

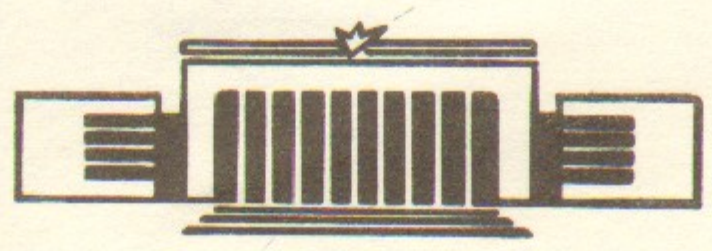


ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

Н.С.Диканский, Д.В.Пестриков

**НАГРЕВ НЕСГРУППИРОВАННОГО ПУЧКА
ВБЛИЗИ ПОРОГА ПРОДОЛЬНОЙ
НЕУСТОЙЧИВОСТИ**

ПРЕПРИНТ 84-122



НОВОСИБИРСК

НАГРЕВ НЕСТРУПТИРОВАННОГО ПУЧКА ВБЛИЗИ ПОРОГА
ПРОДОЛЬНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Н.С.Диканский, Д.В.Пестриков

А Н Н О Т А Ц И Я

Вблизи порога неустойчивости уровень когерентного шума пучка заметно превышает тепловой. В этом случае обмен энергией частиц пучка с когерентными флуктуациями может приводит к увеличению продольной температуры пучка. В работе получены релаксационные уравнения для этого процесса. Показано, что при наличии охлаждения продольная температура пучка не может стать меньшей температуры, отвечающей порогу неустойчивости. Обсуждается удлинение сгруппированного пучка за счет такого нагрева вблизи порога микроволновой неустойчивости.

I. В работе авторов /1/ было показано, что кулоновская релаксация энергетического распределения холодного негруппированного пучка тяжелых частиц обусловлена теплообменом частиц и когерентных колебаний. При малой температуре пучка обмен энергией между поперечными и продольными степенями свободы может быть подавлен из-за увеличения числа адиабатических столкновений. То-есть столкновений, для которых $\tilde{\zeta}_{CT} \omega_b > 1$ ($\tilde{\zeta}_{CT}$ - длительность столкновения, ω_b - частоты бетатронных колебаний в фокусирующих полях). Если энергия частиц ниже критической энергии накопителя, конкуренция процессов излучения и поглощения продольных когерентных колебаний частицами пучка приводит к выравниванию продольной температуры частиц и температур когерентных колебаний. Как показано в /1/, в отсутствие охлаждения описанный процесс может привести к нагреву (увеличению продольной температуры) пучка, если начальный уровень когерентного шума в нем превышал тепловой. Число волн, принимающих участие в таком теплообмене определяется условием

$$\lambda_n \tilde{\zeta}_p \lesssim 1, \quad (I)$$

где $\tilde{\zeta}_p$ - время релаксации, λ_n - декременты продольных когерентных колебаний. В рассмотренном в /1/ случае само по себе взаимодействие частиц не приводило к когерентным неустойчивостям пучка. Поэтому выполнение условия (I) для большого числа мод могло обеспечиваться лишь при малой продольной температуре пучка.

В настоящей работе рассматривается более распространенный в накопителях случай, когда взаимодействие частиц приводит к неустойчивости когерентных колебаний монохроматического пучка, но за счет конечного разброса частот развитие этих неустойчивостей подавляется затуханием Ландау. При этом выполнение условия (I) может обеспечиваться близостью пучка к порогам неустойчивости. То есть к такому соотношению между током и разбросом частот в пучке, когда инкременты неустойчивостей сравниваются с декрементами затухания Ландау. Уровень когерентного шума пучка в околупороговой области может заметно превышать тепловой /2/. Поэтому выполнение условия (I) даже для сравнительно небольшого числа мод может привести к заметному нагреву пучка из-за взаимодействия частиц с когерентным фоном.

Как и в /1/, ограничимся здесь рассмотрением наиболее простого случая — релаксации энергетического распределения несгруппированного пучка. Поэтому ниже, говоря о неустойчивостях, мы будем иметь в виду продольные когерентные неустойчивости несгруппированного пучка. Такие неустойчивости могут вызываться двумя причинами^{*)}. Либо эффективным притяжением частиц (эффект отрицательной массы при кулоновском взаимодействии /3/), либо конечной добротностью окружающих пучков (и переносящих взаимодействие частиц) электродов.

2. Использованный в работе /1/ метод построения релаксионных уравнений основан на применении теории возмущений. В надпороговой области когерентные колебания в пучке нарастают. Поэтому даже незначительные начальные возмущения пучка могут приводить к сильному изменению движения частиц коллективными полями. Из дальнейшего будет видно, что равновесие в этом случае может быть обусловлено исключительно нелинейными эффектами.

В подпороговой области когерентные колебания затухают. Поэтому если уровень когерентного шума в пучке не слишком велик, релаксация пучка может быть описана в рамках использованного в /1/ квазилинейного приближения.

При построении кинетического уравнения, описывающего релаксацию распределения за счет взаимодействия частиц с когерентными колебаниями, считаем выполненными два упрощающих предположения:

- а) взаимодействие с наведенными пучком полями мало искажает движение частиц за времена, порядка периодов невозмущенного движения;
- б) наведенные пучком поля не возбуждают поперечных колебаний частиц.

В принятых предположениях кинетика пучка описывается системой уравнений /1/:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial p} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \langle e^{\delta E_n^*(\omega + i\Delta)} \delta F_n(\omega + i\Delta) \rangle, \quad (2a)$$

^{*)} Мы не рассматриваем резонансные неустойчивости.

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + i n \omega_0(p) \right] \delta F_n(p, t) + e \delta E_n(t) \frac{\partial f_0}{\partial p} = 0. \quad (2b)$$

Здесь $f_0 = f_0(p, t)$ — распределение в пучке по импульсам, являющееся статистическим средним микроскопической фазовой плотности /4/:

$$f_0(p, t) = \left\langle \frac{1}{N} F(p, \theta, t) \right\rangle \equiv \left\langle \frac{1}{N} \sum_{a=1}^N \delta(p - p_a(t)) \delta(\theta - \theta_a(t)) \right\rangle, \quad (3)$$

$\{p = p_a(t), \theta = \theta_a(t)\}$ — траектория частицы a ($a = 1 \dots N$), импульс частицы p отсчитывается от равновесного значения, $\dot{\theta} = \omega_0(p)$ — частота обращения $\omega_0 = \omega_s + \omega_0' p$, $\omega_0' = \omega_s \gamma / (g m c)$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, $g = 1/\sqrt{1 - v_s^2/c^2}$ — релятивистский фактор, γ_s — отвечает критической энергии накопителя; δF и δE соответственно флуктуации микроплотности F и продольного электрического поля, наведенного пучком; скобки $\langle \rangle$ означают статистическое усреднение по флуктуациям в пучке. Помимо этого в (2a, б) учтено, что в силу цикличности движения частиц в накопителе величины F , δF , δE могут быть разложены в ряды Фурье по азимуту θ :

$$X(p, \theta, t) = \sum_n X_n(p, t) e^{i n \theta}$$

Как и в /1/, будем считать, что Фурье образы флуктуаций δE и δF связаны импедансным соотношением:

$$\delta E_{n\omega} = \frac{e \omega_s Z_n(\omega)}{2\pi R_0} \int dp \delta F_{n,\omega}(p) \quad (4)$$

где $2\pi R_0$ — периметр орбиты, а $Z_n(\omega)$ — импеданс элемента вакуумной камеры, с которым взаимодействует пучок. В общем случае $Z_n(\omega)$ является комплексной величиной.

Формальное решение уравнения (2б) может быть получено применением к нему одностороннего преобразования Фурье по времени:

$$\delta F_{n,\omega}(t) = \int_0^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \delta F_n(t + \tau).$$

В результате получим:

$$\delta F_{n\omega}(t) = \frac{i\delta F_n(p,t)}{\omega - n\omega_0(p)} - \frac{ie}{\omega - n\omega_0} \int_0^{\infty} d\tilde{t} \delta E_n(t+i\tilde{t}) \frac{\partial f_0}{\partial p}(t+i\tilde{t}) \cdot e^{i\omega\tilde{t}} \quad (5)$$

Комбинируя это уравнение с (4), найдем уравнение для флуктуаций поля в пучке $\delta E_{n\omega}$ /I/:

$$\int_0^{\infty} d\tilde{t} e^{i\omega\tilde{t}} \delta E_n(t+i\tilde{t}) \varepsilon_n(\omega, t+i\tilde{t}) = \frac{ie\omega_s Z_n}{2\tilde{\nu}R_0} \int dp \frac{\delta F_n(p,t)}{\omega - n\omega_0(p)}, \quad (6)$$

где

$$\varepsilon_n(\omega, t) = 1 + i \frac{Ne^2\omega_s Z_n}{2\tilde{\nu}R_0} \int dp \frac{\partial f_0(p,t)/\partial p}{\omega - n\omega_0(p)} \quad (7)$$

мгновенное значение диэлектрической проницаемости пучка.

В стационарных условиях ($\partial f_0/\partial t = 0$)

$$\delta E_{n,\omega} = \frac{ie\omega_s Z_n}{2\tilde{\nu}R_0 \varepsilon_n(\omega)} \int dp \frac{\delta F_n(p,t)}{\omega - n\omega_0(p)} \quad (8)$$

систематическая зависимость δE_n от времени определяется корнями дисперсионного уравнения:

$$\varepsilon_n(\omega) = 0.$$

В наиболее распространенных случаях решения (8) близки к частотам невозмущенного спектра $\omega_n = n\omega_s + \Delta\omega_n$, $|\Delta\omega_n| \ll \omega_s$.

Характерным масштабом изменения f_0 служит время релаксации \tilde{z}_p . Если это время велико по сравнению с периодами коллективных колебаний $\tilde{z}_p \omega_n \gg 1$, то зависимость δE_n от времени складывается из быстрых осцилляций с частотами ω_n и медленного (на временах порядка \tilde{z}_p) изменения амплитуд этих осцилляций. Как показано в /4/ (см. также /I/), наличие в задаче столь разных масштабов времени позволяет упростить уравнение (6) и переписать его в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \varepsilon_n}{\partial \omega} \delta E_{n,\omega} \right] - i\varepsilon_n(\omega) \delta E_{n,\omega} = \frac{e\omega_s Z_n}{2\tilde{\nu}R_0} \int dp \frac{\delta F_n(p,t)}{\omega - n\omega_0(p)} \quad (9)$$

В том же приближении для $\delta F_{n,\omega}$ имеем:

$$\delta F_{n,\omega} = \frac{i\delta F_n(p,t)}{\omega - n\omega_0(p)} - \frac{ie\delta E_{n,\omega}}{\omega - n\omega_0} \frac{\partial f_0}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial t} \left[e\delta E_{n,\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{\omega - n\omega_0} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial p} \right] \quad (10)$$

3. Прежде чем вычислять входящие в интеграл столкновений спектральные плотности $(\delta E_n)_\omega^2$ и $(\delta E_n \delta F_n)_\omega$, напомним основные особенности спектра продольных когерентных колебаний однородного пучка в околпороговой области. Как уже говорилось, собственные частоты колебаний определяются дисперсионным уравнением:

$$\varepsilon_n(\omega) = \varepsilon_n'(\omega) + i\varepsilon_n''(\omega) = 0,$$

имеющим особенно простой вид для монохроматического пучка:

$$\varepsilon_n(\omega) = 1 - \frac{\Omega_n^2}{\Delta\omega_n^2}, \quad \Delta\omega_n = \omega - n\omega_s = \pm\sqrt{\Omega_n^2}$$

где

$$\Omega_n^2 = n^2 \frac{Ne^2\omega_s \omega_s'}{2\tilde{\nu}R_0} \left(\frac{iZ_n}{n} \right) = \mathcal{U}_n + i\mathcal{V}_n \quad (11)$$

квадрат комплексного когерентного сдвига частоты.

Отсюда видно, что неустойчивость колебаний монохроматического пучка может быть вызвана либо конечной добротностью элемента, с которым взаимодействует пучок ($Z_n = Z_n' - iZ_n''$), либо, в отсутствие потерь $Z_n' = 0$, эффектом отрицательной массы ($\mathcal{U}_n < 0$).

В пучке с конечным разбросом частот неустойчивость стабилизируется затуханием Ландау. При этом порогу неустойчивости отвечают решения с $\Im m \omega_s = 0$. На пороге неустойчивости

$$\varepsilon_n(\omega) = 1 + \frac{\Omega_n^2}{n\omega_s'} \left[\mathcal{P}_n(\omega) - i\mathcal{Y}_n(\omega) \right],$$

где

$$\mathcal{P}_n(\omega) = \int dp \frac{\partial f_0/\partial p}{\omega - n\omega_0(p)}$$

(интеграл вычисляется в смысле главного значения), а

$$\mathcal{Y}_n(\omega) = \tilde{\nu} \int dp \delta(\omega - n\omega_0(p)) \partial f_0/\partial p,$$

дисперсионное уравнение определяет величины порогового числа

частиц в пучке

$$\varepsilon_n'(\omega_{th}, N_{th}) = 0 \quad (I2a)$$

и когерентного сдвига частоты

$$\varepsilon_n''(\omega_{th}, N_{th}) = 0. \quad (I2б)$$

Иногда вместо (I2a, I2б) удобнее использовать эквивалентную систему уравнений /5/:

$$Q_n(\omega) = -n\omega_0' \frac{U_n}{U_n^2 + V_n^2}, \quad (I3a)$$

$$Y_n(\omega) = -n\omega_0' \frac{V_n}{U_n^2 + V_n^2}. \quad (I3б)$$

Спектр колебаний в околопороговой области $N \approx N_{th}$

$$\Delta\omega_n = \Delta\omega_n^{th} + \Delta_n$$

может быть найден разложением ε_n в ряд по $\Delta N = N_{th} - N$

и Δ_n

$$\varepsilon_n(\omega) \approx - \left(\frac{\partial \varepsilon_n}{\partial N} \right)_{th} \Delta N + \left(\frac{\partial \varepsilon_n}{\partial \omega} \right)_{th} \Delta_n.$$

Учитывая, что $(\partial \varepsilon_n / \partial N)_{th} = -1/N_{th}$, получим

$$\Delta_n = - \frac{\Delta N}{N_{th}} \frac{1}{(\partial \varepsilon_n / \partial \omega)_{th}}. \quad (I4)$$

Соответственно, декременты колебаний $\lambda_n = -\gamma_n \omega$ в околопороговой области определяются выражением

$$\lambda_n = - \frac{\Delta N}{N_{th}} \frac{(\partial \varepsilon_n'' / \partial \omega)_{th}}{[(\partial \varepsilon_n / \partial \omega)_{th}]^2}. \quad (I5)$$

Из него видно, что затуханию колебаний ($\lambda_n > 0$) отвечает область

$$\Delta N \left(\frac{\partial \varepsilon_n''}{\partial \omega} \right)_{th} < 0.$$

Проиллюстрируем полученные формулы двумя примерами.

Для неустойчивости отрицательной массы

$$U_n < 0, \quad V_n = 0$$

и гауссова распределения по импульсам

$$f_0(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{p^2}{2\sigma^2}\right) \quad (I6)$$

уравнения (I3a, I3б) дадут

$$\Delta\omega_n^{th} = 0, \quad n^2 \Delta\omega^2 = |U_n|_{th}$$

или

$$\omega_n^{th} = n\omega_s, \quad N_{th} = N_c \equiv \frac{2\pi R_0 \Delta\omega^2}{e^2 \omega_s |\omega_0'|} \left(\frac{n}{Z_n''} \right), \quad (I7)$$

где N_c число частиц, при котором начинается заметное подавление шумов пучка, а $\Delta\omega = |\omega_0'| \sigma$ разброс частот обращения в пучке. Помимо этого имеем $(\partial \varepsilon_n' / \partial \omega)_{th} = 0$,

$$\left(\frac{\partial \varepsilon_n''}{\partial \omega} \right)_{th} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{N}{N_c} \frac{1}{\ln|\Delta\omega|} < 0.$$

В результате из (I5) для декрементов получим:

$$\lambda_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \ln|\Delta\omega| \left(1 - \frac{N}{N_c} \right) > 0 \Big|_{N < N_c} \quad (I8)$$

В качестве другого примера рассмотрим неустойчивость, обусловленную взаимодействием пучка со слабодиссипативным элементом:

$$U_n > 0, \quad U_n \gg V_n, \quad (n\Delta\omega)^2 \quad (I9)$$

Для этого случая корни уравнения (I2б) с логарифмической точностью равны:

$$\Delta\omega_n^2 = (n\omega)^2 \ln\left(\frac{U_n}{V_n}\right) = (n\omega)^2 \ln\left(\frac{Z_n''}{Z_n'}\right) \quad (I20)$$

а величина N_{th} определяется соотношением

$$N_{th} = N_c \ln\left(\frac{Z_n''}{Z_n'}\right). \quad (I21)$$

Учитывая, что $\Delta\omega_n^2 \gg (n\omega)^2$

$$\left(\frac{\partial \varepsilon_n''}{\partial \omega} \right)_{th} \approx \frac{2 \Omega_n^2}{\Delta\omega_n^3},$$

для декрементов колебаний в околопороговой области получим:

$$\lambda_n = \left(1 - \frac{N}{N_{th}}\right) \frac{V_n}{2\sqrt{U_n}} \quad (22)$$

При $U_n < 0$, как легко видеть из уравнений (I3а, I3б), характер спектра когерентных колебаний определяется эффектом отрицательной массы и мало меняется наличием слабых потерь.

4. Знание поведения $\varepsilon_n(\omega)$ в околопороговой области позволяет найти уравнения, описывающие релаксационное изменение спектральных плотностей. Если Ω_n^2 не меняется в процессе релаксации, уравнение для спектральной плотности флуктуаций поля:

$$(\delta E_n)_\omega^2 = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta \langle \delta E_n^*(\omega + i\Delta) \delta E_n(\omega + i\Delta) \rangle \quad (23)$$

может быть получено преобразованием (9) к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\delta E_n)_\omega^2 + 2\Lambda_n(\omega) (\delta E_n)_\omega^2 = \\ = 2\text{Re} \left[\frac{e\omega_s \bar{z}_n}{2\bar{u}R_0} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta \left\langle \frac{\delta E_n^*(\omega + i\Delta)}{\partial \varepsilon_n / \partial \omega} \int \frac{dp \delta F_n(p, t)}{\omega - n\omega_0(p) + i\Delta} \right\rangle \right], \quad (24) \end{aligned}$$

где

$$\Lambda_n(\omega) = \text{Re} \left[\frac{-i\varepsilon_n(\omega)}{\partial \varepsilon_n / \partial \omega} \right]. \quad (25)$$

Уравнение (24) описывает медленные изменения $(\delta E_n)_\omega^2$ на временах, порядка \bar{c}_p . Поэтому в первом приближении по эффектам нестационарности шума пучка величину $\delta E_n, \omega$ в правой части (24) можно заменить "равновесным" значением (8). В предположении о статистической независимости одновременного рождения флуктуаций (совместного с используемым здесь квазилинейным приближением), усреднение по "начальным" флуктуациям проводится по формуле:

$$\langle \delta F_n^*(p, t) \delta F_n(p', t) \rangle = N \delta_{n, n'} \delta(p - p') f_0(p, t). \quad (26)$$

В околопороговой области ($\Delta N \ll N_{th}$) правая часть уравнения (24) имеет резкие пики (с шириной, порядка λ_n) для частот, удовлетворяющих "дисперсионному уравнению" (I2б)

Для остальных частот значение правой части в (24) невелико ($\varepsilon \sim 1$). Поэтому в околопороговой области (24) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\delta E_n)_\omega^2 = -2\Lambda_n(\omega) (\delta E_n)_\omega^2 + \\ + N \left| \frac{e\omega_s \bar{z}_n}{R_0} \right|^2 \frac{|\partial \varepsilon_n / \partial \omega|}{|\partial \varepsilon_n / \partial \omega|^2} \delta[\varepsilon_n''(\omega)] \int dp \delta(\omega - n\omega_0(p)) f_0(p). \quad (27) \end{aligned}$$

Как видно из этого уравнения релаксационное изменение спектральных плотностей $(\delta E_n)_\omega^2$ связано с двумя конкурирующими процессами: поглощением конкретных колебаний частицами пучка (первое слагаемое в правой части (27)) и излучением колебаний частицами (второе слагаемое). Поскольку решения (27) $(\delta E_n)_\omega^2 \sim \delta[\varepsilon_n''(\omega)]$ времена релаксации в (27) определяются декрементами λ_n из (I5).

Выше и непосредственно на пороге неустойчивости ($N \geq N_{th}$) равновесное решение (27) отсутствует

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta E_n)_\omega^2 \geq 0.$$

В этом случае развитие когерентных колебаний в пучке может ограничиваться либо действием описанных здесь нелинейных слагаемых, либо нагревом и последующим выходом пучка под порог неустойчивости. В подпороговой области ($N < N_{th}$) уравнение (27) имеет равновесное решение:

$$(\delta E_n)_\omega^2 \Big|_{st} = \frac{1}{2} \left| \frac{e\omega_s \bar{z}_n}{R_0} \right|^2 \frac{N}{1 - \frac{N}{N_{th}}} \delta[\varepsilon_n''(\omega)] \int dp \delta(\omega - n\omega_0(p)) f_0(p). \quad (28)$$

Соответствующая спектральная плотность шума пучка

$$(\delta p_n)_\omega^2 = \left| \frac{2\bar{u}R_0}{e\omega_s \bar{z}_n} \right|^2 (\delta E_n)_\omega^2$$

в равновесии есть

$$(\delta p_n)_\omega^2 = 2\bar{u}^2 \frac{N}{1 - \frac{N}{N_{th}}} \delta[\varepsilon_n''(\omega)] \int dp \delta(\omega - n\omega_0(p)) f_0(p).$$

При этом мощность шума пучка

$$\langle |\delta p_n|^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2i} (\delta p_n)_{\omega}^2$$

определяется соотношением:

$$\langle |\delta p_n|^2 \rangle = \frac{N}{1 - \frac{N}{N_{th}}} \sum_n \frac{\pi}{\omega_n} \left| \frac{\partial z_n''}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_n} \int dp \delta(\omega_n - n\omega_0(p)) f_0(p) \quad (29)$$

(суммирование ведется по всем корням уравнения $\varepsilon_n''(\omega_n) = 0$).

В некоторых специальных случаях формула (29) может быть упрощена. Так, для эффекта отрицательной массы ($U_n < 0$) и гауссова распределения по импульсам формула (29) дает результат работы [2]:

$$\langle |\delta p_n|^2 \rangle = \frac{N}{1 - \frac{N}{N_{th}}} \equiv \frac{N}{1 - \frac{T_c}{T}} \quad (30)$$

где $T = R_0 \Delta \omega^2 / |\omega_0'|$ - продольная температура пучка, а T_c определено соотношением

$$T_c = \frac{N e^2 \omega_s}{2\pi} \left(\frac{z_n''}{n} \right) \quad (31)$$

Для неустойчивости вследствие слабой диссипативности окружающих пучок элементов ($U_n > 0$, $U_n \gg V_n$, $(n\Delta\omega)^2$) из (29), соответственно, получим

$$\langle |\delta p_n|^2 \rangle = \frac{N}{1 - \frac{N}{N_{th}}} \cdot \frac{T}{2T_c} \quad (32)$$

Как и следовало ожидать, наличие неустойчивости приводит к увеличению уровня когерентного шума пучка в околороговой области. При этом для эффекта отрицательной массы ($U_n < 0$) равновесный уровень всегда превышает уровень дробового шума пучка.

5. Уравнение для f_0 получается подстановкой (10) в (2.а). Результатом явилось бы весьма сложное кинетическое урав-

нение со столкновительным интегралом, выраженным через спектральные плотности $(\delta E_n)_{\omega}^2$ и их производные по времени. Если, однако, интересоваться более грубыми характеристиками пучка такими, как продольная температура T и времена релаксации, можно ограничиться исследованием более простых уравнений - т.н. уравнений Ланжевена. Для получения этих уравнений проинтегрируем (2а) с ρ^2 по импульсам. В результате получим:

$$\frac{d\sigma^2}{dt} = \frac{2}{N} \sum_n \int \frac{d\omega}{2i} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int dp p \langle e^{\delta E_n^*}(\omega+i\Delta) \delta F_n(\omega+i\Delta) \rangle, \quad (33)$$

где

$$T = R_0 |\omega_0'| \sigma^2, \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dp p^2 f_0(p).$$

Воспользовавшись соотношениями (8), (10), а также тем, что в околороговой области $\varepsilon_n(\omega) = \Delta N / N_{th} + i z_n''(\omega)$, а $(\delta E_n)_{\omega}^2 \sim \delta[z_n''(\omega)]$, после несложных преобразований получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^2}{dt} + \sum_n \int \frac{d\omega}{2i} \operatorname{Re} \left[\frac{e^i}{\Omega_n^2} \right] \frac{\partial}{\partial t} (\delta E_n)_{\omega}^2 = \\ = -2 \sum_n \int \frac{d\omega}{2i} \gamma_n \left[\frac{e^i}{\Omega_n^2} \right] \Delta \omega_n (\delta E_n)_{\omega}^2. \end{aligned} \quad (34)$$

Правая часть (34) совпадает с мощностью потерь (на одну частицу) энергии флуктуаций поля во внешней системе:

$$W = \langle e \delta E \delta j \rangle = -N \sum_n R_0 |\omega_0'| \int \frac{d\omega}{2i} \gamma_n \left[\frac{e^i}{\Omega_n^2} \right] \Delta \omega_n (\delta E_n)_{\omega}^2$$

Поэтому, вводя полную энергию теплового движения пучка

$$\mathcal{E} = \frac{NT}{2} + \operatorname{sgn}(\omega_0') \sum_n \frac{T_n}{2}, \quad (35)$$

можно заменить (34) уравнением баланса энергии:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = W \quad (36)$$

Здесь

$$T_n = \frac{R_0^2}{\omega_s n^2} \operatorname{Re} \left[\frac{n}{i z_n} \right] \int d\omega (\delta E_n)^2$$

температура флуктуаций с $\omega \approx n\omega_s$. Второе слагаемое в (35) равно статистическому среднему энергии взаимодействия частиц /I/. Как и должно быть, при $\omega'_0 < 0$ оно отвечает эффективному притяжению.

Из уравнений (34), (36) видно, что изменение продольной температуры пучка за счет взаимодействия с когерентным фоном определяется температурами флуктуаций T_n . Однако, в силу условия (I), сами величины T_n не постоянны. Уравнения, описывающие их изменения, легко получить интегрированием (27) по ω . Совместно с уравнением (36) оно составляет замкнутую систему релаксационных уравнений для описания кинетики пучка в околупороговой области:

$$\frac{dT_n}{dt} = -2\lambda_n (T_n - \phi_n(T)), \quad (37)$$

$$\frac{dT}{dt} = \operatorname{sgn}(\omega'_0) \sum_n \frac{2\lambda_n}{N} (T_n - \phi_n(T)) + \frac{W}{N}, \quad (38)$$

где λ_n определяется формулой (15), а

$$\phi_n(T) = \frac{e^2 \omega_s}{2\bar{u}} \left(\frac{z_n''}{n} \right) \langle |f_n|^2 \rangle_{st}$$

6. Обсудим некоторые следствия полученных уравнений. В отсутствие диссипации ($W = 0$) уравнения (37,38) фактически совпадают с полученными в /I/. Система имеет равновесное решение, отвечающее выравниванию температур флуктуаций

$$T_n \rightarrow T_n^{st} = \frac{T_c}{1 - T_c/T}$$

Значение продольной температуры пучка в равновесии определяется законом сохранения \mathcal{E} :

$$\mathcal{E} = \frac{NT}{2} - \frac{N_{ex}}{2} \cdot \frac{T_c}{1 - T_c/T} \quad (39)$$

N_{ex} число неустойчивых мод ($N_{ex} \ll N$). Как видно из (39), при уменьшении \mathcal{E} равновесное значение T приближается к T_c .

При наличии диссипации ($W \neq 0$) система уравнений (37, 38) не имеет равновесных решений. Для распределений f_0 близких к гауссову ($f_0 \approx -P f_0 / \sigma^2$) на пороге неустойчивости имеет место соотношение:

$$\frac{(n\Delta\omega)^2}{4\omega_n} \gamma_n \left[\frac{1}{\Omega_n^2} \right] = -\pi \int dp \delta(\omega_n - n\omega_0(p)) f_0 < 0$$

Поэтому $W > 0$ и, соответственно, релаксация сопровождается увеличением \mathcal{E} . Взаимодействия частиц с когерентными флуктуациями приводит к нагреву пучка и выходу его из околупороговой области.

Одним из путей предотвращения такого нагрева могло бы быть использование охлаждения частиц. В этом случае уравнение (38) должно быть заменено на

$$\frac{dT}{dt} = - \sum_n \frac{\operatorname{sgn}(\omega'_0)}{N} \frac{dT_n}{dt} + \frac{W}{N} - 2\lambda_0 (T - T_0), \quad (40)$$

где λ_0 - декремент охлаждения, T_0 - равновесная продольная температура пучка при нулевом токе ($N \rightarrow 0$). Покажем теперь, что при достаточно сильном трении (и $T_0 < T_{cn}$) равновесные решения системы (37,40) попадают в околупороговую область, а равновесная температура T тем ближе к пороговой, чем больше λ_0 .

Для наиболее реалистического "одногорбого" распределения по импульсам

$$\frac{W}{N} = \sum_n \frac{\Delta\omega_n}{Nn} T_n \cdot \left[\frac{n z_n'}{z_n''} \right] \quad (41)$$

Подставив (41) в (40) и учитывая, что в равновесии $T_n = \phi_n(T)$, получим уравнение для равновесной продольной температуры ($dT/dt = 0$):

$$T - T_0 = \frac{1}{2\lambda_0} \sum_n \frac{\Delta\omega_n}{Nn} \phi_n(T) \cdot \left[\frac{n z_n'}{z_n''} \right] \quad (42)$$

Рассмотрим два конкретных случая:

а) $U_n > 0$, $U_n \gg V_n$, $(n \Delta \omega)^2$. При этом

$$\Phi_n \approx \frac{1}{2} \frac{T_{th}}{1 - \frac{T_{th}}{T}}, \quad T - T_{th} \ll T_{th}$$

$T_{th} = T_c / \ln(z''/z')$ - температура пучка на пороге неустойчивости, T_c определено формулой (31). Подставив Φ_n и $\Delta \omega_n \approx \sqrt{U_n}$ в (42), получим

$$T - T_0 = \frac{1}{2\lambda_0} \sum_n \frac{1}{N} \sqrt{\frac{U_n}{n^2}} \left[\frac{n z'_n}{z''_n} \right] \frac{T_{th}}{1 - \frac{T_{th}}{T}} \quad (43)$$

Для нерезонансных элементов

$$\frac{z''_n}{n} = \begin{cases} \text{const}, & n < n_0 \\ \sim 1/n^2, & n > n_0 \end{cases}$$

где n_0 - некоторая граничная гармоника ($n_0 \sim R_0/\rho_1$, ρ_1 - характерный поперечный размер). Кроме того, нужно учесть, что T_{th} лишь логарифмически медленно зависит от n . Поэтому, ограничиваясь в (43) учетом "наиболее неустойчивых" мод $|n| < n_0$, перепишем уравнение (43) в виде:

$$T - T_0 = q \frac{T_{th}}{1 - \frac{T_{th}}{T}}, \quad (44)$$

где

$$q = \frac{n_0}{2N\lambda_0} \sqrt{\frac{U_n}{n^2}} \left[\frac{n z'_n}{z''_n} \right] \quad (45)$$

Из-за малости отношений $(n_0/N) \ll 1$, и $z'_n \ll (z''_n/n)$ величина q не велика:

$$q \ll 1, \quad \Delta \omega_n \ll \frac{N\lambda_0}{z'_n} \left(\frac{z''_n}{n} \right)$$

В этих условиях характер решений (44) очевиден:

$$T \approx \begin{cases} T_0, & T_0 \gg T_{th} \\ T_{th}(1+q) \approx T_{th}, & T_0 \ll T_{th} \end{cases} \quad (46)$$

б) $U_n < 0$, $|U_n| \gg V_n$. При этом

$$\Phi_n(T) = \frac{T_{th}}{1 - \frac{T_{th}}{T}}, \quad \Delta \omega_n = n \Delta \omega \left(\frac{z'_n}{z''_n} \right)^{1/2}, \quad T_{th} = T_c$$

Так что (42) можно переписать в виде:

$$T - T_0 = \frac{1}{2\lambda_0} \sum_n \frac{T_c}{1 - \frac{T_c}{T}} \left[\frac{n z'_n}{z''_n} \right]^{4/3} \frac{1}{n^{1/3}} \frac{\Delta \omega}{N} \quad (47)$$

Величина q в этом случае, очевидно, равна

$$q = \frac{\Delta \omega}{2\lambda_0 N} \sum_n \left[\frac{n z'_n}{z''_n} \right]^{4/3} \frac{1}{n^{1/2}} \approx \frac{n_0^{2/3} \Delta \omega}{2\lambda_0 N} \left[\frac{n z'_n}{z''_n} \right]^{4/3},$$

$$q \ll 1 \quad \text{при} \quad \frac{\lambda_0}{\Delta \omega} \gg \frac{n_0^{2/3}}{2N} \left(\frac{n z'_n}{z''_n} \right)^{4/3}.$$

Поэтому как и в предыдущем случае величина равновесной продольной температуры пучка будет определяться соотношением (46).

Таким образом, при стабилизации когерентных неустойчивостей затуханием Ландау пучок не может быть охлажден до температур, меньших чем T_{th} . При этом, конечно, предполагается, что само охлаждение не изменяет пороги неустойчивостей пучка (что обычно хорошо выполняется).

Уровень когерентного шума пучка в равновесии

$$\langle |\delta p_n|^2 \rangle \approx \frac{N}{q}$$

заметно превышает дробовой, если q мало. С другой стороны, для справедливости используемого здесь квазилинейного приближения, $\langle |\delta p_n|^2 \rangle$ не должно превышать N^2 . Поэтому q должно быть ограничено снизу условием

$$q \gg 1/N.$$

Последнее реализуется тем лучше, чем больше число "неустойчи-

вых" мод n_0 .

Если пороги неустойчивостей для различных мод сильно отличаются, равновесное состояние реализуется вблизи порога с наиболее высокой температурой T_{rn} . При этом, однако, соответствующая величина q не должна быть слишком малой. В противном случае вычисление продольной температуры может потребовать учета корреляторов более высокого порядка.

Нагрев в околороговой области может быть причиной увеличения длины пучка, сгруппированного в сгусток ускоряющим В.Ч. полем накопителя. Строго говоря, этот случай требует особого рассмотрения с явным учетом фазового движения частиц. Однако, если взаимодействие таково, что для сравнительно большого количества неустойчивых мод

$$\Omega_n \gg \Omega_{\phi}, \quad n\theta_0 \gg 1, \quad n_0\theta_0 \gg 1 \quad (48)$$

где Ω_{ϕ} частота синхротронных колебаний, $l_0 = 2R_0\theta_0$ длина пучка, увеличение продольной температуры пучка может быть проанализировано на основе полученных выше результатов. Такая возможность связана с тем, что при выполнении условий (48) спектры когерентных колебаний однородного и сгруппированного пучка совпадают с точностью до очевидной замены $N \rightarrow N \frac{n_0}{n}$ (см., например, /5/). Соответственно, для сгруппированного пучка Ω_n^2 должно быть заменено на

$$\Omega_n^2 = n^2 \frac{Ne^2\omega_s\omega_0'}{2R_0\theta_0} \left(\frac{iZ_n''}{n} \right), \quad n < n_0$$

а T_c на $T_c \cdot n_0/n$. Реально, условие (48) может выполняться для широко обсуждавшихся в последнее время т.н. "микроволновых неустойчивостей" сгруппированного пучка (см., например, /6/).

Равновесная температура охлаждаемого пучка определяется формулой (46), которая в наиболее характерном для релятивистских энергий случае $\omega_0' < 0$ может быть переписана в виде

$$T \approx \frac{T_c}{\theta_0}, \quad T_0 \ll T_c \quad (49)$$

Но в сгруппированном пучке

$$T = R_0 \frac{\Delta\omega^2}{|\omega_0'|} = R_0 \frac{\Omega_{\phi}^2}{|\omega_0'|} \theta_0^2$$

поэтому в равновесии

$$\theta_0^2 \approx \frac{Ne^2\omega_s|\omega_0'|}{l_0\Omega_{\phi}^2} \left(\frac{Z_n''}{n} \right), \quad \theta_0 \gg \theta_0 \quad (50)$$

длина пучка увеличивается как $N^{1/3}$. Здесь $l_0 = 2R_0\theta_0$ длина пучка, отвечающая T_0 , отношение (Z_n''/n) постоянно при $|n| < n_0$.

Полученная зависимость длины сгустка от тока наблюдалась на многих установках (см., например, /7/). Обычно приводят не саму величину θ_0 , а отношение (l/l_0) . Для него, при радиационном охлаждении пучка (накопителя электронов или позитронов), формула (50) дает:

$$\alpha = \frac{l}{l_0} = C \frac{N^{1/3}}{j^{5/6}} \left(\frac{Z_n''}{n} \right)^{1/3}, \quad (51)$$

C - геометрический фактор, зависящий от параметров орбиты. Видно, что зависимость удлинения пучка α от энергии помимо прочего определяется зависимостью от энергии сил, переносящих взаимодействие частиц. Например, при кулоновском взаимодействии частиц

$$\frac{Z_n''}{n} \sim \frac{1}{j^2}$$

формула (51) приводит к зависимости

$$\frac{l_b}{l_0} \sim \frac{N^{1/3}}{j^{3/2}}, \quad (52)$$

близкой к наблюдавшейся на установке ADONE /7/:

$$\frac{l_b}{l_0} \sim \frac{N^{1/3}}{j^{5/3}}$$

В заключение отметим, что обсуждавшийся здесь нагрев пучка связан с увеличением уровня когерентного шума при подходе к по-

рогу неустойчивости. Очевидно, что последнее свойство является общим для любого вида неустойчивостей. Поэтому следует ожидать, что аналогичный нагрев будет иметь место всегда, когда неустойчивость пучка стабилизируется затуханием Ландау.

Авторы благодарны А.В.Бурову за обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Диканский Н.С., Пестриков Д.В. Влияние эффектов упорядочения на релаксацию негруппированного холодного пучка в накопителе. Препринт ИЯФ СО АН СССР № 84-48, Новосибирск 1984, 32 с.
2. Пархомчук В.В., Пестриков Д.В. ЖТФ 1980, 50, № 7, с.1411.
3. Коломенский А.А., Лебедев А.Н. А.Э., 1959, 7, с.549.
4. Климонтович Ю.П. Статистическая теория неравновесных процессов в плазме, Москва: МГУ 1964, 281 с.
5. Дербенев Я.С., Диканский Н.С., Пестриков Д.В. Устойчивость бунчируемого пучка, взаимодействующего с согласованными линиями: Препринт ИЯФ СО АН СССР № 7-72, Новосибирск 1972, CERN Transl. № 72-16, Geneva 1972.
6. Hübner K., Zotter B. CERN/ISR-TH/78-3, Geneva, 1978.
7. Amman F. IEEE Trans. on Nucl. Science 1969, NS-16, p 1073.

Н.С.Диканский, Д.В.Пестриков

НАГРЕВ НЕСГРУППИРОВАННОГО ПУЧКА ВБЛИЗИ ПОРОГА
ПРОДОЛЬНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Препринт
№ 84-122

Работа поступила - 23 августа 1984 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати 13.09-84 г. МН 04533
Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.1,6 печ.л., 1,3 учетно-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 122.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90