ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

А.В.Буров

ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА НА ДЛИНУ СГУСТКА

ПРЕПРИНТ 84-159

НОВОСИБИРСК

ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА НА ДЛИНУ СГУСТКА

А.В.Буров

А Н Н О Т А Ц И Я

Релятивистский пучок, двигаясь в накопителе, взаимодействует с окружающей структурой вакуумной камеры. Это приводит к искажению продольной потенциальной ямы, причем эффект может быть не мал. В работе находится равновесное распределение плотности сгустка и исследуется его устойчивость. Описано приближение сильного собственного поля. Показано, что разогрев быстрой неустойчивостью и искажение продольной потенциальной ямы дают в удлинение вклады одного порядка.

Некоторые символы

a – поперечный размер сгустка
b – радиус камеры
c – скорость света
e – заряд электрона
m – масса электрона
N – число частиц в сгустке
q — кратность
R – средний радиус орбиты $R = \Pi / 2\pi$
T – температура сгустка $T = |\mu| v_T^2$
U – полный набор энергии частицей за оборот
$U_{вч}$ – энергия, переданная частице за оборот ВЧ-полем
U_c – энергия, переданная частице за оборот собственным полем сгустка
V – амплитуда напряжения ВЧ
v_T – среднеквадратичный разброс скоростей $v_T = R\,\delta\omega$
x – координата вдоль сгустка, отсчитываемая от положения с равновесной фазой при нулевом токе (от "равновесной частицы")
Δ – длина сгустка
Δ_T – тепловая длина – среднеквадратичный размер сгустка без собственного поля $\Delta_T = \frac{v_T}{\Omega}$
$\Delta_н$ – тепловая длина на пороге неустойчивости
ε – отклонение энергии от равновесной
$\lambda(x)$ – плотность сгустка
φ_s – равновесная фаза ВЧ поля при нулевом токе
μ – эффективная масса продольного движения
$\varkappa$ – жесткость ВЧ поля
Ω – частота одночастичных синхротронных колебаний
ω – частота обращения $\omega = c/R$
ω_s – равновесная частота обращения
ω_s' – модуляция частоты обращения $\omega_s' = \frac{d\omega}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}$
$\delta\omega$ – разброс частот обращения

Введение

Релятивистский пучок, двигаясь в накопителе, взаимодействует с окружающей структурой вакуумной камеры, что приводит к искажению продольной потенциальной ямы.

Первое теоретическое описание этого эффекта было предложено С.Пеллегрини и А.М.Сесслером около полутора десятков лет тому назад /1/. Несмотря на искажение ямы пространственное распределение частиц априорно полагалось гауссовским без смещения центра. По этой причине полученные формулы могли давать в лучшем случае лишь правильные порядки искомых величин. Интересно, что в случае сильного эффекта пропадала зависимость длины сгустка от температуры. Вот как это обстоятельство было прокомментировано: "В случае сильного эффекта длина определяется из условия баланса между выполаживающим потенциальную яму собственным полем сгустка и приложенным ВЧ напряжением".

Подход, позволяющий при заданной температуре найти равновесную функцию пространственного распределения частиц, был предложен Ж.Хайссинским /2/. Задача сводилась им к отысканию самосогласованной больцмановской плотности

$$\lambda(x) = C \exp\{-W/T\} \tag{1}$$

Здесь W – координатная часть гамильтониана, константа C находится из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda(x)\, dx = N \tag{2}$$

Уравнение (1) предлагалось решать численно, что и делалось впоследствии рядом авторов /3,4,5/. В работе /6/ были получены формулы для удлинения и среднего смещения сгустка из-за искажения ямы в случае слабого эффекта.

В настоящей работе задача о распределении плотности сгустка с заданным разбросом частот обращения решается аналитически. В случае сильного эффекта она сводится к решению уравнения, существенно более простого, чем (1). Рассмотрен вопрос об устойчивости состояний сгустка с сильным собственным полем. Показано, что искажение потенциальной ямы и разогрев быстрой неустойчивостью дают в удлинение вклады, одинаково зависящие от параметров машины. В случае слабого эффекта результаты совпадают с полученными в работе /6/. Распределение по скоростям всюду считается максвелловским. Это допущение сделано только ради простоты изложения и не является решающим для данной работы.

1. Замороженный сгусток

Допустим, что длина сгустка велика по сравнению с тепловой: $\Delta \gg \Delta_T$. Очевидно, что это может быть лишь тогда, когда собственное поле почти полностью выполаживает потенциальную яму, точнее – ту ее часть, где находится сгусток. Яма в этом случае имеет плоское дно и резкие границы между дном и стенками. Иначе можно сказать, что полное поле, действующее на частицы сгустка, мало по сравнению с внешним ВЧ. В первом приближении по малому параметру Δ_T/Δ можно считать это поле нулевым: $\forall\, x$, где есть частицы:

$$U(x) = U_{ВЧ}(x) + U_c(x) = 0, \quad x \in [x_1, x_2] \tag{3}$$

Здесь X_1 и X_2 – координаты границ.

Уравнение баланса (3) позволяет, не прибегая к прямому решению более сложного уравнения Хайссинского (1), исследовать состояния сгустка, для которых $\Delta \gg \Delta_T$. Такие сгустки будем называть замороженными.

2. Нерелятивистский замороженный сгусток

В нерелятивистском случае поля частиц – кулоновские, сгусток – симметричен. С точностью до нелогарифмических поправок уравнение баланса может быть записано в виде:

$$\varkappa X = e^2 \Pi \int_{-X_{max}}^{X_{max}} \frac{\lambda(x')(x-x')\,dx'}{[(x-x')^2 + a^2]^{3/2}} \tag{4}$$

$$X_{max} = \min\left\{\frac{\Delta}{2}, b\right\}, \quad b \text{ – радиус камеры.}$$

Для частиц, далеких от краев, $|X \pm \Delta/2| \gg a$, ядро уравнения (4) можно заменить на производную от δ-функции, в обратном случае – на δ-функцию. Используя также условия нормировки и неотрицательности плотности получим:

$$\lambda(x) = \frac{\varkappa}{2e^2 \Pi L}\left(\frac{\Delta^2}{4} - x^2\right) \tag{5}$$

$$\frac{\Delta}{2} = \left(\frac{3 N e^2 \Pi L}{æ} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$L = \ln \frac{X_{max}}{a}$$

Для параметров НАП-М

V = I0 В, N = I0^8, L = I0, Π = 50 м, q = I, находим

$\Delta \simeq$ 7 м,

что близко к наблюдавшейся длине, на много порядков превосходившей размер при нулевом токе. Объяснение обнаруженного на этой установке удлинения кулоновским расталкиванием было предложено В.В.Пархомчуком.

3. Релятивистский замороженный сгусток. Уравнение баланса

Пренебрегая действием задних частиц на передние, собственное поле представим в виде:

$$U_c(x) = e^2 \int_{x_1}^{x} \lambda(x') \mathcal{G}(x-x')\, dx' \qquad (6)$$

где $\mathcal{G}(x)$ – функция Грина электродинамической задачи. Плотность замороженного сгустка находится решением следующей системы:

$$\forall\ x\ ,\ \text{где есть частицы}: æ x + e^2 \int_{x_1}^{x} \lambda(x') \mathcal{G}(x-x') dx' = 0 \qquad (7.1)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \lambda(x)\, dx = N \qquad (7.2)$$

$$\lambda(x) \geqslant 0 \qquad (7.3)$$

Казалось бы, из уравнения (7.I) следует $X_1 = 0$. Действительно, пусть $X \to X_1$. Тогда вроде бы $\int \lambda(x') \mathcal{G}(x-x') dx' \to 0$ и уравнение дает $X_1 = 0$ (неверно!). Покажем, что этот вывод ошибочен. Заметим, что разница $X - X_1$ не может быть как угодно мала. Она, во всяком случае, должна быть больше теплового

хвоста распределения Δ_τ, которым до сих пор пренебрегалось: $X - X_1 \gg \Delta_\tau$. В то же время функция Грина в окрестности X =0 может значительно меняться на расстоянии δ, меньшем, чем Δ_τ, которое, в свою очередь, мало в сравнении с длиной сгустка. В формальном описании этому отвечала бы особенность $\mathcal{G}(x)$ при X =0, т.е.

$$\lim_{x \to x_1} \int_{x_1}^{x} \lambda(x') \mathcal{G}(x-x') dx' \neq 0$$

Иначе говоря, в случае $\delta < \Delta_\tau$ поле теплового хвоста вообще говоря, не мало по сравнению с ВЧ, несмотря на то, что размер этого хвоста мал по сравнению с длиной сгустка.

Таким образом, вывод о том, что в голове замороженного сгустка идут равновесные частицы (т.е. X_1 =0), при $\delta < \Delta_\tau$ не оправдан. В обратном случае ($\delta > \Delta_\tau$) равновесные частицы действительно находились бы на передней границе сгустка – при отсутствии особенности функции $\lambda(x)$ в точке X_1. Ниже, в части 4(с) будет показано, что как раз в этом случае особенность есть, откуда и следует ошибочность приведенного вывода. Более того, сгусток в среднем смещен вперед по отношению к равновесной частице. Действительно, противное означало бы, что ВЧ поле не возмещает одночастичных потерь на синхротронное излучение. А поскольку существуют еще и когерентные потери, то полная энергия сгустка в таком случае стала бы падать, что не совместимо с равновесием. Допустим, что система (7) совместна. Оценим длину сгустка. Прежде всего заметим, что для всякой регулярной функции $\lambda(x) \sim N/\Delta$ выполняется соотношение

$$\left| \int_{x_1}^{x_1+\Delta} \lambda(x') \mathcal{G}(x_1+\Delta-x')\, dx' \right| \sim \frac{N}{\Delta} \left| Z\left(\frac{1}{\Delta}\right) \right| \qquad (8)$$

где $Z(k) = \int_0^\infty \mathcal{G}(x) e^{-ikx} dx$ – импеданс.

В справедливости соотношения (8) можно убедиться, проверив его для случаев $\mathcal{G}(x) = const$, $\delta(x)$, $\delta'(x)$.

Подставляя в уравнение (7.I) $x \sim \Delta$, получаем искомую оценку длины замороженного сгустка:

$$\Delta^2 \sim \left| \frac{N e^2}{æ} Z\left(\frac{1}{\Delta}\right) \right| \qquad (9)$$

4. Сгусток в равновесии. Частные случаи.

Прежде всего немного преобразуем уравнение Хайссинского. Дифференцируя (I), получим:

$$\lambda' = -\frac{\lambda}{\Delta_T^2}\left(x + \frac{e^2}{\varkappa}\int_{-\infty}^{x}\lambda(x')\,\mathcal{Y}(x-x')\,dx'\right) \qquad (10)$$

Решим задачу о распределении плотности в сгустке с сильным собственным полем для некоторых частных случаев. Все функции Грина таковы, что $\mathcal{Y}(0)<0$. Поскольку ниже всюду имеется в виду сгусток с отрицательной массой $\mu<0$, то для обеспечения фокусировки необходимо

$$\varkappa<0 \qquad (11)$$

(A) $\mathcal{Y}(x) = \mathcal{Y}_A = const$

В безразмерных переменных $y=\frac{x}{\Delta_A}$ уравнение 10) запишется как

$$n'' = -\alpha_A\, n'(y+n) \qquad (12)$$

здесь $\Delta_A = \frac{Ne^2\mathcal{Y}_A}{\varkappa}$; $\alpha_A = \frac{\Delta_A^2}{\Delta_T^2}$

$$n(y)=\int_{-\infty}^{y}\rho(y')\,dy'\,; \quad \rho(y)=\frac{\Delta_A}{N}\lambda(x)$$

Покажем, что сгусток в данном случае укорочен и смещен в область отрицательных аргументов из-за сильных когерентных потерь, притом общее смещение велико по сравнению с размером. Пусть x_0 – координата центра тяжести сгустка:

$$\int x\,\lambda(x)\,dx = Nx_0$$

Когерентные потери за оборот всего сгустка скомпенсированы ВЧ полем:

$$Nx_0 + \frac{\mathcal{Y}_A e^2}{\varkappa}\int_0^N n\,dn = 0 \;\Rightarrow\; x_0 = -\frac{\Delta_A}{2}$$

Поскольку ширина сгустка определяется температурой, изменением ВЧ на размере сгустка можно пренебречь. Тогда:

$$n''=-\alpha_A\, n'(-y_0+n) \qquad (13)$$

где $y_0 = -\frac{x_0}{\Delta_A} = \frac{1}{2}$

Откуда получаем:

$$n(y)=\frac{1}{1+e^{-\frac{\alpha_A}{2}(y+1/2)}} \qquad (14)$$

Видно, что размер сгустка в обычных переменных

$$\Delta(A) \approx \frac{2}{\alpha}\Delta_A = \frac{2\Delta_T^2}{\Delta_A}$$

(B) $\mathcal{Y}(x)=\mathcal{Y}_B\,\delta(x)$

Это случай длинных электродов. $-\mathcal{Y}_B$ есть характеристический импеданс /I/. В безразмерных переменных уравнение Хайссинского (10) выглядит следующим образом:

$$\rho' = -\alpha_B\,\rho(y+\rho) \qquad (15)$$

где $y=\frac{x}{\Delta_B}$, $\alpha_B=\frac{\Delta_B^2}{\Delta_T^2}$, $\Delta_B^2=\frac{Ne^2\mathcal{Y}_B}{\varkappa}$

Точное решение для любого α_B:

$$\rho(y)=\frac{1}{\alpha_B}\,\frac{e^{-\alpha_B y^2/2}}{\int_{-\infty}^{y}e^{-\alpha_B t^2/2}\,dt + \frac{\sqrt{2\pi/\alpha_B}}{e^{\alpha_B}-1}} \qquad (16)$$

При $\alpha_B \ll 1$ $\quad\rho=\sqrt{\frac{\alpha_B}{2\pi}}\,e^{-\alpha_B y^2/2}$ – гауссовское распределение в ВЧ яме.

При $\alpha_B\gg 1$ везде, кроме тепловых хвостов

$$\rho(y)=-y \qquad (17)$$

Из условия нормировки, как всегда, находится размер сгустка. В обычных единицах полная длина

$$\Delta(B)=\Delta_B\sqrt{2} \qquad (18)$$

Размер переднего теплового хвоста

$$\Delta_{\tau B} \sim \frac{\Delta_\tau^2}{\Delta(B)} \qquad (19)$$

(C) $y(x) = \begin{cases} y_A, & x<\delta \\ 0, & x>\delta \end{cases}$, $\delta < \Delta_A$ (в противном случае задача сводится к разобранной в пункте (A)).

В отдельном рассмотрении нуждается только ситуация при $\delta > \Delta_{\tau B}$, $\Delta_{\tau B}$ определяется формулой (I9), где $y_B = y_A \delta$. В противном случае функцию Грина можно заменить на δ-функцию и задача сводится к предыдущей. Распределение (B) теперь не является равновесным – на передние частицы действует нескомпенсированное ВЧ поле. Равновесию при строго нулевой температуре отвечает, очевидно, произвольный набор блинов типа (A), отстоящих друг от друга на расстоянии $\geqslant \delta$. Конечность температуры приводит к появлению малых, но конечных потоков частиц от блина к блину. Эти потоки не приводят к медленно накапливающимся изменениям плотности, лишь если блины идут эквидистантно с интервалом δ:

Доля частиц в каждом блине:

$$\frac{N_k}{N} = \frac{2\delta}{\Delta_A} k \qquad (20)$$

Из условия нормировки находится количество блинов и эффективная длина всего сгустка:

$$1 = \sum^{k_{max}} \frac{N_k}{N} \approx \frac{\delta}{\Delta_A} k_{max}^2 \Rightarrow k_{max}^2 = \frac{\Delta_A}{\delta};\ \Delta(C) = \delta k_{max} \qquad (21)$$

$$\Delta(C) = \frac{\Delta(B)}{\sqrt{2}}$$

На основе данного примера можно сделать один общий вывод.

Любая функция Грина для частиц, идущих на расстоянии, меньшем δ от границы, не отличается существенно от константы. Поэтому в случае сверхкороткого теплового хвоста $\Delta_\tau < \delta$ пограничный слой толщины $\sim\delta$ сколлапсируется в блин типа (A). То же самое, конечно, произойдет и с другими слоями. В пределе $\Delta_\tau \to 0$, которому отвечает уравнение баланса (7.I) это означает сингулярность плотности распределения, упоминавшуюся в части 3.

(D) $y(x) = y_D\, \delta'(x)$

Это случай коротких электродов $y_D = y_B L$, $-y_B$ – характеристический импеданс, L – длина электродов.

Уравнение Хайссинского:

$$\rho' = -\alpha_D \rho (y + \rho') \qquad (22)$$

$$\alpha_D = \frac{\Delta_D^2}{\Delta_\tau^2},\ \Delta_D = \left(\frac{Ne^2 y_D}{\varkappa}\right)^{1/3},\ y = \frac{x}{\Delta_D},\ \rho = \frac{\Delta_D}{N}\lambda \qquad (23)$$

Отсюда $\rho = C \exp\left\{-\alpha_D\left(\frac{y^2}{2}+\rho\right)\right\}$

Видно, что это – симметричная функция.

$\rho(y) = \rho(-y)$

При $\alpha_D \gg 1$

$$\rho = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} - \frac{y^2}{2} + O\left(\frac{1}{\alpha_D}\right) \qquad (24)$$

что, конечно, сразу могло быть получено из уравнения баланса.

Длина сгустка

$$\Delta(D) = 2\left(\frac{3Ne^2 y_D}{2\varkappa}\right)^{1/3} = 12^{1/3}\Delta_D \qquad (25)$$

(E). Резонатор с размерами, много меньшими длины сгустка:

$y(x) = y_E \cos k_R x$ /I/.

Здесь $k_R = 2.4/r$, $y_E = -k_R Z_R$,

$$Z_R = 8.5\frac{r}{L}\left(1 - \cos\left(\frac{2.4L}{r}\right)\right)$$

r – радиус, L – длина резонатора.

Распределение плотности оказывается таким же, как в предыдущем случае с $y_D = y_E/k_R^2$:

(F). Цилиндрический резонатор с диаметром, большим длины сгустка: $y(x-x') = -2\ln\left(1+\frac{2L}{(x-x')}\right)\frac{d}{dx'}$ /3/

L – длина резонатора.

Уравнение баланса в данном случае:

$$x - \frac{2e^2}{\varkappa}\int_{x_1}^{x} \ln\left(1+\frac{2L}{x-x'}\right)\lambda'(x')\,dx' = 0 \qquad (26.1)$$

Или, что эквивалентно,

$$x + \ell^2 \int_{-\infty}^{x} \frac{\rho(x)-\rho(x')}{(x-x')(x-x'+2L)}\,dx' = 0 \qquad (26.2)$$

$$\ell^2 = \frac{Ne^2}{\varkappa}$$

Из уравнения (26.2) видно, что в данном случае функция Грина отвечает притяжению (потерям энергии) на очень малых расстояниях и отталкиванию (увеличению энергии) на не слишком малых, причем интеграл от нее по всем аргументам равен нулю:

$$\int_0^\infty y(x)\,dx = 0$$

Оценка длины получается одним из указанных выше способов:

$$\Delta(F) \sim \begin{cases} \ell\sqrt{\ln\frac{L}{\ell}}, & L>\ell \\ (L\ell^2)^{1/3}, & L<\ell \end{cases} \qquad (27)$$

При $R\sim\Delta,\ L<\Delta\ :\ \Delta(F)\sim\Delta(E)$

(G) Камера с конечной проводимостью σ

$y(x) = \frac{R}{b}\sqrt{\frac{c}{\sigma}}\,x^{-3/2}$ вплоть до весьма малых x, при $x=0$ функция Грина имеет особенность такую, что $\int_0^\infty y(x)dx = 0$ (подробности можно найти, например, в /7/). Импеданс

$$Z(k) = \Pi/b\sqrt{c|k|/2\pi\sigma}\,(1-i\,\mathrm{sgn}(k))$$

Уравнение баланса в данном случае записывается в следующем виде:

$$\varkappa x + \frac{Re^2}{b}\int_{-\infty}^{x} \frac{\lambda(x')-\lambda(x)}{(x-x')^{3/2}}\,dx' = 0 \qquad (28)$$

Отсюда, или из общей формулы (9) получается оценка на длину:

$$\Delta(G) \sim \left(\frac{Ne^2R}{|\varkappa|\,\tau}\sqrt{\frac{c}{\sigma}}\right)^{2/5} \qquad (29)$$

Для параметров БЭПа:
$N = 10^{12}$, $R = 10$ м, $b = 2$ см, $\sigma = 0{,}5\cdot10^{18}$ сек$^{-1}$,
$V = 50$ кВ, $q = 2$: $\Delta(G)\approx 3$ см

5. Тепловое движение частиц в замороженном сгустке

Потенциальная яма, в которой находится замороженный сгусток с малой, но конечной температурой, не является абсолютно плоской. Тепловое движение частиц размывает распределение плотности, удовлетворяющее уравнению баланса – до тех пор, пока возникающие силы не воспрепятствуют дальнейшему разрушению этого состояния. Таким образом, потенциальная яма глубже там, где выше плотность. Понятно, что эта тепловая модуляция ямы для замороженного сгустка мала.

Из уравнения Хайссинского можно получить оценку:

$$\frac{U_c(\lambda_T)}{U_c(\lambda_0)} \sim \frac{\lambda_T}{\lambda_0} \sim \frac{\Delta_T^2}{\Delta^2} \qquad (30)$$

где λ_0 – плотность при нулевой температуре, λ_T – отличие плотности при конечной температуре от λ_0 : $\lambda_T = \lambda - \lambda_0$

Частота тепловых колебаний частиц в замороженном сгустке ω_T мала по сравнению с синхротронной частотой при нулевом токе Ω_s :

$$\omega_T \sim \frac{v_T}{\Delta} \sim \Omega_s\frac{\Delta_T}{\Delta} \ll \Omega_s \qquad (31)$$

6. Неустойчивость замороженного сгустка

В этой части рассматривается вопрос о существовании когерентно устойчивого замороженного сгустка.

Частоту когерентных колебаний сгустка можно оценить, пренебрегая зависимостью невозмущенной плотности от координат. Так как яма плоская, то уравнения движения будут такими же, как для однородного пучка. В гидродинамическом приближении:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \lambda \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{e^2}{\mu} \displaystyle\int_0^x \rho(x')\, \mathcal{Y}(x-x')\, dx' = 0 \end{cases}$$

Здесь ρ – возмущение плотности, v – скорость.

Отсюда получаем дисперсионное соотношение:

$$\omega_k^2 = \frac{-i N e^2 Z_k}{\mu \cdot \Delta \cdot k} k^2 \tag{32}$$

Частоты когерентных колебаний ω_k по модулю оказываются не меньше синхротронной частоты Ω_s :

$$\frac{|\omega_k^2|}{\Omega_s^2} \gtrsim \frac{Ne^2}{|æ| \Delta^2} \left| Z\left(\frac{1}{\Delta}\right) \right| \sim 1 \tag{33}$$

(Здесь мы воспользовались формулой (9)).
Поскольку частота тепловых колебаний частиц ω_T мала по сравнению с Ω_s , она тем более мала в сравнении с когерентным сдвигом, что оправдывает пренебрежение периодичностью движения частиц. Известно, что импеданс, как функция отклика, удовлетворяет соотношениям причинности, из которых, в частности, следует, что при ненулевой мнимой части у него есть вещественная и, наоборот. Отсюда и из (32) следует, что замороженный сгусток при нулевой температуре всегда неустойчив. Для ответа на вопрос о возможности существования устойчивых замороженных сгустков при конечной температуре необходимо найти тепловую скорость v_{th} и тепловую длину Δ_{th} на пороге неустойчивости.

$$v_{th}^2 \simeq \frac{\omega_k^2}{k^2} \sim \frac{Ne^2}{\Delta |\mu|} \left| \frac{Z_k}{k} \right| \gtrsim \frac{Ne^2}{|\mu|} \left| Z\left(\frac{1}{\Delta}\right) \right| \tag{34}$$

$$\Delta_{th}^2 \simeq \frac{v_{th}^2}{\Omega_s^2} \gtrsim \frac{Ne^2}{|æ|} \left| Z\left(\frac{1}{\Delta}\right) \right| \sim \Delta^2 \tag{35}$$

Последнее соотношение означает, что замороженных устойчивых сгустков не существует. Отсюда, конечно, не следует, что ис-

кажение потенциальной ямы вообще не существенно – оно может давать в удлинение примерно такой же вклад, как и разогрев из-за когерентной неустойчивости. Более того, нетрудно показать, что для быстрых неустойчивостей ($|\omega_k| \gtrsim \Omega_s$) эти вклады описываются одинаковыми зависимостями от параметров машины. Действительно, из того, что $\left|\frac{\omega_k}{\Omega_s}\right|^2 \gtrsim 1$ при $k \sim \frac{1}{\Delta}$ следует

$$|æ| \Delta \lesssim \frac{Ne^2}{\Delta} \left| Z\left(\frac{1}{\Delta}\right) \right| \tag{36}$$

Раз собственное поле не мало по сравнению с ВЧ, то справедлива оценка (35), означающая, что искажение ямы и разогрев неустойчивостью дают в удлинение вклады одного порядка.

7. Удлинение из-за искажения ямы. Случай слабого эффекта

Поскольку в устойчивых состояниях параметр замораживания Δ/Δ_T не бывает много больше единицы, то уравнение баланса (7) может служить лишь для получения довольно грубых оценок плотности. По той же самой причине хорошим приближением при решении уравнения Хайссинского может быть приближение слабого эффекта, $|\Delta/\Delta_T - 1| \ll 1$, в котором уравнение решается методом возмущений. Действуя таким образом, получим

$$\rho(x) = \frac{e^{-x^2/2\Delta_T^2}}{\Delta_T\sqrt{2\pi}} - \frac{\ell^2}{\Delta_T^2} \frac{e^{-x^2/2\Delta_T^2}}{\Delta_T\sqrt{2\pi}} \int \frac{dk}{2\pi} \frac{-iZ_k}{k} e^{-\frac{k^2\Delta_T^2}{2}} \left(e^{-\frac{k^2\Delta_T^2}{2}} - e^{ikx} \right) \tag{37}$$

Здесь $\rho = \frac{1}{N} \lambda$ – плотность, нормированная на единицу, $\ell^2 = Ne^2/|æ|$

Отсюда нетрудно получить выражения для среднего смещения сгустка $\bar{X}$ и среднеквадратичной длины Δ :

$$\bar{X} = \ell^2 \int \frac{dk}{2\pi} Z_k e^{-k^2\Delta_T^2} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\pi}\,\Delta_T} \int_0^\infty dx\, \mathcal{Y}(x) e^{-\frac{x^2}{4\Delta_T^2}} \tag{38}$$

$$\frac{\Delta^2}{\Delta_T^2} = 1 - \ell^2 \int \frac{dk}{2\pi} k \operatorname{Im} Z_k e^{-k^2\Delta_T^2} = \tag{39}$$

$$= 1 + \ell^2 \frac{1}{4\Delta_T^3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx\, \mathcal{Y}(x)\, x\, e^{-\frac{x^2}{4\Delta_T^2}}$$

8. Укорочение

Из формулы (39) и из анализа, проведенного в части 4 видно, какой должна быть функция Грина для обеспечения укорочения сгустка. Для этого ее знак при всех аргументах, вплоть до $x \simeq 2\Delta_T$ должен быть отрицательным, т.е. отвечать потерям. При этом функция Грина не должна убывать слишком быстро вплоть до $x \simeq 2\Delta_T$. В противном случае, воспользовавшись формулой (39) и анализом пункта (с) части 4 для $s < \Delta_T$

можно получить следующее соотношение:

$$\frac{\Delta^2}{\Delta_T^2} - 1 \geq -0.03\,\frac{s^2}{\Delta_T^2} \qquad (40)$$

откуда видно, что эффект незначителен.

Заключение

В заключение еще раз подчеркнем, что несмотря на неустойчивость глубоко замороженного сгустка, приближение сильного собственного поля является полезным инструментом анализа состояний с заметным удлинением.

Автор благодарен Н.С.Диканскому и Д.В.Пестрикову за постоянную поддержку и неоценимую помощь в работе, а также Е.А.Переведенцеву за полезные советы и обсуждения, А.С.Артамонову и Н.А.Винокурову за плодотворные дискуссии.

Литература

1. C. Pellegrini, A.M. Sessler. Nuovo Cimento 3A, 116 (1971)
2. J. Haissinsky. Nuovo Cimento 18B, 72 (1973)
3. A. Papiernik, M. Chatard-Moulin and B. Jecko. Proc. of IX Int. Conf. on High En. Acc., SLAC, 1974, p. 375
4. K. Bane, A.W. Chao, M.J. Lee. SLAC Rep. SPEAR-213 (1978), unpublished
5. K. Bane, P.B. Wilson IEEE Trans. Nucl. Sci., NS-24, 1485 (1977)
6. B. Zotter. CERN SPS/81-14 (DI)
7. A.W. Chao. SLAC-PUB-2946 (1982)

А.В.Буров

ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА НА ДЛИНУ СГУСТКА

Препринт
№ 84-159

Работа поступила - 7 декабря 1984 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати 12.XII-1984 г. МН 06253
Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.1,4 печ.л., 1,1 учетно-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 159.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90