

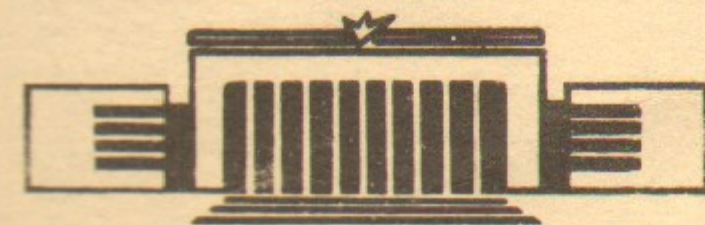


ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

Н.С.Диканский, Д.В.Пестриков

ВЛИЯНИЕ ЭФФЕКТОВ УПОРЯДОЧЕНИЯ  
НА РЕЛАКСАЦИЮ НЕСГРУППИРОВАННОГО  
ХОЛОДНОГО ПУЧКА В НАКОПИТЕЛЕ

ПРЕПРИНТ 84-48



НОВОСИБИРСК

Институт ядерной физики

Препринт

ВЛИЯНИЕ ЭФФЕКТОВ УПОРЯДОЧЕНИЯ НА РЕЛАКСАЦИЮ  
НЕСГРУППИРОВАННОГО ХОЛОДНОГО ПУЧКА В НАКОПИТЕЛЕ

Н.С.Джанский, Д.В.Пестриков

Новосибирск  
1984

ВЛИЯНИЕ ЭФФЕКТОВ УПОРЯДОЧЕНИЯ НА РЕЛАКСАЦИЮ  
НЕСГРУППИРОВАННОГО ХОЛОДНОГО ПУЧКА В НАКОПИТЕЛЕ

Н.С.Диканский, Д.В.Пестриков

Аннотация

В работе рассмотрены особенности кулоновской релаксации к равновесию энергетического распределения в холодном азимутально-однородном пучке в накопителе. Показано, что при энергиях частиц ниже критической, равновесие в пучке достигается за счет выравнивания температур частиц и когерентных флуктуаций. Присутствие в равновесии когерентных колебаний приводит к упорядочению движения частиц пучка. Термодинамические свойства такого пучка при уменьшении температуры приближаются к свойствам кристаллического тела. Обсуждаются условия перехода пучка в кристаллическое состояние и особенности такого состояния пучка.

### Введение

В работах /1,2/ экспериментально показана возможность получения сверххолодных пучков тяжелых частиц в накопителях с электронным охлаждением. Принято считать, что величины установившихся разбросов по импульсам с уменьшением температуры пучка (или увеличением его плотности) в значительной мере определяются эффектом взаимного рассеяния частиц. Вместе с тем хорошо известно, что благодаря кулоновскому дальнему действию в холодном пучке усиливаются корреляции взаимного расположения частиц. При достаточно низких температурах это уменьшает несительную подвижность частиц и может приводить к подавлению эффекта взаимного рассеяния. Зависимость продольной температуры холодного пучка от тока изучалась в экспериментах /2/. При малых токах пучка ( $I < 10$  мкА) продольная температура была постоянна и примерно равна  $T \approx 1^\circ\text{К}$ , начиная с  $I = 10$  мкА наблюдался рост продольной температуры с током пучка. Такое поведение  $T$  противоречит существующей теории внутрипучкового рассеяния /3,4/, основанной на предположении о доминирующей роли быстрых столкновений и предсказывающей равномерный рост температуры с увеличением тока пучка. С уменьшением температуры справедливость такого предположения может нарушаться по двум причинам.

Во-первых, из-за движения частиц в фокусирующих полях увеличивается число столкновений с длительностью  $\tilde{\zeta}_{eT}$ , превышающей периоды колебаний частиц  $1/\omega_b$ . То-есть адиабатических столкновений. Это приводит к подавлению теплообмена между поперечными и продольной степенями свободы.

Во-вторых, благодаря дальнему действию, с уменьшением температуры увеличивается роль коллективных эффектов в пучке. В этом случае коллективные колебания могут распространяться по пучку в виде долгоживущих волн и участвовать в теплообмене с частицами пучка. В результате переизлучения частицами коллективных колебаний температуры частиц и волн выравниваются, а среднее число волн в равновесии  $N_{ex}$  определяется температурой пучка  $N_{ex} = N_{ex}(T)$ . Время жизни волн, участвующих в таком теплообмене, должно быть, конечно, сравнимо с временем релаксации пучка  $\tilde{\zeta}_p$ .

Игнорирование перечисленных факторов может привести к

неверному предсказанию величин установившихся разбросов и времени релаксации к равновесию в пучках с достаточно малой температурой.

Присутствие в равновесии когерентных колебаний приводит к упорядочению движения частиц пучка и изменяет характер самого равновесного состояния. Степень упорядочения увеличивается с ростом  $N_{ex}$  при охлаждении пучка и может переходить в кристаллическое упорядочение при достаточно малых температурах.

Симметрия получающегося кристалла зависит от условий движения пучка. Наиболее простому случаю отвечает движение не-сгруппированного пучка нерелятивистских частиц. При этом разброс частот бетатронных колебаний могут быть велики из-за большой величины кулоновского сдвига  $\Delta \nu \sim N/a_1^2$  ( $a_1$  — поперечный размер пучка). Время жизни бетатронных колебаний в таких условиях уменьшается с уменьшением поперечной температуры. В противоположность этому время затухания продольных колебаний определяется лишь разбросом частот обращения и растет с уменьшением продольной температуры пучка. Это означает, что  $N_{ex}$  определяется числом продольных колебаний в равновесии-коллективные поля упорядочивают расположение вдоль орбиты плоскостей, в которых частицы совершают бетатронные колебания. По аналогии с замагниченным пучком, здесь можно вместо движения частиц рассматривать движение равномерно заряженных дисков (с полным зарядом  $e$  каждый,  $a_x \approx a_z$ ). Температура пучка, составленного из таких дисков совпадает с  $T$ ,  $N_{ex}$  определяет полное число колебаний, а число дисков совпадает с числом частиц в пучке  $N$ . Условием кристаллизации такого пучка является равенство  $N_{ex}$  и  $N$ . При этом относительное расстояние между дисками стремится к  $\pi/N$  ( $\pi = 2\pi R_0$  — периметр орбиты), средняя энергия и теплоемкость пучка удваиваются, а энтропия сильно уменьшается. То-есть пучок приобретает свойства кристаллического тела.

Уменьшение относительной подвижности частиц под действием коллективных полей может приводить к подавлению теплообмена между поперечными и продольной степенями свободы при взаимном

рассеянии частиц<sup>\*)</sup>. Такое подавление термализации наблюдалось в экспериментах по измерению шумов пучка на установке НАП-М /2/ и в экспериментах /5/ по измерению продольной температуры замагниченного электронного пучка.

Целью настоящей работы является исследование особенностей релаксации энергетического распределения в пучке к равновесию и особенностей самого равновесного распределения, обусловленных эффектами упорядочения. Для простоты в этой работе мы ограничимся рассмотрением движения нерелятивистского, азимутально-однородного пучка с энергией ниже критической энергии накопителя. Именно к этой области параметров относятся экспериментальные данные работы /2/, что позволяет провести определенное сравнение теории и эксперимента.

Случай движения пучка с энергией выше критической, а также взаимодействия пучка с элементами, которые могут внести неустойчивость в когерентное движение пучка, требует особого рассмотрения и поэтому будет рассмотрен в отдельной работе.

## 2. Исходные уравнения

Сформулируем сначала основные уравнения, описывающие релаксацию к равновесию в холодном пучке. Критерий того, что пучок является холодным, будет уточнен ниже. Для получения соответствующих кинетических уравнений, воспользуемся формализмом микроскопической фазовой плотности /6/.

По определению, одночастичная функция распределения  $f$  равна статистическому среднему микроскопической плотности:

$$f(\Gamma, t) = \langle \delta(\Gamma, t) \rangle \equiv \left\langle \sum_{a=1}^N \delta(\Gamma - \Gamma_a(t)) \right\rangle. \quad (1)$$

Здесь  $\Gamma_a(t)$  — координаты частицы "а" в фазовом пространстве в момент времени  $t$ ,  $N$  — число частиц в пучке, усреднение ведется по начальным условиям частиц. Распределение  $f$  нормировано на  $N$ :

$$\int d\Gamma f(\Gamma, t) = N. \quad (2)$$

\*) Общая идея о возможной связи подавления эффекта взаимного рассеяния с кристаллизацией пучка и о возможности такой кристаллизации принадлежат В.В.Пархомчуку

Микроплотность  $\mathcal{D}(\Gamma, t)$ , по определению, удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{D} + [\mathcal{H}; \mathcal{D}] = 0, \quad (3)$$

$[\ ; \ ]$  - скобка Пуассона,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - \mathcal{L}$ ,  $\mathcal{H}_0$  - гамильтониан движения частиц в фокусирующих полях,  $\mathcal{L}$  - лагранжиан взаимодействия частиц. Для описания невозмущенного движения частиц используем переменные действие-фаза. При этом поперечные координаты частиц осциллируют около равновесной орбиты:

$$(X, Z) = \sqrt{\frac{2I}{M\omega_b}} \cos \psi \Big|_{X, Z}, \quad \vec{p}_\perp = \frac{P_z}{R_0} \frac{d\vec{z}_\perp}{d\theta_s},$$

$$\dot{\psi}_{X, Z} = \omega_{X, Z} = \omega_0 \nu_{X, Z}, \quad \theta_s = \omega_s t, \quad \vec{I}_{X, Z} = \text{const.}$$

Для продольного движения интегралами будут отклонения импульса от равновесного значения  $\Delta p = p - p_s$  и  $\varphi = \theta - \omega_s t$ ,  $\theta$  - азимут частицы.

Кинетическое уравнение для  $f$  получается усреднением уравнения непрерывности (3). Уравнение, которое получается в результате такого усреднения, описывает два процесса: релаксацию распределения  $f$  к равновесию и развитие в пучке когерентных колебаний. Если взаимодействие частиц не приводит к коллективным неустойчивостям, начальные когерентные колебания затухают за времена, существенно меньшие времени релаксации. По этой причине можно считать, что на больших временах  $f$  не зависит от фазовых переменных  $\{\varphi$  и  $\theta\}$ , а добавка  $\mathcal{L}[f]$  приводит лишь к сдвигам частот невозмущенного движения. Поскольку нас в данном случае интересует релаксация не полной функции распределения  $f(I_\perp, \Delta p, t)$  а функции распределения по импульсам

$$f(\Delta p, t) = \int dI_\perp f(I_\perp, \varphi, t), \quad (4)$$

для нее результирующее уравнение имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial \Delta p} \left\langle \sum_n \sum_{m_\perp} e \delta E_{n, m_\perp}^+ \delta \mathcal{D}_{n, m_\perp} \right\rangle. \quad (5)$$

Здесь  $\delta \mathcal{D} = \mathcal{D} - f$  и  $\delta E = E - \langle E \rangle$  флуктуационные части  $\mathcal{D}$  и продольной компоненты электрического поля  $E$ , наведенного пучком.

При получении уравнения (5) учтено, что функции, входящие в (3), периодически зависят от фазовых переменных и могут быть разложены в ряды Фурье:

$$X(\Gamma, t) = \sum_n \sum_{m_\perp} X_{n, m_\perp}(I_\perp, \Delta p, t) e^{in\theta + im_\perp \varphi},$$

где  $X$  - любая из функций:  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{L}$ ,  $\delta E$  и т.д.

Развитие флуктуаций в пучке  $\delta \mathcal{D}$  само определяется взаимодействием частиц. При этом, если взаимодействие мало искажает невозмущенное движение частиц за времена, порядка периодов колебаний в фокусирующих полях, для  $\delta \mathcal{D}$  можно использовать линеаризованное уравнение

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\omega}_\perp \frac{\partial}{\partial \vec{\varphi}_\perp} + \omega_0 \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \delta \mathcal{D} = - \left( \frac{\partial \delta \mathcal{L}}{\partial \vec{\varphi}_\perp} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{I}_\perp} + e \delta E_\parallel \frac{\partial f}{\partial \Delta p} \right), \quad (6)$$

составляющее совместно с уравнениями поля систему, аналогичную уравнениям Власова в теории когерентной устойчивости пучков. Собственно кинетическое уравнение для  $f$  получается подстановкой в правую часть (5) решений уравнения (6) и усреднением по флуктуациям. Возможность выполнения такого усреднения связана с присутствием в задаче такой иерархии времени, что время релаксации  $\tilde{t}_p$  распределения  $f$  существенно превышает характерные времена изменения флуктуаций  $\tilde{t}_{min}$ . По порядку величины  $\tilde{t}_{min}$  определяется расстоянием по частотам в невозмущенном спектре  $|\vec{m}_\perp \omega_\perp + n \omega_0|$  либо длительностью столкновения пары частиц  $\tilde{t}_{st} \sim \rho/u$  ( $\rho$  - прицельный параметр,  $u$  - относительная скорость частиц). Интересуясь систематическим поведением  $f$  на больших временах  $\Delta t \gg \tilde{t}_{min}$  усредним уравнение (5) по времени

$$\tilde{t}_{min} \ll \Delta t \ll \tilde{t}_p. \quad (7)$$

В результате приходим к хорошо известному уравнению [6/

$$\frac{\partial f}{\partial t} = st \equiv - \frac{\partial}{\partial \Delta p} \sum_n \sum_{m_\perp} \int \frac{d\omega}{2\pi} \mathcal{K}(\omega), \quad (8)$$

в котором столкновительный интеграл выражен через спектральную плотность коррелятора  $\langle \delta E \delta \mathcal{D} \rangle$ :

$$K(\omega) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta \langle e \delta E_{n, m_1}^*(\omega + i\Delta) \delta \mathcal{D}_{n, m_2}(\omega + i\Delta) \rangle \quad (9)$$

Скобки  $\langle \rangle$  - означают усреднение по начальным значениям  $\delta \mathcal{D}$ .  
Для дальнейшего упрощения разобьем правую часть (8) на два слагаемых

$$st = st_B + st_A, \quad st_B \equiv st[m_1 \neq 0], \quad st_A \equiv st[m_1 = 0].$$

Такое разбиение отвечает выделению двух отличающихся по физике процессов.

Слагаемое

$$st_B = - \frac{\partial}{\partial \Delta \rho} \sum_n \sum_{m_1 \neq 0} (\dots)$$

определяет изменение  $f$  за счет столкновений частиц с передачей энергии из поперечного движения в продольное (и наоборот). Оно может давать заметный вклад лишь тогда, когда большая часть столкновений является быстрыми, то-есть

$$\dot{\zeta}_{ст} \omega_b = \frac{\omega_b \rho}{u} \ll 1. \quad (10)$$

В противном случае передача энергии оказывается экспоненциально малой и влияние  $st_B$  на кинетику  $f$  падает. При выполнении (10) возможно вычисление  $st_B$  в логарифмическом приближении, приводящее к интегралу столкновений Ландау.

На языке флуктуаций это отвечает учету в спектре  $\delta \mathcal{D}$  таких когерентных колебаний, для которых декремент  $\lambda_{n, m_1} \gg 1/\tau$ . При выполнении этого условия можно считать, что шум пучка "скачком" достигает равновесного значения, отвечающего мгновенному распределению  $f$ . Подстановка в (8) равновесных спектральных плотностей сразу дает интеграл столкновений Ландау (либо более общий интеграл в форме Ленарда-Балеску) /6/. Заметим, что для охлажденного пучка с малыми поперечными размерами условие  $\lambda_{n, m_1} \tau > 1$  может выполняться фактически начиная с  $m_1^2 = 1$  из-за большого разброса частот поперечных колебаний, вносимого кулоновским сдвигом ( $\Delta \nu_1 \sim N/a_1^2$ ).

Другое слагаемое

$$st_A = - \frac{\partial}{\partial \Delta \rho} \sum_n \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int \frac{d\omega}{2i} \langle e \delta E_{n, m_1=0}^*(\omega + i\Delta) \delta \mathcal{D}_{n, m_1=0}(\omega + i\Delta) \rangle \quad (11)$$

отвечает взаимодействию частиц, "размазанных" в плоскости бетатронных колебаний по области с размером, порядка поперечного размера пучка  $a_1$ . По аналогии с задачей о взаимодействии с замагниченными электронами /7/, здесь можно говорить о взаимодействии заряженных дисков.

Если не рассматривать неконсервативного взаимодействия, правая часть (11) отлична от нуля лишь при учете процессов излучения и поглощения коллективных колебаний частицами пучка. Этому отвечает присутствие в спектре  $\delta \mathcal{D}$  таких колебаний, для которых

$$\lambda_n \tau_p \lesssim 1, \quad m_1^2 = 0. \quad (12)$$

То-есть колебаний, распространяющихся по пучку в виде долгоживущих волн.

При таком механизме изменения  $f$  происходит за счет выравнивания температур частиц и коллективных волн /6/. Перенос энергии по спектру когерентных колебаний осуществляется за счет переизлучения волн частицами пучка. Число волн  $N_{ex}$  участвующих в теплообмене, определяется условием (12) и, вообще говоря, растет с уменьшением температуры. Чтобы обсуждаемый эффект оказывал заметное влияние на изменение  $f$ , число  $N_{ex}$  должно быть велико. Последнее требование выполняется тем лучше, чем меньше температура пучка.

Таким образом, в адиабатическом пределе задача о релаксации холодного пучка к равновесию сводится к совместному решению уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial \Delta \rho} \sum_n \int \frac{d\omega}{2i} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \langle e \delta E_n^*(\omega + i\Delta) \delta \mathcal{D}_n(\omega + i\Delta) \rangle \quad (13)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \omega_0(\rho) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \delta \mathcal{D} = - e \delta E(\theta, t) \frac{\partial f}{\partial \Delta \rho} \quad (14)$$

Правая часть (13) зависит как от функции распределения  $f$ , так и от спектральной плотности  $(\delta E_n)^2_\omega$ . При выполнении (12)

последняя меняется в процессе релаксации. Поэтому кинетика пучка описывается не одним, а двумя уравнениями /6/: кинетическим уравнением для  $f$  и уравнением для спектральной плотности  $(\delta E_n)_\omega$ . В /6/ эти уравнения были получены для кулоновского взаимодействия частиц. Ниже аналогичные уравнения получены для случая, когда взаимодействие частиц описывается импедансом  $Z_n$ .

### 3. Спектральная плотность флуктуаций поля

Получим сначала уравнение для спектральной плотности

$$(\delta E_n)_\omega^2 = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \langle \delta E_n^*(\omega + i\Delta) \delta E_n(\omega + i\Delta) \rangle \quad (15)$$

Как уже говорилось, будем считать, что Фурье компоненты флуктуаций поля  $\delta E$  и фазовой плотности  $\delta \mathcal{D}$  связаны импедансным соотношением:

$$\delta E_{n\omega} = \frac{e\omega_s Z_n}{2iR_0} \int d\Delta\rho \delta \mathcal{D}_{n\omega}(\Delta\rho) \quad (16)$$

$e$  - заряд частицы,  $\omega_s$  - частота обращения,  $Z_n$  - импеданс устройства, осуществляющего взаимодействие частиц. Для кулоновского взаимодействия  $Z_n$  определяется формулой:

$$\frac{iZ_n}{n} \approx \frac{4}{\omega_s} \begin{cases} \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2n_0}{n}\right), & n < n_0 = R_0/a_L \\ \left(\frac{n_0}{n}\right)^2, & n > n_0. \end{cases} \quad (17)$$

Выполним в (14) преобразование Фурье по азимуту

$$\delta \mathcal{D}(\Delta\rho, \theta, t) = \sum_n \delta \mathcal{D}_n(\Delta\rho, t) \exp(in\theta)$$

и времени

$$\delta \mathcal{D}_{n\omega}(t) = \int_0^\infty d\tau e^{i\omega\tau} \delta \mathcal{D}_n(t+\tau).$$

В результате получим:

$$\delta \mathcal{D}_{n\omega}(t) = \frac{i\delta \mathcal{D}_n(\Delta\rho, t)}{\omega - n\omega_0(\rho)} - ie \int_0^\infty d\tau e^{i\omega\tau} \delta E_n(t+\tau) \frac{\partial f(t+\tau)}{\partial \rho}. \quad (18)$$

Здесь  $t$  имеет смысл начального момента времени. Комбинируя (16) и (18), получим уравнение:

$$\int_0^\infty d\tau e^{i\omega\tau} \delta E_n(t+\tau) \varepsilon_n(\omega, t+\tau) = \frac{ie\omega_s Z_n}{2iR_0} \int d\Delta\rho \frac{\delta \mathcal{D}_n(\Delta\rho, t)}{\omega - n\omega_0(\rho)}, \quad (19)$$

где

$$\varepsilon_n(\omega, t) = 1 + \frac{\Omega_n^2}{n\omega_s'} \int d\Delta\rho \frac{\partial f_0 / \partial \Delta\rho}{\omega - n\omega_0(\rho)}, \quad f = Nf_0 \quad (20)$$

мгновенное значение диэлектрической проницаемости пучка, а

$$\Omega_n^2 = n^2 \frac{Ne^2\omega_s\omega_0'}{2iR_0} \left(\frac{iZ_n}{n}\right) \quad (21)$$

квадрат когерентного сдвига, отвечающего импедансу  $Z_n$ ,  $\omega_0' = d\omega_0/d\rho = \frac{\omega_s \beta}{\beta^3} = \frac{\omega_s}{\beta} \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\beta^4}\right)$ ,  $\beta \approx 1$  - релятивистский фактор,  $Z_{ct}$  - отвечает критической энергии накопителя.

В стационарных условиях ( $\varepsilon_n(\omega, t) = \text{const}$ ) решение (19) можно написать сразу

$$\delta E_{n\omega} = \frac{ie\omega_s Z_n}{2iR_0 \varepsilon_n(\omega)} \int d\Delta\rho \frac{\delta \mathcal{D}_n(\Delta\rho, t)}{\omega - n\omega_0(\rho)}$$

При этом спектр когерентных колебаний пучка определяется дисперсионным уравнением  $\varepsilon_n(\omega) = 0$ . Если непосредственно взаимодействие не приводит к коллективным неустойчивостям ( $\omega_0' > 0$ ,  $\text{Re} Z_n \rightarrow 0$ ), то медленно затухающим колебаниям отвечает область параметров  $(n\omega)^2 < \Omega_n^2$  ( $\Delta\omega = \omega_0' \Delta\rho$  разброс частот в пучке). Для таких гармоник решение дисперсионного уравнения имеет вид ( $\varepsilon_n = \varepsilon_n'(\omega) + i\varepsilon_n''(\omega)$ ):

$$\omega - n\omega_s = \Delta\omega_n - i\lambda_n \approx \Omega_n + \frac{i\varepsilon''}{\partial \varepsilon' / \partial \omega} \Big|_{\Delta\omega_n = \Omega_n}$$

$\Delta\omega_n \approx \Omega_n$  является корнем уравнения

$$\varepsilon_n'(\omega) = 0. \quad (22)$$



При релаксационном изменении  $f$  зависимость  $\delta E_n$  от времени складывается из быстрых осцилляций с частотами  $n\omega_s + \Delta\omega_n$  и медленного (за времена порядка  $\hat{t}_p$ ) изменения амплитуд этих осцилляций. В таких условиях применение метода усреднения /6/ (см. также Приложение I) позволяет упростить уравнение (19) и переписать его в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial \omega} \delta E_{n\omega} \right] - i \varepsilon_n(\omega) \delta E_{n\omega} = \frac{e\omega_s Z_n}{2\hbar R_0} \int \frac{d\Delta p \delta \mathcal{D}_n(\Delta p, t)}{\omega - n\omega_0(p) + i\Delta} \quad (23)$$

Уравнение для спектральных плотностей  $(\delta E_n)_\omega^2$  может быть получено умножением (23) на  $2\Delta \delta E_{n,\omega+i\Delta}^*$  с последующим усреднением по флуктуациям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\delta E_n)_\omega^2 + 2\lambda_n(\omega) (\delta E_n)_\omega^2 = \\ = \frac{1}{\frac{\partial \varepsilon_n'}{\partial \omega}} \operatorname{Re} \left\langle \frac{-2i\Delta}{\varepsilon_n^*(\omega+i\Delta)} \left| \frac{e\omega_s Z_n}{2\hbar R_0} \int \frac{d\Delta p \delta \mathcal{D}_n(\Delta p, t)}{\omega - n\omega_0(p) + i\Delta} \right|^2 \right\rangle. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь

$$\lambda_n(\omega) = - \frac{\varepsilon_n''(\omega)}{\partial \varepsilon_n' / \partial \omega} + \frac{\partial}{\partial t} \ln \left( \frac{\partial \varepsilon_n'}{\partial \omega} \right) \quad (25)$$

декремент колебания  $\omega \approx n\omega_s$  с учетом адиабатического затухания амплитуд из-за изменения  $f$ .

Предполагая, что флуктуации в пучке рождаются статистически независимо:

$$\langle \delta \mathcal{D}_n^*(\Delta p, t) \delta \mathcal{D}_n(\Delta p', t) \rangle = \delta(\Delta p - \Delta p') f(\Delta p),$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\delta E_n)_\omega^2 + 2\lambda_n(\omega) (\delta E_n)_\omega^2 = \\ = \frac{\delta[\varepsilon_n'(\omega)]}{|\partial \varepsilon_n' / \partial \omega|} \left| \frac{e\omega_s Z_n}{R_0} \right|^2 \int d\Delta p \delta(\omega - n\omega_0(p)) f. \end{aligned} \quad (26)$$

Присутствие в правой части (26) множителя  $\delta[\varepsilon_n'(\omega)]$  отвечает излучению коллективных колебаний частицами. Затухание колебаний, как видно из (25), обусловлено поглощением этих волн в

пучке и адиабатическим затуханием за счет изменения  $f$ . Воспользуемся соотношением (16)

$$\delta E_{n\omega} = \frac{e\omega_s Z_n}{2\hbar R_0} \delta \rho_{n\omega}$$

преобразуем (26) в уравнение для спектральной плотности флуктуаций азимутальной плотности частиц в пучке:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta \rho_n)_\omega^2 + 2\lambda_n(\omega) (\delta \rho_n)_\omega^2 = \left( \frac{e\hbar}{2\hbar} \right)^2 \frac{\delta[\varepsilon_n'(\omega)]}{|\partial \varepsilon_n' / \partial \omega|} \int d\Delta p \delta(\omega - n\omega_0(p)) f. \quad (26a)$$

Замечательной особенностью этих уравнений является то, что в равновесном состоянии ( $\partial/\partial t \rightarrow 0$ ) могут присутствовать лишь волны, удовлетворяющие дисперсионному уравнению (22). Колебания с другими частотами затухают за времена  $\hat{t} \sim 1/\lambda_n(\omega)$ . Такое поведение спектральных плотностей в равновесии, разумеется, совпадает с результатом расчета в /8/, предсказывающего появление в спектре шумов холодного лучка ( $n\Delta\omega < \Omega_n$ ) двух  $\delta$ -образных пиков, отстоящих от  $n\omega_s$  на величину когерентного сдвига

$$(\delta \rho_n)_\omega^2 \sim T \left[ \delta(\Delta\omega_n + \Omega_n) + \delta(\Delta\omega_n - \Omega_n) \right]. \quad (27)$$

#### 4. Уравнение Ланжевена

Для вычисления столкновительного интеграла в правой части (13) необходимо решение уравнения (18). В предположении о медленном изменении амплитуд  $\delta \mathcal{D}_{n\omega}(t)$  повторение вычислений, ведущих от (19) к (23), позволит написать

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{D}_{n\omega}(t) = \frac{i \delta \mathcal{D}_n(\Delta p, t)}{\omega - n\omega_0(p)} - \frac{ie \delta E_{n\omega}(t)}{\omega - n\omega_0(p)} \frac{\partial f}{\partial \Delta p} + \\ + \frac{\partial}{\partial t} \left[ e \delta E_{n\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{\omega - n\omega_0(p)} \cdot \frac{\partial f}{\partial \Delta p} \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Второе слагаемое учитывает влияние нестационарности шума пучка. Подстановка этого выражения в (13) позволяет провести явное вычисление столкновительного интеграла. Получающееся выражение весьма громоздко и неудобно для анализа. Вместе с тем основные особенности приближения пучка к равновесию могут быть изучены с помощью более простого уравнения Ланжевена. Возможность та-

кой замены связана с тем, что равновесным распределением уравнения (13) является гауссово распределение по импульсам.

Введем величину разброса по импульсам в пучке

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta p}{N} \Delta p^2 f(\Delta p, t). \quad (29)$$

Из (13) для  $\sigma^2$  имеем

$$\frac{d\sigma^2}{dt} = \frac{2}{N} \sum_n \int \frac{d\omega}{2\pi} \int d\Delta p \Delta p \lim_{\Delta \rightarrow 0} \langle e^{\delta E_n^*(\omega+i\Delta)} \delta \mathcal{D}_n(\omega+i\Delta) \rangle. \quad (30)$$

Подставив сюда  $\delta \mathcal{D}_n$  из (28) и выполнив усреднение, получим (см. Приложение II):

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^2}{dt} &= - \sum_n \operatorname{Re} \left[ \frac{e^2}{\Omega_n^2} \right] \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{d\omega}{2\pi} (\delta E_n)_\omega^2 \\ &= - \sum_n \frac{1}{n^2} \frac{2\bar{u} R_0 \operatorname{Re} [n/iz_n]}{N\omega_s \omega_s'} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{d\omega}{2\pi} (\delta E_n)_\omega^2. \end{aligned} \quad (31)$$

Таким образом, в рассматриваемом приближении ( $\operatorname{Re} \Omega_n \gg \lambda_n$ ,  $\lambda_n i_p \sim 1$ ,  $\hat{\epsilon}_{\text{ст}} \omega_s > 1$ ) изменение продольной температуры пучка  $T = R_0 \omega_s' \sigma^2$  полностью связано с нестационарностью коллективных флуктуаций поля.

Кинетика достижения пучком равновесия определяется системой уравнений (26) и (31). Для дальнейшего удобно ввести температуру флуктуаций:

$$T_{fe}(n) = \frac{R_0^2}{n^2 \omega_s} \operatorname{Re} \left[ \frac{n}{iz_n} \right] \int \frac{d\omega}{2\pi} (\delta E_n)_\omega^2. \quad (32)$$

Тогда, для состояний близких к равновесному ( $f' \approx -\frac{4\rho}{\sigma^2} f$ ) из уравнений (26), (31) получим систему уравнений для  $T$  и температуры флуктуаций  $T_{fe}(n)$ :

$$\frac{dT}{dt} = \sum_n \frac{2}{N} \lambda_n(\Omega_n) (T_{fe}(n) - T), \quad (33)$$

$$\frac{dT_{fe}(n)}{dt} = -2\lambda_n(\Omega_n) (T_{fe}(n) - T).$$

Как и следовало ожидать, система (33) отвечает релаксации в многокомпонентной системе: пучок + флуктуации поля. Из (33) видно, что в процессе релаксации сохраняется полная энергия системы

$$\mathcal{E} = \frac{NT}{2} + \sum_n \frac{T_{fe}(n)}{2}. \quad (34)$$

Поэтому (33) отвечает выравниванию температур пучка и когерентных флуктуаций. Равновесию отвечает равенство температур всех компонент

$$T_{fe}(n) = T. \quad (35)$$

Воспользовавшись (32) можно выразить полную энергию  $\mathcal{E}$  через спектральную плотность флуктуаций поля:

$$\mathcal{E} = \frac{NT}{2} + \frac{1}{2} \sum_n \frac{R_0^2}{n^2 \omega_s} \operatorname{Re} \left[ \frac{n}{iz_n} \right] \int \frac{d\omega}{2\pi} (\delta E_n)_\omega^2. \quad (34a)$$

Второе слагаемое отличается от соответствующих выражений, получающихся в теории плазмы /6/. Это неудивительно, поскольку (34a) определяет энергию пучка, состоящего из дисков без поперечной подвижности. Действительно, с учетом формулы (16), формулу (34a) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{NT}{2} + \frac{1}{2} \sum_n \frac{e^2 \omega_s}{2\bar{u}} \left( \frac{iz_n}{n} \right) \int \frac{d\omega}{2\pi} (\delta p_n)_\omega^2 \\ &= \frac{NT}{2} + \frac{1}{2} \sum_{a,b} U_{a,b}, \end{aligned}$$

где

$$U_{a,b} = \sum_n \frac{e^2 \omega_s}{2\bar{u}} \left( \frac{iz_n}{n} \right) \langle e^{in[\theta_a(t) - \theta_b(t)]} \rangle$$

средняя энергия взаимодействия частиц  $a$  и  $b$  в адиабатическом приближении.

Заметим, что если ввести декремент затухания отдельной частицы  $\lambda_0$ , то, как следует из (33), сумма декрементов когерентных флуктуаций удовлетворяет соотношению:

$$N\lambda_0 = \sum_n \lambda_n(\Omega_n). \quad (36)$$

Это т.н. теорема о сумме декрементов когерентных мод /9/. В работе /9/ эта теорема устанавливалась для пучка с дискретным спектром частот. Система (33) позволяет, таким образом, обобщить теорему на случай, когда разброс частот в пучке не нулевой.

Оценим время релаксации к равновесию. Декременты когерентных колебаний определяются формулой (25). Нужно учесть, что для долгоживущих мод

$$\frac{\partial \varepsilon_n'}{\partial \omega} \approx \frac{2}{\Omega_n}, \quad |\Omega_n| \gg |n\Delta\omega|$$

поэтому вкладом "адиабатического" слагаемого в  $\lambda_0$  можно пренебречь. Если, при этом, в качестве распределения по импульсам взять гауссово распределение, формулу (36) можно переписать в виде:

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{n_{ex}} \frac{\Omega_n^4}{(n\Delta\omega)^3} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{\Omega_n^2}{(n\Delta\omega)^2}\right], \quad (37)$$

где номер граничной гармоники  $n_{ex} = N_{ex}/2$  определяется условием (12). Ниже нас, в основном, будет интересовать случай, когда  $n_{ex}$  велико. При этом, для оценки  $\lambda_0$  можно заменить суммирование по  $n$  интегрированием и, ввиду быстрой сходимости интеграла, распространить интегрирование до бесконечности. Подставив в (37)  $\Omega_n^2$  из (21) и  $(z_n/n)$  из (17), получим:

$$\lambda_0 = \frac{\Delta\omega}{N} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{n_0^2}{2} \left(\frac{N}{N_{th}}\right)^2 \exp\left(-\frac{N}{2N_{th}}\right) + n_a^2 \left(1 - \exp\left[-\frac{n_a^2}{2n_0^2}\right]\right) \right\}. \quad (38)$$

Здесь

$$N_{th} = \Delta\omega^2 \frac{2\tilde{\eta} R_0}{e^2 \omega_s \omega_0'} \operatorname{Re} \left[ \frac{n}{i z_n} \right], \quad n < n_0.$$

число частиц, при котором начинается заметное подавление длинноволновых флуктуаций ( $n \leq n_0$ ) в пучке /8/;  $n_a$  опреде-

ляется соотношением

$$n_a^2 = \frac{\Omega_n^2}{(n\Delta\omega)^2} \Big|_{n=n_0} = \frac{2Ne^2 R_0}{\pi a_s^2 T} \approx n_0^2 \frac{N}{N_{th}}. \quad (39)$$

Параметр  $n_a$  связан с радиусом экранирования полей в пучке ( $r_a \sim R_0/n_a$ ). При достаточно малой продольной температуре пучка  $N \gg N_{th}$  и, соответственно,  $n_a \gg n_0$ . В этих условиях для  $\lambda_0$  получим:

$$\lambda_0 \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{n_a^2 \Delta\omega}{N} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^2}{a_s^2 \epsilon}. \quad (40)$$

Интересно отметить совпадение декремента (40) с предельным значением декремента холодного пучка в методе стохастического охлаждения /10/:

$$\lambda_{стох} \approx \frac{W \Delta\omega}{N}$$

где  $W \omega_s$  - полоса пропускания демпфирующей системы. В методе стохастического охлаждения параметр экранировки взаимодействия частиц пучка определяется величиной  $\bar{W}$ , которая зависит лишь от характеристик цепи обратной связи и не меняется в процессе охлаждения. Наоборот, при кулоновском взаимодействии аналогичная величина  $n_a$  растет, как  $1/(a\Delta\omega)$  при охлаждении пучка.

В отличие от "столкновительных" декрементов (см., например, /1/), декремент в (40) меняется обратно пропорционально разбросу импульсов в пучке  $\epsilon$ . Такая зависимость декремента отвечает силе трения

$$|F_n| \approx e^2/a_s^2$$

не зависящей от скоростей частиц, что характерно для так называемого "сухого" трения.

Отметим также, что в практически интересных случаях, величина декрементов  $\lambda_0$ , вообще говоря, не малы. Так для параметров НАЦ-М /1,2/:  $a \approx 0.01 \text{ см}$ ,  $\epsilon/\rho_s \sim 10^{-6}$  (при токе пучка  $I < 10 \text{ мкА}$ ), формула (40) дает  $\lambda_0 \sim 10^5 \text{ 1/с}$ .

Оценим еще число колебаний  $N_{ex} = 2n_{ex}$  участвующих в релаксации. Оно определяется неравенством (12), которое с уче-

том (40) можно переписать в виде:

$$\frac{e^{x^2/2}}{x^3} \approx \frac{N}{n\alpha}, \quad x = \frac{n\alpha}{n}, \quad n > n_0.$$

При  $N \gg n\alpha$  значение  $N_{ex}$  близко к  $2n\alpha$

$$N_{ex} \approx \frac{2n\alpha}{\sqrt{2 \ln(N/n\alpha)}} \sim 2n\alpha.$$

В обратном предельном случае  $N \ll n\alpha$  неравенство выполняется фактически для всех  $n$ . Из термодинамических соображений можно установить (см. П.6), что в этом случае  $N_{ex}$  не может превышать  $N$ .

С учетом этого, для полной энергии пучка в равновесии получим:

$$\mathcal{E} = \frac{T}{2} (N + N_{ex}) \approx \frac{NT}{2} + \frac{T}{2} \begin{cases} 2n\alpha, & n\alpha \ll N \\ N, & n\alpha \gg N. \end{cases} \quad (41)$$

Поскольку  $\mathcal{E}$  определяется начальными условиями, формула (41) определяет продольную температуру пучка  $T$  в равновесии.

В частности, из формул (33, 34, 41) следует, что если в начальный момент уровень когерентных флуктуаций в пучке сильно превышает тепловой, то переход к равновесию будет сопровождаться увеличением продольной температуры. Это может реализовываться, например, при разгруппировании пучка. Так для пучка, имевшего в начальный момент гауссово распределение по азимуту

$$f(\theta) = \frac{N}{\sqrt{2\pi} \theta_0} \exp\left[-\frac{\theta^2}{2\theta_0^2}\right]$$

величина  $\mathcal{E}$  равна

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{NT_i}{2} + \frac{1}{2} \sum_n \frac{e^2 \omega_s}{2\pi} \operatorname{Re}\left[\frac{i z_n}{n}\right] |\rho_n|^2 \\ &= \frac{N}{2} \left( T_i + \sum_n \frac{Ne^2 \omega_s}{2\pi} \operatorname{Re}\left[\frac{i z_n}{n}\right] \exp[-2n^2 \theta_0^2] \right), \end{aligned}$$

где  $T_i$  - продольная температура пучка в начальный момент. Подставив это выражение в (41) и учитывая, что  $N_{ex} \leq N$  с точностью до множителя порядка  $1+2$ , для температуры в равновесии  $T_f$  получим:

$$T_f = T_i + \sum_n \frac{Ne^2 \omega_s}{2\pi} \operatorname{Re}\left[\frac{i z_n}{n}\right] \exp(-2n^2 \theta_0^2).$$

Для наиболее распространенного случая  $\theta_0 \gg a_1/R_0$  в сумме по  $n$  можно положить  $z_n/n = \text{const}$ . В результате получим:

$$T_f = T_i + \frac{Ne^2 \omega_s}{\sqrt{2\pi} 2\theta_0} \operatorname{Re}\left[\frac{i z_n}{n}\right]$$

или, переходя к разбросам частот ( $T = R_0 \Delta \omega^2 / \omega_0'$ )

$$\begin{aligned} \Delta \omega_f^2 &= \Delta \omega_i^2 + \frac{1}{\theta_0} \frac{Ne^2 \omega_s \omega_0'}{2\pi R_0} \operatorname{Re}\left[\frac{i z_n}{n}\right] \\ &= \Delta \omega_i^2 \left[ 1 + \frac{1}{\theta_0} \frac{\Omega_n^2}{(h\Delta\omega)^2} \right], \end{aligned}$$

где была использована формула (21) для продольного когерентного сдвига  $\Omega_n$  ( $n < n_0$ ). Видно, что в холодных и достаточно коротких  $\theta_0 < \tilde{n}$  пучках

$$\frac{\Omega_n^2}{\theta_0} \gg (n \omega_i)^2 \rightarrow \frac{N}{N_{tr}} \gg \theta_0.$$

эффект нагрева может быть значителен.

В протяженных пучках  $\theta_0 \rightarrow 2\tilde{n}$  доля энергии когерентного движения в  $\mathcal{E}$  уменьшается в  $\theta_g/\theta_0$  ( $\theta_g = 2\tilde{n} - \theta_0$ ) раз. В этом случае условие сильного разогрева пучка при расфазировке можно записать в виде:

$$\frac{N}{N_{tr}} \gg \frac{\theta_0^2}{\theta_g^2} > 1,$$

а сама величина  $T_f$  определяется формулой:

$$T_f = T_i + \frac{\theta_g}{\theta_0} \cdot \frac{Ne^2 \omega_s}{\sqrt{2\pi} 2\theta_0} \operatorname{Re}\left[\frac{i z_n}{n}\right], \quad \theta_g < \theta_0.$$

### 5. Равновесная температура охлажденного пучка

Другим фактором, определяющим равновесную температуру пучка, может быть присутствие на орбите диссипативных сил. Рассмотрим, в этой связи, поведение продольной температуры протонного пучка в накопителе с электронным охлаждением. В этом случае уравнения (33) несколько модифицируются:

$$\frac{dT_{fe}(n)}{dt} = -\mathcal{Q}\lambda_n(\Omega) [T_{fe}(n) - T], \quad (42)$$

$$\frac{dT}{dt} = \sum_n \frac{\mathcal{Q}\lambda_n(\Omega)}{N} [T_{fe}(n) - T] - \lambda T + d + \left(\frac{dT}{dt}\right)_5$$

Здесь  $\lambda$ ,  $d$  — соответственно, декремент затухания и коэффициент диффузии, вносимые установкой с электронным пучком;  $(dT/dt)_5$  описывает изменение продольной температуры за счет быстрых столкновений. Предполагается, что взаимодействие с электронным пучком не приводит к когерентным неустойчивостям.

Система (42) допускает равновесное решение. В адиабатическом пределе  $[(dT/dt)_5 \rightarrow 0]$  равновесию отвечают

$$T_{fe}(n) = T = T_0 = d/\mathcal{Q}\lambda \quad (43)$$

независящая от тока пучка  $I = e\omega_s N/2\pi$  продольная температура. При охлаждении пучка энергия взаимодействия частиц тратится на образование новых (коллективных) степеней свободы.

Если ввиду быстрых столкновений пренебречь нельзя, то, вообще говоря,  $T$  растет с увеличением тока пучка. Оценим, поэтому, какой области параметров отвечает адиабатичность взаимодействия частиц. Напомним, что в адиабатическом пределе взаимодействие частиц заменяется взаимодействием равномерно заряженных дисков, с радиусом  $a_1$  и полным зарядом  $e$ . Представление о дисках с постоянной поперечной энергией  $(M\omega_b^2 a_1^2)$  очевидно будет оправдано, если время сближения двух дисков на среднее расстояние между ними  $\pi/N$  существенно превышает периоды поперечных колебаний:

$$\frac{\pi}{N} \cdot \frac{\omega_b}{\omega_0 R_0 \mathcal{Q}\sigma} > 1,$$

или

$$N < N_{cr} = \frac{\pi^2 \nu_{\perp}}{3(\sigma/\rho_s)} \quad (44)$$

При числе частиц в пучке большем  $N_{cr}$ , условие адиабатичности столкновений нарушается и  $T$  может увеличиваться с ростом  $N$  за счет быстрых столкновений ( $\tau_{cr} \omega_b < 1$ ).

Подавление взаимного рассеяния частиц в охлажденном протонном пучке при малых токах наблюдалось в экспериментах на НАП-М /2/. Для параметров НАП-М ( $\gamma = 1,2$ ,  $(\sigma/\rho_s) \approx 1,4 \cdot 10^{-6}$ ,  $\eta \approx 0,1$ ) формула (44) дает  $N_{cr} \approx 3 \cdot 10^7$ , что совпадает с результатами измерений в /2/ (см. Рис.2.2).

### 6. Условия кристаллизации пучка

Увеличение теплоемкости (формула (41)) и подавление эффекта взаимного рассеяния частиц в холодном пучке говорит о том, что при малых температурах свойства пучка должны приближаться к свойствам кристаллического тела. Последние определяются значительной упорядоченностью пространственного расположения частиц.

Для нерелятивистского пучка тяжелых частиц из-за больших разбросов частот бетатронных колебаний трудно ожидать, что коллективное взаимодействие сможет привести к какой-либо упорядоченности поперечных степеней свободы. Наоборот, разбросы частот обращения малы. При этом, присутствие в равновесии большого числа коллективных колебаний увеличивает корреляции в продольном расположении частиц.

Термодинамические свойства пучка в равновесии определяются статистической суммой. При выполнении условия адиабатичности (44) она имеет вид:

$$\dot{Z}_N = \int d\Gamma'_N f_N = \int \left( \frac{d^3p d^3R_0}{2\pi\hbar} \right)^N \frac{f_N}{N!} \quad (45)$$

Здесь  $2\pi\hbar$  — постоянная Планка;

$$f_N = \exp \left[ - \sum_{a=1}^N \frac{\Delta p_a^2}{2\mu T} - \sum_{a,b} \frac{U_{a,b}}{2T} \right]$$

$N$  - частичная функция распределения,  $\mu^{-1} = R_0 \omega'$  - синхротронная масса частиц;

$$U_{a,b} = \sum_n \frac{e^2 \omega_s}{2\hbar} \left(\frac{iz_n}{n}\right) \exp(in[\theta_a - \theta_b])$$

энергия взаимодействия частиц "а" и "в".

Перепишем  $Z_N$  в виде

$$Z_N = Z_{ug} \exp\left(\sum_n N \xi_n\right) Q_N, \quad (46)$$

где

$$Z_{ug} = \frac{1}{N!} \left(\frac{R_0}{\hbar} \sqrt{2\hbar \mu T}\right)^N$$

статистическая сумма идеального газа,

$$Q_N = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_1 \dots d\theta_N}{(2\pi)^N} \exp\left(-\sum_n \xi_n |p_n|^2\right) \quad (47)$$

т.н. конфигурационный интеграл,  $p_n$  - Фурье гармоника азимутальной плотности пучка /8/:

$$p_n = \sum_{a=1}^N \exp(-in\theta_a), \quad (48)$$

а  $\xi_n$  характеризует интенсивность взаимодействия:

$$\xi_n = \frac{e^2 \omega_s}{4\hbar T} \left(\frac{iz_n}{n}\right) = \frac{1}{2N} \begin{cases} N/N_m, & n < n_0 \\ n_0^2/n^2, & n > n_0. \end{cases}$$

Интересующие нас термодинамические величины выражаются через свободную энергию пучка  $F$  и ее производные по температуре. В свою очередь  $F$  связано с  $Z_N$  соотношением:

$$F = -T \ln Z_N$$

или, с точностью до независящего от температуры слагаемого

$$F = -T \ln Z_{ug} - T \ln Q_N = F_{ug} + \Delta F. \quad (49)$$

Способ вычисления конфигурационного интеграла  $Q_N$  зависит от соотношения  $N$  и  $N_d$ . В области  $N \gg N_d$  для вычисления  $Q_N$  удобно воспользоваться соотношением:

$$\begin{aligned} \langle |p_n|^2 \rangle &= \int \frac{d\Gamma_N}{Z_N} |p_n|^2 f_N = \frac{1}{Q_N} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_1 \dots d\theta_N}{(2\pi)^N} |p_n|^2 \exp\left(-\sum_n \xi_n |p_n|^2\right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial \xi_n} \ln Q_N; \quad Q_N(\xi_n = 0) = 1. \end{aligned} \quad (50)$$

С другой стороны, пользуясь флуктуационно-диссипативной теоремой /11/(см. также /8/), для  $\langle |p_n|^2 \rangle$  можем написать

$$\langle |p_n|^2 \rangle = \frac{N}{1 + N \xi_n}$$

Интегрируя (50), получим:

$$Q_N = \prod_n \frac{1}{1 + N \xi_n},$$

а, соответственно, добавка к свободной энергии за счет взаимодействия есть:

$$\Delta F = T \sum_n \ln(1 + N \xi_n). \quad (51)$$

Ввиду быстрой сходимости, суммирование по  $n$  в (51) можно распространить от  $-\infty$  до  $\infty$ . Выражение (51) отвечает вычислению  $Q_N$  в т.н. "кольцевом приближении", справедливом при  $N \gg N_d$ .

Суммирование по  $n$ , с учетом (17) и при дополнительном условии  $N, N_d \gg N_0$  дает:

$$\Delta F = 2\hbar N_d T \quad (52)$$

Отсюда для энергии, теплоемкости и энтропии пучка, соответственно, получим:

$$E = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{F}{T}\right) = \frac{NT}{2} \left(1 + \frac{2\hbar N_d}{N}\right), \quad (53)$$

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{N}{2} \left(1 + \frac{2\hbar N_d}{N}\right), \quad (54)$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = N \ln \left( \frac{eR_0}{N\hbar} \sqrt{2\bar{\epsilon} \mu T} \right) + \frac{N}{2} \left( 1 - \frac{2\bar{\epsilon} n_d}{N} \right), \quad (\ln e = 1). \quad (55)$$

В этих формулах влияние взаимодействия частиц характеризуется отношением  $2\bar{\epsilon} n_d / N$  — среднего расстояния между частицами  $2\bar{\epsilon} / N$  к радиусу экранирования  $\sim 1/n_d$ . Видно, что приближение  $n_d$  к  $N/2\bar{\epsilon}$  может привести к заметному уменьшению энтропии, а также к удвоению энергии  $\bar{\epsilon}$  и теплоемкости  $C$ :

$$\bar{\epsilon} \rightarrow NT, \quad C \rightarrow N. \quad (56)$$

Такое изменение термодинамических величин связано с появлением значительной упорядоченности относительного движения частиц пучка за счет взаимодействия. Сравнение формул (41) и (53) позволяет уточнить значение среднего числа волн в равновесии  $N_{ex} = 2\bar{\epsilon} n_d$ . С уменьшением температуры  $N_{ex}$  растет, приближаясь к  $N$  (или  $n_d \rightarrow N/2\bar{\epsilon}$ ).

Непосредственно в области  $n_d \gg N$  формулы (51+55) не применимы. Однако здесь значение  $Q_N$  можно вычислять, предполагая близость  $\theta_a$  к "узловым" точкам  $2\bar{\epsilon} a / N$ :

$$\rho_n \approx -in \sum_{a=1}^N \zeta_a \exp\left(-\frac{2\bar{\epsilon} i a n}{N}\right), \quad \theta_a = \frac{2\bar{\epsilon} a}{N} + \zeta_a, \quad |\zeta_a| \ll \frac{2\bar{\epsilon}}{N}. \quad (57)$$

Подставив (57) в  $f_N$ , получим

$$\exp\left(-\sum_n \xi_n |\rho_n|^2\right) = \exp\left(-\sum_n \xi_n n^2 \sum_{a,b} \zeta_a \zeta_b \exp\left[\frac{2\bar{\epsilon} i n}{N} (b-a)\right]\right).$$

С точностью до величин, порядка  $(n/N) \ll 1$ , последнее выражение равно  $(N \xi_n \rightarrow n_d^2 / 2n^2)$ :

$$\exp\left[-\frac{n_d^2}{2} \sum_{a=1}^N \zeta_a^2\right].$$

Это означает, что в области  $n_d \gg N$   $N$ -частичная функция распределения имеет вид:

$$f_N = \exp\left[-\sum_{a=1}^N \frac{\Delta \rho_a^2}{2\mu T} - \frac{n_d^2}{2} \sum_{a=1}^N \left(\theta_a - \frac{2\bar{\epsilon} a}{N}\right)^2\right], \quad (58)$$

чему отвечает локализация частиц вблизи узловых точек  $2\bar{\epsilon} a / N$  с дисперсией

$$\overline{\zeta_a^2} = \frac{1}{n_d^2} \ll \left(\frac{2\bar{\epsilon}}{N}\right)^2 \Big|_{n_d \gg N} \quad (59)$$

Как видно из (57), число нормальных колебаний в этом состоянии в точности равно  $N$ .

Вычисление  $Z_N$  с распределением (58) не представляет труда<sup>ж)</sup>. В результате для термодинамических величин пучка получаются хорошо известные выражения /II/:

$$F = -N \ln \frac{T}{\hbar \omega_n}, \quad S = N \left[ \ln \frac{T}{\hbar \omega_n} + 1 \right], \quad (60)$$

$$\bar{\epsilon} = NT \quad ; \quad C = N,$$

совпадающие с термодинамическими величинами кристаллического тела при высоких температурах ( $T \gg \hbar \omega_n$ ,  $\omega_n$  — ленгмюровская частота пучка):

Условие

$$\frac{2\bar{\epsilon} n_d}{N} \geq 1 \quad (61)$$

является, таким образом, условием перехода пучка в кристаллическое состояние. То, что такой переход не сопровождается фазовым переходом, не удивительно и связано с дальнедействующим характером взаимодействия частиц. Благодаря дальнедействию, при разумных температурах состояние пучка является смесью упорядоченной и аморфной фаз. Переходу в чисто аморфное состояние

ж) Нужно, однако, иметь в виду, что в связи с регулярным расположением частиц (дисков), суммирование по физически различным состояниям отвечает интегрирование по всем фазовым координатам без деления  $d\Gamma_N$  на  $N!$  /II/.

отвечала бы столь высокая температура  $T$ , чтобы коллективные колебания в пучке могли затухать на расстояниях, порядка межчастичного  $\lambda_{ii}/N$ .

Наоборот, при малых температурах (6I) пучок переходит во вполне упорядоченное, кристаллическое состояние. Смысл условия (6I) прост. Оно эквивалентно условию того, чтобы частица с средней кинетической энергией  $T/2$  не могла преодолеть потенциальный барьер высотой

$$\Delta U = \frac{2e^2}{a_1^2} \frac{\pi}{N}$$

равной энергии взаимодействия двух дисков с зарядом  $e$  на расстоянии  $\pi/N$ .

Для параметров НАП-М /1,2/ условие (6I) выполняется при

$$\frac{\sigma}{P_s} \leq \frac{10^{-3}}{\sqrt{N}}$$

Поэтому кристаллическое состояние, вообще говоря, может наблюдаться при малом токе пучка ( $N \lesssim 10^6$ ).

## 7. Заключение

Резюмируем некоторые результаты работы. При выполнении условия адиабатичности (44), то-есть при достаточно низких температурах, релаксация энергетического распределения азимутально-однородного пучка с энергией, ниже критической энергии накопителя, обусловлена выравниванием температур частиц и когерентных флуктуаций пучка. Процесс описывается системой уравнений (33), аналогичных уравнениям релаксации в многокомпонентных системах. Время достижения равновесия

$$\frac{1}{\tilde{\nu}_p} \sim \frac{n_a^2 \Delta \omega}{N} = \frac{e^2}{a_1^2 \sigma}$$

определяется радиусом экранирования  $\sim 1/n_a$  в пучке, а  $N/\tilde{\nu}_p$  совпадает с суммой декрементов продольных когерентных колебаний пучка с разбросом частот  $\Delta \omega$ .

В адиабатическом пределе (44) равновесию отвечает равенство температур всех компонент. В неохлаждаемом пучке равновесная температура определяется начальным значением полной энер-

гии пучка (4I), то-есть начальной температурой частиц и начальной энергией коллективных флуктуаций. Если последняя велика, релаксация приводит к нагреву пучка. Такая ситуация может, например, реализовываться при расфазировке первоначально сгруппированного, холодного пучка:

$$T_f \approx T_i + \frac{Ne^2 \omega_f}{\sqrt{2\pi} 2\theta_0} \operatorname{Re} \left( \frac{iz_n}{h} \right) \Big|_{n < n_0} \quad (62)$$

где  $T_i$ ,  $2R\theta_0$  соответственно, начальная температура и длина пучка ( $n_0 \theta_0 \gg 1$ ).

Равновесная температура охлаждаемого пучка определяется "холодильником" и в адиабатическом пределе (44) не зависит от тока пучка. Нарушение условия адиабатичности  $N > N_{c2}$  (44) приводит к росту продольной температуры пучка с током за счет быстрых столкновений частиц. Описанное поведение продольной температуры пучка с током наблюдалось в экспериментах на НАП-М /2/.

Наконец, благодаря дальнему действию равновесное состояние характеризуется значительным упорядочением движения частиц пучка. Степень упорядочения увеличивается при уменьшении температуры  $T$ . При выполнении (6I) пучок переходит во вполне упорядоченное (кристаллическое) состояние, когда коллективные поля препятствуют заметному удалению плоскостей бетатронных колебаний частиц от узловых точек  $2\pi a/N$ ,  $a = 1, \dots, N$ .

Авторы благодарны В.В.Пархомчуку за многочисленные критические замечания и советы, а также В.И.Кокоулину, В.А.Лебедеву и Б.Н.Сухина за обсуждение затронутых здесь вопросов.



Приложение I

Приведем преобразование от уравнения (I9) к более простому уравнению (23) /6/. Возможность такого упрощения связана с сильным отличием времени релаксации  $f$  и  $\delta E_n \omega$  и периодов когерентных колебаний  $T_n^{-1} = \omega_n \approx n\omega_s + \Delta\omega_n$

$$\tilde{\tau}_p \omega_n \gg 1 \quad (I.1)$$

При выполнении (I.1) решение (I9) можно искать в виде

$$\delta E_n(t) = \delta E_n(t) e^{-i\omega_n t} \quad (I.2)$$

где  $\omega_n$  является корнем дисперсионного уравнения

$$\epsilon_n'(\omega) = 0, \quad (I.3)$$

а амплитуда  $\delta E_n(t)$  меняется на временах, порядка  $\tilde{\tau}_p$ .

Уравнение (I9)

$$\int_0^{\infty} d\tilde{t}' e^{i\omega \tilde{t}'} \delta E_n(t+\tilde{t}') \epsilon_n(\omega, t+\tilde{t}') = \delta B_{n\omega}(t), \quad (I.4)$$

где  $\epsilon_n(\omega)$  определяется (20), а

$$\delta B_{n\omega}(t) = \frac{i\epsilon\omega_s Z_n}{2\pi R_0} \int \frac{d\alpha p \delta D_n(\alpha p, t)}{\omega - n\omega_0(p)},$$

перейдем в виде

$$\begin{aligned} \delta B_n(t+\tilde{t}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \delta B_{n\omega}(t) e^{-i\omega \tilde{t}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^{\infty} d\tilde{t}' e^{i\omega \tilde{t}'} \delta E_n(t+\tilde{t}') \epsilon_n(\omega, t+\tilde{t}'). \end{aligned} \quad (I.5)$$

В  $\delta E_n$  выделим быструю (с частотами  $\omega_n$ ) зависимость от времени, а "медленные" аргументы запишем в виде  $t+\tilde{t}' = t+\tilde{t} + \Delta\tilde{t}'$

где  $\Delta\tilde{t}' = \tilde{t}' - \tilde{t}$ :

$$\delta B_n(t+\tilde{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^{\infty} d\tilde{t}' e^{i\omega \Delta\tilde{t}'} \delta E_n(t+\tilde{t}+\Delta\tilde{t}', t+\tilde{t}') \epsilon_n(\omega, t+\tilde{t}+\Delta\tilde{t}').$$

Поскольку решение ищется близким к  $e^{-i\omega_n t}$ , интеграл по  $\tilde{t}'$  в основном определяется интервалом  $\tilde{t}', \Delta\tilde{t}'/\omega_n \ll \tilde{\tau}_p$ . Поэтому в подынтегральном выражении можно разложить медленные зависимости в ряд по  $\Delta\tilde{t}'$ . Ограничиваясь линейным приближением, получим

$$\begin{aligned} \delta B_n(t+\tilde{t}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^{\infty} d\tilde{t}' e^{i\omega \Delta\tilde{t}'} \left[ \delta E_n(t+\tilde{t}, t+\tilde{t}') \epsilon_n(\omega, t+\tilde{t}) + \right. \\ &\quad \left. + \Delta\tilde{t}' \frac{\partial}{\partial(t+\tilde{t})} \left\{ \delta E_n(t+\tilde{t}, t+\tilde{t}') \epsilon_n(\omega, t+\tilde{t}) \right\} \right]. \end{aligned}$$

В последнем выражении заменим

$$\Delta\tilde{t}' e^{i\omega \Delta\tilde{t}'} = -i \frac{\partial}{\partial\omega} e^{i\omega \Delta\tilde{t}'}$$

и проведем интегрирование по частям по  $\omega$ . В результате получим

$$\begin{aligned} \delta B_n(t+\tilde{t}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^{\infty} d\tilde{t}' e^{i\omega \Delta\tilde{t}'} \left[ \delta E_n(t+\tilde{t}, t+\tilde{t}') \epsilon_n(\omega, t+\tilde{t}) + \right. \\ &\quad \left. + i \frac{\partial}{\partial(t+\tilde{t})} \left\{ \delta E_n(t+\tilde{t}, t+\tilde{t}') \frac{\partial \epsilon_n(\omega, t+\tilde{t})}{\partial\omega} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (I.6)$$

Введем теперь Фурье амплитуды

$$\delta E_{n\omega}(t+\tilde{t}, t) = \int_0^{\infty} d\tilde{t}' e^{i\omega \tilde{t}'} \delta E_n(t+\tilde{t}, t+\tilde{t}')$$

и, соответственно,

$$\delta B_{n\omega}(t+\tilde{t}, t) = \int_0^{\infty} d\tilde{t}' e^{i\omega \tilde{t}'} \delta B_n(t+\tilde{t}, t+\tilde{t}')$$

сохраняющие медленную зависимость от времени. Тогда (I.6) эквивалентно уравнению

$$\begin{aligned} \delta B_{n\omega}(t+\tilde{t}, t) &= \epsilon_n(\omega, t+\tilde{t}) \delta E_{n\omega}(t+\tilde{t}, t) + \\ &\quad + i \frac{\partial}{\partial(t+\tilde{t})} \left[ \delta E_{n\omega}(t+\tilde{t}, t) \frac{\partial \epsilon_n(\omega, t+\tilde{t})}{\partial\omega} \right]. \end{aligned} \quad (I.7)$$

Значение  $\tilde{\gamma}$  в (I.7) фактически не может сильно превышать  $1/\omega_n$ . Поэтому можно провести разложение (I.7) по  $\tilde{\gamma}$ . В первом приближении ( $\tilde{\gamma} = 0$ ) (I.7) переходит в уравнение (23).

## Приложение 2

Получим уравнение (3I). Исходное уравнение (30) имеет вид

$$\frac{d\theta^2}{dt} = \frac{2}{N} \sum_n \int \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho \rho \lim_{\Delta \rightarrow 0} \text{Re} \langle e^{\delta E_n^*} \delta \mathcal{D}_{n, \omega+i\Delta} \rangle \quad (2.1)$$

Подставив сюда  $\delta \mathcal{D}_{n\omega}$  из (28), получим

$$\begin{aligned} \frac{d\theta^2}{dt} = & 2 \sum_n \int \frac{d\omega}{2\pi} \left\{ \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho \rho \lim_{\Delta \rightarrow 0} \text{Re} \left\langle \frac{ie^{\delta E_n^*} \delta \mathcal{D}_n(\Delta\rho, t)}{\omega - n\omega_0(\rho) + i\Delta} \right\rangle + \right. \\ & + (\delta E_n)_\omega^2 \left[ \frac{e^2 \Delta \omega_n \varepsilon_n''}{\Omega_n^2} + \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{e^2 \Delta \omega_n}{\Omega_n^2} \frac{\partial \varepsilon_n'}{\partial t} \right) \right] + \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\delta E_n)_\omega^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{e^2 \Delta \omega_n}{\Omega_n^2} [\varepsilon_n' - 1] \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь было использовано определение  $\varepsilon_n(\omega)$  (20),  $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$ .  
Первое слагаемое в (2.2) с точностью до множителя

$$-\frac{1}{2} \frac{\Delta \omega_n}{\Omega_n^2} \frac{\partial \varepsilon_n'}{\partial \omega}$$

совпадает с правой частью уравнения (24). Поэтому мы можем переписать его в виде

$$-\frac{\Delta \omega_n}{\Omega_n^2} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_n'}{\partial \omega} \frac{\partial (\delta E_n)_\omega^2}{\partial t} + \left( \varepsilon_n'' + \frac{\partial^2 \varepsilon_n'}{\partial \omega \partial t} \right) (\delta E_n)_\omega^2 \right\}$$

В результате подстановки этого выражения в (2.2) получим

$$\frac{d\theta^2}{dt} = 2 \sum_n \int \frac{d\omega}{2\pi} \left\{ \frac{e^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\delta E_n)_\omega^2 \cdot \frac{\varepsilon_n' - 1}{\Omega_n^2} + \frac{e^2}{\Omega_n^2} \frac{\partial \varepsilon_n'}{\partial t} (\delta E_n)_\omega^2 \right\}. \quad (2.3)$$

Вблизи равновесия  $(\delta E_n)_\omega^2 \sim \delta[\varepsilon_n'(\omega)]$ , поэтому уравнение (2.3) переходит в уравнение (3I):

$$\frac{d\theta^2}{dt} = - \sum_n \frac{e^2}{\Omega_n^2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\delta E_n)_\omega^2. \quad (2.4)$$

## Л и т е р а т у р а

- I. Н.С.Диканский и др. Изучение быстрого электронного охлаждения. Тр. VI Всесоюзн. сов. по уск. зар. част. I, с.99, Дубна 1978, Дубна 1979; Препринт ИЯФ СО АН СССР № 79-56, Новосибирск, 1979.
2. Е.Н.Дементьев и др. ЖТФ 50, № 8, 1717, 1980.
3. *A. Piwinski. Proc. of the IX Intern. Conf. on High Energy Accelerat. p 405, Stanford 1974; J. D. Bjorken, S. K. Mtingwa Part. Acc. 13, p 115+143, 1983.*
4. В.В.Пархомчук, Д.В.Пестриков. Энергетический разброс тяжелых частиц в накопителях с электронным охлаждением. Препринт ИЯФ СО АН СССР № 77-31, Новосибирск 1977; Н.С.Диканский, Д.В.Пестриков. О столкновительном нагреве пучка в накопителе. Препринт ИЯФ СО АН СССР № 83-112, Новосибирск, 1983.
5. В.И.Куделайнен, В.А.Лебедев и др. ЖЭТФ, 82, № 6, с.2056, 1982.
6. Ю.Л.Климонтович. Статистическая теория неравновесных процессов в плазме. МГУ: 1964, 281с.
7. *Ya. S. Derbenev, A. N. Skrinsky. On High Energy Electron Cooling. Препринт ИЯФ СО АН СССР № 79-87, Новосибирск, 1979.*
8. В.В.Пархомчук, Д.В.Пестриков. ЖТФ, 50, № 7, 1411, 1980.
9. Я.С.Дербенев, Н.С.Диканский, Д.В.Пестриков. Тр. II Всесоюзн. сов. по уск. зар. част. Москва II-18 ноября 1970 г., Москва: Наука 1972, 2, с.62.
10. Я.С.Дербенев, С.А.Хейфец. ЖТФ, 49, № 2, 352, 1979; В.В.Пархомчук, Д.В.Пестриков. Численное моделирование стохастического охлаждения и накопления. Препринт ИЯФ СО АН СССР № 80-170, Новосибирск, 1980.
11. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Статистическая физика. Москва: Наука, 1964, 567с.

Н.С. Диканский, Д.В.Пестриков

ВЛИЯНИЕ ЭФФЕКТОВ УПОРЯДОЧЕНИЯ НА РЕЛАКСАЦИЮ  
НЕСГРУППИРОВАННОГО ХОЛОДНОГО ПУЧКА В НАКОПИТЕЛЕ

Препринт  
№ 84-48

Работа поступила 30 марта 1984г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов

Подписано к печати 17.04.84г. МН 04242

Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.2,2 печ.л., 1,8 учетно-изд.л.

Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 48

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90