

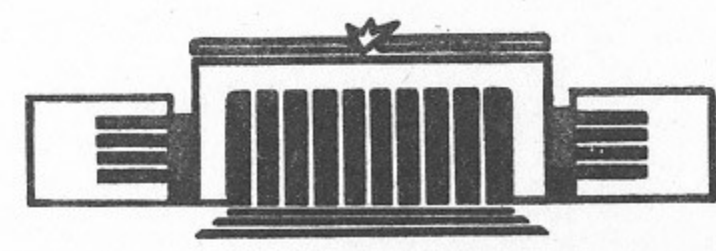
49



ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

И.А.Котельников
ВЛИЯНИЕ КОНЕЧНОГО ДАВЛЕНИЯ НА
РАВНОВЕСИЕ ПЛАЗМЫ И
ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ
В АКСИАЛЬНО-НЕСИММЕТРИЧНЫХ
ОТКРЫТЫХ ЛОВУШКАХ

ПРЕПРИНТ 83—78



НОВОСИБИРСК

ВЛИЯНИЕ КОНЕЧНОГО ДАВЛЕНИЯ НА РАВНОВЕСИЕ ПЛАЗМЫ
И ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В АКСИАЛЬНО-НЕСИММЕТРИЧНЫХ
ОТКРЫТЫХ ЛОВУШКАХ

И.А.Котельников

Аннотация

Исследуются гидродинамически равновесные конфигурации плазмы и процессы поперечного переноса в аксиально-несимметричных открытых ловушках. Показано, что при учете конечного, хотя и малого, значения β свойство локальной вложенности, как правило, нарушается, однако расхождение поверхностей постоянного давления и поверхностей постоянного продольного адиабатического инварианта в параксиальном приближении оказывается малым.

THE EFFECT OF FINITE PRESSURE ON PLASMA EQUILIBRIA
AND PARTICLES MOTION IN OPEN NON-AXISYMMETRIC TRAPS

I.Kotelnikov

Abstract

Plasma equilibrium configurations and transverse transport processes in non-axisymmetric mirror machines are studied. It is shown that local omnigenity breaks as a rule when finite, if small, plasma beta is taken into account though the divergence of constant pressure surfaces and the ones of constant longitudinal adiabatic invariant turned out to be small in paraxial limit.

Наиболее радикальным способом подавления поперечных потерь в аксиально-несимметричных ловушках явилось бы создание магнитного поля, которое, сохраняя свойство "минимума В", обладало свойством вложенности. Вложенность магнитного поля означает, что ведущие центры частиц, находившихся в начальный момент на некоторой силовой линии, в процессе дрейфа остаются все время на поверхности, одной и той же для всех частиц, независимо от их энергии и магнитного момента. Магнитное поле, обладающее свойством вложенности в вышеприведенной формулировке, принято называть омнигенным (см., например, /1,2/) либо полем с ортогональной геометрией /3/. Следуя работе /4/, мы будем использовать термин "локально омнигенное поле". В таком поле поверхности, по которым дрейфуют частицы, — дрейфовые поверхности — не пересекаются уже по самому определению свойства вложенности. Поэтому при столкновении частиц, когда их магнитный момент и энергия меняются, они не могут перейти с одной дрейфовой поверхности на другую, что и означает отсутствие процессов неклассического и резонансного переноса. Для практических целей может оказаться достаточным, чтобы свойство вложенности выполнялось не точно, а приближенно. В частности, существует широкий класс вакуумных аксиально-несимметричных полей, обладающих свойством локальной вложенности в параксиальном приближении /2,4,5/. Кроме того, даже если магнитное поле не является локально вложенным, может оказаться, что свойство вложенности выполняется "в среднем", т.е. поверхности постоянного давления (для простоты будем говорить об изотропной плазме) совпадают с поверхностями, на которых продольный адиабатический инвариант $I_{||}$ постоянен (разумеется, указанное определение свойства вложенности "в среднем" имеет смысл, если за один пролет ловушки частица продрейфовывает по азимуту на малый угол, тогда $I_{||}$ является интегралом движения). При этом центры ларморовских кружков частиц движется не точно по самой поверхности $I_{||} = \text{const}$, как было бы в локально омнигенном поле, а в некоторой окрестности от нее, и лишь в среднем за период движения между пробками ларморовские кружки лежат на этой поверхности. Поэтому, если равновесная плазменная конфигурация обладает свойством вложенности лишь "в среднем", сохраняется один из механизмов неклассического переноса — диффузия на расщеплении дрейфовых поверхностей /6,7/.

Искажение вакуумного поля токами, текущими по плазме, как неоднократно отмечалось в литературе (см., например, /5,7/), должно приводить к нарушению свойства вложенности. Цель настоящей статьи — проверить это предположение с помощью конкретных расчетов. В параксиальном приближении получены явные выражения для магнитного поля с учетом малого, но конечного значения β — отношения давления плазмы p к давлению магнитного поля $H^2/8\pi$. Их анализ показал, что если давление постоянно во всем объеме плазмы, то существуют конфигурации квадрупольного магнитного поля такие, что свойство вложенности выполняется внутри, но нарушается вне плазмы. В то же время свойство вложенности "в среднем" нарушается слабо, а именно расхождение поверхностей $p = \text{const}$ и $I_{||} = \text{const}$ оказывается малым по параметру параксиальности, несмотря на то, что сами эти поверхности искажаются сильно и становятся "жеванными".

I. Условие локальной вложенности магнитного поля при конечном β .

При получении условий вложенности можно считать, что электрическое поле равно нулю (см., например, /4/). Тогда скорость частицы складывается из трех векторов:

$$\vec{v}_{||} \propto \vec{\tau}, \quad \vec{v}_{\text{grad}} \propto \vec{\tau} \times \nabla H, \quad \vec{v}_{\text{curv}} \propto \vec{\tau} \times \vec{\alpha} \quad (I)$$

— соответственно, скорости вдоль силовой линии, скорости градиентного и центробежного дрейфа (здесь $\vec{\tau} = \vec{H}/H$ — вектор касательной и $\vec{\alpha} = (\vec{\tau}, \nabla)\vec{\tau}$ — вектор кривизны силовой линии). Условие вложенности заключается в том, что все три вектора (I) должны лежать в плоскости, касательной к дрейфовой поверхности. Для этого необходимо, во-первых, чтобы векторы (I) были компланарны, т.е. их смешанное произведение было равно нулю:

$$[\vec{\tau} \times \vec{\alpha}] \cdot \nabla H = 0, \quad (2)$$

и, во-вторых, чтобы нормаль к плоскости, натянутой на векторы (I) была коллинеарна нормали к дрейфовой поверхности. Последнее условие приводит к уравнению

$$\vec{\alpha} \cdot \text{rot } \vec{\alpha} = 0, \quad (3)$$

вывод которого, проведенный в работе /2/ для потенциального магнитного поля, без изменений обобщается на рассматриваемый случай.

Уравнение (2) можно переписать в следующем виде

$$\vec{\alpha} \cdot \text{rot } \vec{H} = 0, \quad (4)$$

после чего становится очевидным, что для потенциального поля оно выполняется автоматически. Из уравнения равновесия изотропной плазмы

$$\nabla p = \frac{1}{c} [\vec{J} \times \vec{H}] \quad (5)$$

можно найти поперечную составляющую плотности тока:

$$\vec{J}_{\perp} = \frac{c}{H} [\vec{\tau} \times \nabla p]. \quad (6)$$

Если учесть также, что $\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$ и $\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau} = 0$, то из уравнения (4) следует, что

$$[\vec{\tau} \times \vec{\alpha}] \cdot \nabla p = 0, \quad (7)$$

и поэтому векторы ∇p и $\vec{\alpha}$ коллинеарны, так как каждый из них в отдельности перпендикулярен $\vec{\tau}$. Другими словами, в поле, обладающем свойством вложенности, частицы движутся по поверхности постоянного давления. Легко проверить, что если уравнение (7) выполняется, то

$$\text{div } \vec{J}_{||} = -\text{div } \vec{J}_{\perp} = 0,$$

и в плазме не генерируются продольные токи $\vec{J}_{||} = \vec{\tau}(\vec{J} \cdot \vec{\tau})$, наличие которых приводит к тому, что поверхности постоянного давления становятся "жеванными" / 8/.

2. Магнитное поле при $\beta \ll 1$.

Вакуумное магнитное поле в открытых ловушках с хорошей точностью описывается в параксиальном приближении. В декартовой системе координат с осью z , направленной вдоль оси ловушки, и осями x, y , лежащими в плоскостях квадрупольной симметрии ловушки, компоненты поля имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} H_x &= (-\frac{1}{2} H_0' - 2g)x \\ H_y &= (-\frac{1}{2} H_0' + 2g)y \\ H_z &= H_0, \end{aligned} \quad (8)$$

где $H_0(z)$ - поле на оси z , функция $g(z)$ задает квадрупольную составляющую поля, а штрих означает дифференцирование. С помощью простого интегрирования легко получить уравнение силовой линии, проходящей в экваториальной плоскости ловушки

$$\begin{aligned} z &= 0 \text{ через точку } x_0, y_0: \\ x &= x_0 X(z), \quad X(z) = R^{-1/2} \exp(-\phi/2), \\ y &= y_0 Y(z), \quad Y(z) = R^{-1/2} \exp(\phi/2), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$R(z) = H_0(z)/H_0(0), \quad \phi(z) = 4 \int_0^z dz' g(z')/H_0(z').$$

Токи, текущие по плазме, слабо искажают магнитное поле, если $\beta \ll 1$. В настоящем разделе будет найдена поправка $\delta \vec{H}$ к вакуумному магнитному полю; линейная по параметру β , который считается малым. При этом удобно исходить из выражения для векторного потенциала

$$\delta \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (10)$$

который связан с $\delta \vec{H}$ обычным соотношением:

$$\delta \vec{H} = \text{rot } \delta \vec{A}.$$

Ввиду малости β поперечный ток \vec{j}_\perp можно вычислять по формуле (6), подставляя в нее вакуумное поле (8). В параксиальном приближении

$$\vec{j}_\perp \approx \frac{c}{H_0} \left(-\frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial x}, 0 \right). \quad (11)$$

Что касается продольного тока, то будем считать, что вакуумное магнитное поле обладает свойством вложенности, и поэтому (при соответствующих граничных условиях на торцах ловушки) $j_{||} = 0^{**}$. Условие (3) вложенности вакуумного поля в параксиальном приближении

** Вклад в $\delta \vec{H}$, создаваемый продольным током, вычислен в Приложении.

лении приводит к уравнению /2/:

$$\alpha X X'' = Y Y'', \quad (12)$$

где α - некоторая константа. Постоянство давления вдоль силовой линии (см. (5)) означает, что p есть функция констант силовой линии: $p = p(x_0, y_0)$. В параксиальном приближении $[\vec{r} \times \vec{a}] \approx (y_0 Y'', x_0 X'', 0)$, и уравнение (7) можно записать в следующем виде:

$$y_0 \frac{Y''}{X} \frac{\partial p}{\partial x_0} - x_0 \frac{X''}{Y} \frac{\partial p}{\partial y_0} = 0.$$

Его интегрирование с учетом равенства (12) дает:

$$p(x, y, z) = p(x_0^2 + \alpha y_0^2) = p\left(\frac{x^2}{X^2} + \alpha \frac{y^2}{Y^2}\right). \quad (13)$$

Распределение давления в экваториальной плоскости открытой ловушки обычно является аксиально-симметричным, поэтому в дальнейшем предполагается, что $\alpha = 1$. В параксиальном приближении в интеграле (10) можно заменить $\vec{j}(x', y', z')$ на $\vec{j}(x', y', z)$. Подставляя теперь (11) в (10) и интегрируя по z' , получим

$$\begin{aligned} \delta A_x &= \frac{2}{H_0} \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dy' \frac{p(x', y', z)(y-y')}{(x-x')^2 + (y-y')^2} \\ \delta A_y &= -\frac{2}{H_0} \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dy' \frac{p(x', y', z)(x-x')}{(x-x')^2 + (y-y')^2} \\ \delta A_z &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

После этого вычисление z -составляющей $\text{rot } \delta \vec{A}$ приводит к хорошо известному результату /7/:

$$\delta H_z = -\frac{4\pi p(x, y, z)}{H_0(z)}. \quad (15)$$

Чтобы найти δH_x , δH_y , в интегралах в (14) удобно сделать замену переменных, выразив x' , y' через полярные координаты ρ, φ в экваториальной плоскости ловушки:

$$x' = X(z) \rho \cos \varphi, \quad y' = Y(z) \rho \sin \varphi. \quad (I6)$$

В новых переменных, как следует из (I3), давление p зависит только от радиуса ρ (напомним, что $\alpha = 1$), и интегрирование по углу φ удается выполнить в общем виде. Вычисления проведены в Приложении. Результат наиболее просто записывается в комплексных обозначениях:

$$\delta H_x + i \delta H_y = \frac{\partial}{\partial z} \frac{4\pi}{H_0(z)} \int_0^q d\rho \rho P(\rho) \frac{X Y}{[(X - iy)^2 + \rho^2(Y^2 - X^2)]^{1/2}}, \quad (I7)$$

где i - мнимая единица, а $q = (x^2/X^2(z) + y^2/Y^2)^{1/2}$.

3. Равновесие плазмы и свойство вложенности при конечном β .

Отдельного рассмотрения, как было уже отмечено, заслуживает случай, когда давление постоянно по всему объему плазмы:

$$p(\rho) = \begin{cases} p_0, & \rho \leq a \\ 0, & \rho > a, \end{cases}$$

где a - радиус плазмы в экваториальной плоскости ловушки. При таком распределении давления магнитное поле остается потенциальным везде, за исключением тонкого поверхностного слоя плазмы. Неудивительно поэтому, что выражения для составляющих магнитного поля внутри плазмы (в области $q < a$) с точностью до обозначений записываются в том же виде, что и для вакуумного поля:

$$\begin{aligned} H_x &= \left(-\frac{1}{2} \tilde{H}'_0 - 2 \tilde{g}\right) x \\ H_y &= \left(-\frac{1}{2} \tilde{H}'_0 + 2 \tilde{g}\right) y \\ H_z &= \tilde{H}_0, \end{aligned} \quad (I8)$$

где

$$\tilde{H}_0(z) = H_0(z) - \frac{4\pi p_0}{H_0(z)}, \quad \tilde{g}(z) = g(z) - \pi p_0 \left[\frac{\text{th} \phi(z)/2}{H_0(z)} \right]'$$

Для того, чтобы найденное магнитное поле обладало свойством локальной вложенности, оно должно удовлетворять уравнениям (3), (4). Выполнение второго из них автоматически обеспечивается потенциальностью поля, а уравнение (3) в параксиальном приближении принимает вид, аналогичный (I2):

$$\tilde{X} \tilde{X}'' = \tilde{Y} \tilde{Y}'', \quad (I9)$$

где функции $\tilde{X}(z)$ и $\tilde{Y}(z)$, задающие уравнение силовой линии, находятся по тем же формулам (9), что и для вакуумного поля, если заменить в них H_0 на \tilde{H}_0 и g на \tilde{g} .

Из сравнения уравнений (I2) и (I9) следует, что магнитное поле, являющееся локально омнигенным в пределе $\beta = 0$, перестает быть таковым при $\beta \neq 0$. Однако вакуумное поле (т.е. функции H_0 и g) можно подобрать таким образом, что магнитное поле внутри плазмы станет омнигенным. При этом само вакуумное поле, вообще говоря, не будет иметь свойства вложенности. Вне плазмы, в области $q > a$, возмущение магнитного поля, создаваемое током в плазме, как показывает анализ формулы (I7), нельзя конструктивно описать в виде разложения по степеням x, y , так как приходится удерживать бесконечное число членов. Это становится понятным уже из того факта, что на расстоянии от оси всего лишь в несколько раз большем, чем радиус плазмы a , главный член в правой части (I7) пропорционален $(x - iy)^{-1}$, т.е. имеет "непараксиальный" вид. В разложении по степеням x, y возмущения магнитного поля внутри плазмы также приходится учитывать много членов, если давление не постоянно по всему объему плазмы. Например, если $p(\rho)$ - полином N -той степени по ρ^2 :

$$p(\rho) = \begin{cases} p_0 \sum_{n=0}^N \gamma_n (\rho/a)^{2n}, & \rho \leq a \\ 0, & \rho > a, \end{cases} \quad (20)$$

то $\delta H_x, \delta H_y$ являются полиномами степени $2N+1$ по x и y , причем все члены этих полиномов при $x \sim y \sim a$ одного порядка и приблизительно равны $\beta H_0 a/L$, где L - продольный масштаб изменения поля. Поэтому подбором всего лишь двух функций: $H_0(z)$ и $g(z)$ - н. удается, за исключением, по-видимому, только ак-

аксиально-симметричного случая ($g \equiv 0$), добиться выполнения условий локальной вложенности (3), (4) внутри плазмы, если давление не постоянно по всему ее объему ($N \neq 0$). Но и при $N = 0$, когда магнитное поле можно сделать омнигенным внутри плазмы, снаружи оно не будет обладать свойством вложенности, и в тонком поверхностном слое коэффициент диффузии D_{ext} будет больше, чем внутри плазмы. Из теории распространения температурных волн в средах с нелинейной теплопроводностью известно [9], что скорость движения таких волн определяется максимальным значением коэффициента температуропроводности. Применительно к рассматриваемой задаче это означает, что за время $\tau \sim a^2 / D_{ext}$ распределение давления в плазме исказится, свойство вложенности нарушится, и коэффициент диффузии возрастет примерно до значения D_{ext} . Поэтому для того, чтобы подавить поперечный перенос, нужно обеспечить выполнение свойства вложенности как внутри, так и вне плазменного объема. Таких конфигураций магнитного поля нам найти не удалось.

Рассмотрим теперь влияние конечного давления на равновесие плазмы в короткой открытой ловушке. Будем считать, что магнитная система ловушки инвариантна относительно преобразования координат

$$x \rightarrow y, \quad y \rightarrow -x, \quad z \rightarrow -z. \quad (21)$$

Такую симметрию имеет ловушка с двумя одинаковыми квадрупольными пробками, повернутыми относительно друг друга на $\pi/2$ (тогда функции $H_0(z)$ и $g(z)$ являются четными).

При заданном магнитном поле уравнение поверхностей постоянного давления находится из условия замыкания продольных токов (см., например, [7,8]):

$$\int ds H^{-2} [\vec{\alpha} \times \vec{\tau}] \cdot \nabla p = 0. \quad (22)$$

Здесь интегрирование ведется вдоль силовой линии между торцами ловушки. При $\beta \ll 1$ можно действовать в духе теории возмущений: подставить сначала в (22) вакуумное магнитное поле, найти в этом поле равновесное распределение давления, вычислить по нему возмущение магнитного поля, подставить это поле в (22) и т.д. В приближении вакуумного поля из-за специфической симметрии (21) рассматриваемой ловушки распределение давления в эква-

ториальной плоскости оказывается аксиально-симметричным. Поэтому для нахождения возмущения магнитного поля можно воспользоваться формулами (I7), (II.5). Задавая конкретный профиль давления, можно сделать следующую итерацию и найти уравнения поверхностей постоянного давления с точностью до членов, линейных по β . В частности, был рассмотрен случай, когда $p(\rho)$ является полиномом вида (20):

$$p(\rho) = p_0 \sum_{n=0}^N \gamma_n (\rho/a)^{2n}.$$

Прежде всего выяснилось, что распределение давления в экваториальной плоскости ловушки перестает быть аксиально-симметричным, когда степень полинома $N \geq 1$. В цилиндрических координатах с углом φ , отсчитываемым от плоскости симметрии одной из квадрупольных пробок, уравнение $\Gamma_p(\varphi)$ сечения поверхности $p = \text{const}$ экваториальной плоскостью ловушки схематично выглядит следующим образом:

$$\Gamma_p(\varphi) = r_0 + r_0 \left[\beta \sum_{k=0}^K \varepsilon_k \cos 4k\varphi + O(\beta^2, \frac{r_0^2}{L^2}) \right], \quad (23)$$

где $K = N/2$ или $K = (N+1)/2$ в зависимости от того, является N четным или нечетным; коэффициенты $\varepsilon_k \sim 1$ зависят от $(r_0/a)^2$ и от коэффициентов γ_n полинома (20), причем ε_K пропорционален γ_N (если N - нечетное) или γ_{N-1} (если N - четное) и от остальных γ_n не зависит.

Несмотря на то, что отклонение $\Gamma_p(\varphi)$ от окружности не содержит малости по параметру параксиальности, и в этом смысле искажение поверхностей постоянного давления является сильным, поверхности $p = \text{const}$ и $I_{||} = \text{const}$ приблизительно совпадают. Действительно, в разложении продольного адиабатического инварианта [7]:

$$I_{||}(r_0, \varphi) = \int \sqrt{\frac{2}{m} (\varepsilon - \mu H)} ds = \\ = O(1) + O(\beta) + O\left(\frac{r_0^2}{L^2}\right) + O\left(\frac{r_0^4}{L^4}\right) + O(\beta^2) + O\left(\beta \frac{r_0^2}{L^2}\right) + \dots, \quad (24)$$

первые три члена, в том числе и

$$\theta(\beta) = - \langle p(r_0, \varphi) \rangle \int \frac{dz \mu H_0^{-1}}{\sqrt{2m(\varepsilon - \mu H_0)}}$$

не зависят от азимутального угла φ (угловые скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по φ). Зависимость от угла появляется в следующих членах разложения, причем

$$\theta(\beta^2) = - [p(r_0, \varphi) - \langle p(r_0, \varphi) \rangle] \int \frac{dz \mu H_0^{-1}}{\sqrt{2m(\varepsilon - \mu H_0)}}.$$

Поэтому, обозначая через $r_I(\varphi)$ уравнение сечения поверхности $I_{II} = \text{const}$ экваториальной плоскостью ловушки, получим, что

$$r_I(\varphi) - r_p(\varphi) = r_0 \theta\left(\frac{r_0^2}{L^2}\right) \quad (25)$$

вне зависимости от того, больше или меньше β , чем r_0^2/L^2 . Таким образом, свойство вложенности "в среднем" нарушается слабо.

Автор приносит благодарность Д.Д.Ритову за многочисленные обсуждения в ходе выполнения работы.

Приложение

В переменных ρ, φ интегралы в (14) можно записать в следующем виде:

$$\delta A_x + i \delta A_y = - \frac{2XY}{H_0} \int_0^\infty d\rho \rho p(\rho) \int_0^{2\pi} \frac{i d\varphi}{x - iy - \rho(X \cos\varphi - iY \sin\varphi)}. \quad (\text{П.1})$$

Интегрирование по φ в (П.1) сводится к вычислению контурного интеграла по окружности единичного радиуса в комплексной плоскости w :

$$\int_0^{2\pi} \frac{i d\varphi}{x - iy - \rho(X \cos\varphi - iY \sin\varphi)} = \oint_{|w|=1} \frac{dw}{w W(w)}, \quad (\text{П.2})$$

который равен помноженной на $2\pi i$ сумме вычетов в точках полюсов подынтегрального выражения, лежащих внутри круга $|w| < 1$. Полюсами в (П.2) являются точки нулей функции

$$W(w) = x - iy - \frac{\rho}{2} \left[w(X - Y) + \frac{1}{w}(X + Y) \right].$$

Из имеющихся двух корней уравнения $W(w) = 0$:

$$w_{1,2} = \frac{x - iy \pm \sqrt{(x - iy)^2 - \rho^2(X^2 - Y^2)}}{\rho(X - Y)} \quad (\text{П.3})$$

— один всегда лежит вне единичного круга, так как

$$|w_1 \cdot w_2| = |(X + Y)/(X - Y)| > 1.$$

Чтобы установить местонахождение второго корня, достаточно подсчитать, сколько раз замкнутая кривая, изображающая окружность $|w| = 1$ на плоскости w , обходит точку $W = 0$. В соответствии с принципом аргумента, в круге $|w| < 1$ имеется один корень уравнения $W = 0$, если эта кривая ни разу не обходит точку нуля (так как в единичном круге функция $W(w)$

имеет еще простой полюс ($W = 0$), и ни одного корня - при однократном обходе. Окружность $|w| = 1$ отображается на плоскость W в виде эллипса, центр которого сдвинут на вектор $\xi = x - iy$ от точки $W = 0$ (см. рис. I). Построим теперь с центром в точке $W = 0$ эллипс, точно такой же, как и эллипс, изображающий окружность $|w| = 1$. Он описывается уравнением $q(w) = \rho$, где

$$q(W) = \left[\frac{(\operatorname{Re} W)^2}{X^2} + \frac{(\operatorname{Im} W)^2}{Y^2} \right]^{1/2},$$

и изображен на рис. Ia и Ib пунктиром. Если вектор ξ лежит внутри этого эллипса, т.е. $\rho > q(\xi)$, то эллипс, отображающий окружность, охватывает точку $W = 0$ (см. рис. Ia). Следовательно, функция $W(w)$ в круге $|w| < 1$ не имеет нулей, и интеграл (II.2) равен нулю. При $\rho < q(\xi)$ отображающий эллипс не охватывает точку $W = 0$ (рис. Ib). Поэтому подынтегральное выражение в (II.2) имеет один полюс в круге $|w| < 1$. Вычисляя вычет в точке этого полюса, получим формулу (I7).

Приведем также выражения для возмущения магнитного поля, создаваемого продольным током. Продольный ток находится из уравнения $\operatorname{div} \vec{j}_n = -\operatorname{div} \vec{j}_z$. Он направлен приблизительно вдоль оси z и с требуемой точностью равен:

$$\vec{j}_n = -c\rho \sin 2\varphi \frac{d\rho(\rho)}{d\rho} H_0(z) \int_{z_*}^z \frac{dz}{H_0^2} \left[\frac{X''}{Y} - \frac{Y''}{X} \right], \quad (\text{II.4})$$

где z_* - координата торца ловушки (на котором $\vec{j}_n = 0$), а ρ, φ - цилиндрические координаты в экваториальной плоскости ловушки - они связаны с x, y, z соотношениями (I6). Вычисления, аналогичные сделанным при получении (I7), дают

$$\begin{aligned} \delta H_x + i\delta H_y = 2\pi H_0(z) \int_{z_*}^z \frac{dz}{H_0^2} \left[\frac{X''}{Y} - \frac{Y''}{X} \right] \cdot \left\{ \int_0^\infty d\rho \frac{d\rho}{d\rho} \frac{x-iy}{ch^2 \frac{\rho}{z}} + \right. \\ \left. + \int_0^q d\rho \frac{d\rho}{d\rho} Q^{-1} sh^{-2} \phi \left[(Q-x+iy)^2 ch^2 \frac{\phi}{2} + (Q+x-iy)^2 sh^2 \frac{\phi}{2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

$$\delta H_z = 0,$$

где

$$Q = [(x-iy)^2 + 2\rho^2 R^{-1} sh \phi]^{1/2}.$$

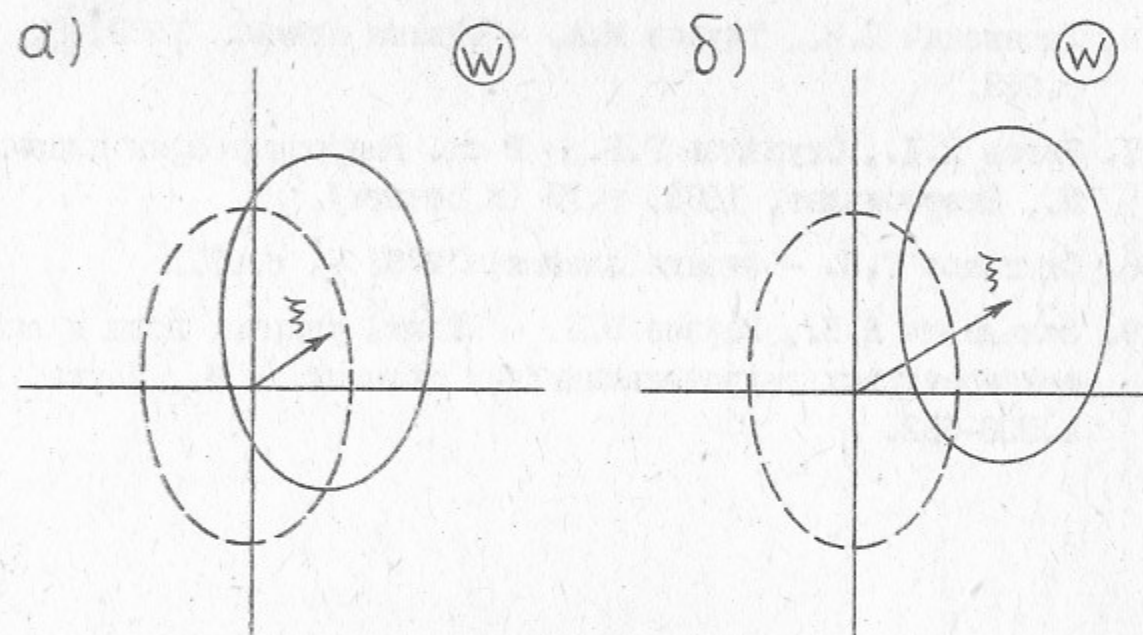


Рис. I. К вычислению интеграла (II.2):
а) $\rho > q(\xi)$, б) $\rho < q(\xi)$.

Л и т е р а т у р а

1. Hall L.S., McNamara B. - Phys. Fluids, 1975, 18, p. 552.
2. Stupakov G.V. - In: Fusion Energy 1981. Selected Lectures Presented at the Spring College on Fusion Energy. Trieste, 26 May - 19 June, IAEA, Vienna, 1982, p. 255.
3. Панов Д.А. - Физика плазмы, 1983, 9, с.184.
4. Catto P.J., Hazeltine R.D. - Phys. Rev. Lett., 1981, 46, p. 1002; Phys. Fluids, 1981, 24, p. 1663.
5. Ступаков Г.В. - Физика плазмы, 1979, 5, с.958.
6. Лысянский П.Б., Тиунов М.А. - Физика плазмы, 1982, 8, с.963.
7. Рютон Д.Д., Ступаков Г.В. - В кн. Вопросы теории плазмы. - М., Энергоиздат, 1983, т.13 (в печати).
8. Ступаков Г.В. - Физика плазмы, 1979, 5, с.871.
9. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. - Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. - М., Наука, 1966, с.506-532.

И.А.Котельников

ВЛИЯНИЕ КОНЕЧНОГО ДАВЛЕНИЯ НА РАВНОВЕСИЕ ПЛАЗМЫ
И ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В АКСИАЛЬНО-НЕСИММЕТРИЧНЫХ
ОТКРЫТЫХ ЛОВУШКАХ

Препринт
№ 83-78

Подписано к печати - 24 июня 1983 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати 8.07-1983 г. МН 17631
Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.1,0 печ.л., 0,8 учетно-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 78.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90