



Ж. 74

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

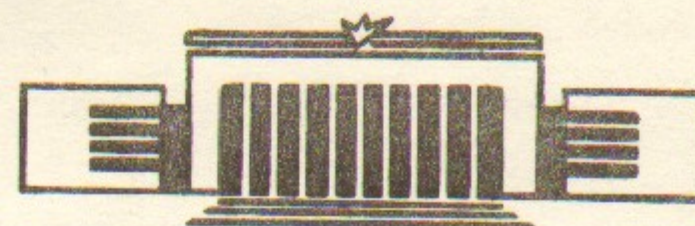
1

А. Р. Житницкий

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЕ ИЗУЧЕНИЕ
КХД-ВАКУУМА.
ВОПРОСЫ ФАКТОРИЗУЕМОСТИ
ЧЕТЫРЕХФЕРМИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ

ПРЕПРИНТ 84-101

БИБЛИОТЕКА
Института ядерной
физики СО АН СССР
ИДБ. № _____



НОВОСИБИРСК

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЕ ИЗУЧЕНИЕ КХД - ВАКУУМА.
ВОПРОСЫ ФАКТОРИЗУЕМОСТИ ЧЕТЫРЕХФЕРМИОННЫХ
ОПЕРАТОРОВ

А.Р. Житницкий

А Н Н О Т А Ц И Я

В работе развиваются три независимых подхода, основанные на методе правил сумм, низкоэнергетических теоремах, различных феноменологических результатах, позволяющие определить величины различных вакуумных средних. Определены значения для многих четырехфермионных вакуумных средних, значение величины $\langle G^3 g^3 \rangle$ и т.д. Оказалось, что гипотеза факторизации в большинстве случаев не оправдывается. Полученные результаты обсуждаются как с точки зрения большого числа цветов ($N_c \neq \infty$), так и с точки зрения инстантонных моделей.

Содержание

1. Введение.
2. Феноменологическое изучение четырехфермионных ВС.
 - 2.1. Феноменологическое определение величины $\langle \bar{u} b_{\mu\nu} \lambda^a d d \bar{b}_{\mu\nu} \lambda^a u \rangle$.
 - 2.2. Феноменологическое определение ВС $\langle g^3 G^3 \rangle$, $\langle \bar{u} \lambda^a d d \bar{u} \lambda^a u \rangle$.
 - 2.3. Обсуждения.
3. В мире с тяжелым Q -кварком.
 - 3.1. Количественный анализ ВС, содержащих тяжелый Q -кварк.
 - 3.2. О значениях других ВС, содержащих тяжелый Q -кварк.
 - 3.3. Обсуждения.
4. Метод вычисления четырехфермионных ВС.
 - 4.1. Идея подхода.
 - 4.2. Феноменологический анализ псевдоскалярного тока.
 - 4.3. Вопросы факторизуемости четырехфермионных ВС. Качественное обсуждение.
 - 4.4. Примеры количественного вычисления четырехфермионных ВС.
 - 4.5. Обсуждения.
5. Изучение многокомпонентных глюонных ВС $\langle G^n \rangle$.
 - 5.1. Низкоэнергетические теоремы.
 - 5.2. О факторизуемости величин $\langle G^4 \rangle$.
 - 5.3. Некоторые другие результаты.
 - 5.4. Обсуждения.
6. Инстантоны, большие N_c и феноменология.
 - 6.1. Влияние парамагнитной инстантонной среды на величины четырехфермионных ВС.
7. Заключение.

I. ВВЕДЕНИЕ

Правила сумм КХД, предложенные несколько лет назад Вайнштейном, Захаровым и Шифманом [1] интенсивно используются сейчас в различных целях (см. обзоры [2]). Важно подчеркнуть, что масштаб величин всех адронных характеристик, полученных таким образом, задавался несколькими фундаментальными параметрами:

$$\langle \bar{q}q \rangle = -(0.25 \text{ GeV})^3, \quad \langle \frac{1}{\pi} G^2 \rangle = 1.2 \cdot 10^{-2} \text{ GeV}^4 \quad (\text{I.1})$$

Здесь q — описывает любое из кварковых полей u, d, s ; $G_{\mu\nu}^a$ — поле цветных глюонов.

Значение $\langle \bar{q}q \rangle$ было известно давно [3], величины глюонного конденсата впервые была определена из соответствующих правил сумм для системы чармония [1]. Позже, значение $\langle \frac{1}{\pi} G^2 \rangle$, согласующееся с (I.1), было найдено независимым образом в [4, 5].

Что касается величин вакуумных средних (ВС) от четырехфермионных операторов, то малость величины $\langle \bar{u}_\mu \delta_5 \lambda^a u \bar{d}_\mu \delta_5 \lambda^a d \rangle / \langle \bar{u}u \rangle^2 \approx 0.1$ была установлена, по существу, феноменологическим анализом явлений $\rho - \omega$ вырождения и $\varphi - \omega$ — смешивания [1]. В этой же работе была проверена справедливость гипотезы факторизации (с точностью $\sim 20-30\%$) для матричных элементов $\langle (\bar{q}_\mu \lambda^a q)^2 \rangle$, $\langle (\bar{q}_\mu \delta_5 \lambda^a q)^2 \rangle$.

Таким образом, феноменологическое знание лишь нескольких средних характеристик вакуума позволило определить огромное количество экспериментально измеряемых адронных параметров.

Однако вскоре стало ясно [6], что ограниченная динамическая информация, закодированная с помощью матричных элементов (I.1), явно недостаточна для описания 0^+ каналов. Так называемые "прямые инстантонные вклады" [6] играют в этих каналах решающую роль. Таким образом, вакуум КХД имеет весьма сложную структуру, и средние значения (I.1) далеко не исчерпывают всех характеристик вакуума.

Для изучения тонких аспектов теории необходимо знание средних от более сложных операторов, типа: $\langle (\bar{q}q)^2 \rangle$, $\langle G^3 \rangle$, $\langle G^4 \rangle$ и т.д. Сравнение именно этих средних величин с $\langle \bar{q}q \rangle$, $\langle G^2 \rangle$...

отражает меру "зернистости" вакуума, характеризует соотношение между вакуумными флуктуациями больших ($\sim R_{conf}$) и малых ($\sim 0.1 \text{ fm}$) размеров, характеризует роль взаимодействия различных вакуумных флуктуаций и т.д. Так например, гипотеза факторизации [1] для отношения

$$\frac{\langle \bar{u}_\mu \delta_5 \lambda^a d \bar{d}_\mu \delta_5 \lambda^a u \rangle}{\langle \bar{u}u \rangle \langle \bar{d}d \rangle} \quad (\text{I.2})$$

дает значение $16/3$. Близкое значение ($6 + O(1/N_c^2)$) получается и в пределе $N_c \rightarrow \infty$ (N_c — число цветов). Для инстантонной модели вакуума типа [7,8] величина (I.2) оказывается порядка 20 [8]! Для вакуумных средних, составленных из глюонных полей, различие еще более контрастно.

В настоящее время имеется три независимых подхода к изучению ВС.

а. Прямой путь вычисления ВС в теории поля на решетке [9]. К сожалению, этот подход пока не дал каких-либо надежных результатов для реального вакуума КХД.

б. Вычисления ВС в модели инстантонной жидкости [7,8]. Хотя модель интересна сама по себе, однако в буквальном виде оценки [7,8] выглядят слишком грубыми ввиду отсутствия последовательного учета межинстантонного взаимодействия.

в. Наиболее достоверная на сегодня информация о ВС связана с феноменологическим анализом различных правил сумм.

В настоящей работе эксплуатируется именно этот подход к изучению ВС.

Коротко остановимся на содержании каждой из глав.

Во 2-ой главе используются правила сумм, очень чувствительные к величинам отдельных ВС. Этот подход позволяет достаточно надежно извлечь информацию об операторах относительно низкой размерности: $\langle G^2 \rangle$, $\langle (\bar{q}q)^2 \rangle$, $\langle G^3 \rangle$ *. В частности оказалось,

* Впервые подобные правила сумм для извлечения информации о ВС использовались в [4]. Величина $\langle G^2 \rangle$, полученная таким образом близка к стандартному значению (I.1).

что факторизация четырехфермионных операторов, в общем случае, не имеет места; наблюдается сильная зависимость величины ВС (относительно факторизованного значения), от лоренц-цветовой структуры оператора.

Цель 3 главы – понять феноменологические результаты для четырехфермионных ВС, изучая величины типа $\langle \bar{q}q\bar{q}q \rangle$, содержащие тяжелый Q -кварк. В этом случае анализ упрощается благодаря тому, что $Q\bar{Q}$ кварки переходят в вакуум лишь благодаря излучению глюонов. Ответ в этом случае представляется в виде ряда по $1/(m_Q)^n$ и поддается качественному анализу.

В 4, 5 главах описан метод вычисления многокомпонентных ВС, содержащих как кварковые поля (гл.4), так и чисто глюонные (гл. 5). Метод основывается на точных низкоэнергетических соотношениях и некоторых феноменологических данных.

В 6 главе обсуждается вопрос о роли инстантонов в насыщении различных ВС.

2. ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЕ ИЗУЧЕНИЕ ЧЕТЫРЕХФЕРМИОННЫХ ВС

Опишем коротко основной подход, которому мы следуем в настоящей главе. Идея метода довольно проста и состоит в следующем. Специальным образом подбираются токи $J_{1,2}$, коррелятор которых $\int dx e^{iqx} \langle 0 | T \{ J_1(x), J_2(0) \} | 0 \rangle$ при больших $|q^2|$ определяется, главным образом, интересующим нас вакуумным конденсатом $\langle \bar{q} \lambda^a q \bar{q} \lambda^a q \rangle$. В то же время мнимая часть для данного коррелятора известна независимым образом. В этом случае дисперсионное соотношение позволяет связать ВС с известной мнимой частью. Отличие от стандартных правил сумм [1,2] обусловлено малостью вклада теории возмущения, что и позволяет выделить на этом фоне степенную поправку. Впервые подобные правила сумм с лидирующей степенной поправкой использовались в работе [10]. В дальнейшем, аналогичные правила сумм (с относительно малым пертурбативным вкладом) неоднократно использовались в различных целях [4, II]. В частности, в [4] правила сумм использовались в интересующем нас контексте – была получена оценка для ВС $\langle g^2 G^2 \rangle$.

План главы следующий. В п.2.1 определяется среднее ваку-

умное значение $\langle \bar{u} b_{\mu} \lambda^a d \bar{d} b_{\mu} \lambda^a u \rangle$. В п.2.2 выписывается система правил сумм для оценки величины $\langle \bar{u} \lambda^a d \bar{d} \lambda^a u \rangle$. Побочным результатом этого анализа – нахождение $\langle g^3 f^{abc} b_{\mu}^a b_{\nu}^b b_{\rho}^c \rangle$.

2.1. Феноменологическое определение величины

$$\langle \bar{u} b_{\mu} \lambda^a d \bar{d} b_{\mu} \lambda^a u \rangle$$

Введем ток $J_{\mu\lambda} = g \bar{u} b_{\mu}^a b_{\nu}^b \delta_{\lambda}^c \lambda^d$. Здесь $b_{\lambda} = \frac{1}{2} [\delta_{\lambda}, \delta_{\lambda}]$, λ^a – цветные $SU(3)$ -матрицы, нормированные условием $Sp \lambda^a \lambda^b = 2 \delta^{ab}$. Рассмотрим следующий коррелятор при $-q^2 \rightarrow \infty$:

$$i \int dx e^{iqx} \langle 0 | T \{ J_{\mu\lambda}(x), \bar{d} i \delta_5 u(0) \} | 0 \rangle = -g_{\mu\lambda} \Pi_1(q^2) + g_{\mu\lambda} \Pi_2(q^2) \quad (2.1)$$

В мнимую часть коррелятора (2.1) вкладывают лишь состояния с T -мезонными квантовыми числами. Отметим также, что в $\Pi_1(q^2)$ (в отличие от Π_2) отсутствуют прямые инстантонные вклады и масштаб нарушения асимптотической свободы определяется лишь степенными поправками.

Вычисление коррелятора ($-q^2 \rightarrow \infty$) с учетом степенных поправок производится стандартным образом и после процедуры борелизации правила сумм принимают следующий вид:

$$\frac{1}{\pi} \int \text{Im} \Pi_1(s) e^{-s/M^2} ds = \frac{\alpha_s(M)}{42\pi^3} M^4 + \frac{1}{12} \langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \rangle + \frac{32}{27} \pi \alpha_s \frac{\langle \bar{q}q \rangle^2}{M^2} + \frac{\pi \alpha_s}{3 M^2} \langle \bar{u} b_{\mu} \lambda^a d \bar{d} b_{\mu} \lambda^a u \rangle - \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{M^2} \langle g^3 f^{abc} b_{\mu}^a b_{\nu}^b b_{\rho}^c \rangle \quad (2.2)$$

В этом выражении члены, пропорциональные M^4 , $\langle G^2 \rangle$, $\langle G^3 \rangle$ определяются соответственно диаграммами, представленными на рис.1а,в,с. Что касается вкладов, связанных с четырехфермионными операторами, то для матричных элементов $\sim \langle \bar{q} b_{\mu} \lambda^a q \bar{q} b_{\mu} \lambda^a q \rangle$ (рис.2а) мы предполагаем справедливость гипотезы факторизации (см. Введение). Для вклада, пропорционального оператору $\langle \bar{u} b_{\mu} \lambda^a d \bar{d} b_{\mu} \lambda^a u \rangle$ (рис.2б) эта гипотеза не предполагается.

Характерный масштаб в правилах сумм (2.2), при котором следующие степенные поправки малы, порядка: $M^2 \approx 1.5 + 2.6 r V^2$. Такой вывод можно сделать из сравнения вкладов в (2.2) одно-

типных матричных элементов: $\langle g^3 \sigma^3 \rangle = 0.06 \text{ GeV}^6$ (см. п.2.2) и $\langle g^2 \sigma^2 \rangle = 0.5 \text{ GeV}^4$; или из сравнения $\langle \bar{q} \sigma q \bar{q} q \rangle$ с $\langle (\bar{q} q)^2 \rangle$. Поэтому есть уверенность, что при $M^2 \approx 1.5 \text{ GeV}^2$ следующие степенные поправки малы. Пертурбативный вклад с вычтенным континуумом при таком значении M^2 и параметре ξ_0 (начало континуума) $\sim (0.7+2) \text{ GeV}^2$ по крайней мере в 20 раз меньше главных членов.

Приведем грубую прикидку. Вклад π -мезона в $\text{Im } \Pi_1(s)$ известен, так как известен его матричный элемент:

$$\langle \pi | \bar{u} i \gamma_5 d | 0 \rangle_{\mu^2=2\text{GeV}^2} = -\frac{2 \langle \bar{q} q \rangle_{\mu^2=2\text{GeV}^2}}{f_\pi} \approx +0.36 \text{ GeV}^2 \quad (2.3)$$

Здесь μ - точка нормировки, масштаб которой порядка характерного значения $M^2 \approx 2 \text{ GeV}^2$. Поэтому $\langle \bar{q} q \rangle_{\mu^2=2\text{GeV}^2} = -(0.25 \text{ GeV})^3 \cdot \left(\frac{0.7}{\alpha_s(2\text{GeV}^2)} \right)^{4/9} = -2.4 \cdot 10^{-2} \text{ GeV}^3$. Другой матричный элемент, входящий в $\text{Im } \Pi_1(s)$:

$$\langle 0 | \bar{u} \mu \lambda | \pi \rangle = -4 f_{3\pi} g_\mu g_\lambda, \quad f_{3\pi} = +(0.3+0.4) 10^{-2} \text{ GeV}^2, \quad (2.4)$$

был вычислен в работе [12]. Мы следуем обозначениям этой работы. Подставляя числа, убеждаемся, что вклад π -мезона в (2.2) равен $4 f_{3\pi} \left(\frac{f_\pi m_\pi^2}{m_u + m_d} \right) \approx \chi_\pi \approx 4.4 \cdot 10^{-3} \text{ GeV}^4$ и правила сумм (2.2) в предположении факторизации ВС никак не обеспечивают столь большого значения π -мезонного вычета χ_π .

Отметим еще несколько качественных моментов, касающихся правил сумм (2.2). Для того, чтобы обеспечить правильное функциональное поведение по M^2 правой части (2.2) (правая часть (2.2) падает с ростом M^2 в широкой области $M^2 \approx 1.5+5 \text{ GeV}^2$), необходимо ввести в левую часть кроме π -мезона массивный π' со знаком вычета $\chi_{\pi'}$, обратным χ_π . Подгонка по M^2 (с заданной известной величиной $\chi_\pi = 4.4 \cdot 10^{-3} \text{ GeV}^4$, $m_{\pi'}^2 = 1.6 \text{ GeV}^2$) приводит к результату:

$$\langle \bar{u} b_{\mu\nu} \lambda^a d \bar{d} b_{\mu\nu} \lambda^a u \rangle \approx \Delta \langle \bar{u} b_{\mu\nu} \lambda^a d \bar{d} b_{\mu\nu} \lambda^a u \rangle_{\text{факториз.}} = \Delta \frac{16}{3} \langle \bar{q} q \rangle^2 \quad (2.5)$$

$$\Delta \approx 3, \quad \chi_{\pi'} = -3.6 \cdot 10^{-3} \text{ GeV}^4$$

Таким образом, величина $\langle \bar{u} b_{\mu\nu} \lambda^a d \bar{d} b_{\mu\nu} \lambda^a u \rangle$ по крайней мере в 3 раза больше факторизованного значения. Точность этих правил сумм $\approx 20\%$. Эта точность не включает в себя возможной неопределенности в величинах $\langle \sigma^a \rangle$, $\langle \bar{q} q \rangle^2$. Если для $f_{3\pi}$ выбрать не минимальное ($0.3 \cdot 10^{-2} \text{ GeV}^2$), а максимально возможное значение ($0.4 \cdot 10^{-2} \text{ GeV}^2$), то $\Delta \approx 3.5$.

И наконец, последнее качественное замечание, поясняющее причину нефакторизуемости некоторых ВС. Обратим внимание, что коррелятор (2.1) составлен из двух токов: $\mathcal{J}_1 = \bar{u} i \gamma_5 d$, $(\mathcal{J}_2)_{\mu\lambda} = \bar{d} b_{\mu\nu} \lambda^a b_{\nu\lambda} u$. Причем, диагональный коррелятор с одним из токов $-i \int dx e^{iqx} \langle 0 | T \{ \mathcal{J}_1^\dagger(x), \mathcal{J}_1(0) \} | 0 \rangle$ допускает прямые инстантонные вклады. Коррелятор $i \int dx e^{iqx} \langle 0 | T \{ \mathcal{J}_2^\dagger(x), \mathcal{J}_2(0) \} | 0 \rangle$ с выделением структуры $f_\mu f_\lambda f_\nu f_\sigma K(q^2)$ не допускает последних. Поэтому величина π -мезонного матричного элемента $\langle \pi | \mathcal{J}_1 | 0 \rangle \approx f_\pi \cdot 2.6 \text{ GeV}$ - в несколько раз больше естественной величины $\sim f_\pi m_\pi$, характерной для двухчастичного оператора. Величина же другого матричного элемента $\langle 0 | \mathcal{J}_2 | \pi \rangle = 1.2 \cdot 10^{-2} \text{ GeV}^2$ имеет естественный масштаб $\sim f_\pi^2$, характерный для трехчастичного оператора [11].

Итак, информация о большом масштабе, связанном с прямыми инстантонными вкладыями явно проникает в $\text{Im } \Pi_1(s)$ через вычеты $\chi_\pi \sim \langle 0 | \mathcal{J}_1 | \pi \rangle \langle \pi | \mathcal{J}_2 | 0 \rangle$, $\chi_{\pi'} \dots$. Возникает вопрос, каким образом можно обеспечить большой масштаб величины χ_π , если правила сумм (2.2) не допускают прямых инстантонных вкладов? С нашей точки зрения ответ состоит в том, что некоторые ВС, входящие в (2.2) становятся большими численно. Именно таким образом (посредством усиления вакуумных конденсатов) информация о большой величине масштаба проникает в корреляторы, не допускающие прямых инстантонных вкладов.

2.2. Феноменологическое определение вакуумных средних:

$$\langle g^3 f^{abc} b_{\mu\nu}^a b_{\nu\lambda}^b b_{\lambda\mu}^c \rangle \quad \text{и} \quad \langle \bar{u} \lambda^a d \bar{d} \lambda^a u \rangle.$$

Введем ток:

$$\mathcal{J}_{\mu\nu} = g \bar{u} b_{\mu\nu} \lambda^a d \quad (2.6)$$

и рассмотрим следующий диагональный коррелятор при больших q^2 (рис.3):

$$i \int dx e^{iqx} \langle 0 | T \{ J_{\mu\nu}(x), J_{\lambda\sigma}^+(0) \} | 0 \rangle = \quad (2.7)$$

$$- (g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\lambda} - g_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma} + g_{\mu\sigma} g_{\nu\lambda}) K_1(q^2) + (g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\lambda}) K_2.$$

В мнимую часть K_1 вкладывают состояния с квантовыми числами ρ , В (I235)-мезонов, а в $J_{\mu\nu} K_2$ - только состояния с В-мезонными квантовыми числами $J^{PC} = 1^{+-}$. В дальнейшем, нас будет интересовать только функция $K_1(q^2)$. Легко убедиться, что при $-q^2 \rightarrow \infty$ вклады в K_1 , пропорциональные $\frac{d_s}{\pi} \langle g^2 G^2 \rangle$ и $\frac{1}{\pi^2} \langle g^3 G^3 \rangle$ в главном по d_s/π приближении (рис.3в, 3с) равны нулю. Поэтому правила сумм (после борелизации) принимают следующий вид:

$$\int \frac{1}{\pi} \text{Im} K_1(s) e^{-s/M^2} ds = \frac{d_s}{60\pi^2} M^6 + 4\pi d_s \langle \bar{u}\lambda^a d\bar{d}\lambda^a u \rangle + \quad (2.8)$$

$$+ O\left(\frac{d_s}{\pi} \langle \frac{d_s}{\pi} G^2 \rangle, \langle \frac{g^3 G^3}{\pi^2} \rangle, \pi d_s \langle \bar{q}\lambda^a q\bar{q}\lambda^a q \rangle + \dots\right)$$

Тот факт, что коэффициенты перед $\langle g^2 G^2 \rangle$, $\langle g^3 G^3 \rangle$ оказались равными нулю в ведущем по d_s/π приближении - обычное явление при выделении структуры, максимальное количество индексов которой переносится импульсами, а не $g_{\mu\nu}$ -символами. Нетривиальным является то, что в ведущем порядке по d_s коэффициент перед $\langle \bar{u}\lambda^a d\bar{d}\lambda^a u \rangle$ (рис.3д) отличен от нуля.

Обсудим качественно (2.8). Характерной чертой этих правил сумм является выделенность лидирующей степенной поправки $\sim \langle \bar{u}\lambda^a d\bar{d}\lambda^a u \rangle$. Если предположить справедливость гипотезы вакуумного прокладывания для оценки $\langle \bar{u}\lambda^a d\bar{d}\lambda^a u \rangle$, то в области $M^2 \approx 1.5 + 2 \text{ GeV}^2$ нет других вкладов, конкурирующих с лидером. Действительно, в области $M^2 \approx 1.5 \text{ GeV}^2$, естественно ожидать, что следующие степенные поправки уже малы (исчерпаны все факторы усиления, связанные с разрывом петель, рис.3д). В то же время пертурбативный вклад с вычтенным континуумом не превышает значения $\frac{d_s}{60\pi^2} M^6 [1 - e^{-s_0/M^2} (1 + \frac{s_0}{M^2} + \frac{1}{2} \frac{s_0^2}{M^4})] \lesssim 10^{-4} \text{ GeV}^6$ при $s_0 \lesssim 1.5 \text{ GeV}^2$. Эту величину надо сравнить с вкладом лидера $= 4\pi d_s \langle \bar{u}\lambda^a d\bar{d}\lambda^a u \rangle$, равного в предположении факторизации,

* Так как спектральная плотность положительно определена и вклад В-мезона в $J_{\mu\nu} K_1$ отличен от нуля, то ρ -мезонный интервал дуальности s_0 не может превышать значения $s_0 \lesssim 1.5 \text{ GeV}^2$.

($\sim 10^{-3} \text{ GeV}^6$). Итак, левая часть (2.8) - положительно определена (диагональный коррелятор), а лидирующий вклад правой части - отрицательный.

Единственный способ избежать такого противоречия, состоит в предположении, что вакуумное среднее не подчиняется гипотезе факторизации. По абсолютной величине вакуумное среднее $\langle \bar{u}\lambda^a d\bar{d}\lambda^a u \rangle$ должно быть в 3-5 раз меньше факторизованного значения $\langle \bar{u}\lambda^a d\bar{d}\lambda^a u \rangle_f$ для того, чтобы следующие степенные поправки стали 100% важными:

$$|\langle \bar{u}\lambda^a d\bar{d}\lambda^a u \rangle| \lesssim \left(\frac{1}{3} \div \frac{1}{5}\right) |\langle \bar{u}\lambda^a d\bar{d}\lambda^a u \rangle_f| \quad (2.9)$$

В этом случае многие факторы вступают в игру - пертурбативный вклад, d_s/π поправка в коэффициенте перед $\langle G^2 \rangle$ и т.д. Поэтому нет возможности достаточно "чисто" выделить истинную величину ВС $\langle \bar{u}\lambda^a d\bar{d}\lambda^a u \rangle$ или хотя бы выяснить его знак из данного коррелятора.

Информация, которую все-таки можно извлечь из этих правил сумм состоит в следующем:

1) Вклад ρ -мезона в $\frac{1}{\pi} \int \text{Im} K_1(s) ds \lesssim 10^{-4} \text{ GeV}^6$. Это связано с малостью пертурбативного члена ($\sim 10^{-4} \text{ GeV}^6$), малостью коэффициента перед $\langle G^2 \rangle$ (лишний множитель d_s/π), численной малостью матричного элемента $\langle \bar{u}\lambda^a d\bar{d}\lambda^a u \rangle$.

2) Вакуумное среднее $\langle \bar{u}\lambda^a u \bar{d}\lambda^a d \rangle \ll \langle \bar{u}\lambda^a d\bar{d}\lambda^a u \rangle$. Такой вывод можно сделать из факта сильного $\rho - \omega$ вырождения. Действительно, с точки зрения правил сумм, единственное различие между корреляторами, описывающими изоспины 0 и 1, связано с диаграммой 3д и соответственно с оператором $\langle \bar{u}\lambda^a u \bar{d}\lambda^a d \rangle$. Поэтому, как и в случае с коррелятором векторных токов [I] (где было показано, что $\langle \bar{u}\lambda^a u \bar{d}\lambda^a d \rangle / \langle \bar{u}\lambda^a d\bar{d}\lambda^a u \rangle \ll 1$), мы имеем:

$$\frac{\langle \bar{u}\lambda^a u \bar{d}\lambda^a d \rangle}{\langle \bar{u}\lambda^a d\bar{d}\lambda^a u \rangle} \ll 1 \quad (2.10)$$

3) Величина $|\langle \bar{u}\lambda^a d\bar{d}\lambda^a u \rangle|$ мала по отношению к своему факторизованному значению.

Для того, чтобы проверить эти выводы на самосогласован-

ность, желательно найти величину матричного элемента:

$$\langle 0 | \bar{u} g G_{\mu\nu} \lambda^a d | \rho \rangle = i G_\rho (\epsilon_{\mu\rho\nu} - \epsilon_{\nu\rho\mu}) \quad (2.11)$$

и убедиться, что вклад ρ -мезона в спектральную плотность K_1 действительно мал ($\frac{1}{\pi} \int \text{Im} K_1(s) ds = G_\rho^2 \approx 10^{-4} \text{GeV}^6$) и все разг-рывается по сценарию, описанному выше.

Для этой цели рассмотрим следующий недиагональный коррелятор:

$$i \int e^{i p x} dx \langle 0 | T \{ \bar{u} G_{\mu\nu} \lambda^a d(x), \bar{d} i \sigma_{\lambda\sigma} u(0) \} | 0 \rangle = \quad (2.12)$$

$$= -(g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} - g_{\mu\nu} g_{\rho\lambda} - g_{\rho\lambda} g_{\mu\nu} + g_{\nu\rho} g_{\mu\lambda}) I_1(q^2) + (g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\rho\nu}) I_2(q^2).$$

Квантовые числа токов $\bar{d} i \sigma_{\lambda\sigma} u$ и $\bar{d} G_{\lambda\sigma} \lambda^a u$ совпадают, поэтому в мнимые части I_1, I_2 вкладывают те же состояния, что и в K_1, K_2 (см. (2.7)).

Вычисляя стандартным образом диаграммы рис.1, 2 приходим (после борелизации) к следующим правилам сумм:

$$\frac{1}{\pi} \int \text{Im} I_1(s) e^{-s/M^2} ds = \frac{\alpha_s}{24\pi^2} M^4 + \frac{1}{12} \langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \rangle + \frac{4\pi ds}{M^2} \langle \bar{u} \lambda^a d \bar{d} \lambda^a u \rangle - \frac{5}{96} \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{M^2} \langle g^3 f^{abc} G_{\mu\nu}^a G_{\nu\lambda}^b G_{\lambda\mu}^c \rangle \quad (2.13)$$

Отметим характерные особенности правил сумм (2.13).

1. Вклад ρ -мезона в $\text{Im} I_1(s)$ определяется двумя матричными элементами - выражением (2.11) и соотношением (2.14):

$$\langle 0 | \bar{u} i \sigma_{\lambda\sigma} d | \rho \rangle = i f_\rho (\epsilon_{\lambda\rho\sigma} - \epsilon_{\sigma\rho\lambda}). \quad (2.14)$$

Значение f_ρ вычислялось ранее (см. [II]), (ссылки там же) и с хорошей точностью ($\sim 20\%$) $f_\rho \approx f_\pi \approx 200 \text{ MeV}$.

2. Характерная величина правой части (2.13) порядка

$\frac{1}{12} \langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \rangle \approx 10^{-3} \text{ GeV}^4$. Поэтому, при $M^2 \approx 1.5 + 2 \text{ GeV}^2$, грубая оценка для вычета ρ -мезона такова: $f_\rho G_\rho \approx 10^{-3} \text{ GeV}^4$,

$G_\rho \approx 10^{-2} \text{ GeV}^3$. Тем самым наш вывод о малости ρ -мезонного вклада в коррелятор K_1 оправдывается: $\frac{1}{\pi} \int \text{Im} K_1(s) ds = G_\rho^2 \approx 10^{-4} \text{ GeV}^6$.

3. Наше утверждение (о том, что величина $\langle \bar{u} \lambda^a d \bar{d} \lambda^a u \rangle$ существенно меньше своего факторизованного значения) может быть еще раз проверено путем сравнения правил сумм (2.8) и (2.13). В правые части обоих правил сумм входит величина $= 4\pi ds \langle \bar{u} \lambda^a d \bar{d} \lambda^a u \rangle$. Если бы работала факторизация, то такой вклад в обоих правилах сумм играл бы заметную роль (нет петлевой малости). С другой стороны, левые части (2.8), (2.13) существенно разные. В (2.8) входит величина G_ρ^2 , а в (2.13) - соответственно $f_\rho G_\rho$. Ясно без вычислений, что $G_\rho^2 / f_\rho G_\rho \approx 10^{-1} \ll 1$, так как G_ρ соответствует трехчастичному матричному элементу, а f_ρ - двухчастичному*. Единственная возможность согласовать эти правила сумм - предположить малость среднего $|\langle \bar{u} \lambda^a d \bar{d} \lambda^a u \rangle|$. Это никак не повлияет на характерную величину правой части (2.13) - здесь имеется много вкладов одного порядка, но существенно уменьшит характерные значения правой части (2.8). Тем самым соотношение $G_\rho / f_\rho \ll 1$ выполнится.

4. Последнее замечание по поводу (2.13) состоит в следующем. По случайным причинам вклад оператора $\langle \bar{q} f_{\mu\nu} \lambda^a q \bar{q} f_{\mu\nu} \lambda^a q \rangle$ в (2.13), обусловленного рис.2а оказался равным нулю. Тем самым открывается перспектива феноменологическим образом определить BC $\langle g^3 f^{abc} G_{\mu\nu}^a G_{\nu\lambda}^b G_{\lambda\mu}^c \rangle$. Действительно, маскирующий фон, связанный с другими операторами размерности 6 подавлен (коэффициент перед $\langle (\bar{q} f_{\mu\nu} \lambda^a q)^2 \rangle$ равен нулю, вакуумное среднее $\langle \bar{u} \lambda^a d \bar{d} \lambda^a u \rangle$ мало численно). В то же время правила сумм (2.13) крайне чувствительны к величине вклада операторов размерности 6. Дело в том, что левая часть (2.13) пропорциональна $e^{-m_\rho^2/M^2}$ и растет с ростом M^2 . В правой части такой рост обеспечивает как раз вклад оператора размерности 6, пропорциональный $(-1/M^2)$. Стандартная процедура фитирования приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \langle g^3 G^3 \rangle &= +(0.06 \pm 0.1) \text{ GeV}^6 \\ G_\rho &= +(0.5 \pm 1) 10^{-2} \text{ GeV}^3 \end{aligned} \quad (2.15)$$

* На языке правил сумм эта малость соответствует малости двухпетлевой диаграммы по отношению к однопетлевой, см. [II].

Заметим, что значение $\langle g^3 G^3 \rangle$, меньшее (2.15) не подходит, так как согласование правой и левой частей (2.13) требует в этом случае отрицательного вычета В-мезона. В то же время независимо (из коррелятора \mathcal{I}_2) можно выяснить, что вычет В-мезона — положительный. Одновременно, значение $\langle g^3 G^3 \rangle$, большее (2.15) также не дает приемлемого фита, так как это требует отрицательного ρ -мезонного вычета G_ρ . Независимым образом (с помощью любого недиагонального коррелятора) можно установить знак $G_\rho > 0$.

Наиболее предпочтительное значение G_ρ , которое может быть извлечено независимо из других правил сумм: $G_\rho \approx (0.85 \pm 1) \cdot 10^{-2} \text{ GeV}^3$. Этому значению вычета соответствует величина конденсата

$$\langle g^3 f^{abc} G_{\mu\nu}^a G_{\nu\lambda}^b G_{\lambda\mu}^c \rangle = +0.6 \text{ GeV}^6 \quad (2.16)$$

Значение (2.16) мы рассматриваем, как наиболее предпочтительное, следующее из комплексного анализа различных правил сумм. Истинное значение $\langle g^3 G^3 \rangle$ (вместе со стандартными параметрами (1.1) вполне может отличаться от (2.16) на 10+40%, но не на фактор 2+3.

2.3. Обсуждения

Итак, чисто феноменологическим образом (предполагая известными: спектр масс, характерные интервалы дуальности, некоторые матричные элементы и т.д.) удалось извлечь информацию о следующих вакуумных средних: $\langle \bar{u} G_{\mu\nu} \lambda^a d d \bar{G}_{\nu\lambda} \lambda^a u \rangle$, $\langle \bar{u} \lambda^a d d \bar{\lambda}^a u \rangle$, $\langle \bar{u} \lambda^a u d \bar{\lambda}^a d \rangle$, $\langle g^3 G^3 \rangle$.

Основные наблюдения сводятся к следующему:

1. Мы убедились, что в общем случае гипотеза факторизации для четырехфермионных матричных элементов не работает. Характерное отклонение от факторизованного значения достигает фактора ~ 3 в ту или иную сторону. Нет универсальности, а наблюдается сильная зависимость величины ВС от его структуры. Счет по \mathcal{N}_c для четырехфермионных ВС оправдан лишь в случае операторов, содержащих векторные или аксиальные билинейные формы.

2. Найдено значение для величины $\langle g^3 G^3 \rangle \approx 0.06 \text{ GeV}^6$.

3. Суммируем основные феноменологические результаты, известные на сегодня и касающиеся средних характеристик КХД-вакуума*:

$$а) \langle \bar{q} q \rangle = -(0.25 \text{ GeV})^3 \quad [3]$$

$$б) \langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \rangle = 1.2 \cdot 10^{-2} \text{ GeV}^4 \quad [1, 4, 5]$$

$$в) \langle \bar{u} \Gamma \lambda^a d d \bar{\Gamma} \lambda^a u \rangle \approx \langle \bar{u} \Gamma \lambda^a d d \bar{\Gamma} \lambda^a u \rangle_f; \Gamma = \delta_\mu, \delta_\mu \delta_5 \quad [1]$$

$$г) \frac{\langle \bar{u} \Gamma \lambda^a u d \bar{\Gamma} \lambda^a d \rangle}{\langle \bar{u} \Gamma \lambda^a d d \bar{\Gamma} \lambda^a u \rangle} \approx 0.1; \Gamma = \delta_\mu, \delta_\mu \delta_5 \quad [1] \quad (2.17)$$

$$д) \langle \bar{q} i g G_{\mu\nu} G_{\nu\lambda}^a \lambda^a q \rangle \approx 0.8 \text{ GeV}^3 \langle \bar{q} q \rangle \quad [13, 14]$$

$$е) \langle g^3 f^{abc} G_{\mu\nu}^a G_{\nu\lambda}^b G_{\lambda\mu}^c \rangle \approx 0.06 \text{ GeV}^6 \quad (2.16)$$

$$ж) \langle \bar{u} \lambda^a d d \bar{\lambda}^a u \rangle \approx (\frac{1}{3} \div \frac{1}{5}) \langle \bar{u} \lambda^a d d \bar{\lambda}^a u \rangle_f \quad (2.9)$$

$$з) \left| \frac{\langle \bar{u} \lambda^a u d \bar{\lambda}^a d \rangle}{\langle \bar{u} \lambda^a d d \bar{\lambda}^a u \rangle} \right| \ll 1 \quad (2.10)$$

$$и) \langle \bar{u} G_{\mu\nu} \lambda^a d d \bar{G}_{\nu\lambda} \lambda^a u \rangle \approx (3 \div 3.5) \langle \bar{u} G_{\mu\nu} \lambda^a d d \bar{G}_{\nu\lambda} \lambda^a u \rangle_f \quad (2.5)$$

Здесь индекс $\langle \rangle_f$ означает соответствующее факторизованное значение: $\langle \bar{u} \Gamma \lambda^a d d \bar{\Gamma} \lambda^a u \rangle_f = \langle \bar{u} u \rangle \langle \bar{d} d \rangle$ ($-\frac{4}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{16}{9}, +\frac{16}{9}$ $\frac{16}{9}$) для $\Gamma = 1, \delta_5, \delta_\mu, \delta_\mu \delta_5, G_{\mu\nu}$ соответственно [1].

Результаты (2.17), по существу, заготовка для дальнейшего качественного анализа. Заметим, что ВС (2.17 а, б, д, е) отражают абсолютную величину характерного масштаба вакуумных флуктуаций. Остальные соотношения (2.17) чувствительны к более тонким характеристикам вакуума. Цель дальнейшего анализа — понять феноменологические результаты (2.17) с точки зрения различных теоретических схем.

3. В МИРЕ С ТЯЖЕЛЫМ Q-КВАРКОМ

Прежде чем переходить к количественным расчетам, обсудим качественную картину для ВС $\langle \bar{q} \Gamma \lambda^a Q Q \bar{\Gamma} \lambda^a q \rangle$ при $m_Q \gg R_{conf}^{-1}$.

* Кроме того, известны величины эффектов нарушения $SU(3)$ и $SU(2)$ — симметрии. Заинтересованного читателя мы отсылаем к обзорам [2].

В этом случае значения ВС контролируются, и тем самым, можно получить некоторое представление о значении лоренц-цветовой структуры четырехфермионного оператора. Вопрос ставится так — выполняются ли соотношения (2.17) для четырехфермионных операторов с заменой q кварка на тяжелый Q -кварк хотя бы качественно? Тот-же вопрос можно задать по другому — имеет ли место сшивка для безразмерных соотношений типа (2.17) в области $m_Q \rightarrow 0$ с областью $m_Q \approx 0.6 \text{ GeV}$. Ясно, что сшивки абсолютных масштабов ВС не происходит, так область применимости разложения по $1/m_Q$ ограничена соотношением: $m_Q \approx 0.6 \text{ GeV}$ (см. ниже), однако поведение безразмерных соотношений оказывается похожим в обеих областях по m_Q . Так например, реализуется всё многообразие соотношений, представленных в (2.17). В частности, наблюдается эффект увеличения (уменьшения) ВС с $\Gamma = b_{\mu}$, ($\Gamma = I$) по сравнению с соответствующими факторизованными значениями. Одновременно становятся понятными неравенства $|\langle \bar{u} \Gamma^{\alpha} u \bar{d} \Gamma^{\alpha} d \rangle| / |\langle \bar{u} \Gamma^{\alpha} d \bar{d} \Gamma^{\alpha} u \rangle| \ll 1$ при $\Gamma = I, b_5, b_{\mu}, b_{\mu 5}$ и отсутствие аналогичного соотношения для $\Gamma = b_{\mu}$.

Все эти явления качественно объясняются следующим образом. Известно [15], что в пределе большого числа цветов N_c факторизация заведомо имеет место и $\langle \bar{q} \Gamma^{\alpha} Q \bar{Q} \Gamma^{\alpha} q \rangle \sim \langle \bar{q} q \rangle \langle \bar{Q} Q \rangle \sim N_c / m_Q$. Поэтому, если изучается теория при $N_c \rightarrow \infty$, а затем берется предел больших m_Q , то ответ порядка N_c^2 / m_Q . С другой стороны, если начать обсуждение с предела $m_Q \rightarrow \infty$, N_c — конечное, то легко видеть, что для некоторых Γ имеются вклады $\sim m_Q$ (а не $1/m_Q$). Эти вклады параметрически больше при $m_Q \rightarrow \infty$, чем факторизованные (по N_c эти вклады, конечно, подавлены по отношению к факторизованным). Далее, при больших m_Q , параметрически ведущий член ($\sim m_Q$) для $\Gamma = b_{\mu}$ имеет тот же знак, что и факторизованный вклад. Поэтому можно ожидать, что истинное значение этого ВС будет больше факторизованного. Феноменологический результат (2.17и) подтверждает этот вывод. Для случая $\Gamma = I$ параметрически ведущий (по m_Q) и факторизованный вклады имеют противоположные знаки, и можно ожидать уменьшения соответствующего ВС. Этот вывод также подтверждается феноменологическим результатом (2.17ж). Что касается ВС с $\Gamma = b_{\mu}, b_{\mu 5}$

* Мы воспользовались соотношением $\langle \bar{Q} Q \rangle \rightarrow \frac{1}{m_Q} \langle \frac{dS}{d\tau} G^2 \rangle$, $m_Q \rightarrow \infty$ [1, 14].

то в этом случае вообще отсутствуют вклады $\sim m_Q$. Поэтому факторизованные вклады $\sim N_c^2 / m_Q$ являются одновременно ведущими в пределе $m_Q \rightarrow \infty$, и нет оснований для нарушения факторизации. Другие качественные явления, выписанные в (2.17), также находят свое отражение в данном подходе.

3.1. Количественный анализ ВС, содержащих тяжелый Q -кварк

Рассмотрим ВС $\langle \bar{q} \Gamma^{\alpha} Q \bar{Q} \Gamma^{\alpha} q \rangle_{\mu}$. Здесь μ — точка нормировки данного оператора. Обычно $\mu^2 \approx (1+2) \text{ GeV}^2$. Это значение соответствует характерной величине масштаба, свойственного правилам сумм КХД. Нас будет интересовать область: $m_Q^2 \ll m_Q^2 < \mu^2 \approx 2 \text{ GeV}^2$. Это означает, что все виртуальности большие $\mu^2 = 2 \text{ GeV}^2$ уже учтены в соответствующем операторном разложении. Виртуальности, меньшие 2 GeV^2 , предстоит учесть при вычислении $\langle \bar{q} \Gamma^{\alpha} Q \bar{Q} \Gamma^{\alpha} q \rangle_{\mu}$.

Начнем обсуждение ВС с $\Gamma = I$. В этом случае ведущий по m_Q вклад определяется диаграммой (рис.4) и равен:

$$\langle \bar{q} \Gamma^{\alpha} Q \bar{Q} \Gamma^{\alpha} q \rangle_{\mu} = -\frac{m_Q}{96\pi^2} \langle \bar{q} i \not{D} b_{\mu} b_{\mu}^{\alpha} \lambda^{\alpha} q \rangle \ln \frac{\mu^2}{m_Q^2} + O\left(\frac{1}{m_Q}\right) > 0 \quad (3.1)$$

Интегрирование по импульсам на диаграмме рис.4 сверху ограничено значением $\mu^2 \approx 2 \text{ GeV}^2$ в соответствии с приведенными выше обсуждениями.

Для сравнения приведем факторизованное значение этого ВС:

$$\langle \bar{q} \Gamma^{\alpha} Q \bar{Q} \Gamma^{\alpha} q \rangle_{f.} = -\frac{4}{9} \langle \bar{q} q \rangle \langle \bar{Q} Q \rangle = -\frac{4}{9} \langle \bar{q} q \rangle \left(-\frac{3S}{12 m_Q} \right) < 0 \quad (3.2)$$

Из (3.1), (3.2) видно, что:

1) область значений m_Q , где разложение по степеням $1/m_Q$ справедливо, ограничена неравенством: $m_Q \approx (0.6+0.8) \text{ GeV}$;

2) знаки (3.1) и (3.2) противоположны, так что в области $m_Q \approx 0.6 \text{ GeV}$ ВС $\langle \bar{q} \Gamma^{\alpha} Q \bar{Q} \Gamma^{\alpha} q \rangle$ имеет знак, обратный по отношению к факторизованному значению;

3) характерные значения $m_Q \approx 0.36 \text{ GeV}$, $\mu^2 \approx (1+2) \text{ GeV}^2$, так что для численных оценок положим $\ln \mu^2 / m_Q^2 \approx 1$.

Для получения более конкретного представления об абсолют-

ных величинах четырехфермионных ВС, займемся анализом величины $\langle \bar{Q} i \gamma_5 \sigma_{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}^a \lambda^a Q \rangle$. Как известно [1,14] при больших m_Q имеем:

$$\langle \bar{Q} i \gamma_5 \sigma_{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}^a \lambda^a Q \rangle_\mu = -m_Q \langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \rangle \ln \frac{m^2}{m_Q^2} + O(\frac{1}{m_Q}) \quad (3.3)$$

ВС (3.3), в смысле разложения по $1/m_Q$, очень напоминает интересующее нас разложение (3.1). Главные члены обоих выражений линейны по m_Q и содержат $\ln \frac{m^2}{m_Q^2}$. Поэтому можно выяснить из (3.3), насколько существенно отличаются ВС при $m_Q = 0.6 \text{ GeV}$ и при $m_Q = 0$. Далее, можно использовать приобретенный опыт для оценки четырехфермионных ВС при $m_Q = 0$.

Займемся соответствующими прикидками. Подставляя численные значения в правую часть (3.3) убеждаемся, что ВС $\langle \bar{Q} i \gamma_5 \sigma_{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}^a \lambda^a Q \rangle$ при $m_Q \approx 0.6 \text{ GeV}$ приблизительно в 3 раза меньше феноменологического значения [13] $\langle \bar{q} i \gamma_5 \sigma_{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}^a q \rangle$ при $m_Q = 0$. Таким образом, неконтролируемая (разложением по $1/m_Q$) область от $m_Q \approx 0.6 \text{ GeV}$ до $m_Q = 0$ вносит фактор ~ 3 . Так что буквальной сшивки, как обсуждалось в [14], не существует. Вполне вероятно, что множитель 3, с приемлемой точностью, — универсальный фактор. Предположение о такой универсальности дает возможность оценить ВС при $m_Q = 0$, если известна соответствующая величина при $m_Q \approx 0.6 \text{ GeV}$ *. С учетом сказанного, мы ожидаем, что

$$\langle \bar{q} \lambda^a q \bar{q} \lambda^a q \rangle \approx +1.5 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^6, \quad m_Q \approx 0.6 \text{ GeV} \quad (3.4)$$

$$\langle \bar{q} \lambda^a q \bar{q} \lambda^a q \rangle \approx 3 \cdot (1.5) \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^6 \approx 4.5 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^6, \quad m_Q = 0 \quad (3.5)$$

Для сравнения приведем факторизованное значение:

$$\langle \bar{u} \lambda^a d d \bar{u} \lambda^a u \rangle_\mu \approx -\frac{4}{9} \langle \bar{u} u \rangle \langle \bar{d} d \rangle \approx -10^{-4} \text{ GeV}^6 \quad (3.6)$$

Таким образом, если подходить к ВС $\langle \bar{q} \lambda^a q \bar{q} \lambda^a q \rangle$ со стороны больших m_Q , мы получаем обратный знак и малость абсолютной величины по сравнению с факторизованным значением. Это свидетельствует в пользу сильного сокращения вкладов, так что истинное значение по абсолютной величине заведомо меньше (3.5), (3.6). Такой вывод подтверждается и феноменологическим анали-

* Заметим, что предположение о такой универсальности никак не отражается, на качественных результатах для безразмерных отношений, и не критично для дальнейших обсуждений.

зом (2.17ж). Мы не настаиваем на оценке (3.5) даже по порядку величины, так как область от $m_Q \approx 0.6 \text{ GeV}$ до $m_Q \approx 0.15 \text{ GeV}$ совершенно не контролируема. Для нас главное, что существуют конкурирующие механизмы, приводящие к различным знакам для обсуждаемого ВС, и имеется явная тенденция к сильному сокращению между ними. Такая тенденция действительно прослеживается в области $m_Q \approx 0.6 + 0.8 \text{ GeV}$, где разложение по $1/m_Q$ поддается контролю.

Теперь коротко обсудим вопрос о величине ВС $\langle \bar{q} \lambda^a q \bar{q} \lambda^a q \rangle$. Факторизованное значение соответствующей величины равно нулю. Что касается ведущего по m_Q вклада, то он обусловлен диаграммой (рис.5) и имеет лишний фактор $\sim \alpha_s/\pi$ по сравнению с разложением (3.1). Таким образом, в пределе больших m_Q имеем:

$$\frac{\langle \bar{q} \lambda^a q \bar{q} \lambda^a q \rangle}{\langle \bar{q} \lambda^a q \bar{q} \lambda^a q \rangle} \sim \frac{\alpha_s}{\pi} \ll 1 \quad (3.7)$$

Этот результат качественно согласуется с феноменологическим соотношением (2.17з).

Что изменится при переходе от $\Gamma = I$ к $\Gamma = \sigma_{\mu\nu}$? В этом случае ведущий по m_Q и факторизованный вклады имеют одинаковые знаки и складываются (а не вычитаются, как в случае $\Gamma = I$)*. Поэтому можно ожидать, что истинное значение $\langle \bar{q} \sigma_{\mu\nu} \lambda^a q \bar{q} \sigma_{\mu\nu} \lambda^a q \rangle$ будет больше факторизованного значения. Это и подтверждается феноменологически (2.17и).

Перейдем к обсуждению ВС $\langle \bar{q} \sigma_{\mu\nu} \lambda^a q \bar{q} \sigma_{\mu\nu} \lambda^a q \rangle$, факторизованное значение которого равно нулю. В этом случае ведущий по m_Q вклад обусловлен диаграммой (рис.4) без дополнительной малости α_s/π . Поэтому соотношения, аналогичного (3.7), не

* Различие в знаках сразу видно из соотношений Фирца:

$$\bar{q} \lambda^a q \bar{q} \lambda^a q = -\frac{4}{9} \bar{q} q \bar{q} q - \frac{1}{4} \bar{q} \sigma_{\mu\nu} \lambda^a q \bar{q} \sigma_{\mu\nu} \lambda^a q + \dots$$

$$\bar{q} \sigma_{\mu\nu} \lambda^a q \bar{q} \sigma_{\mu\nu} \lambda^a q = \frac{16}{3} \bar{q} q \bar{q} q - \frac{1}{6} \bar{q} \sigma_{\mu\nu} \lambda^a q \bar{q} \sigma_{\mu\nu} \lambda^a q$$

Здесь мы сохранили лишь необходимые слагаемые: $\bar{q} q \bar{q} q$ — приводит к факторизованному значению; $\bar{q} \sigma_{\mu\nu} \lambda^a q \bar{q} \sigma_{\mu\nu} \lambda^a q$ после замыкания $\bar{q} \sigma_{\mu\nu} \lambda^a q$ на петлю дает $\bar{q} \sigma_{\mu\nu} \lambda^a q \bar{q}$ и тем самым определяет коэффициент лидирующего по m_Q вклада.

возникает. Вместо (3.7) имеем:

$$\langle \bar{Q} b_{\mu} \lambda^a Q \bar{b}_{\mu} \lambda^a Q \rangle_{\mu} = m_Q \frac{g_s^2 / m_Q^2}{4\pi^2} \langle \bar{q} i g b_{\mu} b_{\mu} \lambda^a q \rangle + O(\frac{1}{m_Q^2}) \quad (3.8)$$

Подставляя числа, убеждаемся, что при $m_Q \approx 0.6 \text{ GeV}$

$$\langle \bar{q} q \lambda^a q \bar{q} b_{\mu} \lambda^a q \rangle_{\mu} \approx -0.4 \cdot 10^{-8} \text{ GeV}^6$$

Предполагая, как и при оценке (3.5), что изменение m_Q от 0.6 GeV до нуля вносит фактор 3, можно думать, что

$$\langle \bar{u} b_{\mu} \lambda^a u \bar{d} b_{\mu} \lambda^a d \rangle \approx -10^{-8} \text{ GeV}^6 \quad (3.9)$$

Таким образом, вновь наблюдается качественное согласие с феноменологическим значением (2.17). Усиление ВС

$$\langle \bar{u} b_{\mu} \lambda^a d \bar{d} b_{\mu} \lambda^a u \rangle = \langle (\bar{u} b_{\mu} \lambda^a u)^2 \rangle - \langle \bar{u} b_{\mu} \lambda^a u \bar{d} b_{\mu} \lambda^a d \rangle$$

в этом случае связано, в частности, с дополнительным вкладом (3.9). Учитывая, что численно величина $[-\langle \bar{u} b_{\mu} \lambda^a u \bar{d} b_{\mu} \lambda^a d \rangle]$ близка к ВС $\langle (\bar{u} b_{\mu} \lambda^a u)^2 \rangle_{\mu}$, см. (3.9), неудивительно, что истинное значение $\langle \bar{u} b_{\mu} \lambda^a d \bar{d} b_{\mu} \lambda^a u \rangle$ больше факторизованного в несколько раз.

Что касается ВС с $\Gamma = b_{\mu}, b_{\mu} b_{\nu}$, то соответствующие соотношения Фирца не содержат структуры $\bar{q} b_{\mu} \lambda^a q \bar{Q} b_{\mu} \lambda^a Q$. Поэтому отсутствуют лидирующие вклады $\sim m_Q \langle \bar{q} i g b_{\mu} b_{\mu} q \rangle$, и нет оснований для сильного нарушения факторизации. Этот вывод подтверждает феноменологический анализ (2.17б,г).

3.2. О значениях других ВС, содержащих тяжелый Q -кварк

До сих пор, пока мы рассматривали ВС вида $\langle \bar{q} \Gamma \lambda^a q \bar{Q} \Gamma \lambda^a Q \rangle$ мы могли себя контролировать независимым феноменологическим анализом с помощью правил сумм (глава 2). (Напомним, что именно такие ВС $\sim \lambda^a \otimes \lambda^a$ возникают в методе правил сумм). Оказалось, что оба подхода дают качественно одинаковые результаты, наиболее яркое из которых — большая величина нефакторизуемого ВС с $\Gamma = b_{\mu}$, и малость $\sim \alpha_s^2/\pi$ в случае остальных структур.

Нас интересует не только структура $\lambda^a \otimes \lambda^a$, но и $1 \otimes 1$. К сожалению, такая структура не возникает в правилах сумм и не может быть изучена методами 2 главы. В то же время рассмотрение ВС с тяжелым Q -кварком вполне приспособлено для этих целей. Наиболее характерным предсказанием в этом случае будет

соотношение:

$$\frac{\langle \bar{q} \Gamma q \bar{Q} \Gamma Q \rangle}{\langle \bar{q} \Gamma Q \bar{Q} \Gamma q \rangle} \ll 1, \quad \Gamma \neq 1 \quad (3.10)$$

Соотношение (3.10) утверждает, что ВС, факторизованное значение которого равно нулю, действительно мало в естественном масштабе.

Мы предполагаем, что безразмерное отношение (3.10) остается справедливым и в случае ВС, не содержащих тяжелых кварков. Такой вывод подтверждается проведенным выше анализом для всех других ВС, где результаты контролировались независимым образом. Более того, в IV главе, будут приведены дополнительные аргументы в пользу справедливости (3.10) для ВС, состоящих из легких кварков.

Остановимся коротко еще на нескольких соотношениях, величины которых крайне чувствительны к структуре вакуумных флуктуаций. Прежде всего рассмотрим ВС $\langle \bar{Q} b_{\mu}^a b_{\mu}^a Q \rangle$ и $\langle \bar{Q} i b_{\nu}^a b_{\nu}^a Q \rangle$. При больших m_Q имеем:

$$\langle \bar{Q} g^2 Q \rangle = -\frac{1}{3} \frac{1}{m_Q} \langle \alpha_s^2 b_{\mu}^a b_{\mu}^a \rangle + O(\frac{1}{m_Q^2}) \quad (3.11)$$

$$\langle \bar{Q} g^2 i b_{\nu}^a b_{\nu}^a Q \rangle = -\frac{1}{2} \frac{1}{m_Q} \langle \alpha_s^2 b_{\mu}^a b_{\mu}^a b_{\nu}^b b_{\nu}^b \rangle + O(\frac{1}{m_Q^2}) \quad (3.12)$$

Предполагая (с точностью до 2+3) справедливость вакуумного прокладывания для величин $\langle G^a \rangle$ (см. главу 5) имеем соотношение:

$$\left| \frac{\langle \bar{Q} g^2 i b_{\nu}^a b_{\nu}^a Q \rangle}{\langle \bar{Q} g^2 b_{\mu}^a b_{\mu}^a Q \rangle} \right| \lesssim 10^{-1} \quad (3.13)$$

Соотношение (3.13), с нашей точки зрения, сохранится и для легких кварков, как и во всех предыдущих случаях. Независимые аргументы в пользу этого будут приведены ниже, в 5 главе.

Последнее ВС, которое мы рассмотрим имеет вид:

$$\langle \bar{Q} i g^2 b_{\mu}^a b_{\mu}^b \lambda^c f^{abc} b_{\mu} \lambda^c Q \rangle \quad \text{Соответствующее факторизованное значение равно нулю. При больших } m_Q \text{ имеем соотношение:}$$

$$\langle \bar{Q} i \not{D}^2 \not{G}_{\mu\nu}^a \not{G}_{\lambda\sigma}^b + abc \lambda^c \not{G}_{\mu\lambda} \not{Q} \rangle_{\mu} = m_Q \ln \frac{\Lambda^2}{m_Q^2} \frac{1}{4\pi^2} \langle g^3 G^3 \rangle + \frac{1}{12\pi^2} m_Q \langle (g^2 f^{abc} \not{G}_{\mu\nu}^b \not{G}_{\lambda\sigma}^c)^2 \rangle + O(\frac{1}{m_Q^2}) \quad (3.14)$$

По сравнению с ВС (3.11), факторизованное значение которого отлично от нуля, величина (3.14) того же порядка. Действительно, при $m_Q \approx 0.6 \text{ GeV}$ (но $m_Q \ll \mu \approx 1.5 \text{ GeV}$) из (3.11), (3.14) имеем:

$$\frac{\langle \bar{Q} i \not{D}^2 \not{G}_{\mu\nu}^a \not{G}_{\lambda\sigma}^b + abc \lambda^c \not{G}_{\mu\lambda} \not{Q} \rangle}{\langle \bar{Q} g^2 G^2 Q \rangle} = - \frac{m_Q \ln \frac{\Lambda^2}{m_Q^2} \cdot 12 \cdot \langle g^3 G^3 \rangle}{\langle g^4 G^2 G^2 \rangle} = -1 \quad (3.15)$$

В (3.15) были подставлены численные значения: $m_Q \approx 0.6 \text{ GeV}$, $\langle g^3 G^3 \rangle \approx 0.06 \text{ GeV}^6$ (2.17), $\langle g^4 G^2 G^2 \rangle \approx \langle g^2 G^2 \rangle^2 \approx 0.25 \text{ GeV}^8$ (глава 5).

Соотношения (3.13), (3.15) еще раз демонстрируют существенность лоренц-цветовой структуры оператора. В обоих случаях факторизованные значения равны нулю. Соответствующая малость действительно сохраняется в соотношении (3.13) и исчезает в (3.15). Для ВС, содержащих легкие кварки, наблюдается аналогичное явление (глава 5). Интерпретация этих соотношений в рамках инстантонной модели [7,8] представлена в гл.6.

3.3. Обсуждения

Общий вывод, аргументы в пользу которого приведены выше, состоит в следующем. Для четырехфермионных ВС вида $\langle \bar{q} \Gamma \lambda^a Q \bar{q} \Gamma \lambda^b q \rangle$ сохранение лидирующих по N_c вкладов в общем случае не оправдывается для оценки при $N_c = 3$, и тем самым факторизация не имеет места. Имеется дополнительный размерный параметр m_Q , который и определяет величины ВС. Разложение по $1/m_Q$, контролируемое в области $m_Q \approx 0.6 \text{ GeV}$, показывает, что при $N_c = 3$ все феноменологические результаты (2.17) находят качественное подтверждение в рассматриваемой схеме. Таким образом, вычисление ВС с кварками нулевой массы и $N_c \rightarrow \infty$ в меньшей степени отражает реальный мир, чем аналогичные вычисления с $m_Q \approx 0.6 \text{ GeV}$ и $N_c = 3$. Отметим, что сильное нарушение счета по N_c подробно обсуждалось в [6]. В этой же работе был сделан

вывод, что только для классических векторных (ток $\bar{q} \Gamma q$) и тензорных (ток $\bar{q} \Gamma \not{D} q$) мезонов имеет место соответствие между счетом по N_c и экспериментом: экспериментально малые величины, малы и по параметру N_c . Аналогичное утверждение справедливо и в нашем случае: для ВС, содержащих структуры $\Gamma = \not{G}_{\mu\nu}, \not{G}_{\mu\nu} \not{D}_{\lambda\sigma}$ счет по N_c эффективен и справедлива гипотеза факторизации. В других каналах этого явления не наблюдается.

В случае рассмотрения ВС с тяжелым Q -кварком имеется размерный параметр m_Q , определяющий, по существу, величины ВС. При уменьшении m_Q мы теряем контроль над разложением по $1/m_Q$, однако информация о структуре ВС сохраняется, что и подтверждают феноменологические результаты (2.17) для ВС, содержащих легкие кварки.

4. МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ЧЕТЫРЕХФЕРМИОННЫХ ВАКУУМНЫХ СРЕДНИХ

В настоящей главе предлагается новый полуфеноменологический метод определения различных ВС. В частности, единым образом воспроизводятся все соотношения (2.17), по крайней мере, на качественном уровне.

4.1. Идея подхода

Суть метода состоит в следующем. Предположим, что мы знаем матричный элемент $\langle 0 | \bar{u} i \not{D} u | \pi^0 \rangle = \kappa_{\pi}$. Тогда, используя PCAC мы узнаем и ВС $\langle \bar{u} u \rangle$. То же самое относится и к более сложным операторам, содержащим кварковые поля. Например, зная $\langle \bar{u} i \not{D} \not{G}_{\mu\nu} \not{D} u | \pi^0 \rangle$ можно найти ВС $\langle \bar{u} i \not{D} \not{G}_{\mu\nu} \not{D} u \rangle$

Возникает вопрос - как найти соответствующие χ -мезонные матричные элементы? Ответ состоит в том, что необходимо рассмотреть коррелятор:

$$i \int e^{iqx} dx \langle 0 | T \{ O(0), \frac{\bar{u} i \not{D} u - \bar{d} i \not{D} d}{12} (x) \} | 0 \rangle = \Pi(q^2) \quad (4.1)$$

при $Q^2 = -q^2 \rightarrow \infty$. Здесь O - некоторый локальный оператор, Π - мезонный матричный элемент, от которого $\langle 0 | O | \pi \rangle$ нас интересует. Если бы нарушение асимптотической свободы для кор-

релятора (4f) контролировалось обычными степенными поправками $\sim \langle \sigma^2 \rangle$, ..., то мы бы имели стандартные правила сумм, позволяющие определить π -мезонный вычет $\langle 0/0/\pi \rangle$. Далее, используя PCAC, можно было бы найти BC $\sim \langle 0 \rangle$. Хорошо известно [6] однако, что 0^+ -каналы являются выделенными - решающую роль в этих каналах играют прямые инстантонные вклады. Именно они определяют характерные значения \bar{Q}^2 , где начинается отход от асимптотического режима.

Итак, задача определения BC свелась к вычислению прямых инстантонных вкладов в соответствующем корреляторе. Ясно, что обе эти задачи достаточно сложны и, на первый взгляд, не видны преимуществ сведения одной задачи к другой. Реально, преимущества велики и заключаются в том, что неопределенность в вычислении π -мезонного матричного элемента (и соответствующего BC) методом правил сумм существенно меньше неопределенности в оценке прямого инстантонного вклада. Поясним сказанное на следующем примере. В стандартных ρ -мезонных правилах сумм [1] имеется неопределенность в величинах BC $\sim \langle \sigma^2 \rangle$, $\langle (\bar{q}q)^2 \rangle$ порядка фактора 1.5+2. Это не мешает, однако, извлекать ρ -мезонный вычет с точностью $\sim 10\%$. Такая точность связана, конечно, с тем, что правила сумм работают в области, где степенные поправки $\sim \langle \sigma^2 \rangle$, $\langle (\bar{q}q)^2 \rangle$ малы (10+30%) и неопределенность в их значении слабо сказывается на величине вычета. Кроме того, все размерные параметры выражаются как корень высокой степени из соответствующего BC; например, $m_\rho \sim [\langle \bar{q}q \rangle^2]^{1/6}$. Ясно, что неопределенность BC на уровне фактора 2, несущественно влияет на m_ρ .

То же самое относится к правилам сумм, связанным с коррелятором (4.I) - неопределенность в оценке прямого инстантонного вклада на уровне 10 приведет к неопределенности π -мезонного вычета (а тем самым и соответствующего BC) на уровне фактора 2.

Отметим, что явное вычисление прямого вклада даже по порядку величины в настоящее время - задача нереальная. Основная неопределенность связана с абсолютным значением эффективной плотности инстантонов [6,8,16] - $d_{eff}(\rho)$. Именно $d_{eff}(\rho)$ определяет величину прямого вклада и, тем самым, область \bar{Q}^2 , где начинает нарушаться асимптотический режим. Неопределен-

ность существенно уменьшается, когда рассматриваются отношения прямых вкладов однотипных корреляторов. Например, считая величину $\langle \bar{q}q \rangle$ - заданной (а тем самым задан и матричный элемент $\langle 0/\bar{q}d_5q/\pi \rangle$), можно феноменологическим образом определить величину прямых вкладов и значение \bar{Q}^2 , где начинается нарушение асимптотического режима в корреляторе (4.I) с $O_1 = \frac{1}{12}(\bar{u}i\gamma_5 u - \bar{d}i\gamma_5 d)$. Напомним, что в методе правил сумм значение \bar{Q}^2 по существу определяет интересующий нас вычет. Далее, рассмотрим коррелятор $0 = O_2$. Всё изменение, связанное с прямым вкладом, свелось лишь к некоторым числовым факторам. Тем самым можно определить \bar{Q}^2 через феноменологически известную величину \bar{Q}^2 . Ясно, что главная неопределенность в оценке прямого вклада, связанная с величиной $d_{eff}(\rho)$ при таком способе действия, исчезла.

Выпишем последовательность действий, которой мы будем следовать для нахождения BC.

I	→	II	→	III	→	IV
Вычисление прямого инстантонного вклада (с точностью ~ 10) через феноменологически известные величины.		Определение характерного масштаба \bar{Q}^2 , где начинается нарушение асимптотического режима (точность ~ 2).		Нахождение π -мезонного матричного элемента (точность ~ 2).		Определение BC с помощью PCAC (точность ~ 2). (ж)

И наконец, еще одно существенное замечание. Те, кто работал с правилами сумм КХД, знают, что матричный элемент оператора по низколежащему состоянию можно найти с помощью правил сумм далеко не всегда. Только в том случае, если соответствующие правила сумм чувствительны к низшему (а не возбужденному) состоянию, процедура фитирования позволяет определить соответствующий вычет. В случае правил сумм, где прямые вклады отсутствуют, вопрос чувствительности к низшему резонансу контролируется степенными поправками. В случае рассмотрения корреляторов, существенно роль в которых играют прямые вклады, нет последовательной схемы соответствующих вычислений. Единственное, что известно - это феноменологическое значение \bar{Q}^2 , где начи-

нается нарушение асимптотического режима. К сожалению, это знание не позволяет решить вопрос о насыщении правил сумм низшим резонансом.

Таким образом, если правила сумм таковы, что насыщение низшим резонансом имеет место, то мы можем определить вычет (а тем самым и соответствующее ВС) с точностью до фактора ~ 2 . Если низший резонанс не насыщает правил сумм, то метод позволяет дать только верхнюю границу для соответствующего матричного элемента (и тем самым для ВС). Истинное значение ВС в этом случае мало в естественном масштабе, и его величина не контролируется.

Основные результаты сводятся к следующему.

а). Описанный выше метод позволяет воспроизвести феноменологические результаты (2.17) и тем самым подтверждается правильность подхода в целом.

б). Анализ четырехфермионных ВС показывает, что их нормировка определяется факторизованными значениями. Отклонение от факторизации связано с изменением масштаба в соответствующем корреляторе (см. ниже) и достигает фактора ~ 3 . Кроме того, подход явно демонстрирует существенную роль кинематической структуры. Даже без подробных модельных вычислений прямых вкладов можно сделать качественные заключения о величинах ВС по отношению к своим факторизованным значениям. Это относится, в частности, к соотношениям (2.17д-ж). Мы расцениваем этот качественный, модельно-независимый факт как подтверждение справедливости программы (ж) и правильности нетривиальных феноменологических данных (2.17д-ж).

в). Анализ ВС, факторизованные значения которых равны нулю, демонстрирует согласованность результатов настоящей главы с феноменологическими результатами правил сумм (глава 2, соотношения (2.17)) и с соотношениями для ВС, содержащих тяжелый Q -кварк ((3.9), (3.10), (3.13), (3.15), глава 3).

4.2. Феноменологический анализ псевдоскалярного тока

В этом пункте мы коротко напомним известные результаты, связанные с анализом псевдоскалярного тока. В последующем, изучая более сложные операторы, будем ориентироваться на феноменологические результаты данного пункта.

Следуя общей схеме, рассмотрим коррелятор:

$$i \int dx e^{i q x} \langle 0 | T \left\{ \frac{\bar{u} i \not{\partial}_5 u - \bar{d} i \not{\partial}_5 d}{i \not{\partial}^2}(x), \frac{\bar{u} i \not{\partial}_5 u - \bar{d} i \not{\partial}_5 d}{i \not{\partial}^2}(0) \right\} | 0 \rangle = \Gamma \quad (4.2)$$

при $Q^2 = -q^2 \rightarrow \infty$. Асимптотический ведущий вклад определяется рис.6 и равен: $\Gamma_{\text{as.}}(Q^2) = +3/8\pi^2 Q^2 \ln Q^2 [1]$. Прямой инстантонный вклад, графически выражаемый рис.7, представляется в следующем виде [1,6,8]:

$$\Gamma_{I+\bar{I}}(Q^2) = 2Q^2 \int d\text{eff.}(\rho) d\rho / K_1(\rho Q)^2 \left[m_s - \frac{2\pi^2}{3} \rho^2 \langle \bar{s}s \rangle \right]. \quad (4.3)$$

Здесь m_s - масса странного кварка, $d\text{eff.}(\rho)$ - эффективная плотность инстантонов размером ρ [6,8,16], $K_1(\rho Q)$ - соответствующая функция Макдональда. Как видно из (4.3), часть эффективной плотности, связанная с легкими кварками, выделена отдельно. Кроме того, опущен качественно несущественный множитель $\sim \int \bar{q} q \bar{b} b \bar{t} t$ [16]. В дальнейшем, положим $m_s = 0$ и для численных оценок заменим функцию Макдональда её асимптотическим ($\rho Q \gg 1$) выражением: $K(\rho Q) \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2\rho Q}} e^{-\rho Q}$.

С учетом изложенных выше замечаний, после процедуры борелизации ("L") приходим к следующим правилам сумм:

$$\frac{1}{\pi} \frac{1}{M_1^2} \int \text{Im} \Pi(s) e^{-s/M_1^2} ds = L(\Gamma_{\text{as.}}(Q^2) + \Gamma_{I+\bar{I}}(Q^2)) = \frac{3}{8\pi^2} M_1^2 \left[1 - \frac{16}{9} \pi^4 \langle \bar{q}q \rangle M_1 \int \rho^3 d\text{eff.}(\rho) e^{-M_1^2 \rho^2} d\rho \right], \quad (4.4)$$

связывающим π -мезонный матричный элемент с характерной величиной прямых вкладов и с характерным масштабом M_1^2 нарушения асимптотической свободы в данном канале.

Что феноменологически известно о правилах сумм (4.4)? Известен π -мезонный вклад. Он равен: $\frac{1}{\pi} \int \text{Im} \Pi_\pi(s) ds = \left(\frac{1}{M_1^2} \frac{m_\pi^2}{m_u + m_d} \right)^2$.

Согласно оценкам Лейтвиллера [3] (современное обсуждение см.

в [18]) $m_u(\mu) + m_d(\mu) \approx 11 \text{ MeV}$, где $d_s(\mu) \sim 1$. Таким образом, характерный масштаб \bar{M}_1^2 нарушения асимптотической свободы в этом канале большой и порядка: $\bar{M}_1^2 \approx 2+3 \text{ GeV}^2$. Обычные степенные поправки заведомо не обеспечивают такого масштаба (поэтому и опущены в (4.4)), так как в этой области численно малы. Именно этот факт послужил для авторов работы [6] сильным аргументом в пользу существенности прямых флуктуаций в рассматриваемом канале. Мы придерживаемся точки зрения работы [6] о лидирующей роли прямых вкладов в O^- -каналах и во всех дальнейших оценках последовательно эксплуатируем это предположение.

В последующем, вычисляя прямые вклады для более сложных корреляторов, будем ориентироваться на соотношение (4.4). Это позволит феноменологическим (или модельным) образом выяснить характерный масштаб нарушения асимптотической свободы в интересующем нас корреляторе (по сравнению с известной величиной $\bar{M}_1^2 \approx 2+3 \text{ GeV}^2$).

4.3. Вопросы факторизуемости четырехфермионных ВС.
Качественное обсуждение

Прежде чем реализовать программу (ж) в количественном аспекте, обсудим качественные моменты, не прибегая к явному вычислению прямых вкладов. Тем самым все качественные результаты, представленные ниже, по существу модельно-независимы.

4.3.1. Следуя общей схеме рассмотрим коррелятор (4.1) с $O = \bar{u} \Gamma \lambda^a s \bar{s} \Gamma \lambda^a u$ \equiv :

$$i \int dx e^{iqx} \langle 0 | T \{ \bar{u} \Gamma \lambda^a s \bar{s} \Gamma \lambda^a u(x), \frac{\bar{u} d s u - \bar{d} s d}{12} (0) \} | 0 \rangle = P(\Gamma, \lambda) \quad (4.5)$$

Если бы нам удалось найти π -мезонный вклад в этот коррелятор, то тем самым мы бы определили ВС $\langle \bar{u} \Gamma \lambda^a s \bar{s} \Gamma \lambda^a u \rangle$ совпадающее (в согласии с $SU(3)$) с 20%-30% точностью с интересующим нас ВС $\langle \bar{u} \Gamma \lambda^a d \bar{d} \Gamma \lambda^a u \rangle$.

* Если в операторе "0" заменить s кварк на d , то коррелятор (4.5), как и матричный элемент $\langle \bar{u} \Gamma \lambda^a d \bar{d} \Gamma \lambda^a u | \pi \rangle$, $\Gamma = I, \delta_5, \sigma_{\mu\nu}$ равны нулю в $SU(2)$ пределе. Именно с этим фактом и связан наш выбор оператора O , содержащего поле s -кварка.

Асимптотически ведущий ($Q^2 \rightarrow \infty$) вклад в пределе $m_q \rightarrow 0$ определяется диаграммой рис.8 и равен:

$$P_{as.}(Q^2, \Gamma) = \frac{|\langle \bar{s}s \rangle|}{12} \Delta_\Gamma \left[\frac{3}{8\pi^2} Q^2 \ln Q^2 \right] \quad (4.6)$$

$$L \cdot P_{as.}(Q^2, \Gamma) = \frac{|\langle \bar{s}s \rangle|}{12} \Delta_\Gamma \frac{3}{8\pi^2} M^2$$

$\Delta_\Gamma = -4/9, -4/9 -16/9 +16/9 +16/3$, для $\Gamma = I, \delta_5, \delta_\mu, \delta_\mu \delta_5, \sigma_{\mu\nu}$. Заметим, что Δ_Γ в точности совпадает с коэффициентами, определяемыми факторизацией. Это и понятно - выделение синглетного $\sim \langle \bar{s}s \rangle$ множителя в операторе O при факторизации и при вычислении коррелятора (4.5) - одна и та же процедура. Кроме того, множитель $3/8\pi^2 Q^2 \ln Q^2$ в точности совпадает с выражением асимптотического вклада в корреляторе (4.2), рис.6.

Таким образом, если бы характерные масштабы M^2 в корреляторах (4.5) и (4.2) совпадали, мы бы получили значения ВС для четырехфермионных операторов, точно совпадающие с факторизованными значениями. (Подробнее см. п.4.4).

Реально дело обстоит не так.

Рассмотрим хорошо изученные (феноменологически) примеры ВС с $\Gamma = \delta_\mu, \delta_\mu \delta_5$ [1]. В этом случае гипотеза факторизации работает достаточно надежно (не хуже 30%). Из этого факта естественно сделать вывод, что характерный масштаб в корреляторе (4.5) $M^2(\Gamma = \delta_\mu, \delta_\mu \delta_5)$ действительно совпадает с соответствующей величиной для коррелятора (4.2): $M^2(\Gamma = \delta_\mu, \delta_\mu \delta_5) \approx M_1^2 \approx (2+3) \text{ GeV}^2$. Это феноменологическое соотношение эквивалентно (2.17а) и пригодится для дальнейшего обсуждения.

4.3.2. Теперь обсудим ВС с $\Gamma = I, \delta_5, \sigma_{\mu\nu}$. Какое значение для величин этих ВС можно было бы ожидать? Тот же вопрос зададим по другому - каков характерный масштаб M^2 ($\Gamma = I, \delta_5, \sigma_{\mu\nu}$) для коррелятора (4.5) с $\Gamma = I, \delta_5, \sigma_{\mu\nu}$? Существенная разница между этим случаем и рассмотренным выше (с $\Gamma = \delta_\mu, \delta_\mu \delta_5$) состоит в том, что для $\Gamma = I, \delta_5, \sigma_{\mu\nu}$ отличен от нуля вклад инстантонных нулевых мод [6,8,16] (прямой инстантонный вклад в этом случае велик). Это приводит к увеличению M^2 ($\Gamma = I, \delta_5, \sigma_{\mu\nu}$) по сравнению с $M^2(\Gamma = \delta_\mu, \delta_\mu \delta_5) \approx M_1^2 \approx 2+3 \text{ GeV}^2$ в несколько раз. Последнее утверждение следует из

анализа (опять таки феноменологического) работы [6], где показано, что отношение масштабов в кварковых корреляторах, допускающих и не допускающих нулевые моды, порядка фактора 2+3.

Таким образом, чисто феноменологический анализ дает:

$$\bar{M}^2(\Gamma=1, \delta_5, \sigma_{\mu\nu}) \approx (2 \div 3) \bar{M}^2(\Gamma=\delta_{\mu}, \delta_{\mu} \delta_5) = (2 \div 3) \bar{M}_1^2, \quad (4.7)$$

и рост масштаба приводит (в случае насыщения π -мезоном, см. ниже) к соответствующему увеличению ВС по сравнению с факторизованным значением.

Другой вопрос, который необходимо решить для оценки ВС связан с насыщением правил сумм π -мезоном. Этот вопрос существенно более сложный и не имеет строгого теоретического ответа. Дело в том, что этот вопрос связан со знанием функционального (по M^2) поведения прямого вклада - именно он определяет, какой из резонансов (низший или возбужденный) насыщает правила сумм. Так как на сегодня не существует последовательного метода расчета прямых вкладов, то и ответ на вопрос о насыщении π -мезоном отсутствует.

Таким образом, строго говоря, программа (ж) позволяет определить лишь верхнюю границу для ВС. Если имеет место насыщение π -мезоном - верхняя граница совпадает с истинным значением; если нет - то ВС существенно меньше (величина уменьшения не контролируется) факторизованного значения. Феноменологически реализуются оба случая. Соотношение (2.17д) демонстрирует, что масштаб действительно вырос и π -мезон насыщает соответствующие правила сумм. Соотношение (2.17е) указывает на отсутствие насыщения. Поэтому, для ВС $\langle \bar{u} \sigma_{\mu\nu} \lambda^a d \bar{d} \sigma_{\mu\nu} \lambda^a u \rangle$ описанный метод дает разумное согласие с феноменологическим результатом (2.17д). В случае ВС $\langle \bar{u} \lambda^a d \bar{d} \lambda^a u \rangle$ метод позволяет оценить лишь верхнюю границу. Можно ли было предвидеть малость величины $\langle \bar{u} \lambda^a d \bar{d} \lambda^a u \rangle$ заранее? Ответ положительный.

Рассмотрим соотношение Фирца для этого ВС:

$$\bar{u} \lambda^a d \bar{d} \lambda^a u = -\frac{4}{3} \bar{u} u \bar{d} d + \sum_i c_i \bar{u} \Gamma_i u \bar{d} \Gamma_i d - \quad (\Gamma_i = \delta_5, \delta_1, \delta_1 \delta_5, \sigma_{\mu\nu})$$

$$-\frac{1}{24} \bar{u} \sigma_{\lambda\delta} \lambda^a u \bar{d} \sigma_{\lambda\delta} \lambda^a d + \sum_j c_j \bar{u} \lambda_j^a \Gamma_j u \bar{d} \lambda_j^a \Gamma_j d \quad (\Gamma_j = 1, \delta_5, \delta_1, \delta_1 \delta_5)$$

Как будет показано ниже, п.4.3.3, 4.3.4, все ВС с нулевым факторизованным значением и со структурой, отличной от $\bar{u} \sigma_{\mu\nu} \lambda^a u \bar{d} \sigma_{\mu\nu} \lambda^a d$, численно малы $\sim \alpha_s/\pi$. Поэтому, пренебрегая соответствующими вкладами в приведенном выше соотношении, имеем ($c_i, c_j > 0$):

$$\langle \bar{u} \lambda^a d \bar{d} \lambda^a u \rangle \approx -\frac{4}{3} \langle \bar{u} u \bar{d} d \rangle - \frac{1}{24} \langle \bar{u} \sigma_{\mu\nu} \lambda^a u \bar{d} \sigma_{\mu\nu} \lambda^a d \rangle$$

Так как оба вклада численно одинаковы, и имеют противоположные знаки, невозможно реально оценить это ВС. Заметим, что для величины $\langle \bar{u} \sigma_{\mu\nu} \lambda^a d \bar{d} \sigma_{\mu\nu} \lambda^a u \rangle$ оба существенных вклада имеют один знак, и результат данного подхода воспроизводит феноменологическое соотношение (2.17).

4.3.3. Обсудим качественно, что можно было бы ожидать для ВС $\langle \bar{u} \Gamma \lambda^a u \bar{s} \Gamma \lambda^a s \rangle$, факторизованное значение которых равно нулю. Как обычно, рассмотрим коррелятор:

$$i \int dx e^{iqx} \langle 0 | T \{ \bar{u} \Gamma \lambda^a u \bar{s} \Gamma \lambda^a s (0), \frac{\bar{u} \delta_5 u - \bar{d} \delta_5 d (0)}{12} \} | 0 \rangle = K(\varphi^2) \quad (4.8)$$

при $\varphi^2 = -q^2 \rightarrow \infty$. Прежде всего обсудим ВС с $\Gamma = \sigma_{\mu\nu}$. В этом случае лидирующий вклад определяется рис.9 и пропорционален $\langle \bar{q} i \delta \sigma_{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \lambda^a q \rangle$. Большая величина этого вклада обусловлена специфической лоренц-цветовой структурой четырехфермионного ВС $\langle \bar{s} \sigma_{\mu\nu} \lambda^a s \bar{u} \sigma_{\mu\nu} \lambda^a u \rangle$. Таким образом, для $\Gamma = \sigma_{\mu\nu}$ имеем:

$$\left| \frac{\langle \bar{s} \sigma_{\mu\nu} \lambda^a s \bar{u} \sigma_{\mu\nu} \lambda^a u \rangle}{\langle \bar{s} \sigma_{\mu\nu} \lambda^a u \bar{u} \sigma_{\mu\nu} \lambda^a s \rangle} \right| \approx \frac{\text{рис.9}}{\text{рис.8}} \sim \frac{\langle \bar{q} i \delta \sigma_{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \lambda^a q \rangle}{\langle q q \rangle M^2} \sim 1 \quad (4.9)$$

В случае $\Gamma \neq \sigma_{\mu\nu}$; главный вклад связан с оператором $\langle \bar{q} q \rangle$ и определяется рис.10. В этом случае имеется лишняя петлевая малость $\sim \alpha_s/\pi$, что и приводит к уменьшению соответствующих ВС*:

$$\frac{\langle \bar{s} \Gamma \lambda^a s \bar{u} \Gamma \lambda^a u \rangle}{\langle \bar{s} \Gamma \lambda^a u \bar{u} \Gamma \lambda^a s \rangle} \sim \frac{\text{рис.10}}{\text{рис.8}} \sim \frac{\alpha_s}{\pi} \ll 1, \quad \Gamma = 1, \delta_5, \delta_{\mu}, \delta_{\mu} \delta_5 \quad (4.10)$$

Все эти качественные моменты полностью подтверждаются феноменологическими данными (2.17).

* Прямой вклад в обоих случаях одинаков, однако мал ($\leq 10+20\%$) по сравнению с рис.8 в области φ^2 , где "работают" правила сумм.

4.3.4. Обсудим качественно, что можно было бы ожидать для ВС $\langle \bar{u} \Gamma u \bar{s} \Gamma s \rangle$, факторизованное значение которых равно нулю. В отличие от предыдущего случая, мы не имеем возможности сравнить полученные результаты с феноменологическими данными (в правилах сумм гл.2 таких ВС не возникает). Однако есть возможность сравнить с аналогичными соотношениями для ВС, содержащих тяжелый Q -кварк (3.10).

Рассмотрим коррелятор:

$$i \int e^{i p x} dx \langle 0 | T \{ \bar{u} \Gamma s u \bar{s} \Gamma s (0) \} = K(4.II)$$

при $Q^2 = -q^2 \rightarrow \infty$. ВС с $\Gamma = I$ определяется рис.8 и имеет естественный масштаб величины; все остальные ВС содержат лишнюю петлевую малость $\sim ds/\pi$, что и приводит к уменьшению соответствующих ВС (см. сноску к (4.10)):

$$\frac{\langle \bar{s} \Gamma s \bar{u} \Gamma u \rangle}{\langle \bar{s} \Gamma u \bar{u} \Gamma s \rangle} \sim \frac{P_{uc. 10}}{P_{uc. 8}} \sim \frac{ds}{\pi} \ll 1, \Gamma = \delta, \gamma_\mu, \gamma_\mu \gamma_5, \gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\nu (4.I2)$$

Таким образом вновь наблюдается качественное согласие с результатами 3 главы (3.10).

4.4. Примеры количественного вычисления четырехфермионных ВС

4.4.1. Начнем реализацию программы (ж) с рассмотрения ВС $\langle \bar{u} \gamma_\mu \lambda^a s \bar{s} \gamma_\mu \lambda^a u \rangle$ и соответствующего коррелятора (4.5) с $\Gamma = \gamma_\mu$. Вклад π -мезона в $\text{Im} P(s, \Gamma = \gamma_\mu)$ определяется соотношением:

$$\varepsilon_\pi = \frac{1}{\pi} \int \text{Im} P(s) ds = \langle 0 | \bar{u} \gamma_\mu \lambda^a s \bar{s} \gamma_\mu \lambda^a u / \pi^0 \rangle. (4.I3)$$

$$\langle \pi^0 | \frac{\bar{u} \gamma_5 u - \bar{d} \gamma_5 d}{\sqrt{2}} | 0 \rangle = \sqrt{2} \frac{m_\pi^2}{m_u + m_d} \langle \bar{u} \gamma_\mu \lambda^a s \bar{s} \gamma_\mu \lambda^a u \rangle.$$

Асимптотически ведущий ($Q^2 \rightarrow \infty$) вклад (рис.8) уже вычислен. После борелизации он равен: $L \cdot P_{os.} (Q^2, \Gamma = \gamma_\mu) = \frac{3}{8\pi^2} M^2 \cdot \frac{16}{3}$.

(4.6). Далее, прямой инстантонный вклад, определяемый рис.11 вычисляется аналогично (4.3) и равен:

$$P_{I+\bar{I}} (Q^2, \Gamma = \gamma_\mu) = \frac{1}{10\pi^2} \frac{Q^5}{12} \int \frac{1}{s} \text{def.} (s) K_{-4}(sQ) K_{-1}(sQ) ds, (4.I4)$$

$$K(sQ) = \sqrt{\frac{\pi}{2sQ}} e^{-sQ}$$

$$L \cdot P_{I+\bar{I}} (Q^2, \Gamma = \gamma_\mu) = \frac{\sqrt{\pi} M^9}{20\pi^2 12} \int s^3 e^{-M^2 s^2} \text{def.} (s) ds.$$

Как обычно, для получения правил сумм используем борелизованное дисперсионное соотношение:

$$L \cdot \frac{1}{\pi} \int \frac{\text{Im} P(s)}{s + Q^2} ds = L \cdot P(Q^2), P(Q^2) = P_{os.}(Q^2) + P_{I+\bar{I}}(Q^2),$$

а вклад континуума параметризуем $\Theta(s - s_0)$ -функцией. С учетом изложенного выше, имеем:

$$\sqrt{2} \frac{m_\pi^2}{m_u + m_d} \langle \bar{u} \gamma_\mu \lambda^a s \bar{s} \gamma_\mu \lambda^a u \rangle + \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \text{Im} P(s) e^{-s/M^2} ds = (4.I5)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle \bar{s} s \rangle}{(8\pi^2)} \left(\frac{16}{3} \right) M^4 \left[1 + \frac{M^2 \sqrt{\pi}}{40k\pi^2} \int s^3 e^{-M^2 s^2} \text{def.} (s) ds \right]$$

Как уже обсуждалось выше, если бы характерный масштаб \bar{M}_c^2 , где начинается нарушение асимптотического режима, совпадал с аналогичной величиной для коррелятора (4.2), (4.4), то имела бы место факторизация. Действительно, правила сумм (4.4) утверждают, что:

$$\left(\frac{1}{\pi} \frac{m_\pi^2}{m_u + m_d} \right)^2 = \frac{3}{8\pi^2} M_c^4 \left[1 - e^{-s_0/M_c^2} \left(1 + \frac{s_0}{M_c^2} \right) \right] (4.I6)$$

Если бы $\bar{M}_c^2 \approx \bar{M}_c^2$ ($s_2 \approx s_1$), то заменяя в (4.15) $\frac{3}{8\pi^2} M_c^4 \rightarrow \frac{3}{8\pi^2} M_c^4 \rightarrow \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_\pi^2}{m_u + m_d} \right)^2$ (4.16), мы бы получили, что:

$$\varepsilon_\pi = \sqrt{2} \frac{m_\pi^2}{m_u + m_d} \langle \bar{u} \gamma_\mu \lambda^a s \bar{s} \gamma_\mu \lambda^a u \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle \bar{s} s \rangle}{3} \left[\frac{1}{\pi} \frac{m_\pi^2}{m_u + m_d} \right]^2 (4.I7)$$

Легко видеть, что соотношение (4.17) в точности означает факторизацию. Поэтому весь вопрос состоит в том, насколько отличается масштаб \bar{M}_c^2 , характеризующий правила сумм (4.15) от соответствующей величины \bar{M}_c^2 , связанной с правилами сумм (4.4). Феноменологический ответ известен - соотношение (4.7), свидетельствующее, что масштабы в этих корреляторах отличаются в несколько раз, тем самым имеет место нарушение факторизации в данном случае. Этот факт связан лишь с предположением

о лидирующей роли прямых вкладов в 0^+ каналах. Что касается конкретного численного фактора усиления — то результат модельнозависим (каков фактор усиления 2, 3 или 4 определяется критическим размером инстантона ρ_c , см. ниже).

Последующие вычисления модельнозависимы. Цель этих вычислений — выразить M_c^2 через величину ρ_c . Читателей, которых не интересует конкретный модельнозависимый фактор усиления, могут сразу обратиться к результатам (п.4.5).

4.4.2. Итак, подтверждают ли модельные оценки прямого инстантонного вклада факт увеличения масштаба для коррелятора (4.5)? Займемся соответствующими оценками. Для этого сравним (4.15) и (4.4) и зададим вопрос — при каких M_c^2 прямой вклад в (4.15) составляет 30% от ведущего члена, если в соотношении (4.4) это происходит при $M_c^2 \approx 2+3 \text{ GeV}^2$? Для дальнейших оценок очень существенно знать характерные значения ρ_c , которые насыщают интегралы типа (4.4), (4.9) — именно это место наиболее модельнозависимое в дальнейшей оценке M_c^2 . Поэтому обсудим вопрос, связанный с величиной ρ_c более подробно и рассмотрим различные феноменологические и теоретические аргументы в пользу $\rho_c \approx [(0.5+1) \text{ GeV}]^{-1}$.

а). Как известно [16], взаимодействие с внешним полем приводит к росту эффективной плотности инстантонов, начиная с $\rho \gtrsim 6 \text{ GeV}^{-1}$.

б). Имеются теоретические [19] и большое количество феноменологических [7,8] указаний в пользу соотношения $R_{conf} \approx 3\rho_c$. Считая $R_{conf} = (200 \text{ MeV})^{-1}$, имеем $\rho_c \approx (0.6 \text{ GeV})^{-1}$ [8].

в) Из низкоэнергетической теоремы известно [6], что при изменении массы странного кварка от $m_s = 0$ до $m_s = 150 \text{ MeV}$ величина $\langle \frac{d_s}{\pi} G^2 \rangle$ меняется в 2 раза. Так как часть эффективной плотности, связанной с кварками пропорциональна

$$\left[m_s - \frac{2\pi^2}{3} \rho^2 \langle \bar{s}s \rangle \right] \quad (\text{см. (4.3)}), \quad \text{то для осуществления этой зависимости необходимо предположить, что } m_s \sim -\frac{2\pi^2}{3} \rho_c^2 \langle \bar{s}s \rangle.$$

Такая оценка вновь приводит к ожиданию $\rho_c \sim \left(\frac{3m_s}{2\pi^2 \langle \bar{q}q \rangle} \right)^{1/2} \sim (0.6 \text{ GeV})^{-1}$.

г). Начиная с $\rho_c \approx (0.5 \text{ GeV})^{-1}$ индивидуальность инстанто-

на полностью теряется [16] и квазиклассическое приближение перестает быть осмысленным.

Итак, в дальнейшем мы предполагаем, что $d_{eff}(\rho)$ растет настолько быстро с ростом ρ , что все интегралы типа (4.4), (4.15) насыщаются максимально-возможным значением ρ и это значение $\rho \approx \rho_c \sim [(0.5+1) \text{ GeV}]^{-1}$.

Вернемся к сравнению (4.4) и (4.15). Абсолютная величина прямых вкладов в обоих случаях неизвестна. Зато известно феноменологически, что нарушение асимптотической свободы в (4.4) происходит при $M_c^2 \approx (2+3) \text{ GeV}^2$. Взяв отношение правых частей (4.4) и (4.15) определим M_c^2 , где начинает нарушаться асимптотический режим в корреляторе (4.15):

$$\frac{(4.15)_{I+\bar{I}}}{(4.4)_{I+\bar{I}}} = \frac{\frac{16}{9} \pi^4 \sqrt{\langle \bar{q}q \rangle} \bar{M}_c \int d_{eff}(\rho) \rho^3 e^{-M_c^2 \rho^2} d\rho}{\frac{\pi^2}{40} \frac{M_c^2}{\langle \bar{q}q \rangle} \int d_{eff}(\rho) \rho^3 e^{-M_c^2 \rho^2} d\rho} \approx (4.18)$$

$$\approx \frac{640\pi^4}{9} \exp[\rho_c^2(\bar{M}_c^2 - M_c^2)] \frac{\bar{M}_c \langle \bar{q}q \rangle^2}{M_c^2} \approx 1 \quad \text{при } \bar{M}_c^2 \approx (3+4) \text{ GeV}^2$$

Итак, явные вычисления подтверждают увеличение \bar{M}_c^2 по сравнению с M_c^2 . Качественно такое изменение понятно и связано с тем, что прямые вклады для коррелятора (4.2) пропорциональны токовой массе кварка: $m_s \rho \rightarrow 0$. Нарушение киральной симметрии снимает запрет: $m_s \rho \rightarrow m_s \rho - \frac{2\pi^2}{3} \rho_c^2 \langle \bar{s}s \rangle$ (4.3). Однако численная малость $\pi^2 \rho_c^2 \langle \bar{q}q \rangle \ll 1$ сохраняется. Для коррелятора (4.15) такой эффект отсутствует, так как есть возможность замкнуть все три кварка (u, d, s) на один инстантон, рис.II.

Заметим, что большая неопределенность в абсолютном значении $d_{eff}(\rho)$ мало влияет на оценку (4.18). Различные эффекты многоинстантонных конфигураций, эффекты перерассеяния и т.д., по существу учтены в $d_{eff}(\rho)$ и в отношении (4.18) не играют особой роли. Даже если предположить, что точность оценки (4.18) порядка фактора 10, это не сильно повлияет на оценку \bar{M}_c^2 . Действительно, если ошибка в (4.18) порядка ~ 10 , то это изменит оценку \bar{M}_c^2 на величину $\Delta \bar{M}_c^2$, где $\exp(\Delta \bar{M}_c^2 \rho_c^2) = 10$, и $\Delta \bar{M}_c^2 \approx (0.5+1) \text{ GeV}^2$.

Итак, основной итог: масштаб в корреляторе (4.15) увеличен по сравнению с (4.4) и это ведет к нарушению факторизации

на фактор 2+3, что и подтверждается феноменологически (2.17д).

4.4.3. Кратко остановимся на вычислении ВС $\langle \bar{u} b_{\mu} \lambda^a u \bar{s} b_{\mu} \lambda^a s \rangle$, факторизованное значение которого равно нулю. Для этого, следуя общей схеме, рассмотрим коррелятор (4.8) с $\Gamma = b_{\mu}$. Как уже обсуждалось в п.4.3 лидирующий вклад в этот коррелятор при $Q^2 \rightarrow \infty$ определяется величиной $\langle \bar{q} i g b_{\mu} b_{\mu} q \rangle$, рис.9. Поэтому, действуя как и при получении соотношения (4.15), приходим к следующим правилам сумм:

$$\frac{1}{M^2} \frac{1}{12} \frac{m_{\pi}^2}{m_u + m_d} \langle \bar{u} b_{\mu} \lambda^a u \bar{s} b_{\mu} \lambda^a s \rangle + \frac{1}{\pi M^2} \int_{s_0}^{\infty} \text{Im} K(s, \Gamma = b_{\mu}) e^{-s/M^2} ds =$$

$$= \frac{1}{12} \frac{1}{4\pi^2} \langle \bar{s} i g b_{\mu} b_{\mu} s \rangle \lambda^a s \left[1 + \frac{M^2}{5} \frac{\int_0^1 e^{-M^2 p^2} \text{def.}(p) dp}{\langle \bar{s} i g b_{\mu} b_{\mu} s \rangle} \right] \quad (4.19)$$

Далее, оценивая характерные значения M^2 , как и в п.4.4.2, приходим к следующему ожиданию:

$$\langle \bar{u} b_{\mu} \lambda^a u \bar{s} b_{\mu} \lambda^a s \rangle \approx (2+4) 10^{-2} \text{GeV} \langle \bar{q} i g b_{\mu} b_{\mu} q \rangle = -(0.5 \pm 1) 10^{-3} \text{GeV}^6 \quad (4.20)$$

Для сравнения: факторизованное значение $\langle \bar{u} b_{\mu} \lambda^a s \bar{s} b_{\mu} \lambda^a u \rangle \approx 10^{-3} \text{GeV}^6$ и численно близко к (4.20). Обратим внимание, что знак (4.20) определяется однозначно. Тем самым, феноменологически установленный факт увеличения ВС $\langle \bar{u} b_{\mu} \lambda^a d \bar{d} b_{\mu} \lambda^a u \rangle \equiv \langle (\bar{u} b_{\mu} \lambda^a u)^2 \rangle - \langle \bar{u} b_{\mu} \lambda^a u \bar{d} b_{\mu} \lambda^a d \rangle$ по сравнению с факторизованным значением выглядит вполне естественно — нефакторизующееся ВС (4.20) вносит в это усиление свой существенный вклад. Кроме того, (4.20) согласуется с оценкой (3.9).

4.5. Обсуждения

Сформулируем сложившуюся у нас точку зрения относительно величин четырехфермионных ВС.

а). Предположение о лидирующей роли прямых вкладов в O^+ каналах с необходимостью приводит к нарушению факторизации для некоторых ВС на уровне фактора 3.

б). Величины ВС $\langle \bar{u} \Gamma \lambda^a u \bar{d} \Gamma \lambda^a d \rangle$ и $\langle \bar{u} \Gamma u \bar{d} \Gamma d \rangle$, факторизованные значения которых равны нулю, действительно оказываются малы, за исключением структуры $\langle \bar{u} b_{\mu} \lambda^a u \bar{d} b_{\mu} \lambda^a d \rangle$.

Оба эти утверждения являются модельнонезависимыми, в том смысле, что не связаны с конкретными вычислениями прямого

вклада. Кроме того, соответствующие результаты согласуются с независимыми феноменологическими данными (2.17), тем самым подтверждая их правильность. Наблюдается, также, качественное согласие с результатами гл.3, (3.7, 3.9, 3.10), где изучались ВС, содержащие тяжелый кварк.

в). Единственное утверждение, которое является модельно-зависимым, связано с конкретной численной величиной усиления (п.4.4).

г). Отметим, что прямой инстантонный вклад в различные корреляторы (типа (4.8), (4.11)) может быть весьма велик (например, для ВС $\langle \bar{u} b_{\mu} u \bar{s} b_{\mu} s \rangle$). Несмотря на это величина $\langle \bar{u} b_{\mu} u \bar{s} b_{\mu} s \rangle$ мала. Причина этой малости связана с петлевым подавлением асимптотически ведущего вклада (см. сноску к (4.10)).

5. ИЗУЧЕНИЕ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ГЛЮОННЫХ ВС $\langle b^n \rangle$

Напомним, что основная идея 4 главы — связь ВС с соответствующим коррелятором — могла быть реализована только благодаря использованию РСАС. Это связывало матричный элемент с соответствующим ВС. Имеет ли место аналогичная связь для глюонных ВС? Ответ утвердительный. Приведенная выше программа (ж) (стр. 25) также выполнима. В этом случае на III этапе вычисляется матричный элемент по низколежащему скалярному глюонию — $b(m_b \sim 1 \text{GeV})$, а не по π -мезону. Переход от III к IV этапу (нахождение ВС из известного матричного элемента) осуществляется с помощью соответствующей низкоэнергетической теоремы. Именно низкоэнергетическая теорема наряду с малостью массы m_b (по сравнению с характерным масштабом $\sim 10 \text{GeV}^2$ в глюонном O^+ канале) позволяет определить ВС $\langle O \rangle$, если известна величина $\langle o | O | o \rangle$. Итак, причина, позволяющая реализовать переход от III к IV этапу (вычисление ВС из соответствующего матричного элемента) и в кварковом и в глюонном каналах одинакова — малость массы низколежащего состояния по сравнению с характерным масштабом в соответствующем канале ($m_{\pi}^2/m_b^2 \ll 1$, $m_b^2/M^2 = 10 \text{GeV}^2 \ll 1$).

5.1. Низкоэнергетические теоремы

Для последовательности изложения, коротко напомним результаты, относящиеся к скалярному глюонному току $J = G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a$. Следуя общей схеме, рассмотрим коррелятор:

$$i \int e^{i q x} dx \langle 0 | T \{ G^2(x), G^2(0) \} | 0 \rangle = T(q^2) \quad (5.1)$$

при $Q^2 = -q^2 \rightarrow \infty$. Знание низкоэнергетической теоремы [6, 10]

$$T(0) = \frac{32\pi}{b_{ds}} \langle G^2 \rangle, \quad b = 11 - \frac{2}{3} N_f, \quad (5.2)$$

позволяет записать правила сумм для коррелятора (5.1) в виде:

$$\frac{1}{\pi M^2} \int \frac{p T(s)}{s} e^{-s/M^2} ds = \frac{2M^2}{\pi^2} + \frac{T(0)}{M^2} + \text{прямые вклады.} \quad (5.3)$$

В соотношении (5.3) опущены степенные поправки, связанные с рассеянием на мягких вакуумных полях. Как известно, они численно малы. Правила сумм (5.3) с ярко выделенной степенной поправкой, пропорциональной $T(0)/M^2$, позволили авторам работы [10] извлечь достаточно надежную информацию о низшем глюонии. Именно, выяснилось [10], что масса низшего состояния достаточно мала: $m_\sigma \lesssim 16 \text{ eV}$. В этом случае низший резонанс явно доминирует (благодаря усилению $\sim \int \frac{p T(s)}{s}$ в (5.3)), а пертурбативный вклад с вычтенным континуумом в широкой области M^2 — мал. Поэтому, сохраняя главные вклады в (5.3) имеем [10]:

$$\frac{|\langle 0 | G^2 | \sigma \rangle|^2}{m_\sigma^2} = T(0) = \frac{32\pi}{b_{ds}} \langle G^2 \rangle \quad (5.4)$$

Итак, благодаря малости m_σ по сравнению с характерным масштабом в глюонном 0^+ канале, удалось связать матричный элемент $\langle 0 | G^2 | \sigma \rangle$ со средней характеристикой вакуума $\langle G^2 \rangle^{\#}$. Аналогичная связь хорошо понята для π -мезона — если известен матричный элемент $\langle 0 | \bar{u} i \not{\partial}_5 u | \pi \rangle$, то известно и ВС $\langle \bar{u} u \rangle$. Эта аналогия и соотношение (5.4) использовалось авторами [10]

[#] Отметим, что малость массы m_σ в естественном масштабе хорошо понята. Отличие m_σ от нуля возникает лишь на квантовом уровне (и поэтому $m_\sigma \sim \alpha_s^{1/2} \Lambda^2$) и связано с несохранением дилатационного тока [20].

для извлечения матричного элемента $\langle 0 | G^2 | \sigma \rangle$ из феноменологически известного ВС $\langle G^2 \rangle$. Можно пойти обратным путем. Предположим, что независимым образом нам удалось найти матричный элемент $\langle 0 | G^2 | \sigma \rangle$. Соотношение (5.4) позволяет найти в этом случае ВС $\langle G^2 \rangle$.

Обобщение для произвольного оператора очевидно. Рассмотрим коррелятор:

$$i \int e^{i q x} dx \langle 0 | T \{ G^2(x), O(0) \} | 0 \rangle = T(0, q^2) \quad (5.5)$$

Здесь O — некоторый локальный оператор размерности d . Для коррелятора (5.5) имеет место следующая низкоэнергетическая теорема [6]:

$$T(0, q^2=0) = \frac{8\pi d}{b_{ds}} \langle O \rangle. \quad (5.6)$$

Аналогом (5.4) в этом случае будет соотношение:

$$\frac{\langle 0 | G^2 | \sigma \rangle \langle \sigma | O | 0 \rangle}{m_\sigma^2} = T(0, q^2=0) = \frac{8\pi d}{b_{ds}} \langle O \rangle. \quad (5.7)$$

Учитывая (5.4), перепишем (5.7) в виде:

$$\frac{\langle 0 | O | \sigma \rangle}{\langle 0 | G^2 | \sigma \rangle} = \frac{d \langle O \rangle^*}{4 \langle G^2 \rangle} \quad (5.8)$$

Таким образом, независимое вычисление $\langle 0 | O | \sigma \rangle$ позволяет определить ВС $\langle O \rangle$. Тем самым соотношение (5.8) выполняет ту же роль, что и РСАС в случае кварков; именно, (5.8) связывает матричный элемент с ВС.

5.2. О факторизуемости величин $\langle G^4 \rangle$

Итак, для нахождения $\langle G^4 \rangle$ необходимо вычислить матричный элемент $\langle 0 | G^4 | \sigma \rangle$. Для этого, как и в кварковом случае

* Соотношение (5.8) может быть получено независимым образом. Причем, удается контролировать точность его выполнения (см. Приложение). Ответ состоит в том, что нарушение (5.8) связано лишь с квантовыми поправками $\sim \alpha_s/\pi$. Это вполне естественно, так как главные члены $\sim 1/d_s$ в (5.3) возникают только от вклада σ в мнимой части: $1/m_\sigma^2 \sim \alpha_s'$ и от $T(0) \sim \alpha_s'$. Соотношение (5.8) эквивалентно выделению этих главных вкладов.

(гл. 4) сравним два коррелятора: (5.1) и (5.5) с $0 = G^4$. Правила сумм для этих корреляторов имеют вид (после борелизации):

$$\frac{1}{\pi M_1^2} \int \text{Im} T(G^2, s) e^{-s/M_1^2} ds = \frac{4M_1^4}{\pi^2} + \text{прямой вклад}, \quad (5.9)$$

$$\frac{1}{\pi M_2^2} \int \text{Im} T(G^4, s) e^{-s/M_2^2} ds = \text{пертурбативный вклад} + 2\Delta \left[\frac{4M_2^4}{\pi^2} \right] \langle G^2 \rangle + \text{прямой вклад}. \quad (5.10)$$

$\Delta = \langle G^4 \rangle / \langle G^2 \rangle^2$
 В (5.9) величина $\frac{4M_1^4}{\pi^2}$ связана с пертурбативным вкладом (рис. I2a), прямой вклад графически представлен рис. I2б.

В (5.10) пертурбативный вклад обусловлен трехпетлевыми диаграммами типа рис. I3а и имеющими лишнюю малость $\sim (\frac{\alpha_s}{\pi})^2$. После вычитания континуума пертурбативный вклад численно невелик.

Главный вклад в (5.10) обусловлен слагаемым $\sim \langle G^2 \rangle \Delta$ (рис. I3б). Величина Δ в этом выражении есть в точности коэффициент, определяющий факторизованное значение данного ВС: $\Delta = \langle G^4 \rangle / \langle G^2 \rangle^2$. В частности, $\Delta_1 = 5/16$ для $\langle G_1^4 \rangle = \langle (f_{ab}^c G_{ab}^c)^2 \rangle$, $\Delta_2 = 1/16$ для $\langle (f^{abc} G_{ab}^c G_{cd}^a)^2 \rangle$ [10]. Это утверждение легко понять — выделение синглетного $\sim \langle G^2 \rangle$ множителя в операторе G^4 при факторизации и при вычислении коррелятора (5.10) — одна и та же процедура.

Что касается других вкладов, то, во-первых, имеются слагаемые, пропорциональные $\langle G^3 \rangle M^2$ (рис. I3в). Если $\Delta \neq 0$, то эти вклады невелики по отношению к главному слагаемому и порядка $\sim \langle G^3 \rangle / \langle G^2 \rangle M^2 \Delta$. Во-вторых, имеются вклады, пропорциональные $\langle G^{4+n} \rangle / (M^2)^n$ (рис. I3д), открывающие новую серию — все петли разорваны. Однако известно, что при $M^2 \approx 10 \text{ GeV}^2$, когда прямые вклады начинают играть роль, обычные степенные поправки несутся незначительны.

Итак, правила сумм (5.10) определяются двумя слагаемыми: величина $\sim \langle G^2 \rangle M^2$ играет роль петли; прямые вклады определяют то значение M^2 , где начинает нарушаться асимптотический режим. Поэтому, если бы характерные масштабы M_1^2 и M_2^2 в корреляторах (5.9), (5.10) совпадали, то имела бы место факторизация.

Действительно, разделив (5.9) на (5.10) имеем³⁶:

$$\frac{\langle 0|G^2/\sigma\rangle \langle \sigma|G^4/0\rangle}{\langle 0|G^2/\sigma\rangle \langle \sigma|G^2/0\rangle} \approx 2\Delta \langle G^2 \rangle. \quad (5.11)$$

С учетом (5.8) это соотношение эквивалентно факторизации:

$$2 \frac{\langle G^4 \rangle}{\langle G^2 \rangle} \xleftarrow{(5.8)} \frac{\langle 0|G^4/\sigma\rangle}{\langle 0|G^2/\sigma\rangle} \xrightarrow{(5.11)} 2\Delta \langle G^2 \rangle \quad (5.12)$$

Реально, характерные масштабы в (5.9), (5.10), конечно различаются. Каков масштаб этого различия? Для ответа на этот вопрос используем классификацию работы [6], позволяющую определить характерные значения M^2 . Напомним, что каждой глюонной линии, уходящей в вакуум, сопоставляется фактор g^{-1} , а петлевой малости сопоставляется множитель $1/\pi^2$. Для коррелятора (5.9) имеем:

$$\frac{\text{рис. I2б}}{\text{рис. I2а}} = \frac{g^{-4}}{\pi^2} \sim \frac{\pi^2}{g^4} \rightarrow M_1^2 \sim 10 \text{ GeV}^2 \quad (5.13)$$

Аналогично, для коррелятора (5.10)

$$\frac{\text{рис. I3в}}{\text{рис. I3б}} = \frac{g^{-6}}{g^{-2} \pi^{-2}} \sim \frac{\pi^2}{g^4} \rightarrow M_2^2 \sim 10 \text{ GeV}^2 \quad (5.14)$$

Таким образом, не видно параметрического роста масштаба³⁶. Конечно, реально возникают различные численные факторы, однако они не способны существенно повлиять на соотношение: $M_1^2 \approx M_2^2$ (см. ниже).

Даже для моделей [8,7], где инстантонные эффекты очень яркие, изменение M^2 при переходе от правил сумм (5.9) к (5.10) незначительно. Обсудим этот пункт конкретнее в модели [8]. Вопрос ставится так: при каких M^2 прямой вклад в (5.10) составляет 30% от ведущего члена, если в соотношении (5.9) это происходит при $M_1^2 \approx 10 \text{ GeV}^2$. В модели [8] прямые вклады в (5.10) усилены лишним численным множителем $\sim 10+100$ по сравнению с

³⁶ Если $M_1^2 \approx M_2^2$, то и начало континуума примерно совпадает: $S_1 \approx S_2$.

³⁷ Область, где асимптотическая петля (рис. I3а) становится лидирующей, находится, конечно, очень далеко $\gg 10 \text{ GeV}^2$. Однако эта область фактически не существенна.

(5.9) (грубо говоря, это тот самый фактор, который характеризует нефакторизуемость $\langle G^4 \rangle$ в [8]). Учитывая, однако, что характерное поведение прямых вкладов по M^2 имеет вид: $e^{-M^2 \rho_c^2}$, $\rho_c \approx (600 \text{ MeV})^{-1}$ [8], ясно, что

$$\frac{(10+100) e^{-M_2^2 \rho_c^2}}{e^{-M_1^2 \rho_c^2}} \sim 1, \text{ если } M_2^2 - M_1^2 \approx (1+2) 6 \text{ eV}^2 \quad (5.15)$$

Учитывая, что $\bar{M}^2 \approx 10 6 \text{ eV}^2$, изменение в масштабе явно невелико $\lesssim 20\%$. Тем самым максимально возможное значение для $\langle G^4 \rangle$ не превышает фактора (1.5+2) в сравнении с факторизованным значением. Заметим, что в кварковом канале, абсолютный масштаб $\sim 2 6 \text{ eV}^2$, поэтому изменение на величину $(1+2) 6 \text{ eV}^2$ в этом случае приводит к более сильному эффекту нефакторизуемости (см. гл.4).

Итак, ответ ясен - если правила сумм (5.10) насыщаются низшим резонансом, то величина $\langle G^4 \rangle$ будет близка к факторизованному значению (или в 1.5+2 раза больше); если насыщение отсутствует, то ВС значительно меньше этой величины. К сожалению, на сегодня не существует последовательной схемы вычисления прямых вкладов, которые и решают вопрос о насыщении. Поэтому мы не можем строго различить эти два случая (заметим, что четырехфермионные ВС дают нам пример и увеличения и уменьшения ВС по сравнению с факторизованными значениями). Однако имеется серьезный аргумент, свидетельствующий в пользу отсутствия насыщения низшим резонансом коррелятора (5.5) с $0 \sim G^n$, $n \gg 1$. Дело в том, что для коррелятора (5.5) характерен быстрый рост спектральной плотности $\sim (M^2)^{n+1}$. Учитывая, что спектр состояний в (5.1), (5.5) одинаков, ясно, что такой рост может обеспечиваться только быстрым ростом величин матричных элементов возбужденных состояний.

Закончим данный пункт ответом на следующий вопрос - как могло получиться, что в рамках одной и той же модели [8], характеризующейся соотношением $R_{conf} \approx 3 \rho_c$, прямые оценки [8] для величин $\langle G^4 \rangle$ существенно (10+100 раз) превосходят наши ожидания? Ответ состоит в следующем. В наших оценках прямого вклада для коррелятора (5.10) ошибка (из-за отсутствия последовательной схемы вычисления) на фактор ~ 10 слабо сказывается на ответе, см (5.15). В прямых одноквантовых вычислениях

[8], та же неопределенность сохраняется явно в окончательных ответах.

Наиболее реальная возможность извлечения информации о $\langle G^4 \rangle$, с нашей точки зрения, связана с обработкой правил сумм для уровней чармония [21].

5.3. Некоторые другие результаты

Коротко остановимся на результатах для величин сложных ВС $\langle g^3 f^{abc} G_{\mu\nu}^a G_{\nu\lambda}^b G_{\lambda\mu}^c \rangle$, $\langle \bar{q} g^2 G_{\mu\nu}^a G_{\nu\lambda}^a q \rangle$, $\langle \bar{q} g^2 f^{abc} G_{\mu\nu}^a G_{\nu\lambda}^b G_{\lambda\mu}^c q \rangle$. Для первого из перечисленных ВС имеются феноменологические данные (2.17e); для других - имеются нетривиальные соотношения (3.13), (3.15) в случае достаточно большой массы кварка ($m_q \approx 0.6 6 \text{ eV}$). Ниже мы убедимся, что наш подход приводит к результатам, согласующимся с другими подходами.

Для вычисления $\langle g^3 G^3 \rangle$ рассмотрим, как обычно, коррелятор (5.5) с $0 = g^3 G^3$. Асимптотическая петля (рис.14а) после вычитания континуума, как обычно, численно мала. Главный вклад определяется диаграммами типа рис.14б, и соответствующие вычисления позволяют определить матричный элемент $\langle 0 | g^3 G^3 / 6 \rangle$. Для уменьшения неопределенности в величине масштаба, как обычно, рассмотрим одновременно коррелятор (5.5) с $0 = g^2 G^2$. Взяв отношение главных слагаемых в этих корреляторах придем к соотношению:

$$\frac{\langle 0 | g^3 G^3 / 6 \rangle}{\langle 0 | g^2 G^2 / 6 \rangle} \approx \frac{81}{64} \frac{\langle g^2 G^2 \rangle}{S_0} \quad (5.16)$$

которое является аналогом (5.11).

В этом выражении величина $S_0 \approx 4 6 \text{ eV}^2$ - характерный интервал дуальности для коррелятора (5.5). Как было аргументировано выше масштаб (и соответственно S_0) несущественно изменяются с изменением вида оператора 0 . Поэтому мы выбрали значение S_0 , связанное с коррелятором (5.1) и известное из независимых оценок [6].

С учетом (5.8) перепишем (5.16) непосредственно для величины ВС:

$$\frac{\langle g^3 G^3 \rangle}{\langle g^2 G^2 \rangle} \approx \frac{27}{32} \frac{\langle g^2 G^2 \rangle}{S_0}; \quad \langle g^3 G^3 \rangle \approx 0.05 \text{ GeV}^6 \quad (5.17)$$

что прекрасно согласуется с феноменологическим значением (2.17e).

Что касается ВС $\langle \bar{\psi} g^2 G^2 \psi \rangle$, то соответствующий коррелятор (5.5) с $0 = g^2 \bar{\psi} G^2 \psi$ (в киральном пределе) при $Q^2 \rightarrow \infty$ определяется рис.15а. Предполагая, как и ранее, что масштаб по сравнению с (5.1) изменился несущественно, можно надеяться на приближенную факторизацию для этого ВС. В то же время ВС $\langle \bar{\psi} i g^2 G^2 \psi \rangle$ при $Q^2 \rightarrow \infty$ определяется рис.15б, с лишней петлевой малостью. Мы ожидаем поэтому:

$$\frac{\langle \bar{\psi} i g^2 G^2 \psi \rangle}{\langle \bar{\psi} g^2 G^2 \psi \rangle} \ll 1 \quad (5.18)$$

Соотношение (5.18) аналогично выражениям (4.10), (4.12) для четырехфермионных ВС, подтверждаемых независимыми феноменологическими данными. Более того, для большой массы кварка, соотношение (5.18) остается справедливым — см. (3.13).

В то же время ВС $\langle \bar{\psi} i g^2 G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^b G_{\mu\nu}^c \lambda^c \psi \rangle$, факторизованное значение которого (как и предыдущего оператора) равно нулю, численно оказывается не малым. Лидирующий вклад при $Q^2 \rightarrow \infty$ для коррелятора (5.5) в данном случае определяется рис.15в и поэтому:

$$\frac{\langle \bar{\psi} i g^2 G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^b G_{\mu\nu}^c \lambda^c \psi \rangle}{\langle \bar{\psi} g^2 G^2 \psi \rangle} \approx - \frac{\langle \bar{\psi} i g G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^b \psi \rangle}{\langle \bar{\psi} \psi \rangle S_0} \approx -0.5 \quad (5.19)$$

Отметим, что знак определяется однозначно и совпадает с (3.15).

Обратим внимание, что в обоих случаях: (5.18), (5.19), рассматривались ВС, факторизованные значения которых равны нулю. В первом случае (5.18) соответствующая малость действительно проявляет себя, во втором — (5.19) малость исчезла. Если бы мы насыщали ВС флуктуациями инстантонного типа, то оба соотношения были бы порядка единицы.

Заметим, что похожие явления уже встречались при анализе четырехфермионных ВС (глава 4), где были подтверждены независимым феноменологическим анализом. Отметим, наконец, что и в этом случае результаты для ВС, содержащих тяжелый кварк (гла-

ва 3), качественно согласуются с (5.18), (5.19).

5.4. Обсуждения

Перечислим основные результаты настоящей главы.

а). Задача о вычислении любого ВС сведена к задаче нахождения соответствующего матричного элемента по низколежащему глюонному состоянию $\bar{b} (0^{++})$. Вычисление таких матричных элементов в теории поля на решетке выглядит вполне реальной задачей, тем самым нахождение различных ВС таким методом существенно проще стандартных приемов [9].

б). Для вычисления матричных элементов $\langle 0 | O | 0 \rangle$ мы используем метод правил сумм. Предполагая лидирующую роль прямых вкладов в соответствующих корреляторах, мы привели аргументы в пользу того, что нарушение факторизации для $\langle G^2 \rangle$ в сторону увеличения может достигать фактора $\sim 1.5 \pm 2$; в сторону уменьшения соответствующее значение не контролируется.

в). Величины ВС с нулевым факторизованным значением могут характеризоваться и большими и малыми значениями (в естественном масштабе) величин; соответствующий эффект связан с лоренц-цветовой структурой оператора, и легко прослеживается в каждом конкретном случае. В частности, имеет место соответствие с результатами 3 главы. Именно те структуры, которые приводят к большим (малым) значениям ВС, оказываются большими (малыми) и для ВС, содержащих тяжелый кварк.

г). Вычисление $\langle g^3 G^3 \rangle$ описанным выше методом приводит к разумному значению, согласующемуся с феноменологическим результатом. Это является аргументом в пользу правильности подхода в целом.

6. ИНСТАНТОНЫ, БОЛЬШИЕ N_c И ФЕНОМЕНОЛОГИЯ

В этой главе мы объединим некоторые феноменологические результаты, чувствительные к характеру вакуумных флуктуаций, в одной таблице. Далее обсудим вопрос, в каком соответствии находятся феноменологические данные с физикой больших N_c [15] и с инстантонными вычислениями [7,8]. Счет при больших N_c по существу эквивалентен однородному вакууму, в котором все флук-

туации имеют масштаб $\sim R_{conf}$, зернистость отсутствует. Инстантонные оценки [7,8] предполагают существенность флуктуаций малых размеров $\sim 6\text{eV}^{-1}$, так что $R_{conf} \sim 3\rho_c$, и сильные инстантонные поля, занимая небольшую часть полного объема, определяют величины ВС, так что модель имеет явно зернистую структуру.

Величина	Феноменологический результат	Большие N_c	Инстантонные оценки
1. $\frac{\langle \bar{u} \lambda^a u \bar{d} \lambda^a d \rangle}{\langle \bar{u} \lambda^a d \bar{d} \lambda^a u \rangle}$	$\ll 1$, (3.7), (2.17), (4.10)	0	-1
2. $\frac{\langle \bar{u} \lambda^a u \bar{d} \lambda^a d \rangle}{\langle \bar{u} u \bar{d} d \rangle}$	$\ll 1$, (3.10), (4.12)	0	1
3. $\frac{\langle \bar{u} \gamma_{\mu} \lambda^a u \bar{d} \gamma_{\mu} \lambda^a d \rangle}{\langle \bar{u} \gamma_{\mu} \lambda^a d \bar{d} \gamma_{\mu} \lambda^a u \rangle}$	≈ -1 , (3.9), (2.17), (4.20)	0	-1
4. $\frac{\langle g^3 G^3 \rangle}{\langle g^2 G^2 \rangle}$	$\sim 10^{-1} 6\text{eV}^2$ (2.17), (5.17)		$\frac{12}{5 \langle \rho_c^2 \rangle} = \frac{\rho_c = (200 \text{ MeV})}{\rho_c = (600 \text{ MeV})} \sim 10^{-1} [1]$ $\sim 0.9 [8]$
5. $\frac{\langle (g^2 G^2)^2 \rangle}{\langle g^2 G^2 \rangle^2}$	$\sim (1+2)$, (5.12)	1	10 [8]
6. $\frac{\langle \bar{q} i g^2 \gamma_5 G \tilde{G} q \rangle}{\langle \bar{q} g^2 G^2 q \rangle}$	$\ll 1$ (3.13), (5.18)	0	1
7. $\frac{\langle \bar{q} i g^2 \gamma_{\mu} \gamma_5 G_{\mu\nu} G_{\nu\lambda} G_{\lambda\mu} q \rangle}{\langle \bar{q} g^2 G^2 q \rangle}$	≈ -1 (3.15), (5.19)	0	-1

Как видно из таблицы, феноменологические соотношения полностью не воспроизводятся ни при больших N_c (пункты 3,7), ни в инстантонных оценках (пункты 2,6). Однако, для некоторых ВС, факторизованные значения которых равны нулю, инстантонные вычисления приводят к правильному знаку и величине (пункт 3); в других случаях именно учет по N_c в большей степени соответствует действительности (пункты 1,2).

Сформулируем нашу точку зрения относительно приведенных выше результатов. Инстантонная модель [7,8] видимо правильно отражает масштаб прямых инстантонных вкладов в корреляторах при больших Q^2 . Инстантоны конечных размеров $\sim 6\text{eV}^{-1}$ играют в этих вкладах заметную роль. В то же время при изучении объектов типа ВС (это эквивалентно рассмотрению коррелятора при $Q^2 \rightarrow 0$) ведущую роль играют флуктуации больших размеров $\sim R_{conf}$. Такое, на первый взгляд, несоответствие (вакуум при любых расчетах: $Q^2 \rightarrow 0, Q^2 \rightarrow \infty$, характеризуется одними и теми же флуктуациями) легко понять качественно. При $Q^2 \rightarrow \infty$ вклад инстантонов больших размеров ослабляется характерным для прямых вкладов весом $\sim e^{-2\rho\varphi}$. При $Q^2 \rightarrow 0$ все флуктуации выступают на равных.

В рамках инстантонных вычислений [8] это означает, видимо, существенность взаимодействия. Так что инстантоны оказываются скоррелированы на размерах $\sim R_{conf}$ и соответствующие флуктуации эффективно оказываются большими ($\gg \rho_c$).

Ниже приведены аргументы, демонстрирующие существенную роль взаимодействия инстантонов при оценках ВС. Именно, будет показано, что предположение о скоррелированности инстантонов в цветовом пространстве поправляет одноинстантонные вычисления в правильном направлении (с нужным знаком), ведет к улучшению согласия с феноменологическими результатами.

6.1. Влияние парамагнитной инстантонной среды на величины четырехфермионных ВС

Мы начнем данный пункт со следующего вводного замечания, поясняющего как его название, так и наш подход к вопросу. Здесь не обсуждается сложный вопрос нарушения киральной симметрии и роль инстантонов в этом нарушении (см. [8,16,22], ссылки там же). Мы предполагаем, что киральная инвариантность уже нарушена. Учитывая, что имеются многочисленные феноменологические [6,8] и теоретические [19] указания в пользу существенной роли инстантонов в формировании вакуума КХД вообще и нарушении киральной инвариантности в частности, рассмотрим следующий вопрос. Какими свойствами должна обладать инстантонная среда, чтобы хотя бы на качественном уровне обеспечить феноменологические результаты таблицы (1)?

Для последующего обсуждения будем мысленно предполагать следующую картину инстантонной среды. Инстантоны размером ρ распределены в пространстве с характерным расстоянием $R \gg \rho$ [7,8,19] друг от друга и обладают следующим цветным магнитным моментом [22]:

$$D_{\mu\nu}^a = -\rho^2 R^{a\alpha} \tilde{Z}_{\mu\nu}^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3; \quad a = 1+8 \quad (6.1)$$

Здесь используются стандартные обозначения, $\tilde{Z}_{\mu\nu}^a$ — символы 'т Хоофта, $R^{a\alpha}$ — матрица, описывающая ориентацию инстантона в групповом пространстве. Напомним следующие известные соотношения. В слабом внешнем поле $G_{\mu\nu}^a$ энергия взаимодействия инстантона с этим полем определяется выражением [16,22]:

$$E(\rho) = -\frac{2\pi^2}{g(\rho)} G_{\mu\nu}^a D_{\mu\nu}^a = +\frac{2\pi^2 \rho^2}{g(\rho)} G_{\mu\nu}^a R^{a\alpha} \tilde{Z}_{\mu\nu}^\alpha \quad (6.2)$$

Соотношение (6.2) было впервые получено в [22], а затем, более общим методом эффективного лагранжиана в [16]. Выражение (6.2) позволяет найти бoльцмановский фактор $\sim e^{-E(\rho)}$, связанный с ориентацией в цветовом пространстве. После этого легко вычисляется среднее значение $\langle D_{\mu\nu}^a \rangle^G$, обусловленное внешним полем $G_{\mu\nu}^a$ [22]:*

$$\langle D_{\mu\nu}^a \rangle^G = \frac{\pi^2 \rho^4}{2g} (G_{\mu\nu}^a - \tilde{G}_{\mu\nu}^a) \quad (6.3)$$

Аналогичным образом, используя зависящую от ориентации часть эффективного лагранжиана взаимодействия [16] инстантона с внешним полем кварка, приходим к следующему выражению для среднего значения $\langle D_{\mu\nu}^a \rangle^q$, обусловленного внешним кварковым полем q :

$$\langle D_{\mu\nu}^a \rangle^q = \frac{\pi^2 \rho^5}{6} [\bar{q}_R G_{\mu\nu}^a \lambda^a q_L]^{**} \quad (6.4)$$

* Здесь и в дальнейшем под средним значением $\langle D_{\mu\nu}^a \rangle$ понимается усреднение по цвету, но не по размерам ρ и по положениям X инстантонов.

** Формула (6.4) справедлива только для случая теории с 1 ароматом. Если обобщается реальный мир с 3 легкими кварками u, d, s , то в формальном пределе очень слабого внешнего вакуумного поля ($g \rightarrow 0$) ответ для $\langle D_{\mu\nu}^a \rangle^q$ пропорционален $(m_{q\rho})^{N_c-1}$. Однако реально киральная инвариантность нарушена, так что вместе $(m_{q\rho})$ появится множитель $\sim \pi^2 \langle \bar{q}q \rangle \rho^2 \sim 1$, и каждый аромат даст аддитивный вклад в (6.4). Так как дальнейшее обсуждение имеет чисто качественный характер, и окончательный результат не содержит численных факторов из (6.3), (6.4), мы не обсуждаем этот вопрос подробно.

В дальнейшем нас будет интересовать вклад в ВС $\langle (\bar{q} G_{\mu\nu}^a \lambda^a q) \rangle$, обусловленный отличным от нуля средним значением $\langle D_{\mu\nu}^a \rangle$. То есть только та часть ВС, которая связана с ориентацией инстантона. Под этими словами подразумевается следующая физическая картина. Инстантоны, окружающие данный, приводят к наличию флуктуирующих вакуумных полей $\varphi, G_{\mu\nu}$. Эти поля, в свою очередь, поляризуют в цветовом пространстве данный инстантон, в соответствии с формулами (6.3), (6.4). Другими словами, данный инстантон скоррелирован со своим окружением, и направление его момента связано с моментами окружающих его инстантонов. Именно это свойство скоррелированности в цветовом пространстве, с нашей точки зрения, играет важнейшую роль в формировании различных ВС. Ниже приведены аргументы (и оценки по порядку величины) в пользу этой точки зрения. В частности, мы увидим, что описанный выше механизм приводит к качественно правильному поведению различных четырехфермионных ВС в зависимости от их структуры, и улучшает согласие с феноменологическими результатами таблицы (I).

Идея оценок очень простая. Медленно включая внешние поля и используя выражения типа (6.3), приходим к соотношениям между величинами $\langle D_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \rangle$ (они характеризуют зависящую от ориентации энергию взаимодействия инстантона с внешним полем) и средними характеристиками вакуума: $\langle G^2 \rangle, \langle \bar{q} i \not{D} q \rangle, \langle G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \rangle \dots$. Если постепенно увеличивать поля вплоть до значений, характерных для флуктуаций истинного вакуума КХД, то возникающие ВС могут отождествляться с феноменологическими значениями. Тем самым возникают некоторые соотношения между различными ВС.

Например, медленно включая поле $G_{\mu\nu}^a$ из (6.3) получаем следующие значения для $\langle D_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \rangle^G$:

* Отметим, что выражение (6.5) с точностью до множителя $(\frac{2\pi^2}{g})$ (см. (6.2)) совпадает со средним значением энергии взаимодействия внешнего поля с диполем, индуцированным тем же полем: $\langle E \rangle = -2\pi^2/g \langle G_{\mu\nu}^a D_{\mu\nu}^a \rangle = -\frac{\pi^4 \rho^4}{8 \alpha_s^2} \langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \rangle$. Это известное соотношение, полученное в [16] другим путем. Оно описывает первую поправку к плотности инстантонов, обусловленную взаимодействием с внешним полем: $d_{eff}(\rho) = d_0(\rho) [1 + \frac{\pi^4 \rho^4}{8 \alpha_s^2} \langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \rangle]$, [16].

$$\langle D_{\mu\nu}^6 \sigma_{\mu\nu} \rangle = \frac{\pi^2 \rho^4}{4g} \langle G^2 \rangle^* \quad (6.5)$$

Аналогичным образом из (6.4) имеем:

$$\langle D_{\mu\nu}^q \sigma_{\mu\nu} \rangle = \frac{\pi^2 \rho^5}{12} \langle \bar{q} i \not{D} \sigma_{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \lambda^q q \rangle \quad (6.6)$$

Соотношения (6.5), (6.6) характеризуют степень поляризации инстантона характерными внешними вакуумными полями $\sigma_{\mu\nu}$, q . Зная феноменологические значения $\langle \bar{q} i \not{D} \sigma_{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \lambda^q q \rangle = \langle \bar{q} q \rangle 1.5 \text{ GeV}^2$ [13], $\langle g^2 G^2 \rangle \approx 0.5 \text{ GeV}^4$ [1], получаем:

$$\frac{\langle D_{\mu\nu}^q \sigma_{\mu\nu} \rangle}{\langle D_{\mu\nu}^6 \sigma_{\mu\nu} \rangle} = \frac{g^2 \rho \cdot \langle \bar{q} i \not{D} \sigma_{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \lambda^q q \rangle}{3 \langle g^2 G^2 \rangle} = 0.2 \rho_s (\rho \sim 1 \text{ GeV}) \quad (6.7)$$

Здесь знак соответствует евклидову пространству. Из (6.7) видно, что поляризация инстантона малого размера ($\rho \sim \text{GeV}^{-1}$), обусловленная кварковыми полями существенно меньше величины, обусловленной глюонными вакуумными флуктуациями; знак поляризации от обоих вкладов совпадает.

Соотношение, аналогичное (6.7) с изменением внешнего источника ($\sigma_{\mu\nu} \rightarrow \bar{q} \sigma_{\mu\nu} \lambda^q q$), имеет вид:

$$\frac{\langle D_{\mu\nu}^q \bar{q} \sigma_{\mu\nu} \lambda^q q \rangle}{\langle D_{\mu\nu}^6 \bar{q} \sigma_{\mu\nu} \lambda^q q \rangle} = - \frac{\pi \rho_s \rho}{3} \frac{\langle (\bar{q} \sigma_{\mu\nu} \lambda^q q)^2 \rangle}{\langle \bar{q} i \not{D} \sigma_{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \lambda^q q \rangle} \quad (6.8)$$

Соотношение (6.8), наряду с (6.7), позволяет независимым образом оценить отношение степени поляризации, обусловленное взаимодействием инстантона с кварковыми и глюонными флуктуациями соответственно, если известны ВС $\langle \bar{q} i \not{D} \sigma_{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \lambda^q q \rangle$, $\langle (\bar{q} \sigma_{\mu\nu} \lambda^q q)^2 \rangle$. Мы предполагаем, что отношение $\langle D_{\mu\nu}^q \rangle / \langle D_{\mu\nu}^6 \rangle$ можно измерять с помощью любых внешних токов — $\sigma_{\mu\nu}$ или $\bar{q} \sigma_{\mu\nu} \lambda^q q$. В этом случае, зная характерное отношение $\langle D_{\mu\nu}^q \rangle / \langle D_{\mu\nu}^6 \rangle$ из (6.7), восстановим $\langle (\bar{q} \sigma_{\mu\nu} \lambda^q q)^2 \rangle$ из (6.8):

$$\langle (\bar{q} \sigma_{\mu\nu} \lambda^q q)^2 \rangle_{\text{рис. 17}} = -4 \frac{\langle \bar{q} i \not{D} \sigma_{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \lambda^q q \rangle^2}{\langle g^2 G^2 \rangle} = -4 \cdot 10^{-3} \text{ GeV}^6 \quad (6.9)$$

* Дополнительный множитель 1/2 связан с адиабатичностью включения поля $\sigma_{\mu\nu}$, так что при $M = \lambda N$, $E = - \int_0^M dN = - \frac{1}{2} N^2$

В случае с несколькими ароматами (см. сноску на стр. 48) в левой стороне (6.9) будут содержаться выражения со всеми перекрестными слагаемыми вида $\langle \bar{u} \sigma_{\mu\nu} \lambda^q u \bar{d} \sigma_{\mu\nu} \lambda^q d \rangle \dots$. Отметим, что абсолютное значение (6.9) близко к факторизованному значению. Однако механизм насыщения (6.9) никак не связан с механизмом факторизации. Это следует, во-первых, из знака (-) в соотношении (6.9). Напомним, что факторизованное значение — положительно. Во-вторых, если модель вакуума представлять себе как среду инстантонов, то механизму факторизации соответствует диаграмма типа рис. 16. Такой механизм означает, что каждый из инстантонов насыщает ВС $\langle \bar{q} q \rangle$. В частности, такой механизм предсказывает, что $\langle \bar{u} \sigma_{\mu\nu} \lambda^q u \bar{d} \sigma_{\mu\nu} \lambda^q d \rangle = 0$. Оценка (6.9) соответствует иному механизму (рис. 17), связанному с поляризацией инстантонов, с их скоррелированностью в цветовом пространстве.

Вернемся к соотношению (6.9) — оно не содержит параметров выделенного инстантона. Возникает вопрос, какую роль играет выделенный инстантон в приведенных выше оценках. Ответ состоит в том, что он играет роль пробника и через известные феноменологические ВС дает информацию о поляризационных свойствах среды.

Итак основной итог приведенных выше рассуждений состоит в том, что вклад в ВС $\langle \bar{u} \sigma_{\mu\nu} \lambda^q u \bar{d} \sigma_{\mu\nu} \lambda^q d \rangle$, обусловленный поляризацией инстантонов (рис. 17), достаточно велик по абсолютной величине и имеет знак (-).

Заметим, что именно такая скоррелированность приводит к качественному объяснению феноменологических данных (2.17). Это сразу следует из соответствующих соотношений Фирца. Для ВС $\langle \bar{u} \sigma_{\mu\nu} \lambda^q d \bar{d} \sigma_{\mu\nu} \lambda^q u \rangle$, $\langle \bar{u} \lambda^q d \bar{d} \lambda^q u \rangle$ слагаемое в соотношении Фирца, пропорциональное $\bar{u} \sigma_{\mu\nu} \lambda^q u \bar{d} \sigma_{\mu\nu} \lambda^q d$ и связанное с поляризуемостью входит с разным знаком по отношению к факторизованным вкладам (см. сноску на стр. 19). Это приводит к увеличению ВС с $\Gamma = \sigma_{\mu\nu}$ и уменьшению с $\Gamma = 1$. В случае $\Gamma = \sigma_{\mu\nu}$, $\Gamma = 1$ поляризационные эффекты несущественны, так как в соответствующих соотношениях Фирца отсутствуют слагаемые вида $\bar{u} \sigma_{\mu\nu} \lambda^q u \bar{d} \sigma_{\mu\nu} \lambda^q d$, приводящие к этим эффектам. Можно ожидать поэтому выполнения гипотезы факторизации. Итак, наблюдается качественное согласие с (2.17).

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрено три независимых подхода (правила сумм; экстрополяция результатов со стороны больших m_q ; низкоэнергетические теоремы + некоторые феноменологические результаты), позволяющие выяснить величины различных ВС. Все подходы приводят к согласующимся между собой результатам. Повторим основные из них.

1. Гипотеза факторизации для четырехфермионных ВС в общем случае не оправдывается. Тем самым счет при $N_c \rightarrow \infty$ не имеет отношение к реальному миру с $N_c = 3$. Лишь в векторном и аксиальном каналах факторизация имеет место.

2. Рассмотрение ВС с тяжелым ($m_q \approx 0.6 \text{ GeV}$) кварком показывает, что имеются вклады, подавленные по N_c в сравнении с факторизованными значениями, но усиленные численными факторами. Такое явление наблюдается для структур $\Gamma = I, V_5, B_{\mu\nu}$ и отсутствует для ВС с $\Gamma = B_{\mu}, B_{\mu}V_5$. Тем самым находит свое объяснение справедливость гипотезы факторизации в векторном и аксиальном каналах. В то же время данный подход явно демонстрирует нарушение факторизации в других случаях (с точки зрения больших N_c факторизация должна "работать" всегда, вне зависимости от массы кварка m_q).

3. Найдены некоторые ВС модельнонезависимым образом — см. (2.17).

4. Развита методика, сводящая вычисление любого ВС к нахождению соответствующего матричного элемента. Наиболее плодотворно этот подход, видимо, может быть использован в вычислениях теории поля на решетке. Однако изучение этих матричных элементов и методом правил сумм приводит к большому количеству качественных результатов. В частности, предсказывается большая величина ВС $\langle \bar{u}b_{\mu}\lambda^a u \bar{d}b_{\mu}\lambda^a d \rangle$, факторизованное значение которого равно нулю; определяются различные многокомпонентные ВС — $\langle G^3 \rangle$, $\langle \bar{q}Gq \rangle$ и т.д. — см. гл.4, 5.

5. Нарушение факторизации для ВС $\langle G^2 \rangle$ в сторону увеличения может достигать фактора 1.5+2; в сторону уменьшения соответствующее значение не контролируется.

6. С точки зрения инстантонной модели [8] феноменологические результаты для четырехфермионных ВС в принципе могут быть поняты в предположении сильной скоррелированности цветных магнитных моментов инстантонов.

В Заключении автор выражает благодарность Е.В.Шуряку и В.Л.Черняку за полезные обсуждения и критические замечания.

Приложение

Ниже будет представлен иной (по сравнению с основным текстом) вывод соотношения (5.8). Это соотношение играло основную роль в 5 главе, так осуществляло связь между величиной матричного элемента по низшему состоянию глюония $\langle 0/0/5 \rangle$ и значением вакуумного среднего $\langle 0/0/0 \rangle$. Аналогичная связь в случае кварков, дается соотношениями PCAC*. Мы хотим продемонстрировать глубокую аналогию между этими соотношениями, используя язык корреляторов. Кроме того, описанный метод позволяет в принципе контролировать точность соотношения (5.8), также как и отклонения от результатов PCAC.

Начнем со случая кварковых операторов.

Рассмотрим следующий недиагональный коррелятор при $Q^2 \rightarrow \infty$:

$$i \int dx e^{iqx} \langle 0 | T \{ \bar{u}_\mu \psi_5 d(x), \bar{d}_5 u(0) \} / 0 \rangle = g_\mu P(q^2) \quad (III)$$

В мнимую часть коррелятора (III) вклад π -мезона в киральном ($m_q \rightarrow 0$) пределе $\sim I$ и равен:

$$\frac{1}{\pi} \int \text{Im} P(s) ds = i f_\pi \left(\frac{-i f_\pi m_\pi^2}{m_u + m_d} \right) \quad (II2)$$

Вклад других псевдоскалярных мезонов порядка m_q , так как соответствующие матричные элементы равны нулю в киральном пределе: $\langle \bar{u}_\mu \psi_5 d / \pi \rangle \sim m_q g_\mu$. В справедливости этого легко убедиться взяв дивергенцию от обеих частей равенства.

Ясно, поэтому, что при $m_q \rightarrow 0$ правая часть (III) определяется одним слагаемым, в точности соответствующим вкладу π -мезона. Простое вычисление рис.19 подтверждает этот вывод:

$$i T \{ \dots \} = - \left[\frac{\langle \bar{u} u \rangle + \langle \bar{d} d \rangle}{Q^2} \right] g_\mu + O(m_q). \quad (II3)$$

* Впервые такая аналогия подчеркивалась в работе [10].

С учетом (II2), (II3) имеем:

$$\frac{1}{\pi} \int \text{Im} P(s) ds = + \frac{f_\pi^2 m_\pi^2}{m_u + m_d} = - \left[\langle \bar{u} u \rangle + \langle \bar{d} d \rangle \right] + O(m_q) \quad (II4)$$

что в точности соответствует соотношению PCAC. В принципе, коррелятор (III) позволяет изучить поправки к соотношению (II4) — для этого надо вычислить члены $\sim m_q$ в правой части (III) и учесть вклад возбужденных состояний в $\text{Im} P(s)$, которые также пропорциональны m_q .

Точно таким же образом, можно связать любое BC с соответствующим π -мезонным матричным элементом, и воспроизвести, тем самым, соотношение PCAC. Например, вместо оператора $\bar{d}_5 u$ в (III) рассмотрим оператор $\bar{d} i g \gamma_\mu \gamma_5 \psi_5 \psi_5 \psi_5 u$. В этом случае единственный, отличный от нуля, вклад в $P(q^2)$ будет определяться рис.20.

Вместо (II4) получим соотношение:

$$i f_\pi \langle \pi | \bar{d} i g \gamma_\mu \gamma_5 \psi_5 \psi_5 \psi_5 u / 0 \rangle = - \left[\langle \bar{d} i g \gamma_\mu \gamma_5 \psi_5 \psi_5 \psi_5 d \rangle + \langle \bar{u} i g \gamma_\mu \gamma_5 \psi_5 \psi_5 u \rangle \right] \quad (II5)$$

в точности соответствующее результату PCAC. В этом случае поправка к (II5) пропорциональна m_q . Этот факт очевиден сам по себе, так как вклад других состояний в $\text{Im} P(s) \sim m_q$. Независимо это можно проверить вычисляя коэффициенты перед другими операторами ($\langle \bar{q} q \rangle, \langle \bar{q} \gamma_5 q \rangle \dots$) — они тождественно равны нулю при $m_q \rightarrow 0$.

Перейдем к глюонным токам. Роль аксиального тока в корреляторе (III) будет играть тензор энергии импульса $\Theta_{\mu\nu} = -\gamma_{\mu\lambda} \gamma_{\nu\lambda} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \Theta^2$, вместо операторов $\bar{d}_5 u, \bar{d} \psi_5 \psi_5 u \dots$ в (III) мы будем рассматривать величины типа Θ^2, Θ^3 , вакуумные средние, от которых нас интересуют. Аналогом уравнения $\partial_\mu A_\mu \sim m_q$ будет соотношение $g_{\mu\nu} \Theta_{\mu\nu} \sim ds/\pi$, связанное с аномалией тензора энергии-импульса. Роль малого параметра m_q будет играть величина ds/π . Малость масс m_π^2 и m_σ^2 обусловлены соответственно соотношениями: $m_\pi^2 \sim m_q, m_\sigma^2 \sim ds/\pi$ [20].

Рассмотрим следующий коррелятор:

$$i \int dx e^{iqx} \langle 0 | T \{ \Theta_{\mu\nu}(x), \Theta^2(0) \} / 0 \rangle = g_\mu g_\nu P_1(q^2) + g_{\mu\nu} P_2(q^2) \quad (II6)$$

В дальнейшем нас будет интересовать только структура, связанная с $P_2(q^2)$. В недиагональный коррелятор (П6) могут вкладываться 0^{++} состояния с вычетом $\sim I$, если их масса $\sim \alpha_s/\pi$ и с вычетом $\sim \alpha_s/\pi$, если их масса $\sim I$.

Действительно, матричный элемент $\langle 0 | \theta_{\mu\nu} | \sigma \rangle \sim \int q_\mu q_\nu$ оказывается порядка I , несмотря на то, что $\theta_{\mu\nu} \sim \alpha_s/\pi$. Это возможно только благодаря тому, что $m_\sigma^2 \sim \alpha_s/\pi$. В то же время матричный элемент $\langle 0 | \theta_{\mu\nu} | \sigma' \rangle$, $m_{\sigma'}^2 \sim 1$, по возбужденному состоянию с необходимостью порядка α_s/π .

Это свойство в точности соответствует (П1), где вклад π -мезона оказался $\sim I$ только благодаря его голдстоуновской природе. Вычисляя $P_2(q^2)$ в главном по α_s/π приближении (рис.21), приходим к соотношению, являющемуся аналогом (П3, П4)

$$z_\mu z_\nu \langle 0 | -\theta_{\mu\lambda} \theta_{\nu\lambda} | \sigma \rangle \langle \sigma | \sigma^2 | 0 \rangle = (zq)^2 \frac{4}{3} \langle G^2 \rangle, \quad z^2 = 0 \quad (\text{П7})$$

Здесь z_μ - проектирующий орт ($z^2 = 0$), введенный для удобства выделения структуры $q_\mu q_\nu$. Легко убедиться, что для любого оператора $O \sim \sigma^n$ размерности $d = 2n$, справедливо соотношение типа (П7), (рис.22):

$$z_\mu z_\nu \langle 0 | -\theta_{\mu\lambda} \theta_{\nu\lambda} | \sigma \rangle \langle \sigma | O | 0 \rangle = (zq)^2 \frac{4d}{12} \langle O \rangle, \quad z^2 = 0 \quad (\text{П8})$$

Взяв отношение (П8) и (П7) приходим к соотношению:

$$\frac{\langle 0 | O | \sigma \rangle}{\langle 0 | \sigma^2 | \sigma \rangle} = \frac{d \langle O \rangle}{4 \langle \sigma^2 \rangle} \quad (\text{П9})$$

что в точности соответствует (5.8).

Заметим, что значение матричного элемента $\langle \theta_{\mu\lambda} \theta_{\nu\lambda} | \sigma \rangle \sim q_\mu q_\nu$ легко получить, зная $\langle 0 | \sigma^2 | \sigma \rangle$ [10]:

$$z_\mu z_\nu \langle 0 | \theta_{\mu\lambda} \theta_{\nu\lambda} | \sigma \rangle = (zq)^2 \left[-\frac{8\alpha_s \langle 0 | \sigma^2 | \sigma \rangle}{24\pi m_\sigma^2} \right] \approx (zq)^2 \cdot (0.1 \text{ GeV}) \quad (\text{П10})$$

$z^2 = 0$

Соотношение (П10) характеризует волновую функцию ведущего твиста глюония в начале координат [11,12]. Численно величина (П10) близка к $f_\pi \approx 133 \text{ MeV}$, характеризующей волновую функцию ведущего твиста π -мезона.

Отметим, наконец, что матричный элемент (П10), а тем самым и мнимая часть коррелятора (П6) $\sim \frac{\alpha_s}{\pi m_\sigma^2} \sim I$, при $\alpha_s \rightarrow 0$, как и утверждалось ранее.

Какова точность (П9)? В принципе точность контролируется вычислением поправок $\sim \alpha_s/\pi$ в (П6) (также как точность (П4), (П5) контролируется поправками $\sim m_q$ в (П1)). Мы ожидаем, что поправки $\sim \alpha_s/\pi$ не могут изменить результат сильнее, чем на фактор 2.

Подписи к рисункам

Рис.1,2 - Асимптотически ведущий вклад и степенные поправки, определяющие поведение корреляторов (2.2), (2.12).

Рис.3 - То же самое для коррелятора (2.6).

Рис.4 - Диаграмма, определяющая величину ВС $\langle \bar{\psi} \Gamma \lambda^a \psi \bar{\psi} \Gamma \lambda^a \psi \rangle$
 $\Gamma = 1, \gamma_5, \sigma_{\mu\nu}$ при $m\varphi \rightarrow \infty$.

Рис.5 - Диаграмма, определяющая величину ВС $\langle \bar{\psi} \lambda^a \psi \bar{\psi} \lambda^a \psi \rangle$
 при $m\varphi \rightarrow \infty$.

Рис.6 - Асимптотически ведущий вклад в коррелятор (4.2).

Рис.7 - Прямой инстантонный вклад в коррелятор (4.2).

Рис.8 - Асимптотически ведущий вклад в коррелятор (4.5), определяющий четырехфермионное ВС.

Рис.9,10 - Лидирующие вклады в коррелятор (4.8), связанный с нефакторизующимися ВС.

Рис.11 - Прямой инстантонный вклад в корреляторы (4.5), (4.8).

Рис.12 - Пертурбативный (а) и прямой инстантонный (б) вклады в коррелятор (5.1), связанный со скалярным глюонным током G^2 .

Рис.13 - Диаграммы, определяющие поведение коррелятора (5.5), связанного с глюонным током G^4 .

Рис.14 - Диаграммы, определяющие величину $\langle 0 | G^3 / \sigma \rangle$ и соответствующее ВС $\langle G^3 \rangle$.

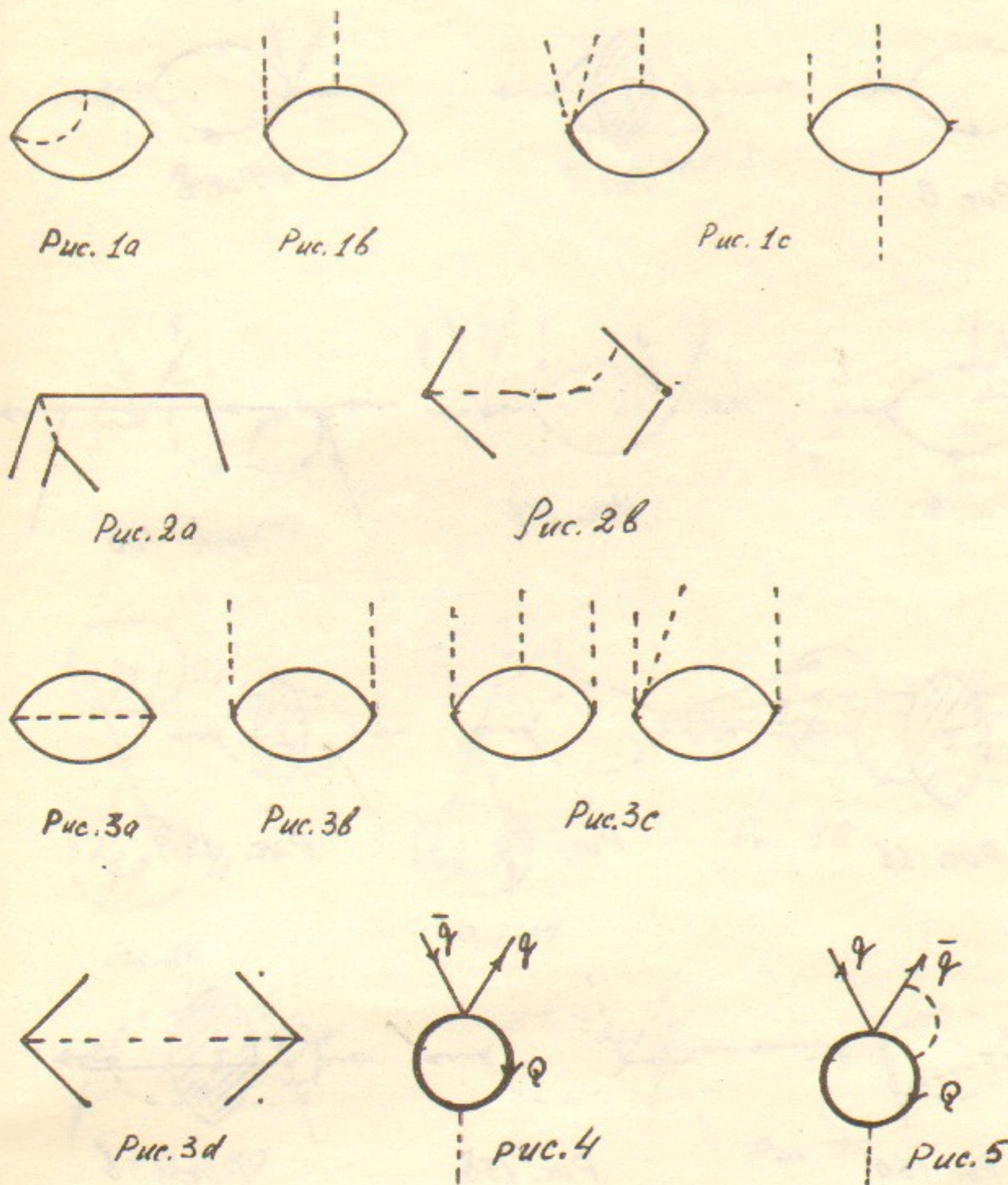
Рис.15 - Диаграммы, определяющие ВС $\langle \bar{\psi} G G \psi \rangle$.

Рис.16 - Механизм насыщения ВС, соответствующий гипотезе факторизации в модели инстантонной жидкости.

Рис.17 - Механизм насыщения ВС, соответствующий эффекту поляризации инстантонов и их скоррелированность в цветовом пространстве.

Рис.18 - Одноинстантонный механизм насыщения ВС.

Рисунки





Puc. 6



Puc. 7



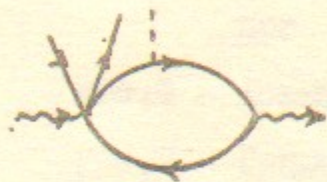
Puc. 8



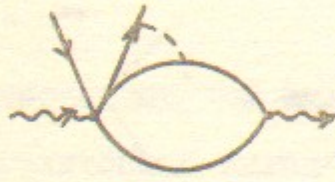
Puc. 14a



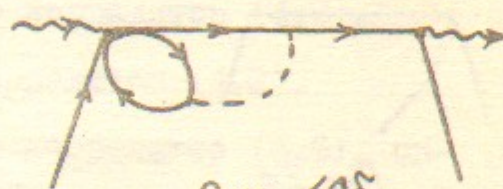
Puc. 14b



Puc. 9



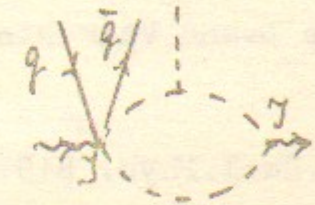
Puc. 10a



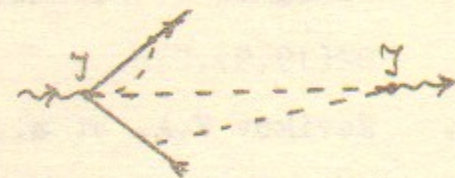
Puc. 10b



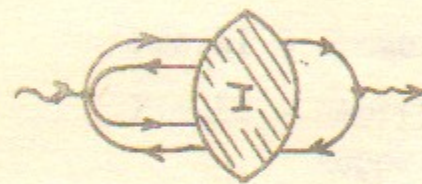
Puc. 15a



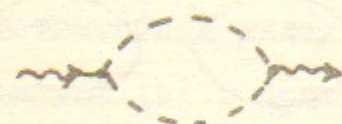
Puc. 15b



Puc. 15c



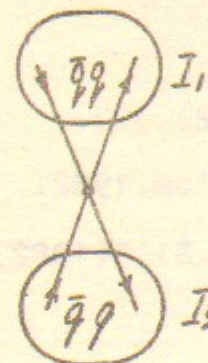
Puc. 11



Puc. 12a



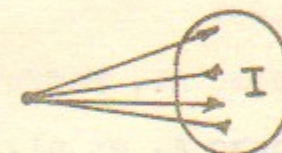
Puc. 12b



Puc. 16



Puc. 17



Puc. 18



Puc. 13a



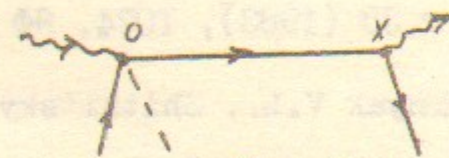
Puc. 13b



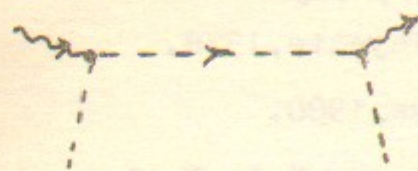
Puc. 13c



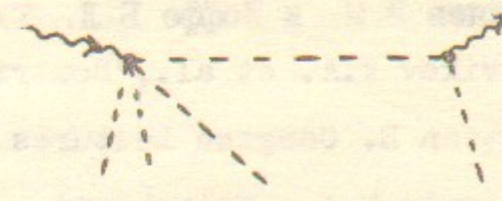
Puc. 19



Puc. 20



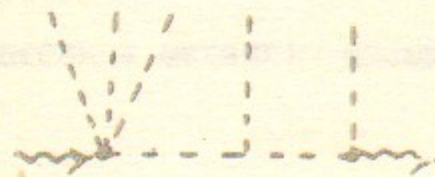
Puc. 21



Puc. 22



Puc. 132



Puc. 13g

1. Shifman M.A., Vainshtein A.I. and Zakharov V.I., Nucl. Phys. B147(1979), 385, 448, 519.
2. Shuryak E.V., Preprint INP 83-157.83-158, 84-00, Novosibirsk Reinders L. et al., Preprint TH-3767-CERN, 1983.
3. Leutwyler H., Phys.Lett. B48(1979), 45; Nucl.Phys. B76(1974), 413
4. Novikov V.A. et al., Preprint ITEP-71.1983.
5. Eidelman S., Kurdadze L. and Vainshtein A., Phys.Lett. B 82(1979), 278.
6. Novikov V.A. et al., Nucl.Phys. B191(1981), 301.
7. Ilgenfritz E.M., Muller-Preussker M., Nucl.Phys. B184 (1981)443.
8. Shuryak E.V., Nucl.Phys. B203(1982), 93, 116, 140; B214 (1983), 237.
9. Di Giacomo A., Paffuti G. Phys.Lett. B108(1982), 327.
Di Giacomo A. et al., Preprint IFUP-TH 13/82, Pisa, 1982.
Ilgenfritz E.M., Muller-Preussker M., Phys.Lett. B119(1982), 395.
10. Novikov V.A. et al., Nucl.Phys. B165(1980), 67.
11. Житницкий А.Р., Житницкий И.Р. Черняк В.Л., ЯФ т.38 (1983), 1074, ЯФ т.38 (1983), 1277.
12. Chernyak V.L., Zhitnitsky A.R., Preprint INP 83-107, Novosibirsk, 1983.
13. Беляев В.М. и Иoffee Б.Л. ЖЭТФ 83 (1982), 876.
14. Novikov V.A. et al., "Neutrino-78", La Fayette, 1978.
15. Witten E. Cargese Lectures, Plenum Press, 1980.
16. Shifman M.A., Vainshtein A.I. and Zakharov V.I., Nucl. Phys. B165(1980), 45; B163(1980), 46.
17. Вайнштейн А.И. и др. УФН т.136 (1982), 553.
18. Gasser J. and Leutwyler H., Phys.Rep. 87(1982), 79.
19. Dyakonov D.I. and Petrov V.Yu., Preprint 900, 1983, LIMP, Leningrad
20. Migdal A.A. and Shifman M.A., Preprint ITEP-15, 1982.
21. Николаев С.Н., Радюшкин А.В. ЯФ 39 (1984), 147.
22. Callan C. et al., Phys.Rev. D17(1978), 2717; D19(1979), 1826.

А.Р.Житницкий

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЕ ИЗУЧЕНИЕ КХД-ВАКУУМА
ВОПРОСЫ ФАКТОРИЗУЕМОСТИ ЧЕТЫРЕХФЕРМИОННЫХ
ОПЕРАТОРОВ

Препринт
№ 84-101

Работа поступила - 9 апреля 1984 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов

Подписано к печати МН 04451 от 17.07.84г.

Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.3,4 печ.л., 3,0 учетно-изд.л.

Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 101

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90