47

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

В.В.Соколов

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

ПРЕПРИНТ 83—75

НОВОСИБИРСК

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ
СТОХАСТИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

В.В.Соколов

А Н Н О Т А Ц И Я

Статья посвящена разработке аналитического подхода к изучению стохастического движения нелинейной системы в периодическом внешнем потенциале. В отличие от ряда других авторов мы избегаем априорного введения каких-либо дополнительных внешних случайных параметров. Построен метод вычисления моментов функции распределения. В частности, проблема вычисления коэффициента диффузии сведена к решению бесконечной системы линейных неоднородных уравнений. В пределе больших значений параметра стохастичности Б.В.Чирикова K эта система резко упрощается и сводится с точностью до членов $1/\sqrt{4K}$ включительно к системе двух уравнений. В таком пределе коэффициент диффузии легко находится в явном виде. В главном приближении по параметру $1/\sqrt{4K}$ найдено замкнутое выражение для производящей функции моментов функции распределения. Оно существенно отличается от стандартного гауссова. Получено также кинетическое уравнение для огрубленной функции распределения. Хотя оно и не совпадает с обычно используемым стандартным уравнением диффузии, в пределе больших времен его решение асимптотически приближается к гауссовому распределению.

I. Введение

Открытие стохастического поведения классических динамических систем с конечным и даже малым числом степеней свободы является одним из наиболее интересных достижений теоретической механики за последнее время. Обнаруженное впервые, повидимому, в математических исследованиях [1,2], это явление стало достоянием физиков после того, как Б.В.Чириковым [3] была разработана простая качественная картина возникновения стохастичности, основанная на рассмотрении взаимодействия нелинейных резонансов. Им, в частности, был сформулирован критерий перекрытия резонансов, позволяющий эффективно находить условия на параметры системы, при выполнении которых возникает стохастическое движение. Позволяя установить границу стохастической неустойчивости, критерий Б.В.Чирикова не является сам по себе, однако, методом позволяющим исследовать поведение системы со временем. Такие исследования проводились поэтому с помощью численного интегрирования уравнений движения нелинейных систем на ЭВМ [4,8].

Поскольку стохастическая неустойчивость нелинейных систем является достаточно универсальным явлением, в качественных исследованиях достаточно ограничиться простейшими моделями. Популярной моделью такого типа служит одномерная нелинейная система, движущаяся под действием периодических мгновенных толчков и описываемая функцией Гамильтона вида

$$H(I,\theta;t) = H_0(I) + g(t)V(I,\theta) \qquad (1)$$

где $g(t) = g_0 \sum_{s=-\infty}^{\infty} \delta(t - sT_0)$, T_0 – период толчков, а I и θ – канонические переменные действие-угол. Достаточно, как это часто и делается, считать, что взаимодействие имеет всего одну гармонику по θ.

Численные эксперименты с такой моделью подтвердили правильность качественного критерия Б.В.Чирикова и позволили исследовать основные черты движения в области стохастичности. Следует все же сказать, что численные методы имеют и определенные недостатки, т.к., в частности, дают информацию о поведении системы лишь на конечных временах, оставляя открытым вопрос о движении при $t \to \infty$. Не является простым и вопрос о влиянии машинного округления. Поэтому, наряду с численным моделированием, остаются желательными прямые аналитические исследования стохастического движения конкретных физических систем. Эти исследования в настоящее время заметно отстают от численных.

Естественным способом описания стохастического движения является метод, основанный на изучении функции распределения $\rho(I,\theta;t)$ в фазовом пространстве, которая удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$i\frac{\partial}{\partial t}\rho(I,\theta;t)=\hat{L}\rho(I,\theta;t) \tag{2}$$

$$\hat{L}=i\left(\frac{\partial H}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial I}-\frac{\partial H}{\partial I}\frac{\partial}{\partial\theta}\right).$$

В качестве показательных характеристик движения мы будем в дальнейшем использовать моменты функции распределения по переменной действия

$$\langle I^n(t)\rangle=\frac{1}{2\pi}\int dI\,d\theta\, I^n\rho(I,\theta;t)=\int dI\, I^n\rho_0(I;t),$$

которые могут быть получены из производящей функции

$$Z(\xi;t)=\int dI\, e^{-i\xi I}\rho_0(I;t) \tag{3}$$

с помощью соотношения

$$\langle I^n(t)\rangle=\left(i\frac{d}{d\xi}\right)^n Z(\xi;t)\Big|_{\xi=0}. \tag{4}$$

В эти формулы входит только нулевая по углу θ гармоника функции распределения, которой мы в дальнейшем и будем интересоваться.

Точное решение уравнения (2) эквивалентно решению уравнений Гамильтона. Можно, однако, ожидать, что в той области фазового пространства, где движение является стохастическим, возможен переход от точной к "огрубленной" функции распределения $f(I;t)$, которой отвечает, практически, та же производящая функция для моментов, но которая удовлетворяет вместо (2) кинетическому уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}f(I;t)=\hat{D}f(I;t). \tag{5}$$

Огрубление функции распределения производится с помощью подходящим образом выбранного усреднения по достаточно малым, но конечным областям фазового пространства.

Проблемой аналитического рассмотрения является получение уравнения (5) из исходного уравнения Лиувилля (2). Повидимому, первая попытка такого рода была предпринята в /5/ и была основана на решении уравнения (2) с помощью теории возмущений. Практически, в /5/ был проанализирован лишь первый неисчезающий ($\sim g_0^2$) порядок теории возмущений. Его вклад в $\rho_0(I;t)$ линейно растет со временем, так что применимость теории возмущений ограничена достаточно малыми временами. В работе /5/ было сделано допущение, что высшие порядки теории возмущений при больших t имеют структуру

$$\frac{1}{n!}\left(g_0^2\hat{D}_2\right)^n t^n\rho_0(I;0), \tag{6}$$

где $\hat{D}_2$ – дифференциальный оператор второго порядка, получаемый при рассмотрении низшего порядка теории возмущений. В таком случае уравнение (5) с $\hat{D}=\hat{D}_2$ имело бы вид стандартного уравнения диффузии. К сожалению, прямое вычисление вкладов старших приближений опровергает сделанное в /5/ допущение. На самом деле вклад $2n$-ного порядка является полиномом степени $4n-3$ по времени и растет гораздо быстрее, чем (6). При этом суммирование наиболее быстро растущих с t членов не дает вклада в уравнение (5).

Подробный анализ роли высших порядков теории возмущений проведен в /6/. Авторы добились значительного упрощения задачи, заменив периодическую функцию $g(t)$ сигналом, обладающим дискретным спектром с бесконечным числом случайно расположенных линий. Усреднение по спектру этого сигнала использовалось в качестве способа огрубления функции распределения. Было показано, что в задаче существует безразмерный параметр K (параметр стохастичности), от величины которого зависит, какая последовательность членов ряда теории возмущений является при $t\to\infty$ главной. Вдалеке от границы стохастической неустойчивости $K\sim 1$ такие подпоследовательности, как оказалось, могут быть выделены явно, причем при $K\ll 1$ и $K\gg 1$ они различны. Последующее суммирование этих подпоследовательностей приводит к динамическому поведению в первом и стохастическому во втором случаях. Интересно, что при $K \gg 1$ в пределе больших t основная подпоследовательность, действительно, имеет структуру (6).

Введение в той или иной форме случайных параметров с последующим усреднением по ним неоднократно использовалось при анализе стохастического движения. В [7], например, диффузионное слагаемое априорно дописывалось с малым коэффициентом прямо в уравнении (2). Поскольку, однако, стохастическое поведение присуще при определенных условиях самой системе (I), использование дополнительных случайных параметров представляется искусственным.

Настоящая работа отличается от предшествующих в двух отношениях. Во-первых, мы отказываемся от априорного введения каких бы то ни было дополнительных случайных переменных, возвращаясь к изучению исходной системы (I). Во-вторых, мы избегаем использования теории возмущений. Появление в ней быстро растущих со временем членов и сложная структура ряда обусловлены неадекватностью метода возмущений рассматриваемой задаче.

В следующем разделе конкретизируется модель, изучению которой посвящена эта статья. В разделе Ш обсуждается формальное решение уравнений Лиувилля (2) и описывается принятый нами способ огрубления функции распределения. Вычисление ее второго момента и коэффициента диффузии описано в разделе IУ. Наконец, в разделе У мы обсудим высшие моменты и вид кинетического уравнения.

П. Конкретизация модели

В качестве исследуемой модели ниже выбран слаболинейный осциллятор дипольным образом взаимодействующий с периодическим внешним полем. Это означает, что в (I)

$$H_0(I)=\omega_0 I+\gamma I^2 \quad, V(I,\theta)=-2\sqrt{I}\cos\theta \qquad (7)$$

Параметры ω_0 и γ характеризуют линейную и нелинейную части упругой силы соответственно. Критерий перекрытия резонансов дает в этом случае условие стохастичности $K=g_0\sqrt{I_0}\,\gamma T_0>1$, где I_0 – характерное значение действия. В дальнейшем нас будет интересовать движение в той части фазовой плоскости, где выполняется условие $K \gg 1$. В соответствии с этим начальное условие мы выберем в виде

$$\rho(I,\theta;0)=\frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}\exp\left[-\frac{(I-I_0)^2}{\sigma^2}\right]\equiv\rho_0(I;0) \qquad (8)$$

с $I_0 \gg \sigma \gg g_0^2$. Отметим, что начальное распределение для простоты принято изотропным.

Естественно вместо I пользоваться переменной $J=I-I_0$. Тогда, считая, что $J \ll I_0$, можно заменить (7) на

$$H_0(J)=\mathring{\omega}J+\gamma J^2,\ \mathring{\omega}=\omega_0+2\gamma I_0;\ V(\theta)=-2\sqrt{I_0}\cos\theta. \qquad (9)$$

Система (I) с функцией Гамильтона (9) является разновидностью известной однородной модели Чирикова–Тейлора [8]. Введем безразмерные переменные:

$$\tilde{t}=\frac{t}{T_0}\ ,\ \tilde{\omega}_0=\omega_0 T_0\ ,\ \tilde{J}=2\gamma T_0 J\ ,\ \tilde{\sigma}=2\gamma T_0\sigma\ .$$

В этих переменных уравнение Лиувилля (2) и начальное условие (8) имеют вид (значок "тильды" мы опускаем, т.к. в дальнейшем используются только безразмерные переменные):

$$i\frac{\partial}{\partial t}\rho(J,\theta;t)=\hat{\mathcal{L}}\rho(J,\theta;t)=\left[\omega(J)\hat{m}-4K\Delta(t)\sin\theta\,\hat{p}\right]\rho(J,\theta;t) \qquad (10)$$

$$\rho(J,\theta,0)=\frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{J^2}{\sigma^2}\right)\equiv\rho_0(J;0)$$

Здесь $\omega(J)=\omega_0+J$, $\Delta(t)=\sum\limits_{s=-\infty}^{\infty}\delta(t-s)$ и операторы $\hat{m}=-i\frac{\partial}{\partial\theta}$ и $\hat{p}=-i\frac{\partial}{\partial J}$.

Ш. Формальное решение уравнения Лиувилля и огрубленная функция распределения

Удобно исходить из символической записи решения уравнения (IO) в виде хронологической экспоненты

$$\rho(J,\theta;t)=\hat{U}(t)\rho(J,\theta;0)$$

$$\hat{U}(t)=\mathcal{T}\exp\left\{-i\int_0^t dt'\,\hat{\mathcal{L}}(t')\right\}$$

Благодаря специфической зависимости функции $\Delta(t)$ от времени хронологическая экспонента легко преобразуется к виду

$$\hat{U}(t)=\exp\left[i\omega(J)(T-t)\hat{m}\right]\hat{U}_1^T$$

где $\mathcal{T}$ – число толчков, испытанное осциллятором за время t, если считать, что первый толчок произошел в момент $t=0$, а

$$\hat{U}_1 = \exp[-i\omega(\mathcal{J})\hat{m}]\exp(4iK\sin\theta\hat{p})$$

В соответствии со сказанным во Введении мы будем интересоваться нулевой гармоникой функции распределения

$$\rho_0(\mathcal{J};t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, \rho(\mathcal{J},\theta;t)$$

Для сокращения записи удобно для функций, являющихся собственными функциями оператора $\hat{m}$, использовать применяемые в квантовой механике дираковские обозначения $1/\sqrt{2\pi}\cdot\exp(im\theta) = \langle\theta|m\rangle$. В этих обозначениях

$$\rho_0(\mathcal{J};t) = \langle 0|\hat{U}_1^{\mathcal{T}}|0\rangle\, \rho_0(\mathcal{J};0). \tag{II}$$

Параметр $\hat{\omega}$ можно записать в форме $\hat{\omega} = 2\pi q + \varphi$, где q – целое число и $0 < \varphi < 2\pi$. Поскольку оператор $\hat{m}$ имеет целочисленные собственные значения, вместо $\hat{U}_1$ в (II) можно подставить оператор $\exp[-i(\varphi+\mathcal{J})\hat{m}]\exp(4iK\sin\theta\hat{p})$, который не зависит от q.

Воспользуемся далее операторным тождеством

$$e^{-i(\varphi+\mathcal{J})\hat{m}} = e^{i\mathcal{J}\hat{\mu}}\, e^{-i\varphi\hat{m}}\, e^{-i\mathcal{J}\hat{\mu}}\,; \quad \hat{\mu} = -i\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

чтобы преобразовать (II) к виду

$$\rho_0(\mathcal{J};t) = e^{i\mathcal{J}\hat{\mu}}\langle 0|\{e^{-i\varphi\hat{m}}\exp[4iK\sin\theta(\hat{p}+\hat{\mu})]\}^{\mathcal{T}}|0\rangle\, \rho_0(\mathcal{J};0).$$

Производящая функция (3) равна

$$Z(\xi;T) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\eta\, Z(\eta;0)\int_{-\infty}^{\infty} d\mathcal{J}\, e^{-i(\xi-\eta-\hat{\mu})\mathcal{J}}\langle 0|\{e^{-i\varphi\hat{m}}\exp[4iK\sin\theta(\eta+\hat{\mu})]\}^{T}|0\rangle$$

Стоящее в этом выражении среднее по углу θ является некоторой периодической по φ функцией $F(\varphi;\eta)$. Ее можно представить в виде ряда Фурье

$$F(\varphi;\eta) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} e^{i\mu\varphi} f_\mu(\eta)$$

так что

$$Z(\xi;T) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} e^{i\mu\varphi} f_\mu(\xi-\mu)\, Z(\xi-\mu;0). \tag{I2}$$

При выбранном начальном условии

$$Z(\xi-\mu,0) = \exp\left[-\tfrac{1}{4}\sigma^2(\xi-\mu)^2\right]$$

и члены ряда в (I2) экспоненциально падают при больших $|\mu|$. Если начальное распределение достаточно широкое: $\sigma \gg 1$, то из всей суммы в (I2) существенно лишь слагаемое с $\mu=0$ (в соответствии с (4) интерес представляют малые ξ). В таком случае

$$Z(\xi;T) = \langle\langle 0,0|\{e^{-i\varphi\hat{m}}\exp[4iK\sin\theta(\xi+\hat{\mu})]\}^{T}|0,0\rangle\rangle\, e^{-\frac{1}{4}\sigma^2\xi^2}, \tag{I3}$$

где теперь введено обозначение

$$\frac{1}{2\pi}\exp(i\mu\varphi + im\theta) = \langle\langle\varphi,\theta|\mu,m\rangle\rangle, \tag{I4}$$

так что двойные угловые скобки в (I3) означают усреднение по φ и θ.

В качестве определения огрубленной функции распределения мы примем равенство

$$f(\mathcal{J};T) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{i\xi\mathcal{J}}\, Z(\xi;T), \tag{I5}$$

где Z дается выражением (I3). Принятый способ огрубления состоит, таким образом, в усреднении исходной функции распределения по некоторой области значений параметра ω_0, характеризующего невозмущенный осциллятор.

IУ. Вычисление коэффициента диффузии

Как видно из (I3), задача свелась к усреднению по угловым переменным целых степеней оператора

$$\hat{W}_\xi(\varphi,\theta) = e^{-i\varphi\hat{m}}\exp[4iK\sin\theta(\xi+\hat{\mu})] \tag{I5}$$

Точнее говоря, нам необходимы коэффициенты разложения этого среднего в ряд по степеням ξ. Однако, прямое разложение

$\langle\langle 0,0|\hat W_\xi|0,0\rangle\rangle$ из-за некоммутативности операторов в (16) оказывается технически довольно сложным. Чтобы обойти эту трудность, заметим, что оператор $\hat W_\xi$, действующий в гильбертовом пространстве периодических функций φ и θ, унитарен в этом пространстве. Это позволяет использовать интегральное представление.

$$\hat W_\xi^T = \frac{1}{2\pi i}\oint d\lambda \frac{\lambda^T}{\lambda - \hat W_\xi} = \frac{1}{2\pi i}\oint d\lambda \frac{\lambda^T}{\lambda - \hat W_0 - \hat W_0 \hat V(\xi)}, \qquad (17)$$

в котором контур интегрирования в комплексной плоскости λ представляет собой окружность с радиусом, большим единицы. В последнем выражении

$$\hat W_0 = e^{-i\varphi \hat m} \exp(4iK\sin\theta\,\hat\mu), \quad \hat V(\xi) = \exp(4iK\xi\sin\theta) - 1$$

Разлагая (17) в ряд по степеням $\hat V(\xi)$ и усредняя по углам, получим

$$\langle\langle 0,0|\hat W_\xi^T|0,0\rangle\rangle = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\oint d\lambda \frac{\lambda^T}{(\lambda-1)^2}\langle\langle 0,0|\hat V(\xi)\left[\frac{\hat W_0}{\lambda-\hat W_0}\hat V(\xi)\right]^k|0,0\rangle\rangle \qquad (18)$$

В этом равенстве было учтено, что вектор $|0,0\rangle\rangle$ является собственным вектором оператора $\hat W_0$ с собственным значением, равным единице. Так как при $\xi\to 0$ $\hat V(\xi)\sim\xi$, для вычисления n-ного момента функции распределения достаточно оставить лишь первые n членов суммы по k в (18).

В этом разделе мы найдем второй момент $\langle y^2(T)\rangle$, для чего в сумме по k следует удержать члены с $k=0$ и 1. Вклад первого из них равен

$$\frac{1}{2\pi i}\oint d\lambda\frac{\lambda^T}{(\lambda-1)^2}\langle\langle 0,0|\hat V(\xi)|0,0\rangle\rangle = [J_0(4K\xi)-1]T$$

($J_m(z)$ – функция Бесселя порядка m). Отметим, что (19) содержит лишь четные степени ξ, так что $\langle y(T)\rangle = 0$. Вклад же второго члена имеет вид

$$\frac{1}{2\pi i}\oint d\lambda \frac{\lambda^T}{(\lambda-1)^2}\langle\langle 0,0|\hat V(\xi)\frac{\hat W_0}{\lambda-\hat W_0}\hat V(\xi)|0,0\rangle\rangle$$

Чтобы осуществить усреднение по углам, отметим, что функции (14) образуют полный набор ортогональных нормированных векторов

в гильбертовом пространстве периодических функций φ и θ. Прокладывая этим набором произведения операторов и учитывая, что матричный элемент

$$\langle\langle \mu',m'|\hat V(\xi)|\mu,m\rangle\rangle = \delta_{\mu',\mu}\left[J_{m'-m}(4K\mu) - \delta_{m',m}\right],$$

получим после интегрирования по λ

$$\frac12\left[J_0(4K\xi)-1\right]^2 T(T-1) +$$

$$+\sum_{\substack{m',m\\(m',m\neq 0)}} J_{-m'}(4K\xi)J_m(4K\xi)\sum_{\tau=1}^{T-1}(T-\tau)\langle\langle 0,m'|\hat W_0^\tau|0,m\rangle\rangle$$

Первое слагаемое здесь обусловлено промежуточным состоянием $|0,0\rangle\rangle$.

Для получения второго момента в (19) и (20) нужно выделить члены $\sim\xi^2$. Дальнейшие члены разложения по ξ становятся существенными при вычислении более высоких моментов функции распределения. Учитывая это, получаем из (13) с помощью формулы (4) окончательное выражение для второго момента

$$\langle y^2(T)\rangle = \frac12\sigma^2 + \frac12(4K)^2\left[T + \sum_{m',m=\pm1}\mathrm{sign}(m'm)\sum_{\tau=1}^{T-1}(T-\tau)\langle\langle 0,m'|\hat W_0^\tau|0,m\rangle\rangle\right] \qquad (21)$$

Выделим в этом выражении члены, растущие с T. Введем для этого векторы $|\Psi^{(0,m)}\rangle\rangle$ $(m=\pm1)$, такие, что

$$|0,m\rangle\rangle = (1-\hat W_0)|\Psi^{(0,m)}\rangle\rangle \qquad (22)$$

При фиксированном m равенство (22) однозначно определяет составляющую вектора $|\Psi^{(0,m)}\rangle\rangle$, ортогональную к $|0,0\rangle\rangle$. Этот вектор будет окончательно определен, если наложить еще дополнительное условие $\langle\langle 0,0|\Psi^{(0,m)}\rangle\rangle = 0$. С помощью (22) находим

$$\sum_{\tau=1}^{T-1}(T-\tau)\hat W_0^\tau|0,m\rangle\rangle = \left[(T-1)\hat W_0 - \hat W_0^T\right]|\Psi^{(0,m)}\rangle\rangle - \sum_{\tau=2}^{T-1}\hat W_0^\tau|\Psi^{(0,m)}\rangle\rangle.$$

Оставшуюся сумму по τ преобразуем тем же способом, определив новый вектор $|\Phi^{(0,m)}\rangle\rangle$ равенствами

$$|\Psi^{(0,m)}\rangle\rangle = (1-\hat W_0)|\Phi^{(0,m)}\rangle\rangle , \quad \langle\langle 0,0|\Phi^{(0,m)}\rangle\rangle = 0 .$$

В результате будем иметь

$$\sum_{\tau=1}^{T-1}(T-\tau)\hat W_0^{\tau}|0,m\rangle\rangle = T\hat W_0|\Psi^{(0,m)}\rangle\rangle + (\hat W_0^{T}-1)\hat W_0|\Phi^{(0,m)}\rangle\rangle .$$

Первое слагаемое в правой части линейно растет со временем, в то время как второе в силу унитарности $\hat W_0$ остается конечным и определяет флуктуирующую со временем часть $\langle J^2(T)\rangle$. Таким образом, деленный на два коэффициент при линейно растущей с T части (21) – коэффициент диффузии – равен

$$D(K)=\frac{1}{4}(4K)^2\left[1+\left(a^{(0,1)}_{0,1}-a^{(0,1)}_{0,-1}-1+a^{(0,-1)}_{0,-1}-a^{(0,-1)}_{0,1}-1\right)\right] \qquad (23)$$

где $a^{(0,m)}_{\mu,m}=\langle\langle \mu,m|\Psi^{(0,m)}\rangle\rangle$ – составляющие вектора $|\Psi^{(0,m)}\rangle\rangle$ в базисе (14). Эти составляющие определяются с помощью решения бесконечной неоднородной системы уравнений, следующих из (22):

$$a^{(0,m)}_{0,1}-\sum_{m'}J_{m'+1}(4K)\,a^{(0,m)}_{1,-m'}=\delta_{1,m} \qquad (24)$$

$$a^{(0,m)}_{0,-1}-\sum_{m'}J_{m'+1}(4K)\,a^{(0,m)}_{-1,m'}=\delta_{-1,m}$$

$$a^{(0,m)}_{\mu',m'}-\sum_{m''}J_{m'-m''}\left[4K(\mu'+m')\right]a^{(0,m)}_{\mu'+m',m''}=0$$

(последнее равенство в (24) имеет место при выполнении хотя бы одного из неравенств: $\mu'\neq 0$, $m'\neq\pm 1$).

Система (24) резко упрощается в пределе больших K. Так как $J_{m'-m''}(0)=\delta_{m',m''}$, нижнее равенство в (24) показывает, что

$$a^{(0,m)}_{-m',m'}=a^{(0,m)}_{0,m'} ,$$

в то время как при $\mu'+m'\neq 0$

$$a^{(0,m)}_{\mu',m'}=J_{\mu'+2m'}\left[4K(\mu'+m')\right]a^{(0,m)}_{0,-(\mu'+m')}+o\left(\frac{1}{4K}\right)$$

Поэтому первые два уравнения с точностью до членов $\sim 1/4K$ включительно сводятся к

$$a^{(0,m)}_{0,1}-J_2(4K)\,a^{(0,m)}_{0,-1}=\delta_{1,m}$$

$$a^{(0,m)}_{0,-1}-J_2(4K)\,a^{(0,m)}_{0,1}=\delta_{-1,m} ,$$

откуда с той же точностью следует, что

$$a^{(0,1)}_{0,1}=1,\ a^{(0,1)}_{0,-1}=J_2(4K)\ ;\ a^{(0,-1)}_{0,-1}=1,\ a^{(0,-1)}_{0,1}=J_2(4K) .$$

Подставляя это в (23) заключаем, что при

$$D(K)=\frac{1}{4}(4K)^2\left[1-2J_2(4K)+o\left(\frac{1}{4K}\right)\right].$$

Основной член в этом выражении хорошо известен и получается в результате предположения о случайном характере зависимости угла θ от времени /8/. Здесь, однако, он получен из точного уравнения Лиувилля без каких бы то ни было дополнительных предположений. Наличие осцилляций в зависимости коэффициента диффузии от параметра K также уже отмечалось ранее /8,7/. Таким образом,

$$\langle J^2(T)\rangle \approx \frac{1}{2}\sigma^2(T),\quad \sigma^2(T)=\sigma^2+4DT .$$

Характер зависимости опущенных здесь флуктуирующих со временем членов от K и T требует отдельного исследования. Однако при больших K и T их влияние во всяком случае относительно мало.

V. Высшие моменты и уравнение для огрубленной функции распределения

Удерживая в (18) дальнейшие члены разложения по $\hat V(\xi)$, мы сможем получить более высокие моменты функции $f(J,T)$. Легко видеть при этом, что все нечетные моменты равны нулю. В самом деле, замена переменных интегрирования в (13) вида $\psi\to-\psi$, $\theta\to-\theta$ позволяет убедиться, что $Z(\xi,T)$ является четной функцией ξ.

Остановимся на вычислении четвертого момента $\langle J^4(\xi)\rangle$. Начнем с вкладов, возникающих из (19) и (20). Выделив растущие с

Т части, мы можем представить их суммарный вклад, используя обозначения предыдущего раздела в виде

$$\frac{3}{4}(4K)^4T(T-1)+$$

$$+\frac{3}{8}(4K)^4T\Big\{1+\Big[2\big(a^{(0,1)}_{0,1}-a^{(0,1)}_{0,-1}-1+a^{(0,-1)}_{0,-1}-a^{(0,-1)}_{0,1}-1\big)+\big(a^{(0,2)}_{0,2}+a^{(0,2)}_{0,-2}-1+a^{(0,-2)}_{0,-2}+$$

$$+a^{(0,-2)}_{0,2}-1\big)-\frac{2}{3}\big(a^{(0,1)}_{0,3}-a^{(0,1)}_{0,-3}+a^{(0,-1)}_{0,-3}-a^{(0,-1)}_{0,3}+a^{(0,3)}_{0,1}-a^{(0,3)}_{0,-1}+a^{(0,-3)}_{0,-1}-a^{(0,-3)}_{0,1}\big)\Big]\Big\}$$

В этом выражении первое слагаемое обусловлено первым членом в (20), в то время как во втором единица в фигурных скобках возникла от (I9), а члены, собранные в квадратных скобках, - от суммы по m' и m в (20). Коэффициенты $a^{(n,m)}_{n',m'}$ находятся методом, который уже был использован в предыдущем разделе.

В пределе больших K первая круглая скобка равна, как мы видели выше, $-2J_2(4K)$. Точно так же можно убедиться, что вторая круглая скобка равна $2J_4(8K)$, а третья обращается с этой точностью в нуль. Видно, что при $K\gg 1$ основную роль начинает играть промежуточное состояние $|0,0\rangle\!\rangle$.

Для завершения вычисления $\langle y^4(T)\rangle$ необходимо еще оценить вклады слагаемых с $k=3$ и 4 в (I8). Снова в пределе $K\gg 1$ наибольшее значение приобретает промежуточное состояние $|0,0\rangle\!\rangle$. В третьем порядке по $\hat V(\xi)$ интересующие нас члены $\sim\xi^4$ возникают либо, когда это промежуточное состояние появляется один раз, либо ни разу. В противном случае разложение начинается с более высокой степени ξ. В четвертом же порядке не должно быть ни одного такого промежуточного состояния. При этом в третьем порядке коэффициент при ξ^4 является полиномом второй степени по Т, если одним из промежуточных состояний является $|0,0\rangle\!\rangle$, и растет линейно по T в противном случае. Четвертый порядок по $\hat V(\xi)$ дает линейно растущий коэффициент при ξ^4. Поскольку, однако, во всех случаях остальные промежуточные состояния отличаются от $|0,0\rangle\!\rangle$, обсуждаемые члены вновь дают при $K\gg 1$ лишь относительно малые поправки в коэффициентах при T^2 и T в выражении для $\langle y^4(T)\rangle$. Следовательно, в главном приближении по параметру $1/\sqrt{4K}$

$$\langle y^4(T)\rangle=\frac{3}{4}\sigma^4(T)-\frac{3}{8}(4K)^4T$$

Отметим, что при больших T выполняется равенство $\langle y^4(T)\rangle=$ $=3\langle y^2(T)\rangle$ характерное для гауссова распределения.

Сходная ситуация имеет место и при вычислении последующих моментов. Среднее $\langle y^{2n}(T)\rangle$ является полиномом степени n по времени T. В пределе больших K коэффициенты этого полинома определяются, в основном, промежуточными состояниями $|0,0\rangle\!\rangle$ в то время как остальные промежуточные состояния дают в них относительно малые вклады. Поэтому в пределе $K\to\infty$, но $K\xi$ - конечно

$$\langle\!\langle 0,0|\hat W^T_\xi|0,0\rangle\!\rangle=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint d\lambda\,\frac{\lambda^T}{(\lambda-1)^{k+1}}\langle\!\langle 0,0|\hat V(\xi)|0,0\rangle\!\rangle^k=J_0^T(4K\xi),$$

так что

$$Z(\xi;T)=J_0^T(4K\xi)\,e^{-\frac{1}{4}\sigma^2\xi^2}. \qquad (25)$$

Первый сомножитель разлагается в степенной ряд вида

$$J_0^T(4K\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nC_n(T)(2K\xi)^{2n},$$

а интересующие нас средние выражаются через коэффициенты этого разложения по формуле

$$\langle y^{2n}(T)\rangle=\frac{(2n)!}{2^{2n}}\sum_{n'=0}^{n}\frac{1}{n'!}(4K)^{2(n-n')}\sigma^{2n'}C_{n-n'}(T). \qquad (26)$$

Коэффициенты $C_n(T)$ могут быть последовательно найдены из рекурсивного соотношения /9/

$$C_n(T)=\frac{1}{n}\sum_{n'=1}^{n}\big[(T+1)n'-n\big]\frac{1}{(n'!)^2}C_{n-n'}(T);\quad C_0=1 \qquad (27)$$

и являются, очевидно, полиномами степени n по T.

Зависимость средних от времени, даваемая формулами (26) и (27) не отвечает нормальному гауссовому распределению. Можно, однако, показать, что в пределе $T\to\infty$ соответствующее распределение асимптотически приближается к гауссовому. В самом деле, пусть $T\gg 1$ и мы интересуемся моментами с $n\ll T$. В этом случае соотношение (27) упрощается и сводится к

$$C_n(T)=\frac{T}{n}\sum_{n'=1}^{n}\frac{1}{n'!(n'-1)!}C_{n-n'}(T).$$

Из этого соотношения видно, что в рассматриваемом случае коэффициенты $C_n(T)$ монотонно растут с T и тем быстрее, чем больше n. Оставляя поэтому в сумме по n' только член с $n'=1$, получаем

$$C_n(T) = \frac{T}{n} C_{n-1}(T)\ ; \quad C_n(T) = \frac{1}{n!} T^n$$

Подстановка в (26) показывает теперь, что для $n \ll T$

$$\langle y^{2n}(T) \rangle = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sigma^{2n}(T) = (2n-1)!! \langle y^2(T) \rangle^n , \qquad (28)$$

что совпадает с моментами гауссова распределения с шириной $\sigma(T)$. В то же время моменты с $n \gtrsim T$ существенно отличаются от моментов гауссова распределения. С ростом T все большее число моментов описывается формулой (28) и распределение стремится к гауссовому.

Для перехода к огрубленной функции распределения удобнее исходить из выражения

$$Z(\xi; T) = \exp\left[-\frac{1}{4}\sigma^2 \xi^2 + T \ln J_0(4K\xi)\right],$$

приводящего к тем же средним, что и (25). Соответствующая функция распределения определяется равенством

$$f(y,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp\left[i\xi y - \frac{1}{4}\sigma^2 \xi^2 + t \ln J_0(4K\xi)\right] = e^{t\hat{D}} \rho_0(y,0) \qquad (29)$$

(удобно вернуться к непрерывному времени; в моменты $t=T$ введенная функция дает истинные значения для средних). Эта функция удовлетворяет уравнению вида (5) причем оператор

$$\hat{D} = \ln J_0(4K\hat{p}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2K\frac{\partial}{\partial y}\right)^{2n} \sum_{n'=1}^{n} (-1)^{n'+1} \frac{1}{n'} \binom{n}{n'} C_n(n') =$$

$$= \left(2K\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(2K\frac{\partial}{\partial y}\right)^4 + \frac{1}{9}\left(2K\frac{\partial}{\partial y}\right)^6 - \cdots$$

Коэффициенты $C_n(n')$ вновь даются соотношением (27). Полученное уравнение сложнее обычного уравнения диффузии. Однако его решение, как мы убедились выше, при больших t асимптотически приближается к гауссовому распределению. В этом можно убедиться и непосредственно из (29), вычисляя интеграл по ξ методом перевала.

Автор искренне признателен Ф.М.Израйлеву, П.Н.Исаеву, В.В.Мазепусу, В.Б.Телицину, Б.В.Чирикову и Д.Л.Шепелянскому за обсуждения, советы и критику.

ЛИТЕРАТУРА

/1/. Хопф Э.УМН, 1949, 4, № 1, 129.

/2/. Крылов Н.С. Работы по обоснованию статистической физики. Изд. АН СССР, 1950.

/3/. Чириков Б.В. Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности. Препринт 267, Новосибирск, ИЯФ, 1969; Заславский Г.М., Чириков Б.В., УФН, 1971, 105, № 1, 3.

/4/. Chirikov B.V., Izraelev F.M. Some Numerical Experiment with a Nonlinear Mapping: Stochastic Component. Col. Int. du C.N.R.S..., 1973, N229, 409, Toulouse.

/5/. Заславский Г.М. Статистическая необратимость в нелинейных системах. "Наука" 1970, гл.II.

/6/. Дербенёв Я.С., Хейфец С.А., ТМФ, 1977, 31, № 2, 220.

/7/. Rechster A.B., WhiteR.B. Phys. Rev. Lett. 1980, 44, 1586.

/8/. Chiricov B.V. Phys. Rep. 1979, 52, 256.

/9/. Градштейн И.С., Рыжик И.М.. Таблицы интегралов. Ф.-м. 1962, 28 с.

В.В.Соколов

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ
СТОХАСТИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Препринт
№ 83-75

Работа поступила - 23 июня 1983 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати 28.06-1983 г. МН 17619
Формат бумаги 60х90 1/16 Усл.1,0 печ.л., 0,8 учетно-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 75.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 90