы определить входящую в (79) константу  $\delta p$ , воспользуемся условием сохранения массы, следующим из уравнения непрерывности:

$$\begin{aligned} -i\omega \delta p \cdot L + 2 \delta(\rho v) = L \frac{\partial q_m}{\partial p} \delta p + L \frac{\partial q_m}{\partial p} \delta p + \\ + i\omega \xi_* L \frac{\partial \rho_0}{\partial r_*}, \end{aligned} \quad (80)$$

где возмущение плотности потока  $\delta(\rho v)$  берется на правом конце однородного участка (мы учитываем четность задачи). Поток в этой точке (обозначавшейся индексом " $\sim$ ") выражается с помощью формул (20) и (21) через  $\tilde{p}$  и  $\tilde{\rho}$ :

$$\rho v = \frac{\gamma^{1/2}}{R} \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1}} (\tilde{p} \tilde{\rho})^{1/2},$$

откуда

$$\delta(\rho v) = \frac{\gamma^{1/2}}{2R} \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1}} (\rho_0 p_0)^{1/2} \left( \frac{\delta p}{\rho_0} + \frac{\delta p}{p_0} \right). \quad (81)$$

Из формул (79)–(81) можно, в принципе, выразить  $\delta p$  и  $\delta p$  на однородном участке через  $\xi_*$ , что, в свою очередь, позволяет вычислить  $\Omega^2$  по формуле

$$\Omega^2 = \frac{\int \frac{dl}{H^2 r} [\delta q_{p1} + 2 \delta \tilde{p} \approx F(H/H_{max})]}{\xi_* H_* r_* \int \frac{\rho dl}{H^3 r^2}} \quad (82)$$

(ср. (44) и (73)). Мы, однако, не будем приводить громоздких общих соотношений, следующих из (79)–(81), а ограничимся анализом различных предельных случаев.

Прежде всего, из (79)–(81) видно, что при  $\omega \geq 1/\tau \sim c_s/LR$  выражения для  $\delta\rho$  и  $\delta p$  на однородном участке остаются теми же, что и при  $\omega \geq c_s/L$  (см. разд. 3.2). Поэтому формула (75) для  $\Omega^2$  остается в силе вплоть до  $\omega \leq c_s/LR$ .

Рассмотрим теперь область  $\omega \leq c_s/LR$ ; здесь выражение для  $\Omega^2$ , формально вычисленное с помощью соотношения (82), начинает зависеть от частоты,  $\Omega^2 = \Omega^2(\omega)$ . По порядку величины  $\Omega^2$  остается тем же, что и по оценке (66), но для некоторых значений частоты в области  $|\omega| \sim 1/\tau$  функция  $\Omega^2(\omega)$  обращается в нуль. В случае, когда хотя бы один из корней уравнения  $\Omega^2(\omega) = 0$  имеет положительную мнимую часть, возникает интересный эффект: даже если система обладает большим запасом устойчивости по отношению к высокочастотным колебаниям (рассмотренным в разделе 3.2), в ней возможна низкочастотная неустойчивость с инкрементом  $\sim 1/\tau$ . В самом деле, когда коэффициент  $\Omega^2$  по порядку величины велик по сравнению с  $1/\tau$ , то корни уравнения

$$\omega^2 + i\nu\omega - \Omega^2(\omega) = 0 \quad (83)$$

близки к корням уравнения  $\Omega^2(\omega) > 0$ , так что наличие среди последних корней с  $\text{Im } \omega > 0$  означает неустойчивость.

Рассмотрим более подробно эту неустойчивость в случае, когда главный вклад в  $\Omega^2$  вносит второе слагаемое в числителе формулы (82). Тогда условие  $\Omega^2 = 0$  сводится к условию  $\delta\tilde{p} = 0$ , и из уравнений (79)–(81) получается следующее дисперсионное соотношение:

$$-i\omega L + \frac{c_s}{R} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - L \frac{\partial q_m}{\partial p} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r_*} L \frac{\partial S_0}{\partial r_*} (i\omega\gamma - (\gamma-1)\rho \frac{\partial q_s}{\partial p}).$$

Неустойчивость имеется при

$$\left[ \left( \frac{c_s}{LR} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - \frac{\partial q_m}{\partial p} \right) \frac{\partial S_0}{\partial r_*} + \frac{\partial \rho_0}{\partial r_*} \frac{\partial q_s}{\partial p} \right] \frac{\partial \rho_0}{\partial r_*} < 0. \quad (84)$$

Если параметры системы таковы, что она находится недалеко от границы высокочастотной неустойчивости, т.е. вычисленная с помощью формулы (82) величина  $\Omega^2$  оказывается меньше или порядка  $c_s^2/R^2L^2$ , то необходимо решать полное дисперсионное соотношение (83), которое позволяет, в принципе, описать переход системы через границу устойчивости. Соответствующие общие выражения весьма громоздки, и мы не будем их приводить. Отметим только, что, вообще говоря, переход через границу устойчивости  $\text{Im } \omega = 0$  осуществляется при  $\text{Re } \omega \neq 0$ , в отличие от обычных задач на МГД-устойчивость.

### 3.4. Релаквационные колебания

С помощью результатов предыдущего раздела можно описать еще один тип низкочастотной неустойчивости, характерной для открытых ловушек с инжекцией<sup>ж)</sup>. Особенностью этой неустойчивости является то, что для ее возникновения не требуется перемещения магнитных трубок — она развивается в виде моды  $m = 0$  с  $\xi_{\perp} = 0$ . Происхождение ее очень простое: если на некоторой магнитной поверхности случайно возрастает плотность плазмы, то растет и скорость захвата частиц из потока нейтралов; при этом, если рост скорости потерь, вызванный ростом плотности, меньше, чем рост скорости захвата, то возникает неустойчивость<sup>жж)</sup>.

Дисперсионное соотношение для этой неустойчивости можно получить из формул (79)–(81), положив в них  $\xi_* = 0$  (речь идет о моде с  $m = 0$ ). Результат имеет вид:

$$\begin{aligned} \omega^2 + i\nu_1\omega - \Omega^2 &= 0, \\ \nu_1 &= \frac{2c_s}{RL} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{3-\gamma}{2(\gamma+1)}} - (\gamma-1)\rho \frac{\partial q_s}{\partial p} - c_s^2 \frac{\partial q_m}{\partial p} - \frac{\partial q_m}{\partial p}, \quad (85) \\ \Omega^2 &= -\frac{c_s}{RL} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} (\gamma-1) \left( \rho \frac{\partial q_s}{\partial p} - \rho \frac{\partial q_s}{\partial p} \right) - (\gamma-1)\rho \left( \frac{\partial q_s}{\partial p} \frac{\partial q_m}{\partial p} - \frac{\partial q_s}{\partial p} \frac{\partial q_m}{\partial p} \right). \end{aligned}$$

<sup>ж)</sup> Впервые такого рода неустойчивость была обнаружена В.В.Мирновым и П.З.Чеботаевым при численном моделировании квазистационарной многопробочной ловушки с инжекцией нейтралов.

<sup>жж)</sup> Изменение скорости захвата может происходить и из-за изменения температуры. Нижеследующий анализ учитывает оба эффекта, причем температурный эффект входит в задачу через возмущение  $\delta p$ .

Инкремент неустойчивости (если она существует) по порядку величины равен  $1/\tau$ .

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе выявлены характерные особенности желобковой неустойчивости в системе с инжекцией и истечением плазмы. В случае, когда система находится вдали от границы неустойчивости (по ту или другую сторону) вклад в инкремент (частоту) колебаний от криволинейных участков магнитного поля может быть вычислен по обычным формулам желобковой неустойчивости анизотропной плазмы, в которые следует подставлять  $\rho_{\perp} = \rho$ ,  $\rho_{\parallel} = \rho + \rho v^2$ . При этом в соответствии с качественными соображениями, приведенными в работах [1,2], запробочная область, если расширение магнитного поля в ней происходит достаточно быстро, может приводить к стабилизации неустойчивости. В принципе, стабилизирующий эффект имеется и в обычных ловушках с  $\lambda \gg L$ , если все же параметр  $L/\lambda$  не слишком мал.

Если степень расширения очень велика, так что выполняется условие (45), то во внешней области расширителя скорость плазмы становится больше альфвеновской; при этом магнитное поле в колебаниях искажается, и возмущение перестает быть чисто желобковым. В работе указан способ количественного учета этого эффекта.

Существенное влияние на эволюцию желобка может вносить вклад в "выталкивающую силу", возникающий при захвате инжектируемых частиц на длинном однородном участке. Эффект (который может быть как стабилизирующим, так и дестабилизирующим) наиболее существен в системах с очень малым отношением радиуса к длине. Он может проявляться и в обычных пробкотронах при не слишком малых значениях  $L/\lambda$ .

Наличие истечения плазмы в расширитель приводит к появлению затухания колебаний, вызываемого "выносом" поперечного колебательного импульса из системы. Это не вызывает полной стабилизации колебаний, но может иметь следствием значительное снижение инкремента.

Если система устойчива по отношению к высокочастотным желобковым возмущениям, определенную опасность может представлять обнаруженная в статье низкочастотная неустойчивость, прямо свя-

занная с наличием инжекции и имеющая инкремент порядка обратного времени жизни. Будучи относительно медленной эта неустойчивость, тем не менее, может быть опасной для стационарных систем.

В статье исследована также медленная релаксационная неустойчивость относительно аксиально-симметричных низкочастотных возмущений, не сопровождающихся поперечными перемещениями плазмы.

В работе предполагалось, что величина  $\beta$  настолько мала, что можно пренебречь искажениями магнитного поля в колебаниях. При малой, но конечной величине  $\beta$  может оказаться, однако, что колебания на однородном участке ловушки перестанут быть чисто желобковыми: основная часть силовой трубки на этом участке в колебаниях участвовать не будет, возмущение же будет охватывать только малую ее часть, прилегающую к пробке. При этом колебания вблизи левой и правой пробок будут происходить независимо. Подробнее эффекты, связанные с конечностью  $\beta$ , будут описаны отдельно.

Выше для анализа устойчивости использовалось макроскопическое описание плазмы в рамках одножидкостной магнитной гидродинамики. Такой подход, строго говоря, применим, когда эффективная длина пробега частиц по отношению к рассеянию на угол конуса потерь,  $\lambda/R$ , мала не только по сравнению с длиной ловушки, но и с длиной пробки  $L_{пр}$ . Для газодинамической ловушки представляет интерес также другой случай:

$$L \gg \lambda/R \gg L_{пр}, L_{расш}, \quad (86)$$

который характеризуется тем, что внутри ловушки, на расстоянии  $\approx \lambda/R$  от пробок, функция распределения является максвелловской, в то же время течение плазмы в пробках и расширителе происходит бесстолкновительным образом, а функция распределения в них является функцией интегралов движения - энергии и магнитного момента и определяется функцией распределения на входе в пробку.

Анализ устойчивости в режиме (86) требует кинетического рассмотрения, однако, наличие в задаче больших параметров  $L/L_{пр}$ ,  $L/L_{расш}$ ,  $R$  сильно упрощает задачу. Действи-

тельно, если эти параметры достаточно велики, то будут выполнены условия (69)–(70). При выполнении условия (69), как и в гидродинамическом случае, возмущения в пробке и в расширителе можно считать квазистатическими и, таким образом, они определяются возмущением функции распределения на входе в пробку. Условие (70) дает возможность просто вычислить возмущение функции распределения на входе в пробку (точнее на расстоянии  $\lambda/R$  от пробки).

Наконец, токи, текущие по плазме, определяются макроскопическими величинами, поэтому выражение для  $\delta \vec{j}_{\perp}$  и, соответственно, условие замыкания продольных токов (44) остаются без изменений.

Таким образом в режиме (86) справедливы все результаты раздела 3.2, только функцию  $F(H/H_{\max})$  следует заменить на некоторую другую функцию отношения  $H/H_{\max}$ , которая находится из решения задачи о течении плазмы в пробке и расширителе в бесстолкновительном пределе (см. [2]).

Авторы приносят благодарность Б.Н.Брейзману, В.М.Малкину, и В.В.Мирнову за полезные обсуждения.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ I

Закон сохранения энергии в нашем случае выражается уравнением [8]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{v^2}{2} + \rho \varepsilon + \frac{H^2}{8\pi} \right) = - \operatorname{div} \left\{ \rho \vec{v} \left( W + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{1}{4\pi} [\vec{H} [\vec{v} \vec{H}]] \right\} + q_{\varepsilon}, \quad (\text{П. I. I})$$

где  $\varepsilon$  – внутренняя энергия единицы массы газа. Преобразуем левую часть этого уравнения с помощью уравнений движения (5), (6)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{v^2}{2} + \rho \varepsilon + \frac{H^2}{8\pi} \right) = \left( \varepsilon + \frac{v^2}{2} \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \vec{v} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{H}{4\pi} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (\text{П. I. 2})$$

Умножая (6) на  $v_{\alpha}$  и, используя уравнение (5) и тождества

$$(\vec{a} \nabla) \vec{a} = \nabla \frac{a^2}{2} - [\vec{a}, \operatorname{rot} \vec{a}],$$

$$\operatorname{div} [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{b} \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \operatorname{rot} \vec{b},$$

получим, что член  $\rho \vec{v} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$  равен

$$\rho \vec{v} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = - \vec{v} \nabla \rho - \rho \vec{v} \nabla \frac{v^2}{2} - \frac{H}{4\pi} \operatorname{rot} [\vec{v} \vec{H}] - \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} [\vec{H} [\vec{v} \vec{H}]] - q_{\mu} v^2 + \vec{q}_{\rho} \vec{v}.$$

Подставив в (П. I. 2) это выражение, а также  $\partial \rho / \partial t$  из (5) и  $\partial \vec{H} / \partial t$  из (8), получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{v^2}{2} + \rho \varepsilon + \frac{H^2}{8\pi} \right) = - \operatorname{div} \rho \vec{v} \frac{v^2}{2} - \vec{v} \nabla \rho - \varepsilon \operatorname{div} \rho \vec{v} - \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} [\vec{H} [\vec{v} \vec{H}]] + q_{\mu} \left( \varepsilon - \frac{v^2}{2} \right) + \vec{q}_{\rho} \vec{v}. \quad (\text{П. I. 3})$$

Воспользуемся теперь термодинамическими соотношениями

$$d\varepsilon = \frac{P}{\rho} dS + \frac{P}{\rho^2} d\rho,$$

$$dW = \frac{P}{\rho} dS + \frac{1}{\rho} d\rho,$$

откуда

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{P}{\rho} \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{P}{\rho^2} \operatorname{div} \rho \vec{v} + \frac{P}{\rho^2} q_{\mu},$$

$$\nabla \rho = \rho \nabla W - \rho \nabla S.$$

Подставляя эти выражения в (П. I. 3), и используя то, что

$W = \varepsilon + P/\rho$ , находим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{v^2}{2} + \rho \varepsilon + \frac{H^2}{8\pi} \right) = - \operatorname{div} \left\{ \rho \vec{v} \left( W + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{1}{4\pi} [\vec{H} [\vec{v} \vec{H}]] \right\} + \rho \left( \frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) S \right) + q_{\mu} \left( W - \frac{v^2}{2} \right) + \vec{q}_{\rho} \vec{v}. \quad (\text{П. I. 4})$$

Сравнив (П. I. 4) с (П. I. 1), получим уравнение (7).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Введем единичные векторы нормали  $\vec{n}$ , бинормали  $\vec{b}$  и касательной  $\vec{h}$  к силовой линии, образующие правую тройку, так что

$$\vec{n} = [\vec{b} \times \vec{h}]. \quad (\text{П } 2.1)$$

Пользуясь известными векторными соотношениями, находим:

$$\text{div} \frac{\vec{n}}{r} = \vec{h} \text{rot} \frac{\vec{b}}{r} - \frac{\vec{b}}{r} \text{rot} \vec{h}. \quad (\text{П } 2.2)$$

Так как вектор  $\vec{b}$  в рассматриваемом случае аксиально-симметричной ловушки направлен по азимуту, легко видеть, что  $\text{rot}(\vec{b}/r) = 0$ . С другой стороны,

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{h} &= \text{rot} \frac{\vec{H}}{H} = - \left[ \vec{H} \times \nabla \frac{1}{H} \right] = \\ &= - \left[ \vec{H} \times \left( \vec{h} \frac{\partial}{\partial l} \frac{1}{H} + \vec{n} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{H} \right) \right] = \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial n} [\vec{h} \times \vec{n}], \end{aligned}$$

где  $\partial H / \partial n$  означает производную по нормали к силовой линии (мы учли, что в вакуумном поле  $\text{rot} \vec{H} = 0$ ). В силу (П 2.1),  $[\vec{h} \times \vec{n}] = \vec{b}$ , т.е.

$$\text{rot} \vec{h} = \frac{\vec{b}}{H} \frac{\partial H}{\partial n}. \quad (\text{П } 2.3)$$

Подставляя этот результат в (П 2.2), получаем:

$$\text{div} \frac{\vec{n}}{r} = - \frac{1}{rH} \frac{\partial H}{\partial n}. \quad (\text{П } 2.4)$$

Для  $\text{div} \vec{h}$  имеем:

$$\text{div} \vec{h} = \text{div} \frac{\vec{H}}{H} = - \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial l}. \quad (\text{П } 2.5)$$

Чтобы вычислить  $\text{rot} \vec{n}$ , воспользуемся соотношением (П 2.1):

$$\text{rot} \vec{n} = \text{rot} [\vec{b} \times \vec{h}] = \vec{b} \text{div} \vec{h} - (\vec{b} \nabla) \vec{h} + (\vec{h} \nabla) \vec{b} - \vec{h} \text{div} \vec{b}.$$

Для аксиально-симметричной ловушки здесь отличны от нуля только первое и второе слагаемые, т.е.

$$\text{rot} \vec{n} = - \frac{\vec{b}}{H} \frac{\partial H}{\partial l} - \frac{\vec{b}}{r} \frac{\partial r}{\partial l} = - \frac{\vec{b}}{Hr} \frac{\partial}{\partial l} Hr. \quad (\text{П } 2.6)$$

Поскольку  $(\vec{h} \nabla) \vec{h} = - [\vec{h} \times \text{rot} \vec{h}]$ , из (I2) и (П 2.6) получаем тождество

$$\alpha = \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial n}. \quad (\text{П } 2.7)$$

Найдем теперь величину  $\vec{n} (\vec{n} \nabla) \vec{h}$ . Так как  $\vec{n} \cdot \vec{h} = 0$ , то

$$\vec{n} (\vec{n} \nabla) \vec{h} = - \vec{h} (\vec{n} \nabla) \vec{n} = \vec{h} [\vec{n} \times \text{rot} \vec{n}] = - \frac{1}{Hr} \frac{\partial}{\partial l} Hr. \quad (\text{П } 2.8)$$

Отметим еще полезное соотношение для часто встречающихся выражений вида

$$\frac{\partial}{\partial r_*} \int dl f(r_*, l),$$

где  $f(r_*, l)$  — некоторая функция точки на силовой линии. Учитывая, что  $\text{rot} \vec{H} = 0$ , легко показать, что

$$\frac{\partial}{\partial r_*} \int dl f(r_*, l) = \int dl H(r_*, l) \frac{\partial}{\partial r_*} \frac{f(r_*, l)}{H(r_*, l)}. \quad (\text{П } 2.9)$$

## Л и т е р а т у р а

1. В.В.Мирнов, Д.Д.Рютов. Письма в ЖТФ, 5, 678 (1979)
2. В.В.Мирнов, Д.Д.Рютов. Вопросы Атомной науки и техники, серия "Термоядерный синтез", 1(5), 57 (1980).
3. Б.Б.Кадошцев. В сб. "Вопросы теории плазмы", вып.2, стр.132, М., Атомиздат, 1963.
4. M.N.Rosenbluth, C.L.Longmire. Ann.Phys. 1, 120 (1957)
5. E.A.Frieman, A.Rosenbluth. Rev.Mod.Phys. 22, 898 (1960)
6. G.Laval, R.Pellat, M.Cotsaftis, M.Trocheris. Nuclear Fusion, 4, 25 (1964).
7. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. "Механика сплошных сред", Гостехтеориздат, 1958.
8. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. "Электродинамика сплошных сред", М., "Наука", 1982, § 65.

В.П.Нагорный, Д.Д.Рютов, Г.В.Ступаков

ЖЕЛОБКОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ В ГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ  
ЛОВУШКЕ

Препринт  
№ 83-73

Работа поступила - 6 мая 1983 г.

---

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов  
Подписано к печати 8.07-1983 г. МН 17630  
Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.2,6 печ.л., 2,1 учетно-изд.л.  
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 73.

---

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90