

К. 93

24

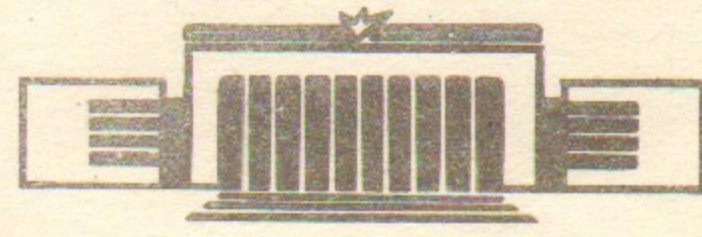


ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

Э.А.Кураев, В.С.Фадин

ВЫЧИСЛЕНИЕ РАДИАЦИОННЫХ ПОПРАВOK  
К СЕЧЕНИЮ ОДНОФОТОННОЙ АННИГИЛЯЦИИ  
С ПОМОЩЬЮ СТРУКТУРНЫХ ФУНКЦИЙ

ПРЕПРИНТ 84-44



НОВОСИБИРСК

ВЫЧИСЛЕНИЕ РАДИАЦИОННЫХ ПОПРАВОК К СЕЧЕНИЮ  
ОДНОФОТОННОЙ АННИГИЛЯЦИИ С ПОМОЩЬЮ  
СТРУКТУРНЫХ ФУНКЦИЙ

Э.А.Кураев, В.С.Фадин

А Н Н О Т А Ц И Я

Процесс однофотонной аннигиляции  $e^+e^-$  пары при больших энергиях представлен как процесс Дрелла-Яна. Вычислены структурные функции электрона и позитрона. Радиационные поправки (р.п.) к сечению однофотонной аннигиляции для области энергий  $0,2 \text{ ГэВ} < 2E < 10 \text{ ГэВ}$  вычислены с точностью 0,1%. Рассмотрены различные экспериментальные постановки. Дан критический обзор результатов вычисления р.п. имеющихся в литературе.

ВЫЧИСЛЕНИЕ РАДИАЦИОННЫХ ПОПРАВОК К СЕЧЕНИЮ  
ОДНОФОТОННОЙ АННИГИЛЯЦИИ С ПОМОЩЬЮ  
СТРУКТУРНЫХ ФУНКЦИЙ

Э.А.Кураев, В.С.Фадин

I. В данной работе рассмотрены радиационные поправки (р. п.) к процессам однофотонной аннигиляции  $e^+e^-$  пары, связанные только с начальным состоянием. Эти р.п. являются универсальной составляющей поправок к процессам с любым конечным состоянием. В некоторых случаях (таких, например, как измерение сечения  $e^+e^-$  аннигиляции в адроны), на которые и ориентирована данная работа, они, практически, исчерпывают все поправки.

В настоящее время в литературе существует множество работ, посвященных вычислению указанных р.п. (см., например [1-10]). К сожалению, приведенные в них результаты не согласуются друг с другом; кроме того точность их не удовлетворяет современным экспериментальным требованиям. Вычисление р.п. с требуемой точностью (0,1% для энергетического диапазона установок ВЭПП-2М и ВЭПП-4 с полной энергией в системе центра пучков  $2E$  от 0,2 до 10 ГэВ) является одной из целей данной работы. Другая цель - обратить внимание на возможность применения к вычислению р.п. методов, основанных на ренормгруппе, которые в настоящее время широко применяются в КХД, указав в то же время на ошибки, связанные с некритическим применением ренормгруппы к вычислению р.п., в работе [10].

План изложения следующий. В пункте 2 приводятся результаты прямого расчета р.п. в  $\mathcal{L}^2$  порядке в случае, когда энергетическое разрешение мало;  $\Delta E \ll E$ . В пункте 3 выражение для р.п. получено исходя из того, что процесс однофотонной аннигиляции можно рассматривать как процесс Дрелла-Яна [11]. В пункте 4 проводится сравнение результатов, полученных в п.2 и 3 и результатов мягкофотонного приближения [12] и приводятся окончательные выражения для р.п. в разных экспериментальных постановках. В п.5 обсуждается точность полученных выражений и содержится критический обзор существующих в литературе формул для р.п.

2. Вклад в р.п. в  $\mathcal{L}^2$  - порядке дают: формфактор с точ-

ностью до  $\alpha^2$  членов (см. рис. 1), излучение одного дополнительного фотона с учетом виртуальной поправки  $\sim \alpha^2$  к нему (см. рис. 2), излучение двух фотонов в борновском приближении (см. рис. 3). Возможна экспериментальная постановка, когда необходим и учет рождения дополнительной  $e^+e^-$  пары (см. рис. 4). Учет рождения тяжелых пар  $\mu^+\mu^-$ ,  $\tau^+\tau^-$  выходит за рамки принятой точности. Вклад в р.п. от поляризации вакуума фотона, через который идет аннигиляция, учитывается в виде общего множителя (см. (1)).

Формфактор (имеется в виду дираковский формфактор  $F_1$ , который только и дает вклад в сечение при высоких энергиях) представляется в виде

$$F_1(s) = 1 + \frac{\alpha}{\pi} F_1^{(2)}(s) + \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 F_1^{(4)}(s) \quad (1)$$

Выражение для  $F_1^{(2)}(s)$  хорошо известно [13]

$$F_1^{(2)}(s) = B(s) \ln \frac{\lambda}{m} - \frac{1}{4} L^2 + \frac{3}{4} L + \frac{1}{3} \pi^2 - 1 + i\pi \left(\frac{1}{2} L - \frac{3}{4}\right) \quad (2)$$

где  $\lambda$  - "масса" фотона,

$$B(s) = L - 1 - i\pi, \quad L = \ln \frac{s}{m^2}, \quad s = 4E^2. \quad (3)$$

$E$  и  $m$  - энергия в с.ц.и. и масса электрона,  $E \gg m$ .

Мнимая часть  $F_1^{(4)}$  получена в [14]. Нужная нам реальная часть восстанавливается с помощью дисперсионных соотношений и имеет вид:

$$\text{Re } F_1^{(4)}(s) = -\frac{1}{2} \text{Re } B^2(s) \ln^2 \frac{\lambda}{m} + \text{Re} (B(s) F_1^{(2)}(s)) \ln \frac{\lambda}{m} + \frac{1}{32} L^4 - \quad (4)$$

$$-\frac{31}{144} L^3 + \left(\frac{229}{288} - \frac{5}{24} \pi^2\right) L^2 + \left(-\frac{1627}{864} + \frac{5}{9} \pi^2 + \frac{3}{2} \zeta(3)\right) L.$$

Здесь отброшены члены, не содержащие логарифмов, вклады которых в  $F_1$  пренебрежимо мал ( $\leq 10^{-2}\%$ );  $\zeta(3)$  - дзета-функция Римана,  $\zeta(3) = 1,202$ . В выражении (4) оставлен только вклад  $e^+e^-$  пар в поляризацию вакуума, входящую в формфактор  $F_1^{(4)}$  (вкладом адронов, а также  $\mu^+\mu^-$ ,  $\tau^+\tau^-$  пар с принятой точностью можно пренебречь).

Сечение однофотонной аннигиляции с излучением дополнительного фотона с частотой  $\omega < \Delta E \ll E$  при учете виртуальной поправки  $\sim \alpha$  представляется в виде

$$\sigma^{(8)} = \tilde{\sigma}(s) \frac{\alpha}{\pi} \left[ 2 \text{Re } B(s) \ln \frac{m}{\lambda} + \frac{1}{2} L^2 - \frac{1}{3} \pi^2 - 2l(L-1) \right] \left( 1 + \frac{2\alpha}{\pi} \text{Re } F_1^{(2)}(s) \right). \quad (5)$$

Здесь  $l = \ln E/\Delta E$ ,  $\tilde{\sigma}(s)$  - сечение однофотонной аннигиляции, включающее в себя эффект поляризации вакуума в пропагаторе фотона, через который идет аннигиляция:

$$\tilde{\sigma}(s) = \sigma_0(s) \frac{1}{|1 - \Pi(s)|^2}, \quad (6)$$

где  $\sigma_0(s)$  - сечение в борновском приближении по электромагнитному взаимодействию,  $\Pi(s)$  - поляризация вакуума (см. Приложение А).

В выражении (5) предполагается, что сечение  $\tilde{\sigma}(s)$  есть плавная функция  $s$ , так что изменением аргумента за счет излучения дополнительного фотона пренебрегается.

Сечение с излучением двух дополнительных фотонов с суммарной энергией, не превышающей  $\Delta E \ll E$ , в тех же предположениях имеет вид

$$\sigma^{(88)} = \tilde{\sigma}(s) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{1}{2} \left\{ \left[ 2 \text{Re } B(s) \ln \frac{m}{\lambda} + \frac{1}{2} L^2 - \frac{1}{3} \pi^2 - 2l(L-1) \right]^2 - \frac{2}{3} \pi^2 (L-1)^2 \right\}. \quad (7)$$

Сечение с излучением дополнительной мягкой  $e^+e^-$  пары может быть получено из распределения по энергии и инвариантной массе пар, приведенного в [15]. В случае когда энергия пары не превосходит  $\Delta E$  ( $E \gg \Delta E \gg 2m$ ) в пренебрежении членами, не содержащими  $\ln \Delta E/m$ , оно равно:

$$\sigma^{(e^+e^-)} = \tilde{\sigma}(s) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \left[ \frac{1}{18} (L-2l)^3 - \frac{5}{18} (L-2l)^2 + \frac{1}{9} \left(\frac{28}{3} - \pi^2\right) (L-2l) \right] \quad (8)$$

Вклад в  $\sigma^{(e^+e^-)}/\tilde{\sigma}(s)$  членов, не содержащих  $\ln(\Delta E/m)$ , составляет  $\leq 10^{-2}\%$ ; их учет выходит за рамки требуемой точности. Такой же порядок имеет величина  $\sigma^{(e^+e^-)}/\tilde{\sigma}(s)$  для  $\Delta E \sim 2m$ .

Используя приведенные результаты, получаем, что в такой постановке эксперимента, когда наряду с излучением дополнительных фотонов разрешено рождение  $e^+e^-$  пар с суммарной энергией, не превышающей  $\Delta E$ , сечение имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma(s) = \tilde{\sigma}(s) \left\{ 1 + \frac{\alpha}{\pi} \left[ -2l(L-1) + \frac{3}{2}L + \frac{1}{3}\pi^2 - 2 \right] + \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \left[ \frac{1}{2}(-2l(L-1))^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{3}{2}L + \frac{1}{3}\pi^2 - 2 \right) (-2l(L-1)) + L^2 \left( -\frac{1}{3}l + \frac{11}{8} - \frac{1}{3}\pi^2 \right) + L \left( \frac{2}{3}l^2 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{10}{9}l - \frac{203}{48} + \frac{11}{12}\pi^2 + 3\zeta(3) \right) - \frac{4}{9}l^3 - \frac{10}{9}l^2 - \frac{2}{9} \left( \frac{28}{3} - \pi^2 \right) l \right] \right\}. \quad (9) \end{aligned}$$

В случае, когда разрешено только излучение фотонов с суммарной энергией, не превышающей  $\Delta E$ , нужно из (9) вычесть (8).

3. Как уже говорилось, процесс однофотонной аннигиляции можно рассматривать как процесс Дрелла-Яна и применять к нему развитые в КХД методы, основанные на факторизации массовых сингулярностей и ренормгруппе (см. напр. [16]). В главном логарифмическом приближении (т.е. когда удерживаются только члены, содержащие  $L$  на каждую степень  $\alpha$ ), сечение можно представить в виде (см. рис. 5).

$$\sigma(s) = \int_0^1 \int_0^1 dx_1 dx_2 \sum_{A=e^+,e^-} \mathcal{D}_e^A(x_1, s) \mathcal{D}_{e^+}^{\bar{A}}(x_2, s) \tilde{\sigma}_{A\bar{A}}(x_1, x_2, s), \quad (10)$$

$x_1 + x_2 > 2 - \frac{\Delta E}{E}$

где  $\mathcal{D}_e^A(x, s)$  - функция распределения по доле энергии  $x$  партонов сорта  $A$  с виртуальностью до  $s$  в электро-не,  $\tilde{\sigma}_{A\bar{A}}(x_1, x_2, s)$  - сечение однофотонной аннигиляции партонов  $A, \bar{A}$  с учетом поляризации вакуума (см. (6)). Ограничение на

область интегрирования по  $x$  следует из требования, чтобы уносимая недетектируемыми частицами энергия не превышала  $\Delta E$ .

В случае, когда постановка эксперимента такова, что недетектируемыми являются как фотоны, так и  $e^+e^-$  пары, летящие под малыми углами к оси пучков,  $\mathcal{D}_e^A(x, s)$  удовлетворяют уравнениям Липатова [17] (см. приложение Б), которые известны в КХД как уравнения Альтарелли-Паризи. Мы ограничимся удержанием в (10) только члена в сумме с  $A = e^-$ , т.к. вклад члена с  $A = e^+$  имеет порядок величины  $\sim (\alpha L/\pi)^4$ , что выходит за рамки требуемой точности  $\sim 0,1\%$ .

Функция распределения  $\mathcal{D}_e^e \equiv \mathcal{D} = \mathcal{D}^{N_s} + \mathcal{D}^S$  состоит из несинглетной части  $\mathcal{D}^{N_s}$  (отвечающей диаграммам Фейнмана, на которых линия начального электрона приходит в точку аннигиляции, см. рис. 6) и синглетной  $\mathcal{D}^S$  (когда в эту точку можно прийти, только пройдя по фотонной линии, см. рис. 7). Несинглетная часть удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{D}^{N_s}(x, Q^2) = \delta(x-1) + \int \frac{\alpha(Q^2)}{m^2} \frac{dQ'^2}{Q'^2} \int_x^1 \frac{dz}{z} P(z) \mathcal{D}^{N_s}\left(\frac{x}{z}, Q'^2\right), \quad (11)$$

где  $\delta(x-1)$  - дельта-функция,  $\alpha(Q^2)$  - "бегущая константа связи",

$$\alpha(Q^2) = \alpha / \left[ 1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{Q^2}{m^2} \right],$$

$$P(z) = \frac{1+z^2}{1-z} - \delta(1-z) \int_0^1 dx \frac{1+x^2}{1-x}. \quad (12)$$

Расходимость  $P(z)$  (12) сокращается при подстановке  $P(z)$  в (11) и в дальнейшем  $\mathcal{D}^{N_s}(x, Q^2)$  в (10); это есть известное сокращение инфракрасных расходимостей.

С принятой точностью в  $\mathcal{D}^S$  достаточно удержать главный член разложения ( $\sim (\alpha L/\pi)^2$ ); он равен (см. Приложение Б)

$$\mathcal{D}^S(x, s) = \frac{1}{8x} \left( \frac{\alpha L}{\pi} \right)^2 \left[ \frac{4}{3}(1-x^3) + x(1-x) - 2x(1+x) \ln \frac{1}{x} \right]. \quad (13)$$

Отметим, что представление (10) применимо не только для малых  $\Delta E/E$ , но и для  $\Delta E/E \sim 1$ . В случае, когда  $\Delta E/E \ll 1$  (при этом условия  $x_1 + x_2 > 2 - \Delta E/E$  и  $x_1, x_2 > 1 - \Delta E/E$  эквивалентны) вклад в (10) дает только несинглетная часть функции распределения  $\mathcal{D}^{NS}(x, Q^2)$ . При этом, если  $\tilde{\sigma}$  есть плавная функция, то ее можно вынести из под интеграла и представить (10) в виде

$$\sigma(s) = \tilde{\sigma}(s) R(1 - \frac{\Delta E}{E}, s), \quad (14)$$

$$R(x, s) = \int_x^1 dx_1 \int_{x/x_1}^1 dx_2 \mathcal{D}^{NS}(x_1, s) \mathcal{D}^{NS}(x_2, s)$$

Из (11) следует, что  $R(x, s)$  удовлетворяет уравнению

$$R(x, s) = 1 + \int_{m^2}^s \frac{\alpha(Q^2)}{\pi} \frac{dQ^2}{Q^2} \int_x^1 dz P(z) R(\frac{x}{z}, Q^2). \quad (15)$$

Стандартный путь решения таких уравнений - переход к представлению Меллина по переменной  $X$  (см. Приложение В). В случае, когда  $1 - X \ll 1$ , решение уравнения (15) имеет вид (ср. [18], формула (59))

$$R(x, s) = \frac{(1-x)^2}{\Gamma(1+\eta)} \exp\left[\frac{1}{2}\eta\left(\frac{3}{2} - 2c\right)\right] \quad (16)$$

где  $c$  - постоянная Эйлера,  $c = 0,577\dots$ ,  $\Gamma(x)$  - гамма-функция,

$$\eta = \int_{m^2}^s \frac{2\alpha(Q^2)}{\pi} \frac{dQ^2}{Q^2} = -6 \ln\left(1 - \frac{\alpha}{3\pi} L\right). \quad (17)$$

Разлагая (16) в ряд по  $\alpha$  и удерживая члены  $\sim \alpha^2$ , имеем

$$\sigma(s) = \tilde{\sigma}(s) \left\{ 1 + \frac{\alpha L}{\pi} \left(\frac{3}{2} - 2c\right) + \left(\frac{\alpha L}{\pi}\right)^2 \left[ 2c^2 - \frac{10}{3}c + \frac{11}{8} - \frac{1}{3}\pi^2 \right] \right\} \quad (18)$$

что согласуется с прямым расчетом (см. формулу (9), где следует

удержать только члены, имеющие  $L$  на каждую степень  $\alpha$ ). Отметим, что результат (18) не согласуется с соответствующим результатом работы [10] (неправильным уже в  $\alpha^2$  порядке), полученным с помощью наивного применения ренормгруппы к величине, имеющей массовые сингулярности.

4. Приведенные выше формулы для сечения с учетом р.п. получены с использованием разного рода приближений, от которых желательно избавиться. Так, формула (9) получена в предположении, что  $\Delta E/E \ll 1$  и что  $\tilde{\sigma}(s)$  - гладкая функция. Кроме того, в ней сохранены только три члена разложения в ряд по  $\alpha$ . В действительности, как видно из (9), параметрам разложения является  $(\alpha/\pi) \ln(s/m^2) \ln(E/\Delta E)$ , где  $\Delta E$  может быть как экспериментальным разрешением, так и характерной величиной, на которой сильно изменяется  $\tilde{\sigma}(s)$  (например, шириной резонанса). Этот параметр может быть  $\sim 1$ , так что нужно сохранять все члены разложения по нему.

Формула (10) не требует малости  $\Delta E/E$  и суммирует все члены разложения по  $\alpha$ , но и ей присущи свои недостатки.

Во-первых, в ней не учтены члены  $\sim \alpha$  (без множителя  $L$ ), которые с принятой точностью следует учитывать. Если удерживаются не только члены, содержащие  $L$  на каждую степень  $\alpha$ , то и представление (10), и уравнения для функций распределения  $\mathcal{D}(x, s)$  меняются, приобретая более сложный вид (см. например [16]). Однако с принятой нами точностью можно пренебречь уже членами типа  $(\alpha/\pi)^2 L$ , так что указанный недостаток исправить легко: достаточно в  $\mathcal{D}(x, s)$  правильно учесть спектр однократного тормозного излучения и ввести в (10) общий множитель (так называемый  $K$ -фактор). Более неприятным является то обстоятельство, что в случае очень малых  $\Delta E/E$  (будь  $\Delta E$  экспериментальное разрешение или размер неоднородности в  $\tilde{\sigma}(s)$ ) существенными в  $\mathcal{D}(x, s)$  являются значения  $x$ , близкие к 1. Если  $\ln(1/(1-x))$  становится порядка  $L$ , то уравнением (11) для определения  $\mathcal{D}(x, s)$  уже нельзя пользоваться, так как оно получено в предположении, что единственным большим параметром является  $L$ , т.е.  $L \gg \ln(1/(1-x))$ . Известно [18], что в случае глубоконеупругого рассеяния использование уравнений, аналогичных (11), в области  $L \sim \ln(1/(1-x))$  приводит к неправильному результату. В нашем случае ситуация значительно

лучше, в чем можно убедиться как сравнением (I8) с (9), так и сравнением (I6) с результатом, полученным для  $\tilde{\sigma}(s)$  в мягко-фотонном приближении (см., например, [3])

$$\sigma(s) = \tilde{\sigma}(s) \left(\frac{\Delta E}{E}\right)^\beta \left(1 + \frac{3}{4}\beta\right), \quad (I9)$$

где  $\beta = (2d/\pi)(L-1)$ , и в множителе при  $(\Delta E/E)^\beta$  удержаны лишь линейные по  $\beta$  члены. Если в выражении (I7) для  $\tilde{\sigma}$  заменить  $L \rightarrow L-1$  и удержать в  $R(1-\frac{\Delta E}{E}, s)$ , аналогично (I9), только линейные по  $\beta$  члены, то выражение (I4) совпадает с (I9).

И все же с нужной нам точностью следует в области малых  $(I-X)$  подправить функцию распределения  $\mathcal{D}^{Ns}(X, Q^2)$ , определяемую уравнением (II), поскольку она смазывает тонкие детали распределения. В частности в ней считается, что порог рождения реальных  $e^+e^-$  пар находится в точке  $X = I$ , а не в точке  $X = I - \frac{2m}{E}$ , как следует из законов сохранения. Кроме того, желательнее в явном виде выделить в  $\mathcal{D}^{Ns}(X, Q^2)$  вклад реальных пар, поскольку в зависимости от экспериментальной постановки его следует либо учитывать, либо не учитывать.

Детально процесс модификации  $\mathcal{D}^{Ns}(X, Q^2)$  описан в Приложениях Г, Д. Вкратце он состоит в следующем. Сначала ищется функция  $\mathcal{D}^{Ns}(X, Q^2)$  в пренебрежении  $e^+e^-$  парами, как реальными, так и виртуальными, т.е. в уравнении (II)  $\alpha(Q^2)$  заменяется на  $\alpha$ . В полученной таким образом функции делается замена  $L \rightarrow L-1$  для сшивки с мягкофотонным приближением; одновременно эта замена обеспечивает правильность спектра однократного излучения [I9], нужную, как уже говорилось, для учета поправок  $\sim \alpha$  (без множителя  $L$ ). Затем проводится учет виртуальных  $e^+e^-$  пар; с нашей точностью достаточно рассмотреть вклад только одной пары и удержать в нем лишь члены  $(\alpha/\pi)^2 L^3$  и  $(\alpha/\pi)^2 L^2$ , но учесть при этом произвольное число дополнительных мягких фотонов, реальных и виртуальных. Суммируя этот вклад с  $\mathcal{D}^{Ns}(X, Q^2)$ , найденной вначале в пренебрежении вкладами любых пар, получаем часть  $\mathcal{D}^{(r)}(X, Q^2)$  функции распределения без учета реальных  $e^+e^-$  пар

$$\mathcal{D}^{(r)}(X, s) = \frac{1}{2}\beta(1-X)^{\frac{\beta}{2}-1} \left(1 + \frac{3}{8}\beta - \frac{1}{48}\beta^2 \left(\frac{1}{3}L + \pi^2 - \frac{47}{8}\right)\right) - \frac{1}{4}\beta(1+X) + \frac{1}{32}\beta^2 \left(4(1+X) \ln \frac{1}{1-X} + \frac{1+3X^2}{1-X} \ln \frac{1}{X} - 5-X\right); \quad (20)$$

$$\beta = \frac{2d}{\pi}(L-1); \quad L = \ln \frac{s}{m^2}.$$

Вклад реальных  $e^+e^-$  пар в  $\mathcal{D}^{Ns}(X, Q^2)$  вычисляется в том же приближении, что и вклад виртуальных пар (см. Приложение Д); суммируя его с  $\mathcal{D}^s(X, Q^2)$  (I3) (поскольку  $\mathcal{D}^s(X, Q^2)$  тоже представляет собой вклад реальных пар, только с другим механизмом рождения), получаем часть функции распределения, представляющую собой вклад реальных пар

$$\mathcal{D}^{(e^+e^-)}(X, s) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \left[\frac{1}{12}(1-X)^{-1} \left(1-X - \frac{2m}{E}\right)^{\frac{\beta}{2}} \left(\mathcal{L} - \frac{5}{3}\right)^2 \left(1+X^2 + \frac{1}{6}\beta(\mathcal{L} - \frac{5}{3})\right) + \frac{1}{4}L^2 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{(1-X^3)}{X} + \frac{1}{2}(1-X) - (1+X) \ln \frac{1}{X}\right)\right] \theta\left(1-X - \frac{2m}{E}\right), \quad (21)$$

где  $\theta(X)$  - тета-функция,

$$\mathcal{L} = \ln \left(\frac{s(1-X)^2}{m^2}\right), \quad L = \ln \frac{s}{m^2} \quad (22)$$

Окончательно сечение имеет вид:

$$\sigma(s) = \int_{\varepsilon_1}^1 \int_{\varepsilon_2}^1 dx_1 dx_2 \mathcal{D}(x_1, s) \mathcal{D}(x_2, s) \tilde{\sigma}(sx_1 x_2) \left(1 + \frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}\right)\right), \quad (23)$$

где последний множитель, представляющий собой  $K$ -фактор, определен из соответствия с результатом вычисления р.п. в  $\alpha$ -порядке (9),  $\tilde{\sigma}(\cdot)$  определено в (6).

В случае, когда разрешено рождение реальных  $e^+e^-$  пар,

$$\mathcal{D}(X, s) = \mathcal{D}^{(r)}(X, s) + \mathcal{D}^{(e^+e^-)}(X, s). \quad (24)$$

В случае же, когда это рождение запрещено,

$$D(x, s) = D^{(\delta)}(x, s). \quad (25)$$

Функции  $D^{(\delta)}(x, s)$  и  $D^{(e^+e^-)}(x, s)$  даются формулами (20), (21). Нижние пределы интегрирования  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  в (23) определяются условиями эксперимента.

Переменные  $X_1, X_2$  в подынтегральном выражении (23) связаны с полной энергией  $P_0$  системы частиц, образовавшихся от распада тяжелого фотона и их компонентой импульса  $P_z$  вдоль импульса начального электрона соотношением

$$X_{1,2} = \frac{1}{2} \frac{P_0 \pm P_z}{E}$$

так что подынтегральное выражение в (23) есть дифференциальное распределение по энергии и продольному импульсу рожденной системы  $2E^2 d^2\sigma/dP_0 dP_z$ .

Вводя переменную  $X$  согласно условию

$$X_1 X_2 S = (1-X)S \quad (26)$$

и проведя в (23) интегрирование при фиксированном  $X$ , получаем для сечения выражение в обычно принятом виде

$$\tilde{\sigma}(s) = \int_0^{\varepsilon} dx \tilde{\sigma}(s(1-x)) F(x, s), \quad (27)$$

где величина  $F(x, s)$  в случае, когда разрешено рождение реальных  $e^+e^-$  пар, имеет вид

$$F(x, s) = \beta X^{\beta-1} \left[ 1 + \frac{\alpha}{\pi} \left( \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2} \right) + \frac{3}{4} \beta - \frac{1}{24} \beta^2 \left( \frac{1}{3} L + 2\pi^2 - \frac{37}{4} \right) \right] - \\ - \beta \left( 1 - \frac{1}{2} X \right) + \frac{1}{8} \beta^2 \left[ 4(2-x) \ln \frac{1}{X} + \frac{1}{X} (1+3(1-x)^2) \ln \frac{1}{1-x} - 6 + X \right] + \\ + \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \left\{ \frac{1}{6X} \left( X - \frac{2m}{E} \right)^\beta \left( \ln \left( \frac{SX^2}{m^2} \right) - \frac{5}{3} \right)^2 \left( 2 - 2X + X^2 + \frac{1}{3} \beta \left( \ln \left( \frac{SX^2}{m^2} \right) - \frac{5}{3} \right) \right) \right. \\ \left. - \frac{5}{3} \right\} + \frac{1}{2} L^2 \left[ \frac{2}{3} \frac{(1-(1-x)^3)}{1-x} - (2-x) \ln \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} X \right] \theta \left( X - \frac{2m}{E} \right). \quad (28)$$

В постановке, когда рождение реальных  $e^+e^-$  пар запрещено, слагаемое с тета-функцией в правой части (28) должно быть опущено.

Отметим, что величина  $X$  в (27) не имеет, вообще говоря, смысла доли энергии, уносимой фотонами и  $e^+e^-$  парами. Отождествление  $X$  с долей уносимой энергии, справедливое при малых  $X$ , при  $X \sim 1$  нарушается в  $\alpha^2$ -порядке.

Верхний предел интегрирования в (27) определяется условиями постановки эксперимента.

В случае, когда разрешено только излучение фотонов с суммарной энергией  $\Delta E \ll E$ , из (27) получаем, пренебрегая членами  $\sim \beta \Delta E/E$

$$\tilde{\sigma}(s) = \int_0^{\Delta E/E} \frac{dx}{X} \tilde{\sigma}(s(1-x)) \beta X^\beta \left[ 1 + \frac{3}{4} \beta + \frac{\alpha}{\pi} \left( \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2} \right) + \beta^2 \left( \frac{-L}{72} - \frac{\pi^2}{12} + \frac{37}{96} \right) \right] \quad (29)$$

5. Формулы (23), (27) применимы для вычисления сечений с учетом р.п. как в случае жестких кинематических ограничений на дополнительные фотоны и  $e^+e^-$  пары (типа  $\Delta E/E \ll 1$ ), так и в случае, когда эти ограничения являются слабыми; как для плавных  $\tilde{\sigma}_0(s)$ , так и для  $\tilde{\sigma}_0(s)$ , имеющих ярко выраженный резонансный характер.

Обсудим теперь точность учета р.п., связанных только с начальным состоянием, в этих формулах. В отсутствие  $e^+e^-$  пар, как реальных, так и виртуальных, отброшенными в этих формулах являлись бы члены  $\sim (\alpha/\pi)^2 L, (\alpha/\pi)^3 L^3$  по сравнению с 1. В области энергии пучков  $\leq 10$  ГэВ, на которую мы ориентируемся, вклад таких членов  $\sim 0,1\%$ . При учете виртуальных  $e^+e^-$  пар отброшенными являются члены, формально имеющие порядок  $(\alpha/\pi)^3 L^4$ ; однако входят они с малым коэффициентом  $\sim 1/20$ , так что, фактически в области энергий  $\leq 10$  ГэВ порядок их не превышает  $(\alpha/\pi)^3 L^3$ . Указанные члены являются поправками  $\sim (\alpha/\pi)L$  к учтенному нами вкладу виртуальных  $e^+e^-$  пар, который в рассматриваемой области энергий сам не превышает 0,3%.

То же самое можно сказать и о реальных  $e^+e^-$  парах, если запрещено рождение пар, уносящих долю энергии, близкую к 1. В противном случае ситуация меняется. Дело в том, что в  $\alpha^2$ -по-



рядке в качестве р.п. к однофотонной аннигиляции выступает тормозной механизм рождения (см. рис. 8, где приведена одна из фейнмановских диаграмм этого механизма), сечение которого не падает с энергией. Как видно из рис. 8, этот механизм определяется синглетным вкладом  $\mathcal{D}^S(x, s)$  в одну из функций распределения  $\mathcal{D}(x, s)$  и вкладом  $\delta(x-1)$  в другую. То, что сечение его не падает с энергией, обусловлено поведением  $\mathcal{D}^S(x, s)$  при малых  $x$  ( $\mathcal{D}^S(x, s) \sim 1/x$ , см. (13)), или, что то же самое, членом  $\sim 1/(1-x)$  в слагаемом с тета-функцией в (28). Из (27), (28) следует наличие вклада в  $\sigma(s)$ , равного

$$\int_0^\varepsilon \frac{dx}{1-x} \tilde{\sigma}(s(1-x)) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} L^2. \quad (29)$$

Если  $\varepsilon$  определяется порогом реакции,  $\varepsilon = 1 - S_{\text{пор}}/s$ , то вклад этот представляет собой сечение тормозного механизма, не падающее с  $S$ . Оценку точности вклада реальных пар в р.п. можно получить из (29), учитывая, что в (29) опущены члены  $\sim \ln \frac{1}{1-x}$  по сравнению с  $L$  и считая, что  $\tilde{\sigma}(s) \sim 1/s$ . В результате имеем, что точность  $\sim (1/(1-\varepsilon))(\alpha/\pi)^2 L \cdot \ln(1/(1-\varepsilon))$ .

Подчеркнем, что случай  $1-x \ll 1$  в (27), (29) отвечает такой кинематической ситуации, когда образовавшаяся система частиц имеет инвариантную массу  $\sqrt{s(1-x)} \ll \sqrt{s}$  и летит в направлении одного из начальных пучков с энергией, примерно равной  $\sqrt{s}/2$ . Такая кинематика кардинально отличается от кинематики, характерной для однофотонной аннигиляции.

Следует отметить, что хотя мы и ориентировались на области энергий  $\lesssim 10$  ГэВ, полученные результаты применимы и для больших энергий; нужно лишь в  $\tilde{\sigma}(s)$  учитывать аннигиляцию не только через фотон, но и через  $Z^0$  - бозон. При этом изменится только К-фактор (т.е. члены  $\sim \alpha$  без множителя  $L$ ) во вкладе, связанном с аксиальной частью слабого тока).

В заключение проведем сравнение полученных нами результатов с имеющимися в литературе. Обычно р.п. приводятся в форме, близкой к (27). За исключением работы [10] раньше не вычислялись члены  $\sim \beta^2$  в  $F(x, s)$  (см. (28)). Работа [10] претендует на то, что в ней с помощью ренормгруппы вычислены все члены разложения по параметру  $(\alpha L/\pi)$ . Однако, как уже говорилось

в конце пункта 3, даже члены  $(\alpha L/\pi)^2$  вычислены в [10] неправильно, вследствие некорректного применения ренормгруппы к величине, имеющей массовые сингулярности. Следует отметить еще принципиальную ошибочность представлений автора работы [10], согласно которым для инвариантности сечения относительно ренормгруппы необходимо рождение реальных  $e^+e^-$  пар.

В работах [1-5] вычисления проводились в приближении мягких фотонов, т.е. сохранялись только члены, пропорциональные  $\beta \chi^{\beta-1}$  в  $F(x, s)$ , в работах же [6-9] делалось обобщение для случая жестких фотонов. При этом в работах [1-3] учитывались лишь члены  $\sim \beta$  по сравнению с 1 в коэффициенте при  $\beta \chi^{\beta-1}$ , а в работах [4-9] и члены  $\sim \alpha$ . Отметим, что в работе [9] член  $\sim \alpha$  приведен неправильно. Для сравнения с нашими результатами следует учитывать, что у нас поляризация вакуума содержится в  $\tilde{\sigma}(s)$  (см. 6). Напомним, что в  $\alpha$ -порядке электронная часть поляризации вакуума  $\Pi_e(s) = \frac{\alpha}{\pi} \left( \frac{1}{3} L - \frac{5}{9} - \frac{1}{3} i\pi \right)$ . Полное выражение для  $\Pi(s)$  приведено в Приложении А. Полученные в [6, 7] результаты можно представить в форме (27), где  $F(x, s)$  имеет вид

$$F(x, s) = \beta \chi^{\beta-1} - \beta \left(1 - \frac{1}{2} x\right) + \left[ \frac{3}{4} \beta + \frac{\alpha}{\pi} \left( \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2} \right) \right] \delta(1-x). \quad (30)$$

Слагаемое, содержащее  $\delta(1-x)$ , принципиально неправильно, т.к. учет мягких фотонов приводит к размытию  $\delta$ -функции, превращая ее в  $\beta \chi^{\beta-1}$  (см. (28)). Насколько это существенно, можно судить по тому, что, например, в области  $\varphi$  мезона замена  $\delta(1-x)$  в (30) на  $\beta \chi^{\beta-1}$  приводит к изменению расчетного значения наблюдаемого сечения в форме (27) на величину 2-3%. Сконструированное в [8] обобщение формулы с мягкими фотонами на случай  $\Delta E/E \sim 1$  страдает указанным недостатком в еще большей степени, поскольку в случае резонансных сечений неверным был уже исходный пункт обобщения. А именно, считалось, что выражение для сечения

$$\sigma(s) = \tilde{\sigma}(s) \left(\frac{\Delta E}{E}\right)^\beta \left(1 + \frac{3}{4} \beta + \frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}\right)\right), \quad (31)$$

справедливо при  $\Delta E \ll E$ , тогда как для справедливости его

нужно еще, чтобы  $\Delta E$  было мало по сравнению с интервалом энергии, на котором существенно меняется  $\tilde{\sigma}(s)$  (например, с шириной резонанса).

Авторы выражают благодарность В.Н.Байеру и Л.Н.Липатову за интерес к работе, А.Г.Чилингарову и М.Ю.Лельчуку за обсуждение вопросов, связанных с экспериментом и за помощь в редактировании рукописи, А.И.Вайнштейну и В.А.Хозе за критические замечания.

ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЙ ОПЕРАТОР  $\Pi(s)$ .

Учет поляризации вакуума в пропагаторе фотона, через который идет аннигиляция  $e^+e^-$  пары, сводится к замене  $1/s \rightarrow 1/[s(1-\Pi(s))]$  в этом пропагаторе, т.е. к замене  $\sigma_0(s) \rightarrow \tilde{\sigma}(s) = \sigma_0(s)|1-\Pi(s)|^2$ , где  $\sigma_0(s)$  - сечение, учитывающее электромагнитное взаимодействие в низшем порядке теории возмущений.

Величину  $\Pi(s)$  можно представить в виде

$$\Pi(s) = \Pi_l(s) + \Pi_h(s), \quad (A1)$$

где  $\Pi_l(h)$  - вклад лептонов (адронов) в поляризацию вакуума:

$$\Pi_l(s) = \frac{\alpha}{\pi} \Pi_1(s) + \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \Pi_2(s) + \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 \Pi_3(s) + \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 \Pi_4(s) + \dots \quad (A2)$$

$$\Pi_h(s) = \frac{s}{4\pi^2\alpha} \left[ \mathcal{P} \int_{s_{\text{пор.}}}^{\infty} \frac{\sigma^{e^+e^- \rightarrow a\bar{a}}(s') ds'}{s-s'} - i\pi \sigma^{e^+e^- \rightarrow a\bar{a}}(s) \right] \quad (A3)$$

Выражение для  $\Pi_1(s)$  хорошо известно [13]:

$$\Pi_1(s) = \frac{1}{3}L - \frac{5}{9} + f(x_\mu) + f(x_\tau) - i\pi \left[ \frac{1}{3} + \varphi(x_\mu)\theta(1-x_\mu) + \varphi(x_\tau)\theta(1-x_\tau) \right],$$

где  $L = \ln s/m^2$ ,  $x_{\mu,\tau} = 4m_{\mu,\tau}^2/s$ ,  $m_{\mu,\tau}$  - массы  $\mu$ -мезона и  $\tau$ -лептона,  $\theta(x)$  - тета-функция,

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{5}{9} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}(2+x)\sqrt{1-x} \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}\right), & x \leq 1 \\ -\frac{5}{9} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}(2+x)\sqrt{x-1} \arctg((x-1)^{-1/2}), & x > 1 \end{cases} \quad (A4)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{6}(2+x)\sqrt{1-x}$$

Известные вклады в  $\Pi_{2,3,4}$  от электрон-позитронной пары имеют

вид [20]

$$\begin{aligned} \Pi_2(s) &= \frac{1}{4} \tilde{L} + \bar{\zeta}(3) - \frac{5}{24}; \quad \Pi_3(s) = \frac{1}{24} \tilde{L}^2 - \left( \frac{47}{96} - \frac{1}{3} \bar{\zeta}(3) \right) \tilde{L}, \\ \Pi_4(s) &= \frac{1}{108} \tilde{L}^3 - \left( \frac{19}{144} - \frac{1}{9} \bar{\zeta}(3) \right) \tilde{L}^2, \quad \tilde{L} = \ln\left(-\frac{s}{m^2}\right) = L - i\pi. \end{aligned} \quad (A5)$$

Из (A2) и (A5) видно, что с принятой нами точностью  $\sim 0,1\%$  для учета р.п. вкладом  $\Pi_{2,3,4}$ , можно пренебречь.

Вклад адронов в поляризацию вакуума (в (A3) символ  $\int$  означает взятие интеграла в смысле главного значения) рассматривался детально в работе [21] (см. также [22]).

Отметим, что учет возможности аннигиляции через нейтральный  $Z^0$  - бозон приводит к эффекту порядка  $G E^2 / \pi \alpha \sqrt{2} \sim 2 \cdot 10^{-4} (E \text{ (ГэВ)})^2$ , что составляет для  $E = 5$  ГэВ величину  $\sim 0,5\%$ .

### ПРИЛОЖЕНИЕ Б

#### УРАВНЕНИЯ ЭВОЛЮЦИИ ДЛЯ СТРУКТУРНЫХ ФУНКЦИЙ

Уравнения Липатова, описывающие эволюцию структурных функций, в интегральной форме имеют вид:

$$\begin{aligned} D_e^e(x, L) &= \delta(1-x) + \int_0^L \frac{dt d(t)}{2\pi} \left[ \int_x^1 \frac{dy}{y} D_e^e(y, t) P_e^e\left(\frac{x}{y}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \int_x^1 \frac{dy}{y} D_e^{\gamma}(y, t) P_{\gamma}^e\left(\frac{x}{y}\right) \right]; \end{aligned} \quad (B1)$$

$$\begin{aligned} D_e^{\gamma}(x, L) &= -\frac{2}{3} \int_0^L \frac{dt d(t)}{2\pi} D_e^{\gamma}(x, t) + \int_0^L \frac{dt d(t)}{2\pi} \left[ \int_x^1 \frac{dy}{y} D_e^e(y, t) P_e^{\gamma}\left(\frac{x}{y}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \int_x^1 \frac{dy}{y} D_e^{\bar{e}}(y, t) P_{\bar{e}}^{\gamma}\left(\frac{x}{y}\right) \right]; \end{aligned} \quad (B2)$$

$$D_{\bar{e}}^{\bar{e}}(x, L) = \int_0^L \frac{dt d(t)}{2\pi} \left[ \int_x^1 \frac{dy}{y} D_{\bar{e}}^{\bar{e}}(y, t) P_{\bar{e}}^{\bar{e}}\left(\frac{x}{y}\right) + \int_x^1 \frac{dy}{y} D_{\bar{e}}^{\gamma}(y, t) P_{\gamma}^{\bar{e}}\left(\frac{x}{y}\right) \right],$$

(B3)

$$\alpha(t) = \alpha / \left[ 1 - \frac{\alpha}{3\pi} t \right], \quad t = \ln |q^2/m^2|, \quad L = \ln s/m^2.$$

(B4)

где  $q^2$  - квадрат 4-импульса партона (электрона, позитрона или фотона).  $D_A^B(x, t) = D_A^B(x, q^2)$  функция распределения (структурная функция), имеющая смысл вероятности найти в реальной частице A виртуальную частицу B с долей энергии  $x \leq 1$  от энергии частицы A и с квадратом 4-импульса вплоть до  $|q^2|$ . Величина  $(\alpha(t)/2\pi) P_A^B(x/y) dx dy / y q^2$  есть дифференциальная вероятность распада партона A с долей энергии  $y$  в пару партонных, причем один из них сорта B и имеет долю энергии в интервале  $x + dx$  и квадрат 4-импульса в интервале  $q^2 + dq^2$ . Величины  $P_A^B$  имеют вид:

$$P_e^e(z) = P_{\bar{e}}^{\bar{e}}(z) = \frac{1+z^2}{1-z} - \delta(1-z) \int_0^1 \frac{dx (1+x^2)}{1-x}, \quad (B5)$$

$$P_{\gamma}^e(z) = P_{\gamma}^{\bar{e}}(z) = z^2 + (1-z)^2, \quad (B6)$$

$$P_e^{\gamma}(z) = P_{\bar{e}}^{\gamma}(z) = \frac{1}{z} (1 + (1-z)^2). \quad (B7)$$

Сингулярности, содержащиеся в (B5), сокращаются при интегрировании с любой плавной функцией от  $z$  (не сингулярной при  $z = 1$ ). Это сокращение, как мы уже говорили, имеет ту же природу.

что и сокращение инфракрасных расходимостей в сечениях при учете излучения реальных фотонов (первое слагаемое в (Б5)) и виртуальных поправок (второе слагаемое в (Б5)). Мы продемонстрируем это, вычислив моменты от  $\rho_e^e(z)$ , которые нам понадобятся ниже.

$$C_n = \int_0^1 z^n \rho_e^e(z) dz = \int_0^1 dz (z^n - 1) \frac{1+z^2}{1-z^2} = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} =$$

$$= \frac{3}{2} - 2 \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Как мы отмечали, вклад структурной функции  $\mathcal{D}_e^{\bar{e}}$  в р.п. является величиной  $\sim (\alpha L/\pi)^4$  и пренебрежимо мал в рамках требуемой нами точности. Удобно ввести синглетную  $\mathcal{D}^s$  и несинглетную  $\mathcal{D}^{ns}$  части структурной функции  $\mathcal{D}_e^e$  следующим образом

$$\mathcal{D}_e^e = \mathcal{D}^{ns} + \mathcal{D}^s, \quad (Б9)$$

$$\mathcal{D}^{ns} = \mathcal{D}_e^e - \mathcal{D}_e^{\bar{e}}, \quad \mathcal{D}^s = \mathcal{D}_e^{\bar{e}}.$$

При этом  $\mathcal{D}^{ns}$  удовлетворяет уравнению (II), которое получается вычитанием (Б3) из (Б1). Синглетный вклад  $\mathcal{D}^s = \mathcal{D}_e^{\bar{e}}$  отличен от нуля только начиная с  $\alpha^2$  - порядка; с принятой нами точностью он получается, если в правой части (Б3) опустить член с  $\mathcal{D}_e^{\bar{e}}$ , а  $\mathcal{D}_e^{\bar{e}}$  найти из (Б2), где в правой части оставить только  $\mathcal{D}_e^e(y, t)$  в низшем порядке, т.е.  $\delta(1-y)$

$$\mathcal{D}^s(x, L) = \int_0^L \frac{dt'}{2\pi} \cdot \alpha \int_0^{t'} \frac{dt''}{2\pi} \cdot \alpha \int_x^1 \frac{dy}{y} \rho_e^e\left(\frac{x}{y}\right) \int_y^1 \frac{dz}{z} \rho_e^e\left(\frac{y}{z}\right) \delta(1-z) =$$

$$= \frac{\alpha^2 L^2}{8\pi^2} \int_x^1 \frac{dy}{y} \rho_e^e\left(\frac{x}{y}\right) \rho_e^e(y) =$$

$$= \frac{\beta^2}{32} \left[ \frac{1}{3x} (1-x)(4+7x+4x^2) - 2(1+x) \ln \frac{1}{x} \right]. \quad (Б10)$$

Отметим, что (Б10) согласуется с формулой (4.12) работы [6], описывающей сечение образования некоторой системы частиц (в [6] это -  $\mu^+\mu^-$  пара) тормозным механизмом:

$$\frac{d}{dx} \sigma_{\text{горн}}^{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^- e^+e^-} = 2 \sigma^{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}(sx) \cdot \frac{1}{32} \beta^2 \left[ \frac{(1-x)}{3x} (4+7x+4x^2) - 2(1+x) \ln \frac{1}{x} \right] \quad (Б11)$$

Формула (Б11) имеет лагорифмическую точность, причем считается  $L \gg \ln \frac{1}{x}, 1$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ В

### ГЛАВНОЛОГАРИФИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В СЛУЧАЕ $m \ll \Delta E$

$\ll E$ .

Переходя в (15) к моментам

$$R_n(s) = \int_0^1 dx \cdot x^{n-1} R(x, s), \quad (Б1)$$

запишем его в виде

$$R_n(s) = \frac{1}{n} + \int_{m^2}^s \frac{dQ^2}{Q^2} \frac{\alpha(Q^2)}{\pi} C_n R_n(Q^2), \quad (Б2)$$

где  $C_n$  вычислены в приложении Б (см. (Б8)).

Функция  $R(x, s)$  может быть восстановлена по моментам с помощью обратного преобразования Меллина:

$$R(x, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{dn}{n} x^{-n} \exp \left[ C_n \int_{m^2}^s \frac{dQ^2}{Q^2} \frac{\alpha(Q^2)}{\pi} \right]. \quad (Б3)$$

При значениях  $X = 1 - \Delta E/E$ , близких к единице, в (B3) существенны большие  $n$  (заметьте, что применение метода перевала здесь незаконно). Пользуясь при этом асимптотическим выражением для  $C_n$  при  $n \gg 1$ :

$$C_n = \frac{3}{2} - 2c - 2 \ln n + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad c = 0,577\dots,$$

приведем (B3) к виду

$$R(x, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dn}{n} \exp\left\{-n \ln x + b\left(\frac{3}{4} - c - \ln n\right)\right\} + O\left(\frac{1}{n} \sim \ln \frac{1}{x} = \frac{\Delta E}{E}\right). \quad (B4)$$

Окончательное выражение имеет вид

$$R\left(1 - \frac{\Delta E}{E}, s\right) = \left(\frac{\Delta E}{E}\right)^b e^{\frac{3}{4}b} \frac{e^{-cb}}{\Gamma(1+b)}. \quad (B5)$$

Пользуясь

$$\frac{e^{-cb}}{\Gamma(1+b)} = 1 - \frac{\pi^2}{12} b^2 + \frac{1}{3} \zeta(3) b^3 - \dots$$

а также  $b = 6 \ln\left(1 - \frac{\alpha L}{3\pi}\right)^{-1}$ , для первых членов разложения (B5) в ряд по  $(\alpha L/\pi)$  получим выражение (I8).

Как уже отмечалось, оно находится в противоречии с результатом полученным в [10]:

$$R_{\text{Tsaï}} = \left(1 - \frac{\alpha L}{3\pi}\right)^{-\frac{3}{2} + 6 \ln \frac{E}{\Delta E}} = 1 + \frac{\alpha L}{\pi} \left(\frac{3}{2} - 2 \ln \frac{E}{\Delta E}\right) + \left(\frac{\alpha L}{\pi}\right)^2 \left[2 \ln^2 \left(\frac{E}{\Delta E}\right) - \frac{10}{3} \ln \frac{E}{\Delta E} + \frac{11}{8}\right]. \quad (B6)$$

ВКЛАД В СТРУКТУРНУЮ ФУНКЦИЮ ОТ ИЗЛУЧЕНИЯ ФОТОНОВ

Если пренебречь реальными и виртуальными  $e^+e^-$  парами, то уравнение для  $\mathcal{D}^{NS}$  имеет вид (II) с  $\alpha(Q^2) = \alpha$ . Введем функцию  $G(x, s)$

$$G(x, s) = \int_x^1 \mathcal{D}^{NS}(x', s) dx'. \quad (II)$$

В силу (II) с  $\alpha(Q^2) = \alpha$  имеем

$$G(x, s) = 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \int_{m^2}^s \frac{dQ^2}{Q^2} \int_x^1 dz P(z) G\left(\frac{x}{z}, Q^2\right). \quad (I2)$$

Это уравнение отличается от уравнения (I5) заменой  $\alpha(Q^2) \rightarrow \alpha/2$ , поэтому, используя результаты приложения B для  $R(x, s)$ , имеем при  $1 - X \ll 1$

$$G(x, s) = (1-x)^{\frac{\alpha L}{\pi}} \frac{e^{\frac{\alpha L}{\pi}(\frac{3}{4}-c)}}{\Gamma\left(1 + \frac{\alpha L}{\pi}\right)} \left(1 + O((1-x))\right). \quad (I3)$$

Прямая итерация уравнения (I2) до членов  $\sim \alpha^2$  дает

$$G(x, s) = 1 + \frac{\alpha L}{2\pi} \left(x + \frac{1}{2}x^2 + 2 \ln(1-x)\right) + \frac{\alpha^2 L^2}{8\pi^2} \left[2(x^2 + 2x) \ln(1-x) + 4 \ln^2(1-x) - 4 \ln x \ln(1-x) + 3\left(x + \frac{1}{2}x^2\right) \ln \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x(1-x) + \frac{3}{2}x\left(1 + \frac{1}{2}x\right) + 4 \int_0^x \frac{dy}{y} \ln(1-y)\right]. \quad (I4)$$

Формула (I3) получена в главном логарифмическом приближении, т.е. в ней пренебрегается величиной  $\sim 1$  рядом с  $L$ . Сравнение формулы (B5) с результатом мягкофотонного приближения (см.,

например, [3]) показывает, что в (Г3) следует сделать замену  $L \rightarrow L-1$ . Если такую замену сделать и в (Г4), то, как показывает сравнение с [19], будет правильно учтена и жесткая часть спектра однократного тормозного излучения.

$\mathcal{D}^{NS}$  получается (со знаком минус) дифференцированием  $\mathcal{G}(x, s)$  по  $x$ . Сингулярная по  $(1-x)$  часть  $\mathcal{D}^{NS}$  должна быть вычислена во всех порядках по параметру  $\beta \ln(1-x)$ ,  $\beta = (2\alpha/\pi)(L-1)$ , т.е. для ее вычисления следует использовать (Г3) (с заменой  $L \rightarrow L-1$ ); в несингулярной по  $(1-x)$  части достаточно удержать лишь члены  $\sim \beta^2$ , т.е. ее можно вычислять по формуле (Г4) (с той же заменой).

В результате получаем следующее выражение

$$\frac{\beta}{2} (1-x)^{\frac{\beta}{2}-1} \frac{\exp\left(\frac{\beta}{2}\left(\frac{3}{4}-c\right)\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\beta}{2}\right)} - \frac{1}{4}\beta(1+x) + \frac{1}{16}\beta^2 \left[ -2(1+x)\ln(1-x) - 2\frac{\ln x}{1-x} + \frac{3}{2}(1+x)\ln x - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x \right]. \quad (Г5)$$

Отметим, что затравочная  $\delta(1-x)$ , присутствующая в уравнении для  $\mathcal{D}^{NS}$ , превратилась в  $(\beta/2)(1-x)^{\frac{\beta}{2}-1}$ , т.е. из-за излучения мягких фотонов  $\delta$ -функция "размылась". В пределе  $\beta \rightarrow 0$  имеем

$$\frac{1}{2}\beta (1-x)^{\frac{\beta}{2}-1} \rightarrow \delta(1-x) \quad (Г6)$$

Формула (Г5) дает  $\mathcal{D}^{NS}$  в пренебрежении  $e^+e^-$  парами, как реальными, так и виртуальными. Обратимся к вкладу виртуальных пар. Он мал, и его можно учесть лишь в низшем исчезающем порядке теории возмущений (т.е. в  $\alpha^2$ -порядке). Явный вид этого вклада известен из вычислений формфактора электрона в  $\alpha^2$ -порядке [14]

$$F_1^{par} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \left[ -\frac{1}{36}L^3 + \frac{19}{72}L^2 + \left(\frac{1}{18}\pi^2 - \frac{265}{216}\right)L + Const \right] \quad (Г7)$$

Вклады  $\sim (\alpha/\pi)^2 L$  в (Г7) выходят за рамки принятой нами точнос-

ти, так что учет виртуальных  $e^+e^-$  пар приводит к наличию в  $\mathcal{D}^{NS}$  слагаемого

$$\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \left[ -\frac{1}{36}L^3 + \frac{19}{72}L^2 \right] \delta(1-x) \approx -\frac{\beta^2}{288} (2L-15) \delta(1-x) \quad (Г8)$$

Как говорилось выше,  $\delta$ -функция "размывается" из-за излучения мягких фотонов, превращаясь в  $(\beta/2)(1-x)^{\frac{\beta}{2}-1}$ . Складывая, с учетом этого обстоятельства, (Г8) с (Г5), получаем формулу (20) для части структурной функции без учета рождения реальных  $e^+e^-$  пар.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ Д

##### ВКЛАД В СТРУКТУРНУЮ ФУНКЦИЮ ОТ РОЖДЕНИЯ $e^+e^-$ ПАР

Вклад рождения реальных  $e^+e^-$  пар в  $\mathcal{D}^{NS}(x, s)$ , так же как и вклад виртуальных пар, мал; учитывать следует рождение только одной пары. Используя результаты работы [15], где вычислено распределение по энергии и инвариантной массе пары, получим, что в борновском приближении этот вклад может быть представлен в виде

$$\frac{1}{6} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \int_{\frac{2m}{E}}^1 \frac{dz}{z} \left(1-z + \frac{1}{2}z^2\right) \left(\ln \frac{sz^2}{m^2} - \frac{5}{3}\right)^2 \delta(1-x-z) \quad (Д1)$$

где  $Z = \omega/E$ ,  $\omega$  - энергия пары.

Учет излучения мягких фотонов приводит, как уже говорилось, к "размазке"  $\delta$ -функции, т.е. к замене  $\delta(1-x-z) \rightarrow (\beta/2)(1-x-z)^{\frac{\beta}{2}-1}$ . Учитывая эту замену и проводя в (Д1) интегрирование, получим

$$\theta\left(1-x - \frac{2m}{E}\right) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} \frac{(1-x - \frac{2m}{E})^{\frac{\beta}{2}}}{(1-x)} \left(\ln \frac{s(1-x)^2}{m^2} - \frac{5}{3}\right)^2 \left(1+x^2 + \dots\right)$$

$$+ \frac{1}{6} \beta \left( \ln \frac{S(x)^2}{m^2} - \frac{5}{3} \right) \quad (12)$$

Прибавляя к (D2) синглетную часть  $D^S$  (см. В10) приходим к вкладу (21) в структурную функцию от рождения  $e^+e^-$  пар.

## Л и т е р а т у р а

1. Я.И.Азимов и др. Письма в ЖЭТФ 21, 378 (1975).
2. Л.Н.Липатов, В.А.Хозе. Материалы X Зимней школы ЛИЯФ, ч.П, Л-д, стр. 409 (1975).
3. V.N. Baier et al Phys. Rep. 78 N3 (1981)
4. D.R. Yennie, Phys. Rev. Lett 34, 239 (1975)
5. J.P. Perez-Jorba, F.M. Renard, Phys. Rep. 31C N1 (1977)
6. J.D. Jackson, D.D. Scharre, Nucl. Instr. Meth. 128, 13 (1975)
7. F.A. Berends, R. Gastmans "Electromagnetic Interactions of Hadrons" II, Plenum Press, New-York-London (1978)
8. F.A. Berends, R. Kleiss Nucl. Phys. B 178, 141 (1981)
9. S. Tavernier, These du Doctorat 3eme Cycle, R I 68/7, Orsay, 1968.
10. Y.S. Tsai, SLAC-PUB-3129 (1983).
11. S.D. Drell, T-M. Yan Phys. Rev. Lett 25, 316 (1970).
12. D.R. Yennie, S. Frautchi, H. Suura, Ann. of Phys. 13, 379 (1961).
13. Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский. Релятивистская квантовая теория, часть 2, "Наука", М., 1971 г.
14. R. Barbieri, J.A. Mignaco, E. Remiddi, Nuovo Cimento 11A, 824 (1972)
15. В.Н.Байер, В.С.Фадин, В.А.Хозе. ЖЭТФ, 50, 156 (1966).
16. A.H. Mueller, Phys. Rep. 73 N4 (1981)
17. Л.Н.Липатов. Ядерная физика 20, 181 (1974).
18. В.Н.Грибов, Л.Н.Липатов. Ядерная физика, 15, 781 (1972).
19. В.Н.Байер, В.А.Хозе. ЖЭТФ 48, 946 (1965).
20. E. Rafael and J.L. Rosner, Ref TH-1645-CERN, 1973.
21. F.A. Berends and G.J. Komen, Phys. Lett B 63 p432 (1976).
22. W. Wetzel, Z. Phys.-C 11 p117 (1981); 11, 113.

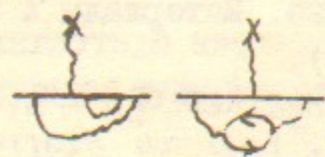


рис 1

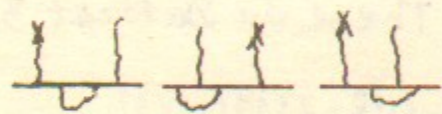


рис 2

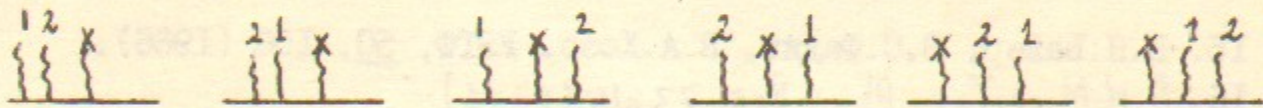


рис 3

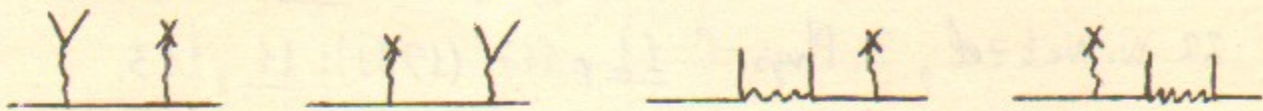


рис 4

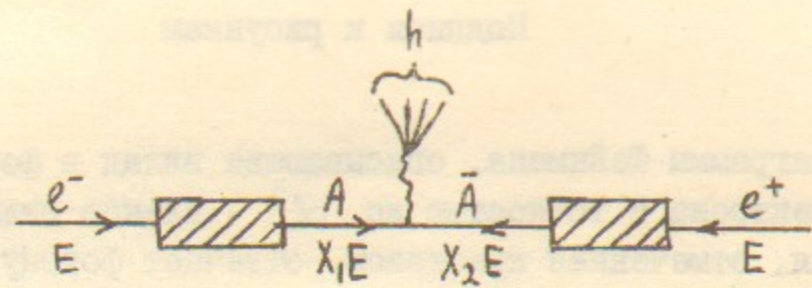


рис 5

$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ E \end{array} \begin{array}{c} \text{shaded box} \\ \rightarrow \\ EX \end{array} = \text{---} + \begin{array}{c} \rightarrow \\ E \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{wavy line} \\ \rightarrow \\ EX \end{array} + \begin{array}{c} \rightarrow \\ E \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \text{wavy lines} \\ \rightarrow \\ EX \end{array} + \begin{array}{c} \rightarrow \\ E \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \uparrow \\ \text{wavy lines} \\ \rightarrow \\ EX \end{array} + \dots$$

рис 6

$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ E \end{array} \begin{array}{c} \text{shaded box} \\ \rightarrow \\ EX \end{array} = \begin{array}{c} \rightarrow \\ E \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \text{wavy lines} \\ \rightarrow \\ EX \end{array} + \dots$$

рис 7



рис 8



Подписи к рисункам

- Рис.1. Диаграммы Фейнмана, описывающие вклад в формфактор электрона с точностью до  $\alpha^2$  - членов включительно. Линия, отмеченная крестиком, отвечает фотону, через который идет аннигиляция.
- Рис.2. Диаграммы Фейнмана для излучения дополнительного фотона с учетом виртуальной поправки  $\sim \alpha$ .
- Рис.3. Диаграммы Фейнмана, описывающие излучение двух дополнительных фотонов.
- Рис.4. Диаграммы Фейнмана, описывающие рождение дополнительной  $e^+e^-$  пары.
- Рис.5. Схематическая диаграмма, представляющая процесс однофотонной аннигиляции как процесс Дрелла-Яна.
- Рис.6. Схематическая диаграмма для структурной функции  $D_e^e$  электрона.
- Рис.7. Схематическая диаграмма для синглетного вклада  $D^S$  в структурную функцию электрона.
- Рис.8. Схематическая диаграмма, изображающая вклад синглетной части  $D^S$  структурной функции электрона в сечение в низшем порядке теории возмущений.

Э.А.Кураев, В.С.Фадин

ВЫЧИСЛЕНИЕ РАДИАЦИОННЫХ ПОПРАВОК К СЕЧЕНИЮ  
ОДНОФОТОННОЙ АННИГИЛЯЦИИ С ПОМОЩЬЮ  
СТРУКТУРНЫХ ФУНКЦИЙ

Препринт  
№ 84-44

Работа поступила - 19 марта 1984 г.

---

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов  
Подписано к печати 11.04.84г. МН 04222  
Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.2,2 печ.л., 1,8 учетно-изд.л.  
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ №44

---

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90