

У. 39

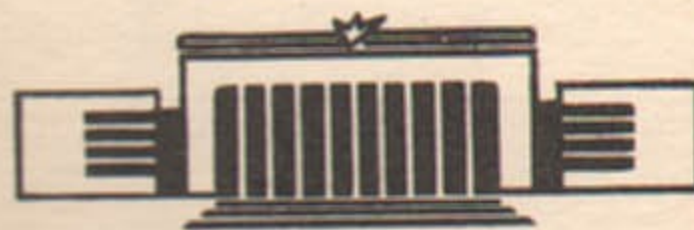
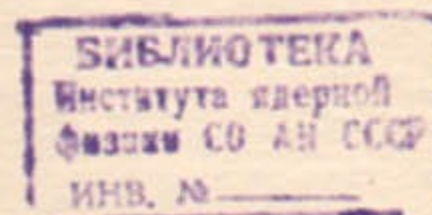


ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

Ф.М.Израйлев

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ
УРОВНЯМИ КВАЗИЭНЕРГИЙ ДЛЯ
КВАНТОВЫХ СИСТЕМ, СТОХАСТИЧЕСКИХ
В КЛАССИЧЕСКОМ ПРЕДЕЛЕ

ПРЕПРИНТ 84-63



НОВОСИБИРСК

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ УРОВНЯМИ КВАЗИЭНЕРГИЙ
ДЛЯ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ, СТОХАСТИЧЕСКИХ В КЛАССИЧЕСКОМ
ПРЕДЕЛЕ

Ф.М.Израйлев

Институт ядерной физики
630090, Новосибирск, СССР

Аннотация

Рассматривается вопрос о степени соответствия классического и квантового описания стохастического типа движения нелинейных систем с периодическим возмущением. Для конкретной модели плоского ротатора, находящегося во внешнем импульсном поле, численно исследуется спектр квазиэнергий. Показывается, что максимальным статистическим свойствам соответствует закон Вигнера-Дайсона для распределения расстояний между соседними уровнями квазиэнергии с квадратичным законом расталкивания близких уровней.

I. Введение

В последнее время проявляется большой интерес к исследованию квантовых систем, которые в классическом пределе обнаруживают стохастическое поведение (см., например, /1-3/). В целом, основные статистические свойства стохастичности в динамических (без случайных параметров) системах классической механики уже достаточно хорошо изучены, и возникает естественный вопрос о квантово-механическом описании стохастического типа движения. Впервые этот вопрос был затронут в работе /4/, в которой было указано на принципиальные трудности, возникающие при квантовании систем, не имеющих полного набора интегралов движения. Основное отличие между классическим и квантовым описанием, как было отмечено еще в /5/, состоит в том, что для автономной системы с финитным движением спектр собственных значений оператора Шредингера всегда дискретный. Это означает почти периодическую (регулярную) эволюцию движения системы. В то же время в классической системе стохастическому поведению соответствует сплошной или непрерывный спектр (для траектории или для функции распределения как решения уравнения Лиувилля). Это отличие является принципиальным и фактически означает, что, по крайней мере для таких систем, в квантовой механике стохастичность, строго говоря, невозможна. Тем не менее, в области глубокой квазиклассики ($\hbar \rightarrow 0$) должно иметь место соответствие между поведением классической и квантовой системы. Тем самым возникает основной вопрос о степени соответствия классического и квантового описания. В частности, важно выяснить, какими характеристиками описываются статистические свойства квантовых систем.

В работах /6-7/ было показано, что стохастическому движению классической системы можно сопоставить нерегулярность спектра соответствующей квантовой системы. В настоящее время для количественного описания используются разные статистические тесты (см., например, /8/), однако наиболее распространенной характеристикой является так называемое распределение $P(s)$ расстояний между соседними уровнями энергии в спектре системы. Зависимость $P(s)$ является основной характеристикой в теории Вигнера-Дайсона /9-10/ при статистическом описании сложных квантовых

систем, таких, например, как тяжелые ядра и атомы. В основе этой теории фактически лежат два постулата – во-первых, сама возможность такого описания, а во-вторых, эквивалентность статистических свойств спектра рассматриваемой системы статистическим свойствам собственных значений ансамбля унитарных случайных матриц определенной симметрии. В простейшей форме зависимость $P(s)$ имеет вид /10/:

$$P(s) = A s^\beta e^{-\beta s^2} \quad (1)$$

где A и B – некоторые нормировочные константы, а β – параметр, определяющий степень расталкивания близких уровней (при $s \rightarrow 0$). Эффект расталкивания близких уровней, в частности, обсуждавшийся еще в работе /11/, является довольно типичным для квантовых систем, стохастических в классическом пределе (подробнее см., например, /2,12/). В обратном предельном случае, т.е. для интегрируемых систем, распределение $P(s)$, как правило, хорошо описывается пуассоновским законом /13/:

$$P(s) \sim e^{-\beta s} \quad (2)$$

В работах /14–15,10/ было показано, что зависимость (1) является упрощенной, однако, более точное выражение, полученное численным путем, отличается от (1) примерно на 1%. Поэтому для практических целей удобно использовать формулу (1). Значение параметра β , как было показано в /10/, связано с симметрией унитарных матриц, соответствующих исходной системе. Например, физическим системам, инвариантным относительно обращения времени и пространственных вращений, соответствует ансамбль симметричных унитарных матриц (ортогональный ансамбль). В этом случае $\beta = 1$ с линейным законом расталкивания. Зависимость (1) с $\beta = 1$ хорошо подтверждается экспериментально в тяжелых ядрах /16/ и хуже воспроизводится в сложных атомах /17/, где, по-видимому, статистические свойства не являются предельными. Имеются также численные эксперименты с простыми квантовыми системами (см., например, литературу в /2,3,12/). Однако, подтверждая факт расталкивания, результаты, из-за небольшой статистики, как правило, не дают однозначного ответа о форме зависимости $P(s)$. Исключение составляет недавняя работа /18/

с достаточно хорошей статистикой (≈ 1700 уровней), в которой совпадение с $P(s)$ для $\beta = 1$ удовлетворяет критерию согласия χ^2 .

До сих пор не имеется ни экспериментальных, ни численных результатов для систем, имеющих распределение (1) с $\beta = 2$. Этому случаю, как указано в /10/, могут соответствовать физические системы, не обладающие инвариантностью по отношению к изменению знака времени. К таким системам относится, например, атом водорода в магнитном поле. Согласно /10/ такого типа системы описываются ансамблем унитарных матриц, не обладающих симметрией (унитарный ансамбль). В настоящей работе показывается, что такое распределение $P(s)$ с $\beta = 2$ естественным образом возникает для систем с периодически зависящим от времени потенциалом с той лишь разницей, что под s понимается расстояние между соседними уровнями квазиэнергии, сведенными в одну зону.

2. Плоский ротор в периодическом импульсном поле, классическое и квантовое описание

Наиболее полно исследованной к настоящему времени системой является модель плоского ротора в периодическом импульсном поле /1,19–20/:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2J} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \tilde{k} \cos \theta \cdot \delta_{\tilde{T}}(t) \quad (3)$$

Здесь J – момент инерции, θ – угловая переменная, \tilde{k} – параметр нелинейного возмущения, $\delta_{\tilde{T}}(t)$ – периодическая по времени дельта-функция с периодом \tilde{T} . Для удобства далее используются безразмерные переменные $\gamma = 1$; $k = \tilde{k}/\hbar$; $T = \hbar \tilde{T}$; $\hbar = 1$. Соответствующая классическая система описывается хорошо известным "стандартным отображением" /21/:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + k \sin \theta_n \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + T p_{n+1} \end{aligned} \quad (4)$$

где переменные p_{n+1} и θ_{n+1} в момент времени $t_{n+1} = t_n + T$ определяются через p_n, θ_n на предыдущем "шаге" t_n . Из (4) видно, что движение зависит фактически от одного параметра

$\mathcal{K} = kT$ и начальных условий ρ_0, θ_0 . Поведение системы (4) исследовано достаточно подробно как аналитически, так и численно (см., например, /21-24/). Известно, что при малых значениях $\mathcal{K} \leq 1$ траектория в фазовом пространстве системы, представляющая собой бесконечный цилиндр в силу периодичности по фазе θ , ограничена по действию ρ , в то время, как при $\mathcal{K} \gg 1$ движение системы является стохастическим с неограниченным возрастанием $\rho(t)$. Критическое значение $\mathcal{K}_{cr} \approx 1$ определяется разрушением всех инвариантных кривых, ограничивающих движение по ρ /22,25/ и может быть получено из простых оценок по перекрытию нелинейных резонансов /21/. Численные эксперименты с моделью (4) показали, что практически уже при $\mathcal{K} \approx 5$ область устойчивых областей в фазовом пространстве, внутри которых движение периодическое, настолько мала, что в целом при описании системы ими можно пренебречь. В остальной области фазового пространства, т.е. для "почти всех" начальных данных ρ_0, θ_0 поведение системы обладает основными статистическими свойствами. В частности, имеется локальная неустойчивость движения с положительной динамической энтропией (см., например, обзоры /21,26/), благодаря чему возникает быстрое перемешивание по фазе θ и диффузия по действию ρ . Поэтому энергия локализованного вначале пучка траекторий растет по диффузионному закону

$$E(t) = \frac{\langle p^2 \rangle}{2} = \frac{k^2}{4} t + E(0) \quad (5)$$

где дискретное время t измеряется в единицах T , а $E(0)$ — начальная энергия. Соответственно, функция распределения по действию имеет гауссовский вид:

$$f(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\pi k^2 t}} e^{-\frac{\rho^2}{k^2 t}} \quad (6)$$

Поскольку система (3) является неавтономной, собственные состояния не обладают фиксированной энергией, однако в силу периодичности возмущения по времени можно говорить о спектре квазиэнергий /27/. Собственно, именно это отличие от автономных систем и послужило основной причиной подробного исследования поведения системы (3), так как спектр квазиэнергий может

быть, в принципе, и непрерывным.

Численное исследование квантовой модели (3) сводится к последовательным итерациям отображения (см. /1,19-20/):

$$A_n(t+T) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_{nm} A_m(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^{n-m} e^{-i\frac{T}{2}m^2} J_{n-m}(k) A_m(t) \quad (7)$$

для фурье-компонент волновой функции $\Psi(\theta, t)$:

$$A_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \Psi(\theta, t) e^{-in\theta} d\theta \quad (8)$$

где $J_{n-m}(k)$ — функция Бесселя. Из (8) следует, что в отличие от классической модели поведение теперь зависит от двух параметров k и T в отдельности. Соответственно, в дополнение к классическому условию $\mathcal{K} \gg 1$ глобальной (по ρ) неустойчивости, появляется чисто квантовое условие $k \gg 1$, поскольку число уровней, захватываемое каждым толчком, пропорционально k и мало при малых значениях k . Численные эксперименты /19/ подтвердили, что при $\mathcal{K} \leq 1$ или при малых $k \leq 1$ движение системы является квазипериодическим (см. также /28/).

Совсем иная картина наблюдается при больших $k \gg 1$ и выполнении классического условия стохастичности $\mathcal{K} > 1$. Многочисленные данные (в основном, для $k = 10, 20, 40$ и $\mathcal{K} = 5$) показывают, что диффузионный рост энергии квантовой системы описывается зависимостью (5) лишь в течение некоторого конечного интервала времени t^* , зависящего от k . Для $t > t^*$ рост энергии замедляется, а затем практически прекращается. Такое поведение является типичным и практически не зависит от начального состояния системы $A_n(0)$ (см. подробнее /19,1/). Дальнейший анализ показал /1,20/, что время t^* растет примерно как $t^* \sim k^2$. Поэтому, хотя в классическом пределе ($k \rightarrow \infty$ и $T \rightarrow 0$ при $kT = \text{const}$) и имеется предельный переход, тем не менее при любом конечном $k \gg 1$ соответствие в поведении $E(t)$ с течением времени нарушается очень сильно.

Однако кроме t^* имеется еще одно характерное время $t_d \ll t^*$ соответствующее времени расплывания волнового пакета по фазе θ . Это время оказывается очень малым $t_d \sim \frac{1}{k} \ln \frac{\rho}{k}$, т.е. растет лишь как логарифм квантового числа $n = \rho/k$. Для численных экспериментов с моделью (3) это время составляет все-

го один-два толчка. Строго говоря, именно на временах $t \leq t_d$ согласно принципу соответствия следует ожидать полную адекватность квантового и классического описания. Действительно, в работах /29-30/ было показано, что квантовые поправки для стохастического движения нарастают, вообще говоря, экспоненциально быстро. Это приводит, в частности, к прекращению убывания корреляций на временах $t \geq t_d$ а, следовательно, и к ухудшению статистических свойств. В итоге оказывается, что совпадение зависимости $E(t)$ для квантовой модели с классическим выражением (5) в интервале $t_d < t < t^*$ является ничем иным, как лишь хорошей имитацией диффузионного процесса в системе с большим числом "степеней свободы" A_m . Такой вывод подтверждается дополнительными численными экспериментами /20/ с обращением времени $t \rightarrow -t$ после достаточно большого времени эволюции $t_d \gg t^*$, в результате чего система с огромной точностью возвращается в исходное состояние. Известно, что для стохастического движения вследствие локальной неустойчивости такой возврат в любом компьютере невозможен. В целом результаты приводят к выводу, что по всей видимости, квазиэнергетический спектр для системы (3) является дискретным, хотя время возврата с ростом k растет чрезвычайно быстро /31/.

Следует отметить, что в исследуемой системе наблюдается особый тип движения, не имеющего аналога в классической модели, так называемый квантовый резонанс (подробнее см./32/). Отличительная черта такого движения, возникающего при значениях $T = 4\pi r/q$, где r и q - целые числа (за исключением $r/q = 1/2$), состоит в том, что энергия для любого начального состояния асимптотически по времени растет пропорционально t . В этом специальном случае спектр собственных значений квазиэнергии является непрерывным /32/, хотя и не связан со стохастичностью. При больших $q \gg 1$, в течение длительного времени система ведет себя как и в общем нерезонансном случае, однако при $t \rightarrow \infty$ все равно происходит выход на асимптотический режим.

3. Аналогия с дискретной моделью неупорядоченных систем

В последнее время обнаружена связь модели (3) с некоторой другой одномерной моделью, естественным образом возникающей в теории твердого тела при описании неупорядоченных систем /33-34/. Это позволяет по-новому подойти к основному вопросу о характере и причинах отклонения квантовой диффузии от классической. Введем волновые функции с определенной квазиэнергией ϵ :

$$\Psi_{\epsilon}(\theta, t) = e^{-i\epsilon t} \varphi_{\epsilon}(\theta, t) \quad (9)$$

где периодическую функцию $\varphi_{\epsilon}(\theta, t+T) = \varphi_{\epsilon}(\theta, t)$ будем называть собственной функцией с квазиэнергией ϵ . Перейдем к новому представлению для оператора $V(\theta)$, описывающего нелинейное возмущение

$$e^{-iV(\theta)} = \frac{1+iW(\theta)}{1-iW(\theta)}; \quad V(\theta) = k \cos \theta \quad (10)$$

где $W(\theta)$ - новый эрмитовский оператор. Тогда, после несложных преобразований /33-34/ можно получить следующее уравнение:

$$\Phi_m u_m + \sum_{r \neq 0} W_r u_{m+r} = E u_m \quad (11)$$

Здесь u_m - Фурье-компонента симметризованной собственной функции квазиэнергии непосредственно перед толчком Ψ^- и после толчка Ψ^+ :

$$u(\theta) = \frac{\varphi^- + \varphi^+}{2} \quad (12)$$

а W_r - Фурье-компонента нового оператора, определяемого из (10):

$$W(\theta) = -tg \frac{V(\theta)}{2} \quad (13)$$

Видно, что W_r характеризует собой взаимодействие между элементами u_m одномерной дискретной цепочки ($E = -W_0$), в то время, как Φ_m играет роль нового диагонального потенциала,

зависящего от свободного параметра ϵ :

$$\Phi_m = \text{tg} \frac{\epsilon - \frac{Tm^2}{2}}{2} \quad (I4)$$

Уравнение типа (II) возникает при описании движения квазичастицы в твердом теле (см., например, /35/). Наиболее полно исследована модель со взаимодействием только ближайших соседей ($W_r \neq 0$, для $r = \pm 1$) в случайном эффективном потенциале Φ_m . В этом случае известно, что имеет место локализация Андерсона /36/, при которой все решения дискретного уравнения Шредингера (II) (т.е. собственные функции u_m для соответствующих собственных значений E) являются локализованными. Это приводит к тому, что любое локализованное вначале состояние хотя и "расплывается" со временем, однако остается локализованным. Поэтому, например, диффузия электрона в такой модели твердого тела будет ограниченной.

Численный анализ показывает /33/, что последовательность Φ_m обладает хорошими статистическими свойствами и может рассматриваться как случайный потенциал для иррациональных значений $T/4\pi$. Что касается недиагонального взаимодействия W_r , то из (I3) видно, что для небольших значений $k \leq 1$ взаимодействие действительно захватывает лишь несколько соседних членов. Численные эксперименты /33/ подтвердили наличие экспоненциальной локализации собственных решений уравнения (II) для малых k . Это указывает на то, что и в исходной задаче (3) собственные функции квазиэнергии также локализованы (в импульсном пространстве). Как известно, локализация всех собственных функций означает, что спектр собственных значений является дискретным (или чисто точечным). Тем самым становится более понятным механизм ограничения диффузии энергии ротатора (3), приводящий к появлению второго масштаба времени t^* (см./I,37/). Очевидно, что время t^* можно связать со степенью локализации собственных функций квазиэнергии. Из приведенного анализа также следует, что статистические свойства квантовых систем определяются не только структурой спектра, но и, в значительной степени, свойствами собственных функций. В этом смысле значение имеет теорема Шнирельмана /38/, согласно которой максимальным статистическим свойствам в автономных квантовых системах

соответствует эргодичность собственных функций (фактически, их полная делокализация).

Возвращаясь к исходной модели ротатора (3), необходимо отметить, что аналогия с дискретной цепочкой (II) строго обоснована только для $k < 1$. Действительно, из выражения (I3) с $V(\theta) = k \cos \theta$ видно, что с увеличением k взаимодействие $W_r(k)$ распространяется на всю цепочку и при $k > 1$ уравнение (II) теряет смысл. Тем не менее, такой подход, заключающийся в сведении исходной нестационарной задачи к некоторой задаче с эффективным стационарным гамильтонианом, может быть весьма плодотворным.

4. Спектр квазиэнергий и распределение расстояний между соседними уровнями

По аналогии с автономными квантовыми системами можно поставить вопрос о статистических свойствах спектра квазиэнергий. В частности, интересно выяснить, каково должно быть распределение $P(s)$ расстояний между соседними уровнями квазиэнергий. Запишем точное решение уравнения Шредингера для ротатора (3):

$$\Psi(t+T, \theta) = e^{-i\hat{H}_0 T} e^{-iV(\theta)} \Psi(t, \theta) \quad (I5)$$

где $\hat{H}_0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ и $V(\theta) = k \cos \theta$. Подставляя в (I5) выражение (9), получим уравнение для собственной функции квазиэнергии:

$$e^{i\epsilon T} \varphi_\epsilon(\theta, t) = \left\{ e^{-i\hat{H}_0 T} e^{-iV(\theta)} \right\} \varphi_\epsilon(\theta, t) \quad (I6)$$

из которого видно, что квазиэнергия ϵ определяется через собственные значения $\lambda = \exp(i\alpha)$ некоторой бесконечномерной унитарной матрицы S . В работе /32/ было показано, что для квантового резонанса ($T = 4\pi T/q$) эта матрица становится конечной с размерностью $(q \times q)$ и имеет вид:

$$S = \begin{pmatrix} \rho_0 & & & & \\ & \rho_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & \rho_{q-1} & \\ & & & & \rho_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_{q-1} \\ \gamma_{q-1} & \gamma_0 & \dots & \gamma_{q-2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_0 \end{pmatrix} \quad (I7)$$

где

$$\beta_j = e^{-ik \cos(\theta_0 + \frac{2\pi j}{q})}; \quad \gamma_n = \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} e^{-i \frac{2\pi r}{q} m^2 - i \frac{2\pi m n}{q}} \quad (18)$$

Здесь θ_0 — произвольный непрерывный параметр из интервала $0 < \theta_0 \leq 2\pi/q$. Для квантового резонанса спектр квазиэнергий является непрерывным и состоит из q дискретных компонент, каждая из которых зависит от непрерывного параметра θ_0 и порождает свою зону. При увеличении $q \rightarrow \infty$ ширина этих зон убывает экспоненциально. Каждая собственная функция квазиэнергии представляет собой в θ -пространстве частоток дельта-функций (гребенку) с периодом $2\pi/q$ и различными комплексными амплитудами для каждого δ -пика.

При переходе к интересующему нас нерезонансному случаю размер матрицы S стремится к бесконечности. Поэтому будем приближенно описывать нашу систему некоторой конечной матрицей R размером $N \times N$. Фактически это означает замену непрерывного фазового пространства дискретным с N точками на отрезке $0 < \theta \leq 2\pi$. Аналогичное приближение (конечное число невозмущенных уровней) всегда приходится использовать в численных экспериментах [1, 19–20]. Переходя в (16) от непрерывной функции $\Psi(\theta)$ к дискретной (по фазе θ), можно показать, что матрица R имеет тот же вид, что и матрица S с заменой $q \rightarrow N$ и $\frac{4\pi r}{q} \rightarrow T$, где $T/4\pi$ — иррациональное число. Параметр θ_0 в (17) для матрицы R является свободным и определяет сдвиг всей решетки дискретных точек θ_n с периодом $2\pi/N$ относительно $\theta=0$.

В итоге задача естественным образом сводится к исследованию статистических свойств некоторой унитарной матрицы R , в то время, как в теории Вигнера-Дайсона [9–10] такой переход попросту постулируется. Существенным отличием является также то, что матрица R в общем случае не является случайной и зависит от параметров задачи T и k . В принципе вместо матрицы R можно исследовать матрицу F с элементами F_{nm} (см. (7)), которая определяет собственные функции квазиэнергии в импульсном пространстве. Однако унитарность матрицы F нарушается при переходе к конечному числу уровней (конечный размер матрицы), в то время, как в θ -представлении унитарность матрицы R

сохраняется для любого конечного N .

Численное исследование состояло в нахождении собственных значений λ матрицы R при различных значениях параметров k, T и последующем построении функции $P(s)$. В качестве s берется расстояние по дуге единичной окружности между соседними собственными значениями. Точность вычислений контролировалась по отклонению модуля собственных значений λ от единицы и была достаточно высокой ($|\delta\lambda| = |\lambda| - 1 \leq 0.0001$).

На рис. 1 изображена полученная гистограмма $\bar{P}(s)$ для $N = 349$ (сплошная ломаная) и $N = 199$ (кружки). Размер ячейки по s составляет $\Delta = \frac{1}{12} D$, где $D = \frac{2\pi}{N}$ — среднее расстояние между соседними собственными значениями. Для того, чтобы была видна статистическая достоверность результатов, вместо нормированной зависимости $P(s)$ по вертикали отложено число попаданий $\bar{P}(s)$ в ту или иную ячейку с границами s и $s + \Delta$. Для улучшения статистики суммировались результаты нескольких серий (6 серий для $N = 349$ и 10 серий для $N = 199$) с различными значениями k вблизи $\langle k \rangle$ ($\Delta k = 0.1$). В итоге полное число собственных значений в гистограмме составляло $M = 2094$ для $N = 349$ и $M = 1990$ для $N = 199$. Анализ данных показывает, что серии можно считать независимыми, поскольку собственные значения матрицы оказываются чрезвычайно чувствительны к изменению параметра k . Аналогичное распределение получается при варьировании параметра θ_0 или T . Для сравнения на рис. 1 (плавная кривая) изображена зависимость $P(s) = A e^{-Bs}$ (пуассоновское распределение), в которой постоянные A и B определены через полное число собственных значений $M = 2094$ и среднее расстояние D . Вертикальная шкала соответствует численным экспериментам с $N = 349$, поэтому для $N = 199$ значения $\bar{P}(s)$ пересчитаны с $M = 1990$ на $M = 2094$. Из рисунка хорошо видно существенное отклонение от пуассоновского закона распределения, что подтверждается обработкой данных по критерию согласия χ^2 (вероятность описания распределения пуассоновским законом составляет 0,001%).

Переход от $\langle k \rangle = 5$ (рис. 1) к $\langle k \rangle = 10$ и $\langle k \rangle = 20$ (рис. 2–3) при постоянном значении $kT = X = 5$ приводит к заметному увеличению расталкивания для малых значений s . Обработка по методу наименьших квадратов для данных рис. 2 ($N = 349$) с аппроксимирующей функцией $\zeta(s) = A s^b e^{-\lambda s}$ дает значения $\beta \approx 0,7$ и $\lambda \approx 1,0$.

Из рис.3 видно, что с увеличением k расталкивание увеличивается ($\beta \approx 1,7$) и становится даже сильнее, чем это следует из линейного закона. Однако в целом распределение существенно отличается от выражения (I) как для $\beta = 1$, так и для $\beta = 2$.

Для выяснения предельного распределения были обработаны данные для $\langle k \rangle = 20000$ (рис.4). В этом случае оказывается, что численно полученная зависимость $\bar{P}(s)$ прекрасно описывается законом (I) с $\beta = 2$:

$$P(s) = A s^2 e^{-Bs^2}; \quad A = \frac{32N}{\pi^2 D^3}; \quad B = \frac{4}{\pi D^2} \quad (I9)$$

Обработка по критерию согласия χ^2 дает 80% для вероятности принятия гипотезы (I9).

Вопрос о расталкивании уровней квазиэнергии для ротатора неразрывно связан с вопросом о локализации собственных функций в импульсном пространстве. Имеется некоторая аналогия с локализацией Андерсона в случайном одномерном потенциале, которая, как было строго показано, приводит к пуассоновскому закону для расстояний между близкими уровнями (см./39/). Поэтому, в нашем случае полная локализация всех собственных функций в импульсном пространстве, казалось бы, также должна приводить к пуассоновскому закону, т.е. к отсутствию расталкивания. Этот вывод основан на некоторых простых физических соображениях (см., например, /40/) и связан с тем фактом, что расталкивание близких уровней определяется интегралом перекрытия собственных функций, который в случае локализации функций пренебрежимо мал из-за их удаленности в бесконечном импульсном пространстве.

Естественным образом возникает вопрос о причине явного расталкивания близких уровней квазиэнергии, полученного при численном моделировании. Прежде всего следует отметить, что для значений k , много больших (или даже того же порядка), чем размер N матрицы R , получаемое распределение $\bar{P}(s)$ не имеет отношения к истинному распределению $P(s)$ для модели плоского ротатора с $V(\theta) = k \cos \theta$. Размер матрицы R , описывающей поведение исходной модели, должен быть достаточно большим, по крайней мере, по сравнению с k . Поэтому можно предположить,

что наблюдаемый эффект расталкивания на рис.2,3 целиком определяется конечным числом собственных значений матрицы R . Действительно, дополнительное исследование показало, что с увеличением отношения N/k (при постоянном $\chi = kT > 1$ и $N \leq N_{\max} = 349$) расталкивание слегка уменьшается. Однако вопрос о пуассоновском характере распределения $P(s)$ при конечных k остается открытым. Прежде всего это связано с тем, что численные результаты для квантового ротатора, показывающие почти полное прекращение диффузии для $E(t)$ в принципе не исключают наличия малой непрерывной компоненты в спектре квазиэнергий (см. также /41/). Тогда часть собственных функций должна быть делокализованной (или иметь слабую, неэкспоненциальную локализацию), что приведет к слабому расталкиванию на малых расстояниях $s \rightarrow 0$.

Отметим также, что более правильным параметром при оценке необходимого размера матрицы R является не N/k , а отношение N/ℓ , где ℓ — средняя длина локализации собственной функции квазиэнергии в импульсном пространстве. Косвенный численный анализ /37/ показал, что $\ell \sim k^2$, поэтому нужно, чтобы выполнялось условие $N \gg k^2$. В этом смысле наиболее показателен рис.1, для которого $N/k^2 = 14$ и естественно считать, что наблюдаемое отклонение от пуассоновского закона для $\bar{P}(s)$ имеет физическую природу. Тем не менее может оказаться, что даже в этом случае конечность матрицы R влияет на характер распределения $\bar{P}(s)$.

5. Обсуждение

Описанные выше численные результаты по нахождению зависимости $\bar{P}(s)$ можно рассмотреть под другим углом зрения, безотносительно к исходной модели плоского ротатора с потенциалом $V(\theta) = k \cos \theta$. Действительно, мы видим (см.рис.4), что при увеличении k распределение $\bar{P}(s)$ описывается выражением (I9). С другой стороны, известно, что при переходе к классическому пределу $\hbar \rightarrow 0$ статистические свойства квантовой системы улучшаются и в пределе должны совпадать со статистическими свойствами классической системы. Поэтому можно предположить, что распределение (I9) будет предельным в том смысле, что оно будет соответствовать максимальным статистическим свойст-

вам квантовой системы. Реальной системой с такими свойствами может служить та же самая модель ротатора со случайным потенциалом $V(\theta) = \theta_i$, где θ_i — случайное число на отрезке $0 < \theta_i \leq 2\pi$. В этом случае собственные функции всегда будут делокализованными и поэтому распределение $P(\epsilon)$ не будет зависеть от размера матрицы. Действительно, численные результаты (кресты на рис. 4) показывают, что для такого потенциала распределение $P(\epsilon)$ прекрасно совпадает с (19). Вероятность совпадения (по критерию χ^2) равна 85%.

Теперь возникает вопрос, в каких случаях предельное распределение $P(\epsilon)$ будет иметь вид (19)? Другими словами, не является ли полученный результат своего рода исключением, связанным либо с особенностью выбора потенциала $V(\theta)$ в рассматриваемой системе, либо с выбором самой системы? Выше уже отмечалось, что в автономных квантовых системах, как правило, максимальным статистическим свойствам соответствует распределение Вигнера-Дайсона (I) с линейным законом расталкивания соседних уровней. Такой вид распределения может быть связан с симметрией гамильтониана исходной системы (точнее ансамбля систем) относительно изменения знака времени и относительно пространственных вращений /10/. Однако наша модель ротатора в периодическом внешнем поле казалось бы обладает такой симметрией. С другой стороны, нетрудно видеть, что матрица R (или S , см. (17)), полностью описывающая поведение нашей системы, является унитарной, но не симметричной. Но именно для такого типа матриц (если, конечно, они случайны) распределение собственных значений должно описываться зависимостью (I) с $\beta = 2$, а не с $\beta = 1$ (см. /10/). Из этого примера видно, что для неавтономных систем зависимость между симметрией исходной задачи и предельным распределением $P(\epsilon)$ для соседних уровней квазиэнергии не такая, как для автономных систем.

Рассмотрим теперь задачу в общем виде. Пусть мы имеем гамильтониан с периодически зависящим от времени возмущением. Запишем для такой системы уравнение Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}_0 \Psi + \hat{V}(t) \Psi = \hat{H}(t) \Psi \quad (20)$$

где $\hat{H}(t)$ по условию обладает симметрией по отношению к обращению времени. Тогда уравнение для собственной функции квазиэнергии (см. (9)) будет иметь вид:

$$\epsilon \varphi_\epsilon = -i\hbar \frac{\partial \varphi_\epsilon}{\partial t} + \hat{H}(t) \varphi_\epsilon \quad (21)$$

Введем эффективный гамильтониан для $\varphi_\epsilon(t)$:

$$\epsilon \varphi_\epsilon = \hat{W} \varphi_\epsilon; \quad \hat{W} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \hat{H}(t) \quad (22)$$

Видно, что новый гамильтониан \hat{W} не обладает симметрией, поскольку оператор $-i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ — несимметричен (имеется ввиду симметрия относительно изменения знака времени). Таким образом, можно предположить, что в типичных случаях такие системы (со случайным поведением) будут описываться унитарным ансамблем матриц с законом распределения (19).

В заключение еще раз отметим сильное различие в распределении $P(\epsilon)$ для неавтономных квантовых систем с "настоящим" случайным поведением (распределение (19) с квадратичным законом расталкивания) и для систем, лишь "имитирующих" стохастические свойства классических систем (пуассоновское, или близкое к нему распределение).

Автор искренне благодарен В.Ф.Дмитриеву, В.В.Соколову, Б.В.Чирикову, а также Д.Л.Шалаевскому за плодотворные обсуждения.

Л и т е р а т у р а

- I. B.V.Chirikov, P.M.Izrailev, D.L.Sherelyansky, Soviet Sci. Rev. v.20, p209, Препринты ИЯФ СО АН СССР: 80-209, 80-210, Новосибирск, 1980.
2. M.V.Berry, 1981, "Semiclassical Mechanics of Regular and Irregular Motion", Les Houches Summer School Lectures, (to be published by North-Holland).
3. G.M.Zaslavsky, Phys. Rept., 80 (1981) 157.
4. A.Einstein, Verhandl. Dtsch. Phys. Ges., 19 (1917) 82. (перевод: А.Эйнштейн. Собрание научных трудов, т.3, стр.407, Наука, Москва, 1966).
5. Н.С.Крылов. Работы по обоснованию статистической физики.- М.: Изд-во АН СССР, 1950.
6. I.C.Percival, J.Phys.B: Atom.Mol.Phys. v.6 (1973) L229.
7. I.C.Percival, Advan. Chem. Phys. 36 (1977) 1.
8. T.A.Brody, J.Flores, J.B.French, P.A.Mello, A.Pandey, S.S.H. Wong, Rev. of Mod. Phys. v.53, N3 (1981) 385.
9. E.P.Wigner, Ann. Math. 53 (1951) 36; 62 (1955) 548; 65 (1957) 203; 67 (1958) 325.
10. F.J.Dyson, J.Math.Phys. 3 (1962) 140; 157; 166. (перевод: Ф.Дайсон. Статистическая теория энергетических уровней сложных систем. ИЛ, Москва, 1963).
11. Л.Д.Ландау, Я.А.Сморodinский. Лекции по теории атомного ядра, М.-Л., 1955.
12. M.V.Berry, Structures in Semiclassical Spectra: A Question of Scale, in "The Wave-Particle Dualism", by D.Reidel Publ. Comp. p. 231, 1984.
13. M.V.Berry, K.Tabor, Proc. Roy. Soc. A 356 (1977) 375.
14. M.L.Mehta, Nucl.Phys. 18(1960)395; M.L.Mehta, H.Gaudin, Nucl. Phys. 18(1960)420; H.Gaudin, Nucl.Phys. 25(1961)447.

15. M.L.Mehta, Random Matrix and the Statistical Theory of Energy Levels (Academic, New York, 1967).
16. R.U.Haq, A.Pandey, O.Bohigas, Phys.Rev.Lett., 48(1982)1086.
17. H.S.Gamarda, P.D.Georgopoulos, Phys.Rev.Lett., 50(1983)492.
18. O.Bohigas, H.-J.Giannoni, C.Schmit, Phys.Rev.Lett., 52(1984)1.
19. G.Casati, B.V.Chirikov, J.Ford, P.M.Izrailev, Lecture Notes in Physics, v.93, ed. G.Casati and J.Ford, Springer New York, 1979, p.33; Препринт ИЯФ СО АН СССР 78-46, 1978.
20. D.L.Sherelyansky, Physica 8D (1983) 208; Препринт ИЯФ СО АН СССР 81-55, Новосибирск, 1981.
21. B.V.Chirikov, Phys. Rept., 52 (1979) 263.
22. J.M.Greene, J.Math.Phys. 20:6 (1979) 1183.
23. B.V.Chirikov, Lecture Notes in Physics, 179 (1983) 49.
24. В.В.Соколов. Препринт ИЯФ СО АН СССР 83-75, 1983.
25. R.S.MacKay, J.D.Meiss, I.C.Percival, Transport in Hamiltonian Systems, to be published in Physica D., 1984.
26. Г.М.Заславский, Б.В.Чириков, УФН, 105 (1971)3.
27. Я.Б.Зельдович. ЕЖТФ, 51(1966) 1492; В.И.Ритус, там же, стр.1544.
28. T.Hogg, B.A.Huberman, Phys.Rev.Lett. 48 (1982) 711.
29. Д.Л.Шепелянский. ТМФ, 49(1981)117.
30. G.P.Berman, G.M.Zaslavsky, Physica v.III (1982) 17; G.P.Berman, A.R.Kolovsky, Physica 8D (1983) 117.
31. A.Peres, Phys. Rev. Lett., 49 (1982) 1118.
32. Ф.М.Израйлев, Д.Л.Шепелянский. ДАН СССР, 249(1979)1103; ТМФ 43(1980)417.
33. S.Fishman, D.R.Grempel, R.E.Prange, Phys.Rev.Lett., 49 (1982) 509.

34. R.E. Prange, D.R. Grempel, S. Fishman, Proc. of the Conf. on Quantum Chaos (Como, June 1983), Springer New-York, 1984.
35. И.М. Лифшиц, С.А. Гредескул, Л.А. Пастур. Введение в теорию неупорядоченных систем. - М.: Наука, 1982.
36. P.W. Anderson, Phys.Rev. 109 (1958) 1492.
37. Б.В. Чириков, УФН, 139(1983)360.
38. А.И. Шнирельман, УМН, 29(1974)181.
39. S.A. Molčanov, Comm. Math. Phys., 78 (1981) 429.
40. N.P. Mott, W.D. Twose, Adv. Phys., 10 (1961) 107.
(перевод: УФН, 79(1963)691).
41. G. Casati, "Irreversibility and Chaos in Quantum Systems, To appear in "Lecture Notes in Mathematics" Spriger-Verlag, 1984.

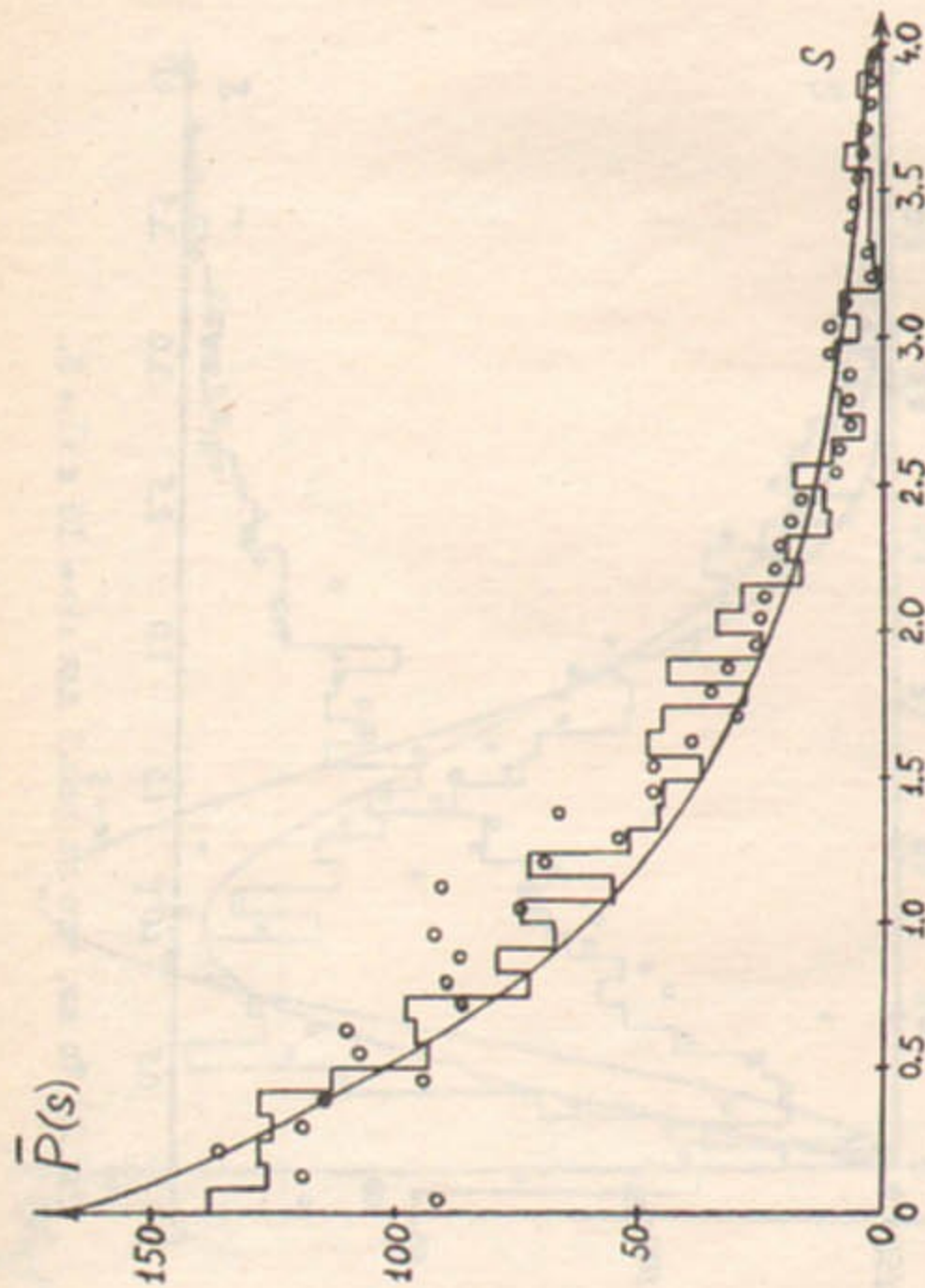


Рис.1. Распределение $\bar{P}(s)$ расстояний между соседними собственными значениями матрицы K . Величина s измеряется в единицах среднего расстояния $\bar{D} = 2\pi/N$. Ломаная линия - для шести серий с $N = 349$, кружки - для десяти серий с $N = 199$, гладкая кривая - пуассоновское распределение. Параметры: $\langle k \rangle = 5$ и $\kappa \Gamma = 5$.

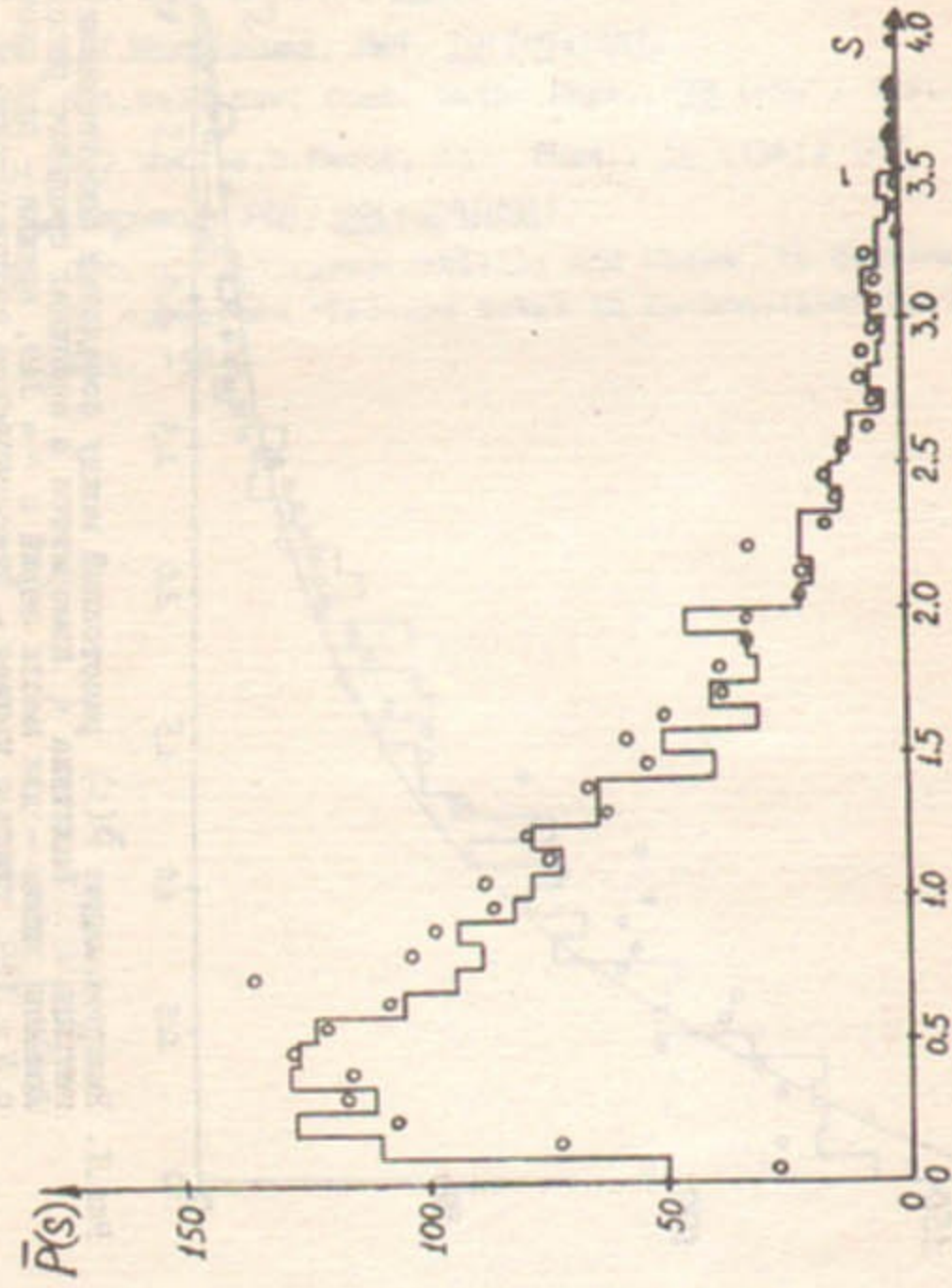


Рис.2. То же, что на рис.1 для $\langle k \rangle = 10$ и $\kappa\Gamma \approx 5$.

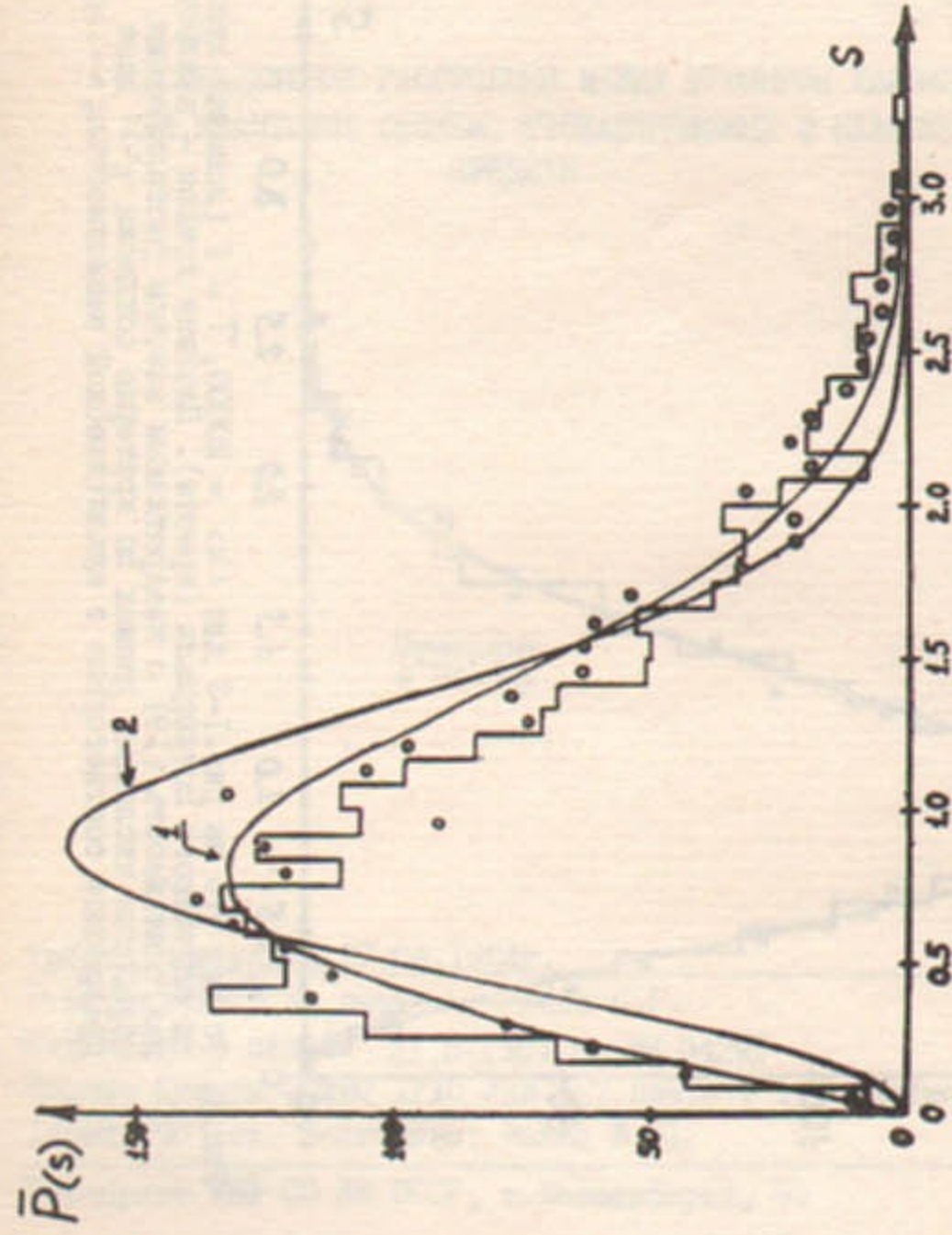


Рис.3. То же, что на рис.1-2, но для $\langle k \rangle = 20$; $\kappa\Gamma \approx 5$. Кривая 1 - распределение (1) с линейным законом расталкивания, $\beta = 1$; кривая 2 - распределение с квадратичным законом расталкивания (1) с $\beta = 2$.

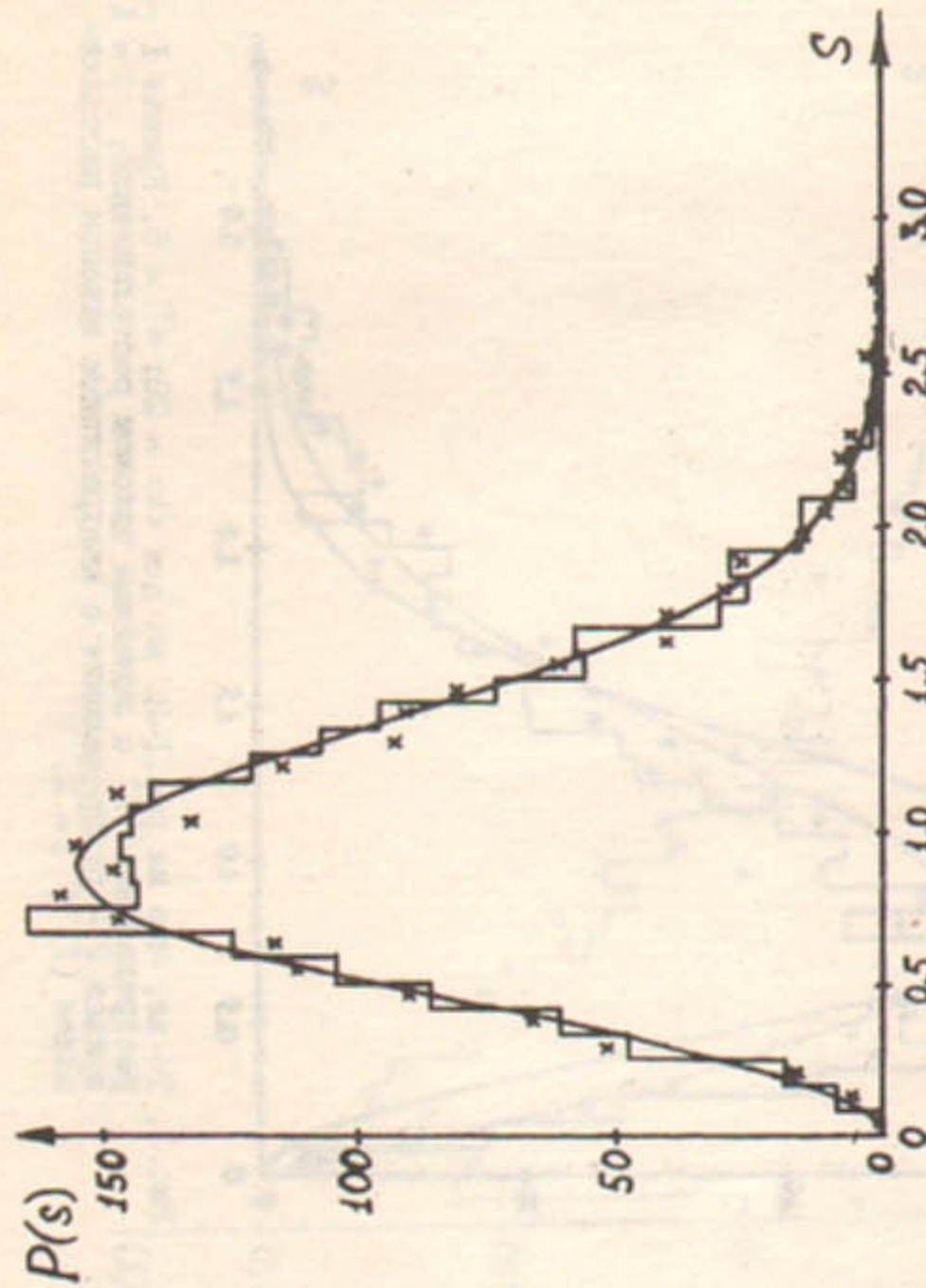


Рис.4. То же, что на рис.1-3 для $\langle k \rangle = 20000$, $\Gamma = 1$ (ломаная кривая) и случайного потенциала (крестики). Главная кривая - аналитическая зависимость (19) с квадратичным законом расталкивания. Обработка численных данных по критерию согласия χ^2 дает прекрасное соответствие с аналитической зависимостью; $N=199$; $M=1990$.

Ф.М.Израйлев

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ УРОВНЯМИ КВАЗИЭНЕРГИИ
 ДЛЯ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ, СТОХАСТИЧЕСКИХ В КЛАССИЧЕСКОМ
 ПРЕДЕЛЕ

Препринт
 № 84-63

Работа поступила 27.04.1984г.
 Ответственный за выпуск - Попов С.Г.
 Подписано к печати 21.5-1984 г. МН 04299
 Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.1,7 печ.л., 1,4 учетно-изд.л.
 Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 63.
 Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90