

Р. 64



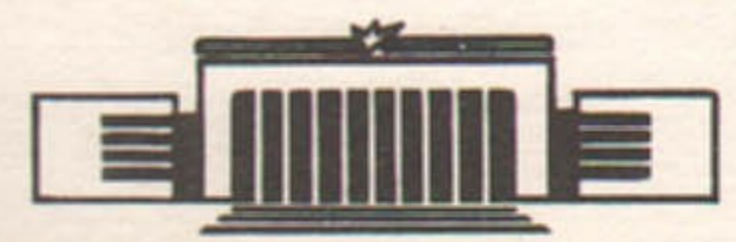
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

Ю.М.Розенраух

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПАДНОГО
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КАПИЛЯРНЫХ ВОЛН

ПРЕПРИНТ 84-47

БИБЛИОТЕКА
Института ядерной
физики СО РАН
ИНВ. № _____



НОВОСИБИРСК

†

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПАДНОГО
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН

Д.М.Розенраух

А Н Н О Т А Ц И Я

Получены численные решения задачи об эволюции спектра турбулентности капиллярных волн на поверхности жидкости за счет распадного взаимодействия. Показано, что энергия начального распределения волн перекачивается в коротковолновую область. В области больших частот полученное решение соответствует найденной ранее аналитически асимптотике. При наличии источника волн в длинноволновой области и поглощения в коротковолновой в "инерционном" интервале устанавливается стационарный спектр колмогоровского типа.

NUMERICAL SIMULATION OF THE CAPILLARY
WAVES DECAY INTERACTION

Yu. M. Rozenraukh

ABSTRACT

A numerical solution of the problem of capillary waves turbulent spectrum evolution due to decay interaction is presented. The energy of initial spectrum is shown to be transferred to the short-wavelength region. In this region the numerical solution corresponds to the analytically obtained asymptote. A stationary Kolmogorov-like distribution is established over an "inertial" interval in presence of wave excitation and damping in long- and short-wavelength parts of spectrum respectively.

Во многих практически интересных задачах теории слабой турбулентности главными нелинейными процессами являются распады и слияния волн. Распадное взаимодействие определяет, например, поведение спектров электронных колебаний в магнитоактивной плазме: геликонов, циклотронных волн и косых ленгмюровских колебаний. Важным вопросом динамики спектра турбулентности является вопрос о перераспределении энергии по масштабам турбулентности и, в частности, о направлении спектральной перекачки. Направление спектральной перекачки может быть найдено из общих свойств распадного взаимодействия. Динамика же спектра определяется конкретным видом вероятности взаимодействия и в каждом случае требует решения соответствующего кинетического уравнения. Решение этой задачи для волн в магнитоактивной плазме осложняется тем, что законы дисперсии и вероятности распадов этих волн являются анизотропными. Имеется, однако, простой физический пример, позволяющий подробно проследить за динамикой спектра при распадном взаимодействии: это капиллярные волны на поверхности жидкости. Частота и вероятность распада этих волн задаются следующими выражениями / 1 /:

$$\omega(k) = \sqrt{\alpha k^3}, \quad (1)$$

$$W(k, k_1, k_2) = \frac{\pi^5}{2} \alpha^{1/2} (k \cdot k_1 \cdot k_2)^{1/2} \left\{ \frac{(k-k_1)^2}{k_2^{1/2}} + \frac{(k-k_2)^2}{k_1^{1/2}} - \frac{(k_1-k_2)^2}{k^{1/2}} \right\}^2 \quad (2)$$

Здесь k , k_1 , k_2 - модули соответствующих волновых векторов, а α - отношение коэффициента поверхностного натяжения к плотности жидкости. Изотропия закона дисперсии и вероятности распада позволяет свести задачу к одномерной. Однако и в этом случае точного аналитического решения задачи с начальными условиями получить не удастся.

В настоящей работе численно решается задача об эволюции начального распределения капиллярных волн за счет распадного взаимодействия. Целью работы было выяснить направление спектральной перекачки, проследить, каким образом осуществляется перекачка энергии в область диссипации в коротковолновой части спектра, а также получить стационарное распределение волн при

наличии накачки в длинноволновой части спектра.

I.

Поведение спектра турбулентности капиллярных волн описывается кинетическим уравнением для спектральной функции

$n_{\omega}(\omega)$. Предполагая спектр изотропным, можно проинтегрировать кинетическое уравнение по углу и перейти от переменной κ к переменной ω , после чего это уравнение примет следующий вид:

$$\frac{\partial n_{\omega}}{\partial t} = \int W(\omega, \omega_1, \omega_2) \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) (n_{\omega_1} n_{\omega_2} - n_{\omega} n_{\omega_1 - \omega_2}) (\omega, \omega_2)^{4/3} d\omega_1 d\omega_2 +$$

$$+ 2 \int W(\omega, \omega_1, \omega_2) \delta(\omega_1 - \omega - \omega_2) (n_{\omega_1} n_{\omega_2} + n_{\omega} n_{\omega_1 - \omega_2}) (\omega, \omega_2)^{4/3} d\omega_1 d\omega_2$$

Здесь

$$W(\omega, \omega_1, \omega_2) = \frac{w(\omega, \omega_1, \omega_2)}{\sqrt{4(\omega, \omega_2)^{4/3} - (\omega - \omega_1 - \omega_2)^{4/3}}};$$

$$w(\omega, \omega_1, \omega_2) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \frac{(\omega \omega_1 \omega_2)^{1/3}}{\alpha^{7/6}} \left\{ \frac{(\omega - \omega_1)^{4/3}}{\omega_2^{1/3}} + \frac{(\omega - \omega_2)^{4/3}}{\omega_1^{1/3}} - \frac{(\omega_1 - \omega_2)^{4/3}}{\omega^{1/3}} \right\}^2.$$

Численное интегрирование уравнения (3) осуществляется в конечном интервале частот $0 < \omega \leq \omega_f$. Мы будем предполагать, что в области $\omega > \omega_f$ действует бесконечно сильное затухание, так что спектр в этой области равен нулю:

$$n(\omega) \Big|_{\omega > \omega_f} = 0. \quad (4)$$

Перейдя в уравнении (3) к безразмерным переменным и проинтегрировав его по ω_2 , с учетом граничного условия (4) получим:

$$\frac{\partial n(\omega)}{\partial \tau} = \int_0^{\omega} W(\omega; \omega_1; \omega - \omega_1) (n_{\omega_1} n_{\omega - \omega_1} - n_{\omega} n_{\omega_1 - \omega_1}) (\omega - \omega_1)^{1/3} \omega_1^{1/3} d\omega_1 +$$

$$+ 2 \int_{\omega}^{\omega_f} W(\omega, \omega_1, \omega_1 - \omega) (n_{\omega_1} n_{\omega_1 - \omega} + n_{\omega} n_{\omega_1 - \omega_1}) (\omega_1 - \omega)^{1/3} \omega_1^{1/3} d\omega_1 -$$

$$- 2 \int_0^{\omega} W(\omega, \omega_f, \omega, \omega_f - \omega) n_{\omega} n_{\omega_f - \omega} (\omega, \omega_f)^{1/3} (\omega_f - \omega)^{1/3} d\omega. \quad (5)$$

Уравнение (5) решалось на ЭВМ в интервале частот $0 < \omega \leq 200$, число узлов сетки определялось возможностями машины и равнялось 200. На рис. I представлены результаты численного решения уравнения (5) с начальным условием

$$n(\omega; 0) = \begin{cases} 0,01; & 0 < \omega \leq 10 \\ 0,01 \cdot \exp\left[-\frac{(\omega - 10)^2}{6}\right]; & 10 \leq \omega \leq 32 \\ 0; & \omega > 32 \end{cases}$$

Полная энергия в исходном спектре равна

$$E_0 = \int_0^{\omega_f} \omega^{4/3} n(\omega) d\omega = 2,63.$$

Определим характерный масштаб спектра, содержащий основную долю его энергии, соотношением:

$$\omega_0 = \frac{E_0}{\int_0^{\omega_f} n(\omega) \omega^{1/3} d\omega}.$$

(Выражение, стоящее в знаменателе, есть полное число волн в спектре). Характерное время изменения энергосодержащей части спектра τ_0 оценочно равно

$$\tau_0 \sim \frac{1}{E_0 \omega_0} \sim 0,04.$$

На рис. I отчетливо прослеживается тенденция к распространению спектра в область больших частот. Энергия волн к моменту

$\tau = 0,03$ остается равной исходному значению (рис. 2), поскольку к этому времени лишь малая доля исходного числа волн достигает области поглощения. В дальнейшем, к моменту $\tau = 0,06$ в интервале частот $36 \leq \omega \leq 96$ формируется распределение вида

$$n(\omega) \propto \frac{1}{\omega^\beta}; \quad \beta = 2,83 \times (1 \pm 0,02),$$

а энергия волн начинает уменьшаться. С течением времени область частот, в которой распределение волн близко к степенному, увеличивается, и к моменту $\tau = 0,45$ это распределение занимает диапазон частот $20 \leq \omega \leq 120$. Однако значение функции

$$\beta(\omega; \tau) = - \frac{d(\ln n(\omega))}{d(\ln \omega)} \quad (6)$$

в этом диапазоне отличается от 2.83 и, слабо изменяясь с увеличением частоты, нарастает от 2.66 до 2.85 (заметим, что в других областях частотного интервала функция $\beta(\omega; \tau)$ значительно сильнее изменяется с изменением частоты). Такое поведение спектра соответствует изложенной в работе / 2 / картине эволюции начального распределения волн. Как отмечалось в этой работе, в процессе эволюции из начального спектра вытягивается "хвост", имеющий двухмасштабную структуру. В области, примыкающей к энергосодержащей части, формируется спектр с постоянным по частоте потоком энергии $P / I /$

$$n(\omega) = \frac{P^{1/2}}{\omega^{11/6}} \quad (7)$$

В области более высоких частот спектр (7) переходит в круто спадающее с ростом частоты распределение, вид которого зависит от начальных условий. При этом закон движения коротковолновой границы распределения (7) $\omega_*(\tau)$ не чувствителен к конкретному виду спектра в области $\omega \gg \omega_*(\tau)$ и определяется потоком энергии из основной ($\omega \sim \omega_*$) части спектра.

Полученные в численном решении значения функции $\beta(\omega, \tau)$ отличаются от константы $\beta = 2.83$, соответствующей спектру (7). Это отличие обусловлено тем, что в процессе счета энергия исходного распределения уменьшается более чем в 4 раза, что приводит к уменьшению во времени потока энергии в коротковолновую область. Нетрудно оценить поправку к логарифмической производной $\Delta \beta(\omega; \tau)$, связанную с зависимостью потока от времени. Подставляя в кинетическое уравнение (5) решение в виде

$$n(\omega; \tau) = \frac{P^{1/2}(\tau)}{\omega^{11/6}} [1 + f(\omega; \tau)]; \quad f(\omega, \tau) \ll 1, \quad (8)$$

и удерживая в левой части (5) производную по времени от потока, находим, что поправка к спектру (7) по порядку величины равна

$$f(\omega; \tau) \sim \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^{10/3} \frac{d}{d\tau} (\ln P). \quad (9)$$

Учитывая, что

$$P(\tau) = - \frac{dE}{d\tau},$$

для искомой поправки $\Delta \beta(\omega; \tau)$ получаем следующее выражение:

$$\Delta \beta(\omega; \tau) \approx - \frac{10}{3} \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^{10/3} \frac{d}{d\tau} \left(\ln \frac{dE}{d\tau}\right). \quad (10)$$

Определив из результатов численного счета величину

$$\left. \frac{d}{d\tau} \left(\ln \frac{dE}{d\tau}\right) \right|_{\tau=0,45} \approx 4, \quad \text{получаем, что в указанном диа-}$$

пазоне частот $\Delta \beta$ уменьшается с увеличением частоты от 0,2 до 10^{-3} , а функция $\beta(\omega, \tau)$ нарастает от 2.63 до

2.83. Этот результат согласуется с приведенными выше значениями.

Полученное численное решение показывает, что энергия исходного спектра перекачивается в коротковолновую область. При этом в "инерционном" интервале формируется распределение (8) с уменьшающимся во времени потоком энергии.

П.

В дополнение к выводу о перекачке энергии в коротковолновую область спектра представляет интерес выяснить, каким образом в "инерционном" интервале устанавливается распределение (8). Для этого следует более детально изучить раннюю стадию эволюции исходного спектра, увеличив интервал между ω_0 и ω_f . Поэтому в последующих вариантах начальное распределение волн выбиралось достаточно узким, сосредоточенным в низкочастотной области:

$$n(\omega; 0) = \begin{cases} 0,1 & 0 \leq \omega \leq 4 \\ 0,1 \cdot \exp[-(\omega-4)^2] & 4 \leq \omega \leq 8 \\ 0 & \omega > 8 \end{cases}$$

Энергия волн в этом спектре $E_0 = 1,75$, а характерное время его изменения $\tau_0 \sim 0,15$. На рис. 3 представлена зависимость функции $\beta(\omega; \tau)$, определенной равенством (6), от частоты в различные моменты времени. Из рисунка видно, что на ранней стадии ($\tau < \tau_0$) в широком диапазоне частот эта зависимость является линейной

$$\beta(\omega; \tau) = 2,3 + A\omega,$$

а к моменту времени $\tau = 0,36$ в диапазоне $20 \leq \omega \leq 100$ функция $\beta(\omega; \tau)$ принимает значение $\beta = 2,83 (1 \pm 0,01)$, соответствующее спектру (7). Изменение энергии к этому моменту составляет менее 8%. В работе / 2 / было отмечено существование у уравнения (3) убывающих асимптотических решений "взрывного" типа:

$$n(\omega, \tau) \propto \frac{1}{\omega^{10/3} (t_0 - \tau)}; \quad (II)$$

$$n(\omega; \tau) \propto \frac{(t_0 - \tau)^{\alpha-1} \exp[-c\omega(t_0 - \tau)^\alpha]}{\omega^{7/3}} \quad (I2)$$

$$\alpha > 0; \quad 0 < \tau < t_0; \quad c\omega(t_0 - \tau)^\alpha \gg 1.$$

Здесь константы c , t_0 и α определяются конкретным видом начального распределения. Степенная асимптотика (II) допускает сшивку со спектром (7). Решение (I2) также может быть сшито со спектром (7), при этом индекс автомодельности α равен двум. Соответствующая асимптотике (I2) функция $\beta(\omega; \tau)$ является линейной функцией частоты, а величина

$$B(\omega; \tau) = \frac{\beta(\omega; \tau) - 7/5}{\omega} = c(t_0 - \tau)^\alpha \quad (I3)$$

от частоты не зависит. На рис. 4 представлена зависимость функции $B(\omega; \tau)$ в разные моменты времени, построенная по результатам численного счета. Анализ численного решения показывает, что при $\tau \leq 0,12$ величина $B(\omega; \tau)$ в широком интервале частот не зависит от частоты, что указывает на реализацию в этом интервале решения типа (I2). На рис. 4 область частот, в которой изменение функции $B(\omega; \tau)$ не превышает $\pm 1\%$, отмечена вертикальными черточками. С течением времени эта область, как видно, сокращается. Это сокращение происходит по двум причинам. Во-первых, потому, что с течением времени граница применимости асимптотического решения (I2) смещается в сторону больших частот, и, во-вторых, вследствие того, что с проникновением спектра в область больших частот начинает сказываться ограниченность счетного интервала. Из изложенного следует, что зависимость численного решения от частоты с хорошей точностью соответствует авто-

модельной асимптотике (I2). Однако вследствие того, что счетный интервал недостаточно широк, проследить за временной зависимостью асимптотики (I2) и с определенностью указать индекс автомодельности α не удастся. Отметим, впрочем, что подстановка $\alpha = 2$ в соотношение (I3) не противоречит результатам численного счета. Что же касается спектра (II), то ответить на вопрос о его реализации в коротковолновой области путем численного решения уравнения (5) не удалось. Асимптотика (II) может появляться лишь для достаточно плавного (степенным образом) убывающего с увеличением частоты начального распределения волн. Однако в этом случае даже на ранней стадии эволюции спектра влияние ограниченности счетного интервала оказывается весьма существенным. Чтобы выяснить вопрос о реализации асимптотики (II), следует значительно (в десятки раз) увеличить счетный интервал, что в настоящее время не представляется возможным.

III.

Численное интегрирование уравнения (5) позволяет решить задачу об установлении стационарного спектра волн при наличии накачки в низкочастотной области и затухания в области высоких частот. Аналогичная задача для системы нелинейных осцилляторов с модельным взаимодействием решалась ранее в работах / 3, 4 /. В этих работах было численно получено стационарное распределение колмогоровского типа. Для капиллярных волн таким стационарным распределением является спектр (7) с независимым от времени потоком энергии / I /. При решении кинетического уравнения (5) в правую часть его был добавлен источник, описывающий возбуждение волн в области низких частот и имеющий следующий вид:

$$Q = \begin{cases} 0,1 \cdot \exp [-(\omega-4)^2]; & \omega \leq 8 \\ 0; & \omega > 8 \end{cases} \quad (I4)$$

Результаты численного интегрирования уравнения (5) с источником (I4) приведены на рис. 5 и 6. На начальной стадии счета функция $n(\omega; \tau)$ быстро нарастает, а энергия в спектре

увеличивается пропорционально времени. Однако к моменту $\tau \approx 2,0$ рост функции $n(\omega; \tau)$ прекращается и в интервале $20 \leq \omega \leq 116$ устанавливается стационарное распределение степенного вида:

$$n(\omega) \approx \frac{1}{\omega^\beta}; \quad \beta = 2,83 \cdot (1 \pm 0,02). \quad (I5)$$

Увеличение энергии в спектре к этому времени прекращается, и дальнейшее изменение энергии, связанное с медленным изменением спектра в самой низкочастотной области, составляет менее 3%. В области $\omega > 116$ спектр убывает быстрее, чем степенным образом, поскольку в этой области влияние затухания волн на границе счетного интервала оказывается весьма существенным. Приведенные результаты показывают, что в "инерционном" интервале устанавливается стационарное распределение волн колмогоровского типа.

Таким образом, численное решение кинетического уравнения для капиллярных волн подтверждает сформулированный в работе / 2 / вывод о том, что значительная доля энергии исходного спектра перекачивается в коротковолновую область за время, по порядку величины равное времени взаимодействия волн в исходном спектре. Установление в "инерционном" интервале спектра (7) при выбранных нами начальных условиях имеет автомодельный характер и соответствует асимптотике (I2). При наличии возбуждения волн в длинноволновой области численное решение уравнения (5) выходит на стационар, причем в широком диапазоне частот стационарное решение имеет вид степенного спектра с постоянным потоком энергии.

Автор выражает благодарность Б.Н.Брейзману и М.С. Пеккеру за многочисленные обсуждения в ходе выполнения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Е.Захаров, Н.Н.Филоненко. Слабая турбулентность капиллярных волн. - ПМТФ, № 5, с. 62, 1967.
2. Б.Н.Брейзман, Д.М.Розенраух. "Взрывная" динамика спектра турбулентности при распадном взаимодействии волн. - ЖЭТФ, 86, № 2, 1984, с. 462.
3. В.Е.Захаров, М.С.Мушер. О колмогоровском спектре в системе нелинейных осцилляторов. - ДАН, 209, № 5, с. 1063, 1973.
4. S. L. Musher. The development of the Kolmogorov spectrum setting in a system of nonlinear oscillators. - Phys. Letters, v. 70A, No 5, 6, p. 361, 1979.

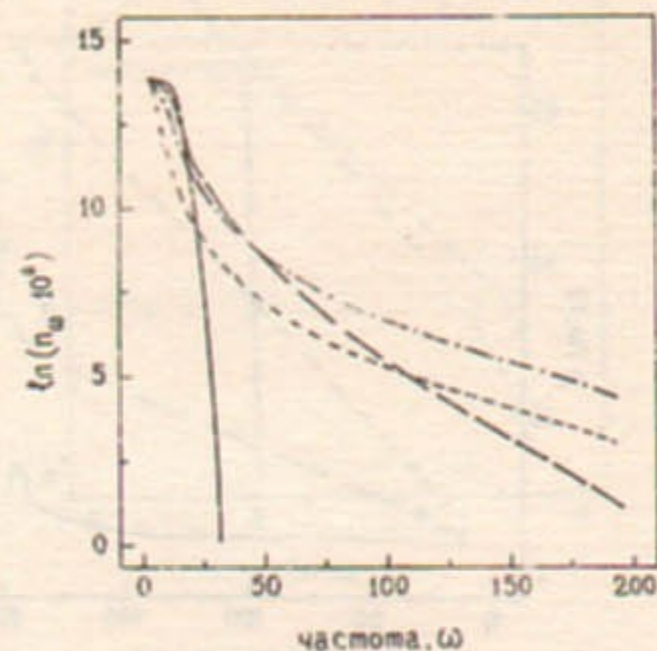


Рис. 1. Временная эволюция начального распределения волн. Сплошной линией показан исходный спектр, пунктирными - спектр в различные моменты времени:
 ———— $\tau = 0,026$; — · — · — $\tau = 0,09$;
 ······ $\tau = 0,57$.

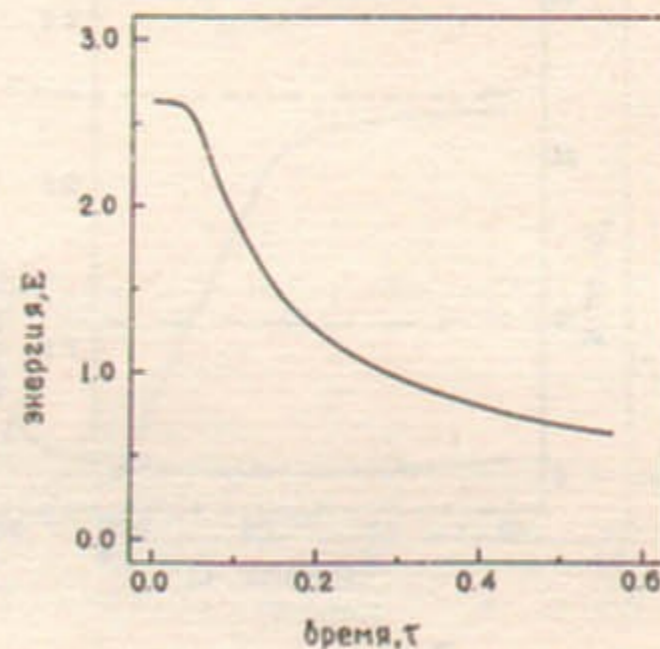


Рис. 2. Изменение энергии волн со временем при эволюции начального спектра.

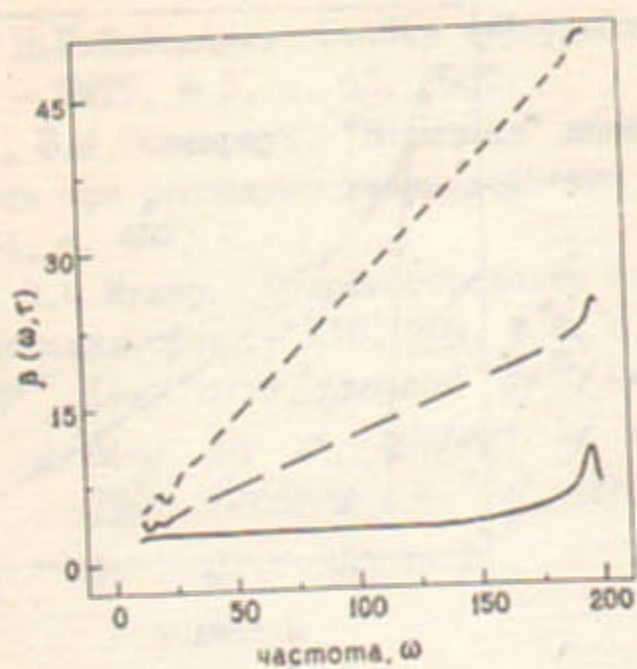


Рис. 3. Зависимость функции $\beta(\omega, \tau)$ от частоты в различные моменты времени: — — — — $\tau = 0,05$;
— · — · — $\tau = 0,11$; — — — — $\tau = 0,36$.

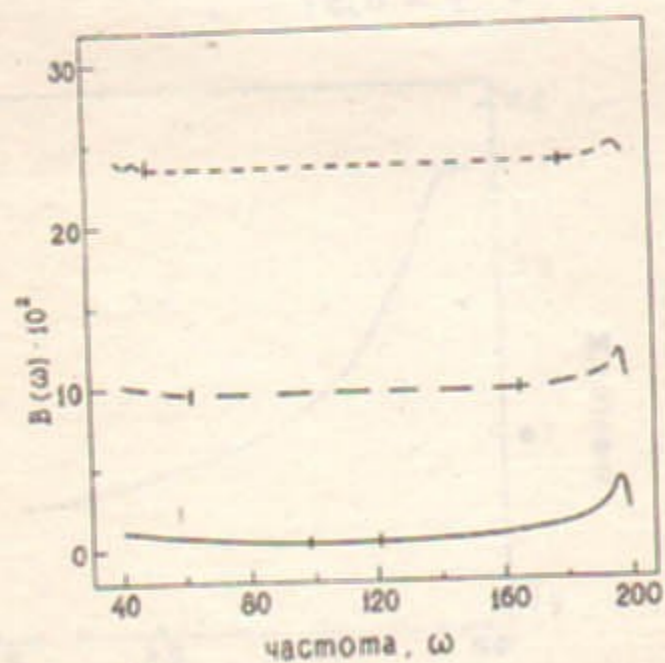


Рис. 4. Функция $B(\omega)$, построенная по результатам численного решения уравнения (5), в различные моменты времени: — — — — $\tau = 0,05$; — · — · — $\tau = 0,11$;
— — — — $\tau = 0,36$.

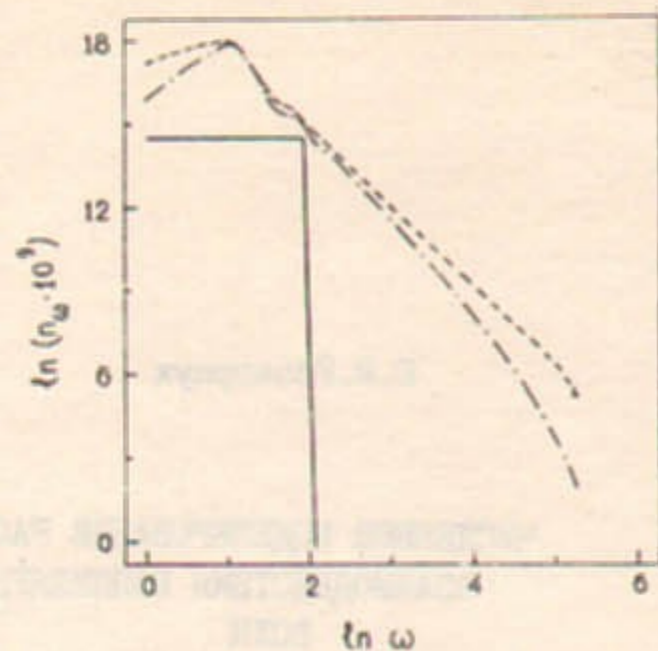


Рис. 5. Результат численного решения уравнения (5) с источником волн (14). Показано распределение волн по частоте в различные моменты времени:
— — — — — исходный спектр; — · — · — — $\tau = 1,0$;
— — — — — $\tau = 3,21$.

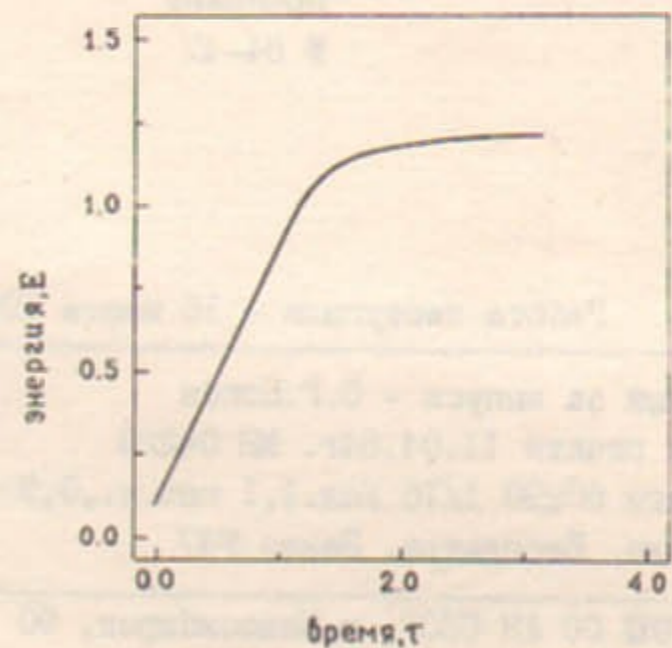


Рис. 6. Зависимость энергии волн от времени при установлении стационарного спектра (15).