3

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

Б.Н.Брейзман, Ю.М.Розенраух.

«ВЗРЫВНАЯ» ДИНАМИКА СПЕКТРА ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПРИ РАСПАДНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН

ПРЕПРИНТ 83-08

Новосибирск

"ВЗРЫВНАЯ" ДИНАМИКА СПЕКТРА ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПРИ РАСПАДНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН

Б.Н.Брейзман, Ю.М.Розенраух

А Н Н О Т А Ц И Я

Показано, что в задаче с начальными условиями распадные процессы могут приводить к самоускоряющейся (взрывной) перекачке энергии волн в область больших волновых чисел вплоть до области поглощения. Такая картина характерна, в частности, для капиллярных волн на поверхности жидкости и для электронных волн в холодной магнитоактивной плазме. Примечательно, что описание взрывной перекачки не требует выхода за рамки приближения слабой турбулентности.

"EXPLOSIVE" DEVELOPMENT OF TURBULENT SPECTRA DUE TO DECAY INTERACTION

B.N.Breizman, Yu.M.Rozenraukh
Institute of Nuclear Physics,
630090, Novosibirsk 90, USSR

A b s t r a c t

Evolution of the weak turbulence spectra due to decay interaction is considered. It is shown that under rather general conditions a decay interaction results in the self-accelerating (explosive) energy transfer to the short-wavelength region with the subsequent absorption of wave energy. We study this effect for capillary waves on a liquid surface as well as for electron waves in a cold magnetized plasma.

I. В в е д е н и е

Основными нелинейными процессами в слаботурбулентной плазме являются индуцированное рассеяние волн на частицах и трехволновое распадное взаимодействие. Относительно индуцированного рассеяния известно, что оно приводит к перекачке волн в область низких частот (см., например, [I]). С уменьшением частоты обычно уменьшается и характерное волновое число. При этом в длинноволновой части спектра может образовываться конденсат, описание которого требует выхода за рамки приближения слабой турбулентности. В частности, теория слабой турбулентности не позволяет решить вопрос о диссипации энергии конденсата. Эта трудность возникает, например, при рассмотрении ленгмюровского конденсата в плазме без магнитного поля.

В условиях, когда доминируют распадные процессы, характер перераспределения энергии по спектру, вообще говоря, не столь универсален, как в случае индуцированного рассеяния. Ниже мы покажем, что во многих практически интересных случаях распады и слияния волн приводят к перекачке энергии не в длинноволновую, а, напротив, в коротковолновую область вплоть до области поглощения. Эта перекачка может быть количественно описана в рамках теории слабой турбулентности. Интересной особенностью распадного взаимодействия является то, что эволюция начального спектра волн может, как мы увидим, носить взрывной характер: среднее по спектру значение волнового числа возрастает до сколь угодно большой величины за конечное время.

Обратимся к кинетическому уравнению, описывающему распады и слияния волн с законом дисперсии $\omega(\vec{k})$

$$\frac{\partial n_{\vec{k}}}{\partial t}=\int w_{\vec{k}\vec{k}_1\vec{k}_2}\delta(\vec{k}-\vec{k}_1-\vec{k}_2)\delta(\omega-\omega_1-\omega_2)[n_{\vec{k}_1}n_{\vec{k}_2}(n_{\vec{k}}+1)-n_{\vec{k}}(n_{\vec{k}_1}+1)(n_{\vec{k}_2}+1)]\frac{d\vec{k}_1 d\vec{k}_2}{(2\pi)^6}+ \tag{I}$$

$$+2\int w_{\vec{k}_1\vec{k}\vec{k}_2}\delta(\vec{k}_1-\vec{k}-\vec{k}_2)\delta(\omega_1-\omega-\omega_2)[n_{\vec{k}_1}(n_{\vec{k}}+1)(n_{\vec{k}_2}+1)-n_{\vec{k}}n_{\vec{k}_2}(n_{\vec{k}_1}+1)]\frac{d\vec{k}_1 d\vec{k}_2}{(2\pi)^6}.$$

Из этого уравнения следует, что взаимодействие приводит к росту энтропии волн [2] :

$$\frac{d}{dt}\int[(n_{\vec{k}}+1)\ln(n_{\vec{k}}+1)-n_{\vec{k}}\ln n_{\vec{k}}]\,d\vec{k}\geq 0.$$

В отсутствие накачки и затухания единственным стационарным решением уравнения (I) является распределение Планка

$$n_{\vec{k}} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{T}} - 1}, \tag{2}$$

а в пренебрежении спонтанными процессами – распределение Рэлея-Джинса

$$n_{\vec{k}} = \frac{T}{\hbar\omega_{\vec{k}}}. \tag{3}$$

Равновесная температура волн T определяется исходной плотностью их энергии W_0 :

$$W_0 = \int \frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{e^{\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{T}} - 1} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}. \tag{4}$$

В частности, при степенном законе дисперсии ($\omega(\vec{k}) = \alpha k^{\gamma}$) температура и характерное волновое число $\bar{k}$ оценочно равны:

$$T \sim \hbar a \left(\frac{W_0}{\hbar a}\right)^{\frac{\gamma}{3+\gamma}}$$

$$\bar{k} \sim \left(\frac{W_0}{\hbar a}\right)^{\frac{1}{3+\gamma}}$$

Как видно из этих выражений, при переходе к классическому пределу ($\hbar \to 0$) величина $\bar{k}$ стремится к бесконечности. Фактически же увеличение $\bar{k}$ ограничивается не учтенными в уравнении (I) диссипативными эффектами, роль которых обычно возрастает с уменьшением длины волны. Таким образом, перебрасывая волны в область больших $\bar{k}$, распадное взаимодействие приводит в конечном счете к поглощению вложенной в плазму энергии.

П. Капиллярные волны

Простым примером, позволяющим проследить за динамикой спектра при распадном взаимодействии, являются капиллярные волны на поверхности жидкости. Для этих волн

$$\omega(\vec{k}) = \sqrt{\alpha k^3}, \tag{5}$$

а вероятность распада равна [3] ж)

$$w_{\vec{k}\vec{k}_1\vec{k}_2} = \pi^{-5}\left(\frac{\alpha}{4}\right)^{1/2}\left\{\left(\frac{kk_1}{k_2}\right)^{1/4}\left[(k-k_1)^2 - k_2^2\right] + \left(\frac{kk_2}{k_1}\right)^{1/4}\left[(k-k_2)^2 - k_1^2\right] - \left(\frac{k_1k_2}{k}\right)^{1/4}\left[(k_1-k_2)^2 - k^2\right]\right\}^2 \tag{6}$$

Здесь $\vec{k}$, $\vec{k}_1$, $\vec{k}_2$ – двумерные волновые векторы, а α – отношение коэффициента поверхностного натяжения к плотности жидкости. В пренебрежении спонтанными процессами кинетическое уравнение для волн имеет вид

$$\frac{\partial n_{\vec{k}}}{\partial t} = \int w_{\vec{k}\vec{k}_1\vec{k}_2}\,\delta(\vec{k}-\vec{k}_1-\vec{k}_2)\,\delta(\omega-\omega_1-\omega_2)(n_{\vec{k}_1}n_{\vec{k}_2} - n_{\vec{k}}n_{\vec{k}_1} - n_{\vec{k}}n_{\vec{k}_2})\frac{d\vec{k}_1 d\vec{k}_2}{(2\pi)^6} + 2\int w_{\vec{k}_1\vec{k}\vec{k}_2}\,\delta(\vec{k}_1-\vec{k}-\vec{k}_2)\,\delta(\omega_1-\omega-\omega_2)(n_{\vec{k}}n_{\vec{k}_1} + n_{\vec{k}_1}n_{\vec{k}_2} - n_{\vec{k}}n_{\vec{k}_2})\frac{d\vec{k}_1 d\vec{k}_2}{(2\pi)^6}. \tag{7}$$

Из формул (6) и (7) следует, что время нелинейного взаимодействия τ обратно пропорционально плотности энергии и характерной частоте волн:

$$\tau \sim \left(\bar{k}^{3/2} W_0\right)^{-1}. \tag{8}$$

Поскольку в задаче с начальными условиями плотность энергии W_0 сохраняется, соотношение (8) показывает, что время спектральной перекачки уменьшается с увеличением характерного волнового числа $\bar{k}$. Иначе говоря, процесс перекачки энергии в коротковолновую область является самоускоряющимся. Заметим, что уменьшение характерного времени взаимодействия с ростом среднего волнового числа не нарушает условий применимости приближения случайных фаз, поскольку для достаточно широкого спектра ($\delta\omega \sim \omega$) произведение $\tau \cdot \delta\omega$ остается постоянным (см.формулу (8)). Таким образом, достаточно потребовать, чтобы условие быстрого фазового размешивания

$$\delta\omega \cdot \tau \gg 1$$

выполнялось в начальный момент времени.

ж) Отличие вероятности (6) от соответствующего выражения, приведенного в работе [3] , объясняется тем, что в статье [3] допущена опечатка: вместо векторов $\vec{k}$, $\vec{k}_1$, $\vec{k}_2$ следует писать их модули.

Полного решения задачи об эволюции начального распределения волн найти не удается; можно, однако, получить коротковолновую асимптотику этого решения. Предполагая, что спектр волн достаточно быстро спадает при $k \gg \bar{k}$ (это предположение оправдывается получающимся результатом), мы пренебрежем взаимодействием коротких волн друг с другом и ограничимся лишь учетом их взаимодействия с основной частью спектра. Тогда уравнение (7) для $n_{\vec k}$ сводится к уравнению диффузии, которое удобно записать в полярных координатах:

$$\frac{\partial n_{\vec k}}{\partial t} = \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial k}\left(k D_{kk}\frac{\partial n_{\vec k}}{\partial k} + D_{k\varphi}\frac{\partial n_{\vec k}}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(D_{\varphi k}\frac{\partial n_{\vec k}}{\partial k} + \frac{D_{\varphi\varphi}}{k}\frac{\partial n_{\vec k}}{\partial \varphi}\right). \qquad (9)$$

Коэффициенты диффузии $D_{\alpha\beta}$ определяются основной частью спектра и задаются следующей формулой:

$$D_{\alpha\beta} = 2\int k'_\alpha k'_\beta W_{\vec k, \vec k - \vec k', \vec k'} n_{\vec k'} \delta[(\vec k' \vec v) - \omega] \frac{d\vec k'}{(2\pi)^6} \qquad (10)$$

где $\vec v = \frac{\partial \omega}{\partial \vec k}$ – групповая скорость коротких волн.
Эти коэффициенты имеют разный порядок величины:

$$\frac{D_{kk}}{D_{k\varphi}} \sim \frac{D_{k\varphi}}{D_{\varphi\varphi}} \sim \frac{\omega'}{k' v} \ll 1. \qquad (11)$$

В нулевом приближении по параметру $\frac{\omega'}{k'v}$ уравнение (9) описывает диффузию волн по углу φ. Поэтому распределение $n_{\vec k}$ очень быстро становится близким к изотропному. Чтобы проследить за тем, как меняется изотропная часть спектра, мы усредним уравнение (9) по φ:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle n_{\vec k}\rangle = \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial k}\left[k\langle D_{kk}\rangle \frac{\partial \langle n_{\vec k}\rangle}{\partial k} + \left\langle D_{k\varphi}\frac{\partial \delta n_{\vec k}}{\partial \varphi}\right\rangle\right] \qquad (12)$$

Усреднение здесь обозначено угловыми скобками. Для анизотропной добавки $\delta n_{\vec k}$ получается уравнение

$$\frac{\partial \delta n_{\vec k}}{\partial t} = \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[D_{\varphi k}\frac{\partial \langle n_{\vec k}\rangle}{\partial k} + \frac{D_{\varphi\varphi}}{k}\frac{\partial \delta n_{\vec k}}{\partial \varphi}\right]. \qquad (13)$$

Учитывая, что характерное время изменения $\langle n_{\vec k}\rangle$ велико по сравнению со временем изотропизации спектра (см. соотношение (11)), можно пренебречь в уравнении (13) производной $\delta n_{\vec k}$ по

времени и положить

$$\frac{\partial \delta n_{\vec k}}{\partial \varphi} = k\left[\frac{F(k)}{D_{\varphi\varphi}} - \frac{D_{k\varphi}}{D_{\varphi\varphi}}\frac{\partial \langle n_{\vec k}\rangle}{\partial k}\right]. \qquad (14)$$

Функция $F(k)$ определяется из условия периодичности анизотропной добавки:

$$F(k) = \frac{\left\langle \frac{D_{k\varphi}}{D_{\varphi\varphi}}\right\rangle}{\left\langle \frac{1}{D_{\varphi\varphi}}\right\rangle}\cdot\frac{\partial \langle n_{\vec k}\rangle}{\partial k}.$$

Подставляя выражение (14) в (12), получим окончательно для $\langle n_{\vec k}\rangle$ следующее уравнение:

$$\frac{\partial \langle n_{\vec k}\rangle}{\partial t} = \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial k}\left(k D \frac{\partial \langle n_{\vec k}\rangle}{\partial k}\right), \qquad (15)$$

в котором

$$D = \langle D_{kk}\rangle + \frac{\left\langle \frac{D_{k\varphi}}{D_{\varphi\varphi}}\right\rangle^2}{\left\langle \frac{1}{D_{\varphi\varphi}}\right\rangle} - \left\langle \frac{D_{k\varphi}^2}{D_{\varphi\varphi}}\right\rangle.$$

Входящие сюда коэффициенты $D_{\alpha\beta}$ вычисляются по формуле (10) и в приближении $\frac{\omega'}{k'v} \ll 1$ являются степенными функциями волнового числа k. Поэтому коэффициент D также имеет степенной вид:

$$D = \frac{\psi(t)}{k^{1/2}}.$$

Здесь функция $\psi(t)$ определяется зависимостью от времени основной части спектра $n_{\vec k'}(t)$. Вводя в уравнение (15) вместо времени новую переменную

$$\theta = \int \psi(t)\, dt,$$

нетрудно проверить, что асимптотика решения с точностью до предэкспоненциального множителя имеет вид

$$n_{\vec k}(\theta) \sim \exp\left(-\frac{k^{5/2}}{\theta}\right). \qquad (16)$$

Экспоненциальное убывание $\langle n_{\vec k}\rangle$ с увеличением волнового числа оправдывает сделанное ранее предположение о том, что коротковолновые колебания взаимодействуют по преимуществу с основной частью спектра.

Отметим, что поскольку частота волн (5) и вероятность распада (6) являются однородными функциями волнового числа, кинетическое уравнение (7) допускает автомодельную подстановку

$$n_{\vec{k}} = \left(1-\frac{t}{t_0}\right)^{7/3} f(z) \qquad (17)$$

$$z = \frac{k}{\bar{k}}\left(1-\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}.$$

Множитель перед функцией $f(z)$ обеспечивает сохранение плотности энергии в спектре:

$$W_0 = \int \omega_{\vec{k}}\, n_{\vec{k}} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^2}.$$

С учетом этой автомодельности коротковолновая асимптотика решения уравнения (15) записывается следующим образом:

$$n_{\vec{k}} \sim \left(1-\frac{t}{t_0}\right)^{7/3} \exp\left[-A\left(\frac{k}{\bar{k}}\right)^{5/2}\left(1-\frac{t}{t_0}\right)^{5/3}\right], \qquad (18)$$

где величина A – константа порядка единицы, определяемая формой основной части спектра, а t_0 – время, по порядку величины равное времени взаимодействия волн в исходном спектре. В этом решении отчетливо виден взрывной характер перекачки энергии в коротковолновую область. Напомним, однако, что решение (18) справедливо лишь в той области, где $k \gg \bar{k}\left(1-\frac{t}{t_0}\right)^{-2/3}$. Что же касается остальной части спектра, то вопрос о существовании здесь автомодельного решения остается открытым.

III. Волны в плазме

Самоускоряющаяся перекачка в область больших волновых чисел не является исключительной особенностью капиллярных волн. Это явление может иметь место и для волн других типов. Мы рассмотрим здесь еще три практически интересных примера: геликоны, электронные циклотронные волны и ленгмюровские волны в плазме с сильным магнитным полем.

Закон дисперсии геликонов имеет вид

$$\omega(\vec{k}) = |\omega_H x| \frac{k^2c^2}{\omega_p^2}, \qquad (19)$$

где ω_p и ω_H – плазменная и циклотронная частоты электронов, а x – косинус угла между волновым вектором и внешним магнитным полем. Вероятность распадного взаимодействия этих волн вычислена в работе [4] :

$$w_{\vec{k}\vec{k}_1\vec{k}_2} = \frac{\pi^4 |\omega_H|}{mn_0\,\omega_p^4}\frac{c^4}{k^2}\left|\frac{x_1x_2}{x}\right|\left[\vec{k}_1\times\vec{k}_2\right]^2\left(\frac{x_1}{|x_1|}k_1-\frac{x_2}{|x_2|}k_2\right)^2\left(\frac{x}{|x|}k+\frac{x_1}{|x_1|}k_1+\frac{x_2}{|x_2|}k_2\right)^2 \qquad (20)$$

(n_0 – плотность плазмы). Из кинетического уравнения (7) следует, что время спектральной перекачки геликонов обратно пропорционально плотности их энергии и квадрату среднего волнового числа:

$$\tau \sim \left(\bar{k}^2 W_0\right)^{-1}. \qquad (21)$$

Так же, как и для капиллярных волн, перекачка энергии в коротковолновую область не приводит в данном случае к нарушению условия применимости приближения случайных фаз. Предполагая быстрое убывание спектра в коротковолновой области и выбрав в качестве независимых переменных величины ω и x, нетрудно привести уравнение (7) к диффузионному виду. В низшем порядке по параметру $\frac{\omega'}{k'v}$ оно описывает диффузию волн вдоль линий $\omega = const$:

$$\frac{\partial n(\omega,x)}{\partial t} = |x|^{3/2}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{D}\frac{\partial n(\omega,x)}{\partial x}, \qquad (22)$$

$$\tilde{D} = \frac{1}{2\pi^2 mn_0}\cdot\left(\frac{\omega_p}{c}\right)^5\frac{\omega^{1/2}}{|\omega_H|^{7/2}x^4}\int\limits_0^\infty d\omega'\int\limits_{-a(x)}^{a(x)}\frac{\omega'^2 n(\omega',x')(x^2-x'^2)\,dx'}{(1+3x^2)^{1/2}\left[a^2(x)-x'^2\right]^{1/2}},$$

$$a(x) = |x|\sqrt{\frac{1-x^2}{1+3x^2}}.$$

Для геликонов линии постоянной частоты в $\vec{k}$ – пространстве уходят в бесконечность, так что, диффундируя вдоль этих линий, геликоны, в отличие от капиллярных волн, попадают в область сколь угодно больших волновых чисел. Когда характерное значение их волнового числа достигает величины $\frac{\omega_p}{c}$, закон дисперсии (19) изменяется и переходит в закон дисперсии циклотронных волн.

Частота электронных циклотронных волн зависит лишь от угла их распространения по отношению к внешнему магнитному полю

$$\omega(\vec{k}) = |\omega_H x|, \qquad (23)$$

а вероятность распада равна

$$w_{\vec{k}\vec{k}_1\vec{k}_2} = \frac{\pi^4}{mn_0}\frac{|\omega_H|}{k^2}\left|\frac{x_1x_2}{x}\right|\frac{\left[\vec{k}_1\times\vec{k}_2\right]^2}{k_1^2k_2^2}\left(\frac{x_1}{|x_1|}k_1-\frac{x_2}{|x_2|}k_2\right)^2\left(\frac{x}{|x|}k+\frac{x_1}{|x_1|}k_1+\frac{x_2}{|x_2|}k_2\right)^2 \qquad (24)$$

Характерное время спектральной перекачки (так же, как и для геликонов) уменьшается с увеличением волнового числа в спектре:

$$\tau \sim \frac{1}{\bar{k}^2 W_0} . \qquad (25)$$

Таким образом, вывод о самоускоряющемся характере перекачки остается справедливым и для циклотронных волн.

Заметим, что формулы (I9) и (23) являются частными случаями более общего дисперсионного соотношения

$$\omega(\vec{k}) = |\omega_H \varkappa| \frac{1}{1 + \frac{\omega_p^2}{k^2 c^2}} ,$$

справедливого во всей области изменения k. Соответствующую общую формулу нетрудно получить и для вероятности $w_{\vec{k}\vec{k}_1\vec{k}_2}$:

$$w_{\vec{k}\vec{k}_1\vec{k}_2} = \frac{\pi^4}{m n_0} \frac{|\omega_H| c^4}{k^2 \omega_p^4} \left| \frac{\varkappa_1 \varkappa_2}{\varkappa} \right| \left(1 - \frac{k_1 k_2 \varkappa_1 \varkappa_2 c^2}{\omega_p^2 |\varkappa_1 \varkappa_2|} \right)^2 \times$$

$$\times \frac{[\vec{k}_1 \times \vec{k}_2]^2 \left(\frac{\varkappa_1}{|\varkappa_1|} k_1 - \frac{\varkappa_2}{|\varkappa_2|} k_2 \right)^2}{\left(1 + \frac{k_1^2 c^2}{\omega_p^2} \right)^2 \left(1 + \frac{k_2^2 c^2}{\omega_p^2} \right)^2} \cdot \left(\frac{\varkappa}{|\varkappa|} k + \frac{\varkappa_1}{|\varkappa_1|} k_1 + \frac{\varkappa_2}{|\varkappa_2|} k_2 \right)^2 .$$

В предельных случаях $k \ll \frac{\omega_p}{c}$ и $k \gg \frac{\omega_p}{c}$ это выражение сводится к (20) и (24).

Рассмотрим, наконец, потенциальные колебания замагниченной ($\omega_H \gg \omega_p$) плазмы, для которых

$$\omega(\vec{k}) = \omega_p |\varkappa| . \qquad (26)$$

а вероятность распада задается следующим выражением [5] :

$$w_{\vec{k}\vec{k}_1\vec{k}_2} = \frac{\pi^4}{m n_0} \omega_p^3 |\varkappa \varkappa_1 \varkappa_2| \left(\frac{k \varkappa}{\omega} + \frac{k_1 \varkappa_1}{\omega_1} + \frac{k_2 \varkappa_2}{\omega_2} \right)^2 \qquad (27)$$

Оценка характерного времени взаимодействия волн

$$\tau \sim \frac{1}{\bar{k}^2 W_0} \qquad (28)$$

и в этом случае указывает на взрывной характер перекачки энергии в область больших волновых чисел.

В отличие от капиллярных волн и геликонов, в последних двух случаях увеличение среднего волнового числа в спектре может приводить к нарушению условия применимости приближения случайных фаз. Действительно, ширина спектра по частоте не может превышать значений ω_H и ω_p для электронных циклотронных и замагниченных ленгмюровских волн соответственно, тогда как характерное время перекачки энергии в обоих случаях неограниченно уменьшается с ростом $\bar{k}$. Поэтому описание динамики спектра с помощью кинетического уравнения (7) является корректным только при не слишком больших значениях $\bar{k}$:

$$\bar{k} \ll \frac{|\omega_H|}{c} \sqrt{\frac{n_0 m c^2}{W_0}}$$

для циклотронных волн и

$$\bar{k} \ll \frac{\omega_p}{c} \sqrt{\frac{n_0 m c^2}{W_0}}$$

для ленгмюровских волн в замагниченной плазме.

Во всех приведенных выше примерах рассматривались распады и слияния однотипных волн. Если же в распадном взаимодействии участвуют волны нескольких типов, то универсального вывода о направлении спектральной перекачки сделать нельзя. В этом случае возможна перекачка энергии не в коротковолновую, а, напротив, в длинноволновую область спектра. Накопление волн в области малых волновых чисел имеет место, в частности, при распадах ленгмюровских волн на ленгмюровские и ионно-звуковые. Поясним это более подробно. Предположим, что в начальный момент времени задан спектр ленгмюровских волн с характерным волновым числом k_0 и плотностью энергии W_0. Плотность числа квантов в этом спектре оценочно равна

$$N_0 \sim \frac{W_0}{\hbar \omega_p} . \qquad (29)$$

Распадное взаимодействие вида $l \to l' + s$ приводит к установлению равновесных распределений плазмонов и ионно-звуковых волн:

$$n^l_{\vec{k}} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar \beta k^2 + \nu}{T}} - 1} \qquad (30)$$

$$n^s_{\vec{q}} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar c_s q}{T}} - 1} . \qquad (3I)$$

В формулах (30), (3I) введены следующие обозначения: $\beta = 3/2\, \omega_p r_D^2$; c_s – скорость ионного звука; $\nu = \hbar\omega_p - \mu > 0$, где μ – химический потенциал плазмонов. Плотность числа плазмонов при распадах сохраняется, а энергия исходного спектра перераспределяется между ленгмюровскими и ионно-звуковыми волнами. Отсчитывая плотность энергии от величины $\hbar\omega_p N_0$, можно записать закон сохранения энергии в виде

$$\int \frac{\hbar\beta k^2 d\vec{k}}{e^{\frac{\hbar\beta k^2+\nu}{T}}-1} + \int \frac{\hbar c_s q\, d\vec{q}}{e^{\frac{\hbar c_s q}{T}}-1} = \varepsilon W_0 , \qquad (32)$$

где ε – величина порядка $k_0^2 r_D^2$. Входящие в это соотношение интегралы оценочно равны $T\left(\frac{T}{\hbar\beta}\right)^{3/2} e^{-\frac{\nu}{T}}$ и $T\left(\frac{T}{\hbar c_s}\right)^3$. Нетрудно убедиться в том, что в равновесии энергия плазмонов с $k \neq 0$ мала по сравнению с энергией ионно-звуковых волн. Действительно, из выражения (32) в этом случае следует, что температура волн по порядку величины равна

$$T \sim \left[\varepsilon W_0 (\hbar c_s)^3\right]^{1/4}, \qquad (33)$$

а энергия плазмонов с $k > 0$ пропорциональна $\hbar^{3/8}$ и в классическом пределе обращается в нуль. Равновесная плотность числа ленгмюровских квантов с $k > 0$, равная

$$N(k>0) = \int \frac{1}{e^{\frac{\hbar\beta k^2+\nu}{T}}-1} \cdot \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \sim \left(\frac{T}{\hbar\beta}\right)^{3/2} e^{-\frac{\nu}{T}}, \qquad (34)$$

оказывается пренебрежимо малой по сравнению с исходной (см. выражение (29)). Таким образом, все ленгмюровские волны переходят в низшее энергетическое состояние с $k = 0$, образуя конденсат, и лишь малая доля исходной энергии ($\sim \varepsilon W_0$) передается ионно-звуковым волнам.

В заключение отметим, что возможность самоускоряющейся перекачки энергии в коротковолновую область спектра за счет распадных процессов кажется вполне естественной, если учесть, что все рассмотренные нами волны имеют гидродинамическую природу. В исходных динамических (не усредненных по фазам) уравнениях такая перекачка должна проявляться как укручение профиля волны вплоть до образования разрывов.

Авторы благодарны Д.Д.Рютову за внимание к работе.

Л и т е р а т у р а

I. Цытович В.Н. Нелинейные эффекты в плазме. – М., "Наука", I967.

2. Ахиезер А.И., Ахиезер И.А., Половин Р.В., Ситенко А.Г., Степанов К.Н.
Электродинамика плазмы. – М., "Наука", I974, стр.506.

3. Захаров В.Е., Филоненко Н.Н. Слабая турбулентность капиллярных волн. – ПМТФ, № 5, с.62, I967.

4. Лифшиц М.А., Цытович В.Н. О спектрах турбулентности геликонов в бесстолкновительной плазме. – ЖЭТФ, 62, с.606, I972.

5. Пустовалов В.В., Силин В.П. Нелинейная теория взаимодействия волн в плазме. – Труды ФИАН им. П.Н.Лебедева, т.6I, с.42, I972.

Б.Н.Брейзман, Ю.М.Розенраух

"ВЗРЫВНАЯ " ДИНАМИКА СПЕКТРА ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПРИ РАСПАДНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН

Препринт
№ 83-8

Работа поступила 14 декабря 1982г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати 24.I-1983 г. МН 03024
Формат бумаги 60x90 I/16 Усл.0,8 печ.л., 0,6 учетно-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 8.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90