

Б.94

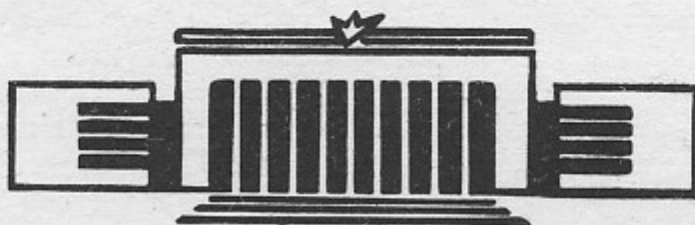
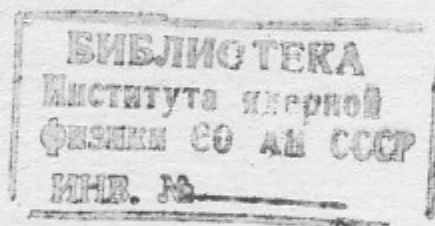


ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

А.П.Бухвостов, Э.А.Кураев, Л.Н.Липатов,  
Г.В.Фролов

УРАВНЕНИЯ ЭВОЛЮЦИИ  
ДЛЯ КВАЗИПАРТОННЫХ ОПЕРАТОРОВ

ПРЕПРИНТ 85-8



НОВОСИБИРСК

## А Н Н О Т А Ц И Я

Рассмотрен класс операторов произвольного твиста (квазипартонных), матричные элементы которых выражаются через партонные корреляторы. Отклонение от бёркенского скейлинга корреляторов описывается системой интегральных уравнений, имеющей вид уравнений Фаддеева. Детально изучены ядра уравнений, описывающие парное взаимодействие частиц в различных состояниях по спиральности, цвету и аромату. Показано в частности, что они могут быть диагонализированы благодаря свойству конформной инвариантности.

Развитый метод продемонстрирован для задачи вычисления матрицы аномальных размерностей операторов твиста 3.

Для описания жестких процессов в квантовой хромодинамике (КХД) в настоящее время используются два подхода, дополняющих в значительной степени друг друга. Первый подход основан на использовании аналитических свойств амплитуд рассеяния и операторного разложения Вильсона [1]. В частности, в этом подходе моменты структурных функций  $W_{1,2}(x)$ , через которые выражается сечение глубоко-неупругого  $eP$  рассеяния, могут быть представлены в виде произведения матричных элементов локальных операторов и коэффициентных функций, возникающих при разложении  $T$ -произведения электромагнитных токов на световом конусе. В области достаточно больших виртуальностей  $Q^2$  обмениваемых фотонов главный вклад дают операторы Твиста  $t = d - n = 2$ , имеющие при данном лоренц-спине  $n$  минимально возможную каноническую размерность  $d$ . Операторы более высокого Твиста  $t = 4, 6, \dots$  приводят к вкладам относительного порядка  $(m_h^2/Q^2)^{(t-2)/2}$ , существенным в области не очень больших значений  $Q^2$  [2].

Другой подход восходит к идеям партонной модели [3] и основан на представлении структурных функций в виде суммы сечений рассеяния виртуального фотона на отдельных партонах. При этом достаточно задать плотность числа кварков  $D_h^q(x)$ , как функцию их доли энергии  $x$ . Формулы партонной модели могут быть обоснованы в рамках операторного разложения только для случая, когда твист возникающих локальных операторов равен 2. Для вычисления матричных элементов операторов с  $t > 2$  помимо плотностей числа партонов приходится вводить более общие величины — партонные корреляторы, выражающиеся через произведение партонных волновых функций начального и конечного адронов с разным числом партонов. Зависимость партонных распределений  $D_h^q(x)$  от  $Q^2$  определяется уравнениями эволюции [4, 5], представляющими собой соотношения баланса для числа партонов в адроне при изменении ультрафиолетового параметра обрезания в интегралах по поперечным импульсам [4]. В данной работе мы построим в ГЛП уравнения эволюции для партонных корреляторов, зависящих от долей энергии  $x_i$  и спиральностей  $\lambda_i = \pm s$  кварков и глюонов. Как будет показано, эти уравнения имеют вид уравнений Фаддеева для  $t$  частиц с парным взаимодействием между ними. С помощью введенных корреляторов могут быть вычислены матричные элементы достаточно широкого класса операторов произвольного Твиста. Эти операторы мы называем квазипартонными, так как они являются естественным обобщением тех операторов, матричные элементы которых

выражаются через плотности числа партонов. Интегральные ядра построенных уравнений эволюции универсальны. Они могут быть диагонализированы с использованием конформной инвариантности. Собственные функции совпадают с матричными элементами квазипартонных операторов твиста 2, а собственные значения дают их матрицу аномальных размерностей. Имеется много соотношений между аномальными размерностями в КХД, следующих из соображений суперсимметрии. В качестве примера применения развитого формализма вычисляется матрица аномальных размерностей для операторов твиста 3, которые возникают при описании глубоко-неупругого рассеяния поляризованных электронов на поляризованной мишени. При этом результаты совпадают с полученными ранее [6] несколько менее общим методом.

## 2. Квазипартонные операторы (КПО)

Как известно [7], использование гейзенберговских уравнений движения для глюонных  $G_{\mu\nu}$  и кварковых  $\psi, \bar{\psi}$  полей, а также соображений, следующих из лоренц-ковариантности, позволяет получать ряд соотношений между матричными элементами операторов высокого твиста. Поэтому выбор независимой системы этих операторов не является однозначной процедурой.

В общем случае матричные элементы операторов высокого твиста не выражаются через функции  $\mathcal{D}_h(x)$ . Однако, можно попытаться найти такую независимую систему операторов, для которой матричные элементы записываются, по крайней мере, в виде произведения соответствующих матричных элементов, вычисленных на свободных кварках и глюонах и величин, характеризующих распределение этих кварков и глюонов в адронах. Примером подобной системы является так называемый поперечный базис [8] для операторов твиста 4.

Важно отметить, однако, что требование реальности кварков и глюонов при вычислении матричных элементов, вообще говоря, не фиксирует однозначно набор используемых операторов. Естественным с точки зрения обобщения наивной партонной модели выглядит дополнительное условие на класс рассматриваемых операторов, которое можно сформулировать следующим образом: матричные элементы этих операторов по партонным состояниям в древесном приближении не должны зависеть от сильной константы связи  $g$ . При этом условии в соответствии с духом партонной модели партонны могут рассматриваться как невзаимодействующие частицы, а нетри-

виальность матричных элементов операторов по адронным состояниям возникает как результат специфического устройства волновой функции адронов в КХД. Операторы, подчиняющиеся двум указанным выше требованиям, мы будем называть квазипартонными операторами (КПО). Ниже мы построим их в явном виде и обсудим их перенормировочные свойства.

Заметим, прежде всего, что для того, чтобы в КХД можно было ввести волновые функции адронов, квадраты которых имеют обычную вероятностную интерпретацию, необходимо использовать физическую калибровку вектор-потенциалов глюонного поля  $A_\mu$ . В качестве такой калибровки удобно выбрать аксиальную калибровку вида [4].

$$A_\mu \equiv \frac{q'_\mu}{\rho' q'} A_\mu = 0, \quad q'^2 = \rho'^2 = 0, \quad (1)$$

где  $q'$  и  $\rho'$  — некоторые светоподобные вектора, представляющие собой линейную комбинацию импульсов внешних частиц. Например, в проблеме вычисления электромагнитного форм-фактора адрона [9], где задача сводится к определению матричных элементов локальных операторов между вакуумом и адроном с импульсом  $P$  и массой  $m$ , эти вектора строятся следующим образом:

$$q' = q - \frac{q^2}{2\rho'q} \rho' \approx q - \frac{q^2}{2\rho q} \rho, \quad (2)$$

$$\rho' = \rho - \frac{m^2}{2\rho q'} q' \approx \rho,$$

где  $q$  — импульс виртуального внешнего фотона ( $-q^2 \equiv Q^2 \gg m^2$ ). В общем случае мы будем считать, что  $P$  — суммарный импульс адронов в начальном состоянии (тогда  $m^2$  по определению равно  $\rho^2$ ), а  $q$  — некоторый внешний импульс для данной задачи, связанный с виртуальными импульсами промежуточных фотонов (или  $W$  и  $Z$  бозонов).

В калибровке (1) числитель глюонного пропагатора может быть записан в виде:

$$-(\delta_{\mu\nu} + \frac{k_\mu q'_\nu + k_\nu q'_\mu}{kq'}) = P_{\mu\nu}(k) + \frac{q'_\mu q'_\nu}{(kq')^2} k^2, \quad (3)$$

где  $P_{\mu\nu}(\vec{k})$  — проектор на физические вектора состояния реального глюона с импульсом  $\vec{k}$  и спиральностями  $\lambda = \pm 1$ :

$$P_{\mu\nu}(\vec{k}) = \sum_{\lambda=\pm} e_{\mu}^{\lambda}(\vec{k}) e_{\nu}^{*\lambda}(\vec{k}), \quad \vec{k} = k - \frac{k^2}{2kq'} q', \quad \vec{k}^2 = 0. \quad (4)$$

Формулы, аналогичные (3) и (4) имеют место и для числителя кваркового пропагатора (в дальнейшем мы пренебрегаем массой кварка)

$$\hat{K} = \hat{\vec{k}} + \frac{k^2}{2kq'} \hat{q}', \quad \hat{\vec{k}} = \sum_{\lambda=\pm} u_{\lambda}(\vec{k}) \bar{u}_{\lambda}(\vec{k}) \theta(\vec{k}_0) - \sum_{\lambda=\pm} v_{\lambda}(-\vec{k}) \cdot \bar{v}_{\lambda}(-\vec{k}) \theta(-\vec{k}_0), \quad (5)$$

где  $\vec{k}$  означает трехмерный импульс кварка или антикварка.

Рассмотрим локальный бесцветный оператор  $O_{g_1 \dots g_2}(x)$ , построенный из некоторого числа полей  $G_{\mu\nu}$ ,  $\Psi$ ,  $\bar{\Psi}$  и ковариантных производных  $D_g$ . Твист такого оператора  $t$  не меньше числа полей  $\ell$ . Так как аномальные размерности в силу релятивистской инвариантности одинаковы для всех тензорных компонент, можно каким-то способом зафиксировать эти компоненты. Мы воспользуемся этой возможностью ниже.

Если потребовать, чтобы партоны, непосредственно взаимодействующие с токами, отвечающими операторам  $O_{g_1 \dots g_2}(x)$ , могли считаться лежащими на массовой поверхности (I-е условие на КПО), то из формул (3) и (5) заключаем, что соответствующие операторы должны быть инвариантны относительно замен:

$$\begin{aligned} \Psi &\rightarrow \Psi + \chi, & \bar{\Psi} &\rightarrow \bar{\Psi} + \bar{\chi}, \\ A_{\mu} &\rightarrow A_{\mu} + q'_{\mu} \varphi, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\chi$  и  $\varphi$  — некоторые спинорные и скалярные функции.

Инвариантность (6) имеет место <sup>если</sup> калибровочно-инвариантный оператор  $O$  строится из следующих структур

$$\chi \cdot \Psi, \bar{\Psi} \chi, G_{\mu\nu}^{\perp}, G_{\mu}^{\perp}, D_g^{\perp}, D. \quad (7)$$

(точка означает свертку с вектором  $q'_{\mu}/\rho q'$ , см (I)).

Наложим теперь второе требование — независимость матричных элементов от константы связи  $g$ . Тогда вместо (7) мы получаем более узкий набор возможных элементов для построения КПО.

$$\chi \cdot \Psi, \bar{\Psi} \chi, G_{\mu\nu}^{\perp} = \partial_{\mu} A_{\nu}^{\perp}, D = \partial. \quad (8)$$

Примерами таких операторов являются следующие

$$\bar{\Psi} \chi (i\partial)^n \Psi, \bar{\Psi} \chi \gamma_5 (i\partial)^n \Psi, \bar{\Psi} \chi \gamma_5^{\perp} (i\partial)^n \Psi, \quad (9)$$

$$(-i\partial_{\rho} A_{\sigma}^{\perp}) (i\partial)^{n+1} A_{\rho}^{\perp}, \varepsilon_{\rho_1 \rho_2}^{\perp} (-i\partial_{\rho_1} A_{\rho_2}^{\perp}) (i\partial)^{n+1} A_{\rho_2}^{\perp}, \quad (9a)$$

$$S_{\rho_1 \rho_2} (-i\partial_{\rho_1} A_{\rho_2}^{\perp}) (i\partial)^{n+1} A_{\rho_2}^{\perp} \quad (9a)$$

для твиста 2, где  $S$  означает операцию симметризации по указанным ниже индексам  $\rho_1, \rho_2$  и выделения шпуров,  $\varepsilon_{\rho_1 \rho_2}^{\perp}$  — единственный антисимметричный тензор ( $\varepsilon_{12} = 1$ ),

$$((-i\partial)^n \bar{\Psi}) \chi \gamma_5 (i\partial) A_{\sigma} (i\partial)^{n+2} \Psi, \quad (10)$$

$$f_{abc} \varepsilon_{\rho_1 \rho_2}^{\perp} ((-i\partial)^n A_{\rho_1}^a) i\partial_{\sigma} A_{\rho}^b (i\partial)^{n+2} A_{\rho_2}^c \quad (10)$$

для твиста 3, где  $f_{abc}$  — структурные постоянные калибровочной группы

$$\begin{aligned} &((-i\partial)^n \bar{\Psi}) \chi ((i\partial)^{n+2} \Psi) ((i\partial)^{n+3} \bar{\Psi}) \chi ((i\partial)^{n+4} \Psi), \\ &((i\partial)^n A_{\rho}^{\perp}) ((i\partial)^{n+2} A_{\rho}^{\perp}) ((i\partial)^{n+3} A_{\sigma}^{\perp}) ((i\partial)^{n+4} A_{\sigma}^{\perp}) \end{aligned} \quad (11)$$

для твиста 4. Операторы (9) возникают в рамках операторного разложения при описании структурных функций  $F_1, F_2, g_1$ , а операторы (10) — структурной функции  $g_2$  [6]. Операторы (11) необходимы для вычисления поправок  $\sim m^2/Q^2$  к сечениям глубоко неупругих лептон-адронных процессов [7].

Ниже мы обсудим основные свойства выделенного нами класса операторов и построим уравнения эволюции для матричных элементов от этих операторов по адронным состояниям.

### 3. Свойства квазипартонных операторов

Как видно из примеров, приведенных выше (см. (9)), твист  $t$  оператора, определенной тензорной компонентой которого является КПО, совпадает с полным числом  $\ell$  составляющих его полей:

$$t = \ell. \quad (12)$$

Это свойство в общем случае вытекает из следующих соображений. С помощью соотношений Фирца все фермионные поля  $\psi, \bar{\psi}$  (кроме, может быть, одного) можно объединить в пары следующих типов по лоренцовой структуре:

$$\bar{\psi}(\vec{a})^{n_1} \gamma(\vec{a})^{n_2} \psi, \quad \bar{\psi}(\vec{a})^{n_1} \gamma_5(\vec{a})^{n_2} \psi, \quad \bar{\psi}(\vec{a})^{n_1} \sigma_{\lambda}^{\pm}(\vec{a})^{n_2} \psi, \quad (13)$$

$$\bar{\psi}(\vec{a})^{n_1} \sigma_{\lambda}^{\pm} \gamma_5(\vec{a})^{n_2} \psi$$

для  $\bar{\psi}\psi$  системы,

$$\psi^T c(\vec{a})^{n_1} \gamma(\vec{a})^{n_2} \psi, \quad \psi^T c(\vec{a})^{n_1} \gamma_5(\vec{a})^{n_2} \psi, \quad (14)$$

$$\psi^T c(\vec{a})^{n_1} \sigma_{\lambda}^{\pm}(\vec{a})^{n_2} \psi, \quad \psi^T c(\vec{a})^{n_1} \sigma_{\lambda}^{\pm} \gamma_5(\vec{a})^{n_2} \psi$$

для  $\psi\psi$  системы, а также аналогичной комбинации в случае пары  $\bar{\psi}\bar{\psi}$ . Хотя операторы (13), (14) могут иметь ненулевые квантовые числа по аромату и цвету, все они обладают твистом  $t = \ell = 2$ . В случае, когда общее число операторов  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  нечетно, оставшийся после разбиения на пары множитель  $\gamma\psi$  или  $\bar{\psi}\gamma$  имеет твист  $t = \ell = 1$ . Далее, глюонные поля также могут быть объединены по аналогии с (13) в пары вида (опуская цветовые индексы):

$$((\vec{a})^{n_1} \tilde{G}_{\rho}) ((\vec{a})^{n_2} \tilde{G}_{\rho}), \quad ((\vec{a})^{n_1} \tilde{G}_{\rho}) ((\vec{a})^{n_2} \tilde{G}_{\rho}), \quad (15)$$

$$\sum_{\rho\sigma} ((\vec{a})^{n_1} \tilde{G}_{\rho}) ((\vec{a})^{n_2} \tilde{G}_{\sigma}), \quad \sum_{\rho\sigma} ((\vec{a})^{n_1} \tilde{G}_{\rho}) ((\vec{a})^{n_2} \tilde{G}_{\sigma}),$$

где  $\tilde{G}_{\nu\rho}$  - дуальный тензор напряженности глюонного поля. Все операторы (15) имеют твист  $t = \ell = 2$ . В случае, когда число глюонных полей нечетно, оставшееся необъединенным в пары поле входит в виде  $(\vec{a})^n \tilde{G}_{\rho}$ , то есть вносит твист  $t = \ell = 1$ . Посколь-

ку полный тензор, составленный из элементов (13)-(15), должен быть симметричным и бесшпуровым по максимально возможному числу индексов (которые заменены на точки), его твист (как и лоренц-спин) складывается аддитивно из твистов (спинов) составляющих его элементов. Поэтому соотношение (12) выполняется для любого КПО.

Исходя из (8) КПО общего вида может быть записан в форме:

$$O_{\dots}^{\{z\}} = \Gamma_{\beta_1 \dots \beta_\ell} \prod_{j=1}^{\ell} \left[ (i\vec{a})^{n_j + 2s_j - 1} (\varphi^{z_j})_{\beta_j} \right], \quad (16)$$

где поле  $\varphi^{z_j}$  равно  $\psi, \bar{\psi}$  или  $A, \rho_j$  в соответствии с этим является спинорным или векторным индексом,  $\Gamma$  - некоторая числовая матрица;  $s_j$  - спин  $j$ -й частицы;  $\{z\}$  означает набор индексов  $z_1, \dots, z_\ell$ , которые, помимо сорта частиц, нумеруют также их цвета и ароматы.

Рассмотрим теперь матричные элементы КПО между адронными состояниями. Заметим, что это могут быть матричные элементы вида

$$\langle h' | O | h \rangle \quad (17)$$

как в случае глубоко-неупругого лептон-адронного рассеяния, или более простые

$$\langle 0 | O | h \rangle \quad (18)$$

возникающие в задаче вычисления формфактора адрона ( $\langle 0 |$  означает вакуумное состояние).

Если перейти к представлению взаимодействия и использовать судаковское разложение импульсов по светоподобным векторам  $\rho', q'$ :

$$K = \alpha \rho' + \beta q' + K_{\perp}, \quad (19)$$

то матричный элемент оператора (18) между адронными состояниями можно записать в виде:

$$\langle h' | O_{\dots}^{\{z\}} | h \rangle = \int d\beta_1 \dots d\beta_\ell f^{\{z\}}(\beta_1, \dots, \beta_\ell) \beta_1^{n_1} \dots \beta_\ell^{n_\ell}, \quad (20)$$

где функция  $f$  представляет собой адронную вершину, в которой снято интегрирование по долям энергии  $\beta_j$  частиц, сходящихся в вершине  $\Gamma$  (см. рис. 1):

$$f^{\{z\}}(\beta_1, \dots, \beta_e) = \int d^4 k_1 \dots d^4 k_e \Gamma_{\beta_1 \dots \beta_e}^{\{z\}} \cdot M_{\beta'_1 \dots \beta'_e}^{\{z\}}(k_1, \dots, k_e). \quad (21)$$

$$\cdot \prod_{j=1}^e \left[ G_{\beta_j \beta'_j}^{z_j}(k_j) \beta_j^{2s_j-1} \delta\left(\beta_j - \frac{k_j q'_j}{p q'_j}\right) \right].$$

Здесь через  $M$  обозначен отмеченный на рис. 1 многокостный блок;  $G_{\alpha\beta}^{z_j}(k)$  — функция Грина  $j$ -й частицы. Важным для нас, как отмечалось выше является то обстоятельство, что в случае КПО, удовлетворяющих условию

$$q'_j \Gamma_{\beta_1 \dots \beta_e} = 0 \quad \text{или} \quad (\hat{q}')_{\beta_j} \Gamma_{\beta_1 \dots \beta_e} = 0 \quad (22)$$

соответственно для векторных и спинорных индексов  $\beta_j$ , числители функций Грина  $G$  можно заменить проекторами на состояния реальных частиц (кварков и глюонов) и придать выражению (20) партоноподобный вид.

Для дальнейшего оказывается удобным изменить нормировку спиноров  $u, v$  и векторов поляризации  $e$ , входящих в формулы (3), (4). Введем по определению

$$\bar{\xi}^\lambda(k) = \frac{1}{S} \hat{k} \hat{q}' u^\lambda(p'), \quad s = 2p' q', \quad k^2 = S \alpha \beta + k_\perp^2 = 0, \quad (23)$$

$$v_\beta^\lambda(k) = \beta e_\beta^\lambda(p') - \frac{2}{S} q'_\beta \cdot (k_\perp e^\lambda(p')), \quad \lambda = \pm 1,$$

где  $u^\lambda(p')$ ,  $e^\lambda(p')$  являются решениями следующих уравнений:

$$\gamma_5 u^\lambda(p') = -\lambda u^\lambda(p'); \quad \hat{p}' u^\lambda(p') = 0; \quad (p'_0 > 0); \quad (24)$$

$$i \varepsilon_{\beta\gamma\alpha}^\perp e^\lambda(p') = \lambda e_\beta^\lambda(p'); \quad p'_\beta e_\beta^\lambda(p') = q'_\beta e_\beta^\lambda(p') = 0;$$

$$\varepsilon_{\beta\gamma\alpha}^\perp = \frac{2}{S} \varepsilon_{\beta\gamma\alpha\beta} q'_\alpha p'_\beta.$$

Величины  $\bar{\xi}^\lambda(k)$  и  $v^\lambda(k)$  удовлетворяют нормировочным условиям

$$\bar{\xi}^\lambda(k) \gamma_\mu \bar{\xi}^{\lambda'}(k) = 2\beta k_\mu \delta_{\lambda\lambda'}, \quad v_\beta^\lambda(k) v_\beta^{\lambda'}(k) = -\beta^2 \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (25)$$

При этом  $u^\lambda, v^\lambda, e^\lambda$  в формулах (3), (4) следующим образом выражаются через  $\bar{\xi}^\lambda, v^\lambda$ :

$$u^\lambda(\vec{k}) = \beta^{-1/2} \bar{\xi}^\lambda(k), \quad v^\lambda(-\vec{k}) = \beta^{-1/2} v^\lambda(k), \quad e^\lambda(k) = \beta^{-1} v^\lambda(k). \quad (26)$$

Если наложить на  $u^\lambda(p')$ ,  $e^\lambda(p')$  еще добавочные условия

$$\delta_2 u^{\lambda*}(p') = -u^{-\lambda}(p'), \quad e^{\lambda*}(p') = -e^{-\lambda}(p'),$$

которые легко выполнить за счет выбора произвольного фазового множителя, то в дополнение к (26) будем иметь соотношения

$$v^\lambda(-\vec{k}) = |\beta|^{-1/2} \bar{\xi}^{-\lambda}(-k), \quad v^{\lambda*}(k) = v^{-\lambda}(-k), \quad (27)$$

позволяющие связать аналитически амплитуды с поглощением частиц и испусканием античастиц с противоположными спиральностями. В частности, для числителей кваркового и глюонного пропагаторов (2), (4) получаем формулы

$$\hat{k} = \beta^{-1} \sum_{\lambda=\pm} \bar{\xi}^\lambda(\vec{k}) \bar{\xi}^{\lambda'}(\vec{k}) + \frac{k^2}{S\beta} \hat{q}', \quad (28)$$

$$-\delta_{\mu\nu} + \frac{k_\mu q'_\nu + k_\nu q'_\mu}{k q'} = \beta^{-2} \sum_{\lambda=\pm} v_\mu^\lambda(\vec{k}) v_\nu^{\lambda'}(\vec{k}) + \frac{4k^2}{S^2 \beta^2} q'_\mu q'_\nu,$$

справедливые при обоих знаках  $\beta$ , отвечающих частицам и античастицам. Следует иметь в виду, что при суммировании по состояниям реальных кварков, антикварков или глюонов в нашей нормировке каждой частице сопоставляется фазовый объем  $d^3k/(2\pi)^3 2|k_0| |\beta|^{2s}$ , где  $S$  — спин частицы. Появление множителя  $|\beta|^{-2s}$  очевидно из формул (5), (28).

При подстановке в (21) последние члены в формулах (28) могут быть отброшены в силу (22), и мы получаем следующее партоноподобное выражение для матричного элемента (20):

$$\langle h | O^{\{z\}} | h \rangle = \sum_{\lambda_1 \dots \lambda_e} \int d\beta_1 \dots d\beta_e N_{\lambda_1 \dots \lambda_e}^{\{z\}}(\beta_1, \dots, \beta_e) O_{\lambda_1 \dots \lambda_e}^{\{z\}} \prod_{j=1}^e \beta_j^{n_j}, \quad (29)$$

$$O_{\lambda_1 \dots \lambda_e}^{\{z\}} = \Gamma_{\beta_1 \dots \beta_e}^{\{z\}} \prod_{j=1}^e \beta_j^{-1} \left( \bar{\xi}^{\lambda_j}(\tilde{k}_j) \right)_{\beta_j}, \quad (30)$$

$$N_{\lambda_1 \dots \lambda_e}^{\{z\}}(\beta_1, \dots, \beta_e) = \int d^4 k_1 \dots d^4 k_e M_{\beta_1 \dots \beta_e}^{\{z\}}(k_1, \dots, k_e). \quad (31)$$

$$\cdot \prod_{j=1}^e (k_j^2)^{-1} \left( \bar{\xi}^{\lambda_j}(\tilde{k}_j) \right)_{\beta_j} \delta\left(\beta_j - \frac{k_j q'}{p' q'}\right).$$

В формулах (30) и (31)  $\bar{\xi}^{\lambda_j}(\tilde{k}_j)$  следует понимать как  $\bar{\xi}^{\lambda_j}(k_j)$ ,  $\bar{\xi}^{-\lambda_j}(-k_j)$  или  $\psi^{\lambda_j}(\tilde{k}_j)$  в зависимости от сорта частицы  $j$  (кварк, антикварк, глюон, причем в последнем случае  $\bar{\xi}^{\lambda_j} \equiv (\psi^{\lambda_j})^*$ );  $\tilde{k}_j = k_j - (k_j^2/k_1 q') q'$ . Входящее в (29) произведение  $O_{\lambda_1 \dots \lambda_e}^{\{z\}} \prod_{j=1}^e \beta_j^{n_j+1}$  представляет собой с учетом нормировки (25) матричный элемент оператора  $O_{\dots}^{\{z\}}$  по партонам состояниям с определенными спиральностями  $\lambda = \pm 1$  и долями энергии  $\beta_j$  у каждого из  $e$  партонов; при этом  $O_{\lambda_1 \dots \lambda_e}^{\{z\}}$  не зависят от  $\beta_j$ . Величина  $N_{\lambda_1 \dots \lambda_e}^{\{z\}}(\beta_1, \dots, \beta_e)$ , которую мы назовем инклюзивным партонным коррелятором, имеет смысл волновой функции адронного  $t$ -канального состояния, проинтегрированной по поперечным составляющим импульсов партонов. Она содержит в качестве множителя  $\delta$ -функцию, отвечающую сохранению энергии-импульса:

$$\sum_{i=1}^e \beta_i = \beta \quad (32)$$

где  $\beta$  - судакровский параметр, отвечающий переданному импульсу от начального к конечному адрону. В случае глубоко-неупругого лептон-адронного процесса  $\beta = 0$ , в задаче о форм-факторе  $\beta = 1$ .

Интегрирование в формуле (29) осуществляется по области положительных и отрицательных значений  $\beta_j$ , связанных условием (32). Отрицательным  $\beta_j$  отвечают партоны в волновой функции конечного адронного состояния (см. (17)) (в случае (18) все  $\beta_j$  положительны).

Итак, для вычисления матричных элементов КПО достаточно знать корреляторы  $N_{\lambda_1 \dots \lambda_e}^{\{z\}}(\beta_1, \dots, \beta_e)$ , дающие распределение партонов в  $t$ -канальном адронном состоянии по их энергиям  $\beta_j$ ,

внутренним квантовым числам (цвету и аромату) и спиральности. Ниже мы построим уравнения эволюции, определяющие зависимость этих функций от точки нормировки соответствующих операторов  $M$ . При этом набор КПО определенного твиста оказывается замкнутым относительно перенормировок, то есть не смешивается при изменении  $M$  с другими операторами. В окончательных формулах нужно положить  $M \approx Q^2$  [4,5].

#### 4. Уравнения эволюции для партонных корреляторов

Логарифмическая зависимость функций  $N$  (31) от  $M$  связана с наличием в теории возмущений ультрафиолетово-расходящихся интегралов, которые мы будем считать обрезанными на поперечных импульсах порядка  $M$  ( $|K_{\perp}| < M$ ). Эта зависимость дается уравнениями эволюции, общий метод построения которых известен [2,3]. Нужно продифференцировать выражение (31) по  $\ln M^2$ , в правой части имеется два источника зависимости от  $M$ . Во-первых, ультрафиолетовые расходимости содержатся внутри блока  $M$  на рис.1; вследствие ренорм-инвариантности эти расходимости выделяются на концах в виде множителя  $\prod_j z_j^{V_j}$ , где  $z_j$  - константа перенормировки функции Грина  $j$ -го партона (при этом важно, что в нашем подходе партоны могут считаться реальными). Во-вторых, зависимость от  $M$  возникает за счет логарифмической расходимости интегралов по поперечным импульсам тех частиц, которые непосредственно примыкают к вершине  $\Gamma$  на рис.1, иначе говоря, за счет зависимости от  $M$  области интегрирования в (31). Для нахождения последней зависимости нужно частично расшифровать блок  $M$ , выделив в явном виде однопетлевую диаграмму, приводящую к указанной расходимости. Пример такого выделения показан на рис.2, где заштрихованный блок означает сумму фейнмановских диаграмм для процесса  $12 \rightarrow 1'2'$  в борновском приближении (см. ниже, рис.6). Интегрирование по области импульсов  $K_1, K_2$

$$|K_1^2| |K_2^2| \ll |K_{1\perp}^2| \sim |K_{2\perp}^2| \ll M^2 \quad (33)$$

дает результат, пропорциональный  $\ln M^2$ , так что после дифференцирования по  $\ln M^2$  петля на рис.2 стагивается в точку и возникает диаграмма вида рис.1 с заменой частиц 1,2 на 1', 2'. Вводя парное ядро

$$\frac{g^2}{16\pi^2} \Phi_{z_1 z_2}^{z_1 z_2}(\beta_1, \beta_2 | \beta_1', \beta_2') \delta(\beta_1 + \beta_2 - \beta_1' - \beta_2') = M^2 \frac{\partial}{\partial M^2} \left( \frac{d^4 k_1}{k_1^2} \frac{d^4 k_2}{k_2^2 (2\pi)^4} \right) \quad (34)$$

$$\cdot K_{z_1 z_2}^{z_1 z_2} (k_1, k_2 | k'_1, k'_2) \delta^4(k_1 + k_2 - k'_1 - k'_2) \delta(\beta_1 - \frac{k_1 q'_1}{p q'_1}) \delta(\beta_2 - \frac{k_2 q'_1}{p q'_1}),$$

где через  $K$  обозначен заштрихованный блок, получим следующий вклад графика рис.2 в правую часть уравнения эволюции:

$$\frac{g^2}{16\pi^2} \sum_{z_1 z_2} \int d\beta'_1 d\beta'_2 \Phi_{z_1 z_2}^{z_1 z_2}(\beta_1, \beta_2 | \beta'_1, \beta'_2) \delta(\beta_1 + \beta_2 - \beta'_1 - \beta'_2) N^{z_1 \dots z_\ell}(\beta'_1, \dots, \beta'_\ell) \quad (35)$$

(здесь и далее, в отличие от формулы (31), мы опускаем для простоты индексы  $\lambda_j$ , указывающие спиральность, считая их включенными в  $z_j$ ). Аналогичного вида выражение отвечает графику типа рис.2 со взаимодействием любой другой пары из  $\ell$  партонов, все такие вклады должны быть просуммированы в уравнении эволюции.

Вообще говоря, для произвольного оператора  $O$  уравнение эволюции должно содержать также переходы с изменением числа частиц в  $t$ -канале, которым соответствуют ядра рис.3 (блокам отвечают борновские диаграммы, верхняя часть графиков имеет два хвоста, поскольку в ГЛП мы выделяем из блока  $M$  лишь одну петлю). Однако в случае КПО оказывается возможным ограничиться рассмотрением только двухчастичных взаимодействий типа рис.2, сохраняющих число частиц. Диаграммы рис.3в,с не дают вклада (это можно проверить явным вычислением), так как они отвечали бы переходу КПО твиста  $\ell$  в операторы более высокого твиста. Что касается переходов с уменьшением числа частиц (рис.3а), то совсем отбросить их нельзя, так как  $(\ell-1)$ -частичный оператор может иметь твист  $\ell$ , но, как мы сейчас увидим в силу уравнений движения эти переходы приводят к добавлению новых диаграмм того же рассеивательного типа, что и рис.2.

Чтобы найти выражение для ядра  $\Phi_{z_1 z_2}^{z_1 z_2}$ , входящего в (35), рассмотрим сначала "лестничные" графики рис.4а. В соответствии с формулами (28) каждой линии на рис.4а следует сопоставить два вклада - партонный (проектор на реальные состояния) и непартонный. Для частиц 1 и 2, сходящихся в вершине  $\Gamma$  (рис.2), непартонный вклад отсутствует согласно (22), но в остальных линиях его следует учесть. При этом существенно, что непартонные

вклады в (28) пропорциональны  $K^2$ . Наличие этого множителя приводит к сокращению знаменателя пропагатора и стягиванию соответствующей линии в точку; это эквивалентно использованию уравнений движения. В результате возникают четырехчастичные вершины (рис.4в,с, где стянутая линия перечеркнута). Стягивание линии 1 или 2 означает, что из блока  $M$  (рис.1) мы должны выделить ближайшую вершину; возникающий график рис.4с аналогичен 3в и, поэтому не дает вклада. Таким образом, на диаграмме рис.4а все внешние частицы (1,2,1',2') могут считаться свободными; лишь для внутренней частицы 3 необходимо учесть непартонный вклад, приводящий к эффективной четырехчастичной вершине рис.4,в.

Рассмотрим теперь переход с уменьшением числа частиц (рис.5а). Учет непартонного вклада в пропагаторе частицы 1 приводит к возникновению стянутой вершины рис.5в, которую можно объединить с рис.4а, в один блок (см.рис.2). Остается учесть еще вклад в диаграмму рис.5а, когда все частицы 1,2,1' лежат на массовой поверхности. Однако ниже мы покажем (см.формулу (51) и последующее обсуждение), что для КПО этот вклад равен нулю, так что остаются лишь переходы с сохранением числа частиц.

Обсудим несколько подробнее первый перенормировочный вклад в уравнение эволюции, который возникает от дифференцирования блока  $M$  на рис.1 (см.выше). В случае бесцветного оператора  $O$  этот диагональный вклад оказывается возможным записать в виде суммы по парам частиц и объединить с соответствующими интегральными ядрами. Действительно, из условия бесцветности вершины  $\Gamma$  на рис.1 следует, что

$$\left( \sum_{j=1}^{\ell} T_j^a \right) \Gamma = 0$$

где  $T_j^a$  - матрица, действующая на цветовые степени свободы  $j$ -й частицы и являющаяся соответствующим представлением алгебры цветовых генераторов  $T^a$ . Умножая это равенство на  $T_i^a$ , получим:

$$\left[ (T_i^a)^2 + T_i^a \sum_j' T_j^a \right] \Gamma = 0 \quad (36)$$

(суммирование по  $\alpha$  подразумевается;  $\sum_j'$  означает, что в сумме отсутствует член с  $j=i$ ).

Константу перенормировки  $Z_j$  функции Грина  $j$ -й частицы в однопетлевом приближении удобно записать в виде



$$z_j = 1 + \sigma_j (T_j^a)^2 \quad (37)$$

где  $\sigma_j$  для кварка и глюона соответственно имеют следующий вид в светоподобной калибровке (I) [5, II]

$$\begin{aligned} (16\pi^2/g^2) \cdot \sigma_q &= (3 - 4l(\beta)) \ln M^2/m^2, \\ (16\pi^2/g^2) \cdot \sigma_g &= \left( \frac{11}{3} - \frac{2n_f}{3N} - 4l(\beta) \right) \ln M^2/m^2, \\ l(\beta) &= \int_{\varepsilon}^{\beta} dx/x, \end{aligned} \quad (38)$$

( $N$  - число цветов,  $n_f$  - число ароматов,  $\varepsilon$  - промежуточное инфракрасное обрезание по доле энергии виртуального глюона). Поэтому обсуждаемый перенормировочный вклад в уравнение эволюции с учетом (36) равен

$$\begin{aligned} \prod_i z_i^{1/2} \Gamma &\approx \left[ 1 + \frac{1}{2} \sum_i \sigma_i (T_i^a)^2 \right] \Gamma = \left[ 1 - \frac{1}{2} \sum_i \sigma_i T_i^a \cdot \right. \\ &\left. \cdot \sum_j T_j^a \right] \Gamma = \left[ 1 - \frac{1}{2} \sum_{i < j} (\sigma_i + \sigma_j) T_i^a T_j^a \right] \Gamma. \end{aligned} \quad (39)$$

Мы получили искомое представление в виде суммы по парам частиц. При этом изменилась цветовая структура выражения, приобретя вид, характерный для диаграммы рис.4а, в которой рассеяние происходит за счет обмена глюоном. Заметим, что инфракрасная расходимость  $\sim \ln(1/\varepsilon)$ , которая имеется в (38) из-за сингулярности глюонного пропагатора (2) в светоподобной калибровке (I), в результате сократится с аналогичной расходимостью, возникающей в парных ядрах при наличии обмена глюоном.

Вводя переменную

$$\xi = \frac{1}{\beta} \ln \left( 1 + \beta \frac{g^2}{16\pi^2} \ln \frac{M^2}{m^2} \right), \quad \beta = \frac{11}{3} N - \frac{2}{3} n_f, \quad (40)$$

мы можем записать окончательно уравнение эволюции для коррелятора (31) в следующем виде, обобщающем (35):

$$\frac{\partial}{\partial \xi} N^{z_1 \dots z_e}(\beta_1, \dots, \beta_e) = \sum_{i < j} \sum_{z_i z_j'} \int d\beta_i d\beta_j \Phi_{z_i z_j'}^{z_i z_j}(\beta_i, \beta_j | \beta_i', \beta_j'). \quad (41)$$

$$\delta(\beta_i + \beta_j - \beta_i' - \beta_j') N^{z_1 \dots z_i' \dots z_j' \dots z_e}(\beta_1, \dots, \beta_i', \dots, \beta_j', \dots, \beta_e),$$

где парные ядра  $\Phi_{z_i z_j'}^{z_i z_j}$  графически представлены на рис.6 для разных сортов частиц  $i, j, i', j'$ . Точка на линии в диагональных членах изображает перенормировочный вклад с измененной согласно (39) цветовой структурой. Неперечеркнутые внутренние линии означают полные пропагаторы (28); что касается перечеркнутых линий, учитывающих непартонные вклады в (28), то им можно было бы сопоставлять полные пропагаторы, поскольку партонная часть, как будет показано ниже (см.(51)) выпадает в соответствующих графиках. Поэтому парные ядра на рис.6 представлены калибровочно-инвариантными наборами диаграмм.

Отметим, что эти ядра являются универсальными в том смысле, что они применимы в уравнениях эволюции для КПО любого твиста. Каждое ядро описывает эволюцию некоторого двухчастичного оператора твиста 2 вида (13)-(15), на которые разбивается исходный многочастичный оператор. При нашем определении ядер, использующем тождество (39), аномальные размерности для всех двухчастичных операторов, в том числе для цветных, оказываются инфракрасно конечными. В уравнениях эволюции (41) величина твиста  $t = \ell$  сказывается лишь на числе переменных в корреляторе  $N$  и их возможных разбиений на пары.

Нужно отметить, что КПО, вообще говоря, не исчерпывают полного набора операторов данного твиста. Так, для твиста 4 имеются трехчастичные операторы [8, 10], не сводящиеся к КПО и потому заслуживающие отдельного рассмотрения. Однако замкнутость системы КПО относительно уравнений эволюции позволяет изучать их независимо от остальных операторов. Уравнение эволюции в этом случае непоминает уравнение Шредингера для некоторой  $\ell$ -частичной квантово-механической системы, в которой существует только парное взаимодействие (но возможно также превращение частиц разных сортов друг в друга). В частности, при  $\ell = 3$  получается уравнение, аналогичное уравнению Фаддеева.

Заметим, что КПО не являются полностью изолированными от других операторов того же твиста: первые не могут переходить во вторые, но обратный переход возможен. Таким образом, матрица

эволюции является треугольной. Для собственных значений - аномальных размерностей - переходные элементы несущественны, но уравнения эволюции для других операторов могут содержать КПО в качестве неоднородных членов.

### 5. Вершины и парные ядра в спиральном базисе

Из формул (23)-(27) нетрудно получить следующие выражения для трехчастичных вершин взаимодействия партонов с определенной спиральностью  $\pm$  (ср. [11]):

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} 1 \\ + \\ \hline + \\ \hline 2 \\ + \\ \hline + \\ \hline 3 \\ + \end{array} &= (t^{a_3})_{i_1 i_2} \cdot 2\beta_1 (K \psi^{(+)}(p')), \\
 \begin{array}{c} 1 \\ + \\ \hline + \\ \hline 2 \\ + \\ \hline - \\ \hline 3 \\ + \end{array} &= (t^{a_3})_{i_1 i_2} \cdot 2\beta_2 (K \psi^{(-)}(p')), \\
 \begin{array}{c} 1 \\ + \\ \hline + \\ \hline 2 \\ + \\ \hline + \\ \hline 3 \\ + \end{array} &= -i f_{a_1 a_2 a_3} \cdot 2\beta_1^2 (K \psi^{(+)}(p')), \\
 \begin{array}{c} 1 \\ + \\ \hline + \\ \hline 2 \\ + \\ \hline - \\ \hline 3 \\ + \end{array} &= -i f_{a_1 a_2 a_3} \cdot 2\beta_2^2 (K \psi^{(-)}(p')),
 \end{aligned} \tag{45}$$

$$K = \beta_1 k_{21} - \beta_2 k_{11} = \beta_3 k_{21} - \beta_2 k_{31} = \beta_3 k_{11} - \beta_1 k_{31}, \quad K_1 = k_2 + k_3.$$

Здесь  $t^a$ ,  $f_{a_1 a_2 a_3}$  - цветные матрицы. Вершины, не сохраняющие спиральность фермиона, а также те, в которых все входящие частицы имеют одну спиральность, а выходящие - противоположную, обращаются в нуль. Оставшиеся невыписанными ненулевые вершины могут быть получены из (45) с помощью соотношений (27).

Чтобы получить выражения для парных ядер, рассмотрим сначала график рис.4а. Интеграл по петле (рис.2) имеет вид

$$\int \frac{ig^2 d^4 k}{(2\pi)^4 (k^2 + i\varepsilon)((k' - k)^2 + i\varepsilon)((k_2 + k)^2 + i\varepsilon)} \beta^{-2s} \sum_{\lambda} V_1^{\lambda} V_2^{\lambda} \tag{46}$$

где  $V_1, V_2$  - трехчастичные вершины, приведенные в (45) ( $s, \lambda$  - спин и спиральность промежуточной частицы на рис.4а). Используя судаковское разложение (19), нетрудно найти логарифмический вклад в (46), который происходит от области (33).

При этом произведение  $V_1^{\lambda} V_2^{\lambda}$  можно усреднить по направлениям вектора  $K_1$ , воспользовавшись соотношениями ортогональности (25); в результате возникает логарифмический интеграл  $\int dk_1^2 / (-k_1^2)$ . Введем обозначение

$$Y(\beta_1, \beta_2) = (2\pi i)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{(\alpha\beta_1 + 1 - i\varepsilon)(\alpha\beta_2 + 1 - i\varepsilon) \dots} \tag{47}$$

тогда интеграл (46) можно записать как комбинацию выражений вида

$$(16\pi^2)^{-1} \int \frac{d^2 k_1}{k_1^2} g^2(k^2) \int d\beta Y(\beta, \beta - \beta_1, \beta + \beta_2) f(\beta, \beta_1, \beta_2) \tag{48}$$

где  $f$  - некоторая простая функция, зависящая от сортов и спиральностей взаимодействующих частиц. С учетом (34) подынтегральное выражение в (48) представляет собой вклад соответствующего графика в ядро  $\Phi$ , где только следует заменить  $\beta$  на  $\beta_1 - \beta_1 = \beta_2 - \beta_2$ .

Согласно предыдущему разделу, кроме графиков типа рис.4а, мы должны еще учесть четырехчастичные вершины, возникающие за счет стягивания линии (рис.4в и 5в), а также четырехглюонную точечную вершину (рис.5с). Для них имеем с учетом (28):

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} 1 \\ \nearrow \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 4 \end{array} &= \delta_{\lambda_1 \lambda_3} \delta_{\lambda_2 \lambda_4} (t^a)_{i_1 i_3} (t^a)_{i_2 i_4} \frac{4}{(\beta_1 - \beta_3)^2} \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4; \\
 \begin{array}{c} 1 \\ \nearrow \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \nearrow \\ 4 \end{array} &= \delta_{\lambda_1 \lambda_3} \delta_{\lambda_2 \lambda_4} (t^a)_{i_1 i_3} (-i f_{a_2 a_4 a}) \cdot 2 \frac{\beta_2 + \beta_4}{(\beta_1 - \beta_3)^2} \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4; \\
 \begin{array}{c} 1 \\ \nearrow \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 4 \end{array} &= \delta_{\lambda_1 \lambda_3} \delta_{\lambda_1 - \lambda_2} \delta_{\lambda_3 - \lambda_4} (t^{a_2/a_4})_{i_1 i_3} \frac{2}{\beta_1 + \beta_2} \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4; \tag{49} \\
 \begin{array}{c} 1 \\ \nearrow \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \nearrow \\ 4 \end{array} &= \delta_{\lambda_1 \lambda_3} \delta_{\lambda_2 \lambda_4} f_{a_1 a_3 a} f_{a_2 a_4 a} \frac{(\beta_1 + \beta_3)(\beta_2 + \beta_4)}{(\beta_1 - \beta_3)^2} \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4; \\
 \begin{array}{c} 1 \\ \nearrow \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 4 \end{array} &= [(\delta_{\lambda_1 \lambda_3} \delta_{\lambda_2 \lambda_4} - \delta_{\lambda_1 \lambda_4} \delta_{\lambda_2 \lambda_3}) f_{a_1 a_2 a} f_{a_3 a_4 a} + (\delta_{\lambda_1 - \lambda_2} \delta_{\lambda_3 - \lambda_4} - \delta_{\lambda_1 \lambda_4} \\
 &\quad - \delta_{\lambda_2 \lambda_3}) f_{a_1 a_3 a} f_{a_2 a_4 a} + (\delta_{\lambda_1 \lambda_3} \delta_{\lambda_2 \lambda_4} - \delta_{\lambda_1 - \lambda_2} \delta_{\lambda_3 - \lambda_4}) f_{a_1 a_4 a} f_{a_2 a_3 a}] \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4.
 \end{aligned}$$

Выражения (45) и (49) справедливы для произвольных знаков  $\beta_j$ . Отметим также, что направление глюонной стрелки согласно (27) всегда можно заменить на противоположное, если одновременно изменить знак спиральности глюона.

Вклад четыреххвостных вершин (49) в уравнение эволюции аналогичен (48), только в данном случае будет входить функция  $\mathcal{J}(\beta - \beta', \beta - \beta')$ , зависящая лишь от двух аргументов.

Обратимся теперь к рассмотрению графика рис.5а и покажем, как мы обещали в предыдущем разделе, что его вклад с логарифмической точностью равен нулю, если частица  $I'$  лежит на массовой поверхности. Из формул (45) видно, что этот вклад для частиц любого сорта пропорционален интегралу

$$\int \frac{d^4 k_1}{k_1^2 (k_1 - k_1')^2} (\beta_1 k_{1\perp}' - \beta_1' k_{1\perp})_{\sigma} \quad (50)$$

Для выделения логарифмического вклада второе слагаемое нужно разложить в соответствии с условием (33) до линейных членов по  $k_{1\perp}'$ ; после усреднения по направлениям вектора  $k_{1\perp}$  интеграл примет вид

$$k_{1\perp \sigma}' \int \frac{d^4 k_1}{k_1^2 (k_1 - k_1')^2} \left( \beta_1 - \frac{\beta_1' k_1^2}{(k_1 - k_1')^2} \right) = k_{1\perp \sigma}' \int \frac{d^4 k_1 (\beta_1 - \beta_1')}{(k_1 - k_1')^4}, \quad (51)$$

где опять отброшены величины более высокого порядка по  $k_{1\perp}'$ . Последнее выражение обращается в нуль за счет антисимметрии подынтегральной функции относительно замены  $k_1 \rightarrow 2k_1' - k_1$ .

Итак, мы видим, что  $\beta$ -частичный КПО не может перейти в  $(\beta - 1)$ -частичный. Для операторов твиста 3 это обстоятельство имеет простое объяснение: не существует оператора твиста 3, для которого матричный элемент между одночастичными состояниями с одинаковым импульсом не обращался бы в нуль на массовой поверхности (в пренебрежении массой кварка) [6]. В случае твиста 4 и выше причина указанного явления менее очевидна. Поскольку, однако, переходные ядра в уравнениях эволюции не зависят от полного числа частиц (а, следовательно, и от твиста), то будучи равными нулю для твиста 3, они остаются равными нулю и для любого твиста.

Выпишем теперь окончательные выражения для парных ядер. Результат представим в следующей форме:

$$\Phi_{z_1' z_2'}^{z_1 z_2}(\beta_1, \beta_2 | \beta_1', \beta_2') = \sum_{\Lambda CF} \Phi_{\Lambda CF}(\beta_1, \beta_2 | \beta_1', \beta_2') (P_{\Lambda})_{\lambda_1' \lambda_2'}^{\lambda_1 \lambda_2} \cdot (P_C)_{c_1' c_2'}^{c_1 c_2} (Q_F)_{k_1' k_2'}^{k_1 k_2}, \quad (52)$$

где  $P_{\Lambda}, P_C, P_F$  - проекторы состояний частиц 1, 2 с определенной спиральностью, цветом и ароматом, они удовлетворяют соотношениям в виде

$$(P_A)_{c_1' c_2'}^{c_1 c_2} (P_B)_{c_1'' c_2''}^{c_1' c_2'} = \delta_{AB} (P_A)_{c_1'' c_2''}^{c_1 c_2} \quad (53)$$

(по  $A$  не суммируется). В частности имеется три спиральных проектора  $P_{\Lambda}$ , которые обозначим  $P_A, P_V, P_T$  ( $\lambda_i = \pm 1$ ):

$$(P_V)_{\lambda_1' \lambda_2'}^{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{1}{2} \delta_{\lambda_1, \lambda_2} \delta_{\lambda_1', \lambda_2'}; \quad (P_A)_{\lambda_1' \lambda_2'}^{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda_1' \delta_{\lambda_1, \lambda_2} \delta_{\lambda_1', \lambda_2'}; \quad (54a)$$

$$(P_T)_{\lambda_1' \lambda_2'}^{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{1}{2} (1 + \lambda_1 \lambda_1') \delta_{\lambda_1, \lambda_2} \delta_{\lambda_1', \lambda_2'}.$$

Для системы кварк-антикварк, например, они отвечают двухчастичным вершинам, имеющим соответственно вид:  $\hat{q}', \gamma_5 \hat{q}', (1 \pm \gamma_5) \hat{q}' \gamma_5^{\pm}$ . В последнем случае имеет место выражение:  $P_T$  есть сумма двух проекторов, соответствующих вершинам  $\hat{q}' \gamma_5^{\pm}$  и  $\gamma_5 \hat{q}' \gamma_5^{\pm}$ . Это объясняется тем, что справедливо соотношение  $\gamma_5 \hat{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \hat{\sigma}_{\alpha\beta}$  благодаря которому обе вершины перенормируются одинаково. Отметим отсутствие проекторов  $P_S$  и  $P_P$ , которые могли бы отвечать вершинам  $1$  и  $\gamma_5$ ; такие вершины возникают лишь для операторов высшего твиста  $t > 2$ , в то время как парные ядра описывают перенормировку операторов твиста 2 (см. (13)-(15)).

Явный вид проекторов  $P_C, P_F$  можно найти, используя соотношения (53) (см., например, [13]). Выпишем эти проекторы только для переходов между кварками и глюонами, где возможна неоднозначность в определении:

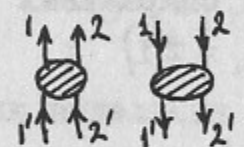
$$(P_i)_{ij}^{ab} = (P_i)_{ab}^{ij} = (N(N^2 - 1))^{-\frac{1}{2}} \delta_{ab} \delta_{ij}, \quad (54b)$$

$$(P_{8d})_{ij}^{ab} = (P_{8d})_{ba}^{ji} = (2N/(N^2-4))^{1/2} d_{abc} (t^c)_{ij}$$

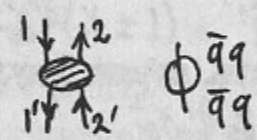
$$(P_{8f})_{ij}^{ab} = -(P_{8f})_{ba}^{ji} = f_{abc} (t^c)_{ij}$$

$$(Q_1)_{k_1 k_2}^{l_1 l_2} = (Q_1)_{l_1 l_2}^{k_1 k_2} = (N_f)^{-1/2} \delta_{l_1 l_2} \quad (54b)$$

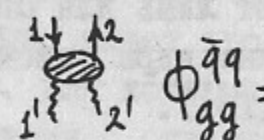
В формулах (54b) индексы а, в относятся к глюонам, i, j - к кваркам. Парные ядра имеют вид:




$$\Phi_{qq}^{qq} = \Phi_{\bar{q}\bar{q}}^{\bar{q}\bar{q}} = \frac{1}{2} (Q_6 + Q_3) \left( \frac{N-1}{N} P_6 - \frac{N+1}{N} P_3 \right) \left\{ (P_V + P_A + P_T) \left[ \left( \frac{\beta_1}{\beta_{11'}} \right) \cdot \gamma_{11'} + \frac{\beta_2}{\beta_{22'}} \gamma_{22'} \right] + \frac{1}{2} \delta(\beta_{11'}) \right\} - (P_V + P_A) \gamma_1 \left\{ -\frac{1}{2} (Q_6 - Q_3) \left( \frac{N-1}{N} P_6 + \frac{N+1}{N} P_3 \right) \left\{ (P_V - P_A + P_T) \left[ \left( \frac{\beta_1}{\beta_{12'}} \right) \gamma_{12'} + \frac{\beta_2}{\beta_{21'}} \gamma_{21'} \right] + \frac{1}{2} \delta(\beta_{12'}) \right\} - (P_V - P_A) \gamma_2 \right\};$$




$$\Phi_{\bar{q}\bar{q}}^{\bar{q}\bar{q}} = \Phi_{qq}^{qq} = -(Q_1 + Q_8) \left( \frac{N^2-1}{N} P_1 - \frac{1}{N} P_8 \right) \left\{ (P_V + P_A + P_T) \left[ \left( \frac{\beta_1}{\beta_{11'}} \right) \gamma_{11'} + \frac{\beta_2}{\beta_{22'}} \gamma_{22'} \right] + \frac{1}{2} \delta(\beta_{11'}) \right\} - (P_V + P_A) \gamma_1 \left\{ -4N_f Q_1 P_8 P_V \frac{\beta_1 \beta_2}{(\beta_1 + \beta_2)^2} \gamma \right\};$$



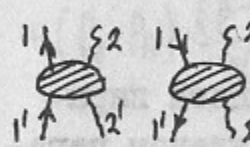
$$\Phi_{gg}^{\bar{q}\bar{q}} = -\Phi_{gg}^{qq} = \frac{\sqrt{N_f}}{2} Q_i (\beta_1 \beta_2)^{-1} \left\{ \left( \sqrt{\frac{N^2-1}{N}} P_1 + \sqrt{\frac{N^2-4}{2N}} P_{8d} - i\sqrt{\frac{N}{2}} P_{8f} \right) \cdot \left[ P_V \cdot \left( (2\beta_1 - \beta_1') \gamma_1 - \beta_1 \gamma_{11'} \right) + P_A (\beta_1' \gamma_1 - \beta_1 \gamma_{11'}) \right] + \left( \sqrt{\frac{N^2-1}{N}} P_1 + \sqrt{\frac{N^2-4}{2N}} P_{8d} + i\sqrt{\frac{N}{2}} P_{8f} \right) \cdot \left[ P_V \cdot \left( (2\beta_1 - \beta_1') \gamma_2 - \beta_1 \gamma_{12'} \right) - P_A (\beta_2' \gamma_2 - \beta_1 \gamma_{12'}) \right] - 2i\sqrt{2N} P_{8f} P_V \frac{\beta_1 \beta_2 \beta_{12'}}{(\beta_1 + \beta_2)^2} \gamma \right\};$$



$$\Phi_{\bar{q}\bar{q}}^{gg} = -\Phi_{qq}^{gg} = \sqrt{N_f} Q_i \left\{ \left( \sqrt{\frac{N^2-1}{N}} P_1 + \sqrt{\frac{N^2-4}{2N}} P_{8d} + i\sqrt{\frac{N}{2}} P_{8f} \right) \left[ P_V \cdot \left( (2\beta_1' - \beta_1) \cdot \gamma_1 - \beta_2 \gamma_{22'} \right) + P_A (\beta_1 \gamma_1 - \beta_2 \gamma_{22'}) \right] - \left( \sqrt{\frac{N^2-1}{N}} P_1 + \sqrt{\frac{N^2-4}{2N}} P_{8d} - i\sqrt{\frac{N}{2}} P_{8f} \right) \left[ P_V \cdot \left( (2\beta_2' - \beta_1) \cdot \gamma_2 - \beta_2 \gamma_{21'} \right) - P_A (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_{21'}) \right] - 2i\sqrt{2N} P_{8f} P_V \frac{\beta_1 \beta_2 \beta_{12'}}{(\beta_1 + \beta_2)^2} \gamma \right\};$$



$$\Phi_{gg}^{gg} = -(N P_1 + P_0 - P_{27} + \frac{N}{2} P_{8d} + \frac{N}{2} P_{8f}) \left\{ (P_V + P_A + P_T) \left[ \frac{\beta_1}{\beta_1'} \left( \frac{\beta_1}{\beta_{11'}} \right) \gamma_{11'} + \frac{\beta_2}{\beta_2'} \left( \frac{\beta_2}{\beta_{22'}} \right) \gamma_{22'} \right] + \delta(\beta_{11'}) \left( \frac{1}{6} + \frac{N_f}{3N} \right) \right\} + (P_V + P_A) (\beta_1' \beta_2')^{-1} \left[ \beta_1 \beta_2 \gamma - (\beta_1 + \beta_1') (\beta_2 + \beta_2') \gamma_1 \right] + (P_V - P_A) \frac{\beta_{11'}^2}{\beta_1' \beta_2'} \gamma_1 \left\{ - (N P_1 + P_0 - P_{27} + \frac{N}{2} P_{8d} - \frac{N}{2} P_{8f}) \left\{ (P_V - P_A + P_T) \left[ \frac{\beta_1}{\beta_2'} \left( \frac{\beta_1}{\beta_{12'}} \right) \gamma_{12'} + \frac{\beta_2}{\beta_1'} \left( \frac{\beta_2}{\beta_{21'}} \right) \gamma_{21'} \right] + \delta(\beta_{12'}) \left( \frac{1}{6} + \frac{N_f}{3N} \right) \right\} + (P_V - P_A) (\beta_1' \beta_2')^{-1} \left[ \beta_1 \beta_2 \gamma - (\beta_1 + \beta_2') (\beta_2 + \beta_1') \gamma_2 \right] + (P_V + P_A) \frac{\beta_{12'}^2}{\beta_1' \beta_2'} \gamma_2 \right\} - N P_{8f} \left[ P_V \frac{\beta_{12} \beta_{12'}}{(\beta_1 + \beta_2)^2} + P_A \right] \frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_1' \beta_2'} \gamma;$$



$$\Phi_{qq}^{gg} = \Phi_{\bar{q}\bar{q}}^{gg} = -(N P_3 + P_6 - P_{15}) \left\{ (P_V + P_A + P_T) \left[ \left( \frac{\beta_1}{\beta_{11'}} \right) \gamma_{11'} + \frac{\beta_2}{\beta_2'} \left( \frac{\beta_2}{\beta_{22'}} \right) \gamma_{22'} \right] + \delta(\beta_{11'}) \left( \frac{1}{3} + \frac{N_f}{6N} \right) \right\} - (P_V + P_A) \frac{\beta_2 + \beta_2'}{\beta_2'} \gamma_1 \left\{ - \left( \frac{1}{N} P_3 + P_6 - P_{15} \right) \left[ (P_V + P_A) \frac{\beta_{12'}}{\beta_2'} \gamma_2 + P_T \frac{\beta_1}{\beta_2'} \gamma_{12'} \right] - \frac{N^2-1}{N} P_3 (P_V + P_A) \frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_2' (\beta_1 + \beta_2)} \gamma \right\} \quad (55)$$

Здесь

$$Y_1 = Y(\beta_1, -\beta_2, \beta_{11'}) = Y(-\beta_1, \beta_2, \beta_{22'}) ; Y_2 = Y(\beta_1, -\beta_2, \beta_{12'}) = Y(-\beta_1, \beta_2, \beta_{21'}) ;$$

$$Y = Y(\beta_1, -\beta_2) ; Y_{ik} = Y(\beta_i, \beta_{ik}) ; \beta_{ik} = \beta_i - \beta_k , \beta_{ik'} = \beta_i - \beta_k' . \quad (56)$$

Функции  $Y(\beta)$  даются формулой (47); нетрудно получить их явные выражения:

$$Y(\beta_1, \beta_2) = \frac{\theta(\beta_1) - \theta(\beta_2)}{\beta_1 - \beta_2} , Y(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\beta_1 Y(\beta_1, \beta_3) - \beta_2 Y(\beta_2, \beta_3)}{\beta_1 - \beta_2} . \quad (57)$$

Все импульсы предполагаются направленными вверх; стрелка на линии, указывающая вниз, отвечает антикварку. Ввиду сохранения импульса в формулах (55) подразумеваются равенства  $\beta_{11'} = -\beta_{22'} , \beta_{12'} = -\beta_{21}'$ . Обозначение  $(f/(\beta_i - \bar{\beta}))_+$  имеет смысл регуляризации функции  $f/(\beta_i - \bar{\beta})$ , сингулярной при  $\beta_i = \bar{\beta}$  (см. [5]):

$$\left(\frac{f}{\beta_i - \bar{\beta}}\right)_+ \equiv [1 - \delta(\beta_i - \bar{\beta})K] [\theta(\beta_i - \bar{\beta} - \varepsilon) + \theta(\beta_i + \bar{\beta} - \varepsilon)] \frac{f}{\beta_i - \bar{\beta}} , \quad (58)$$

$$K f(\beta_1, \beta_2, \beta_1', \beta_2') \equiv \int d\beta_1 d\beta_2 \delta(\beta_1 + \beta_2 - \beta_1' - \beta_2') f(\beta_1, \beta_2, \beta_1', \beta_2') ;$$

при интегрировании  $(f/(\beta_i - \bar{\beta}))_+$  с любой гладкой функцией параметра обрезания  $\varepsilon$  следует устремить к нулю. При нулевом переданном импульсе ( $\beta_2 = -\beta_1 = \beta , \beta_2' = -\beta_1' = \beta'$ ) функции (56) упрощаются:

$$Y \rightarrow \delta(\beta) , \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} Y \rightarrow \frac{1}{2} \delta(\beta) , \frac{\beta_1 \beta_2}{(\beta_1 + \beta_2)^2} Y \rightarrow \frac{1}{6} \delta(\beta) ,$$

$$Y_{11'} = Y_{22'} \rightarrow \frac{1}{\beta'} \theta , Y_{12'} = Y_{21'} \rightarrow \frac{1}{\beta'} \theta' , \quad (59)$$

$$Y_1 \rightarrow \frac{\beta - \beta'}{\beta'^2} \theta , Y_2 \rightarrow \frac{\beta + \beta'}{\beta'^2} \theta' ,$$

где

$$\theta = \theta(\beta) - \theta(\beta - \beta') , \theta' = -\theta(\beta) + \theta(\beta + \beta') , \quad (60)$$

и выражения для ядер (55) принимают вид:

$$\begin{aligned} \Phi_{qq}^{qq}(\beta|\beta') &= -\frac{1}{2} (Q_6 + Q_3) \left( \frac{N-1}{N} P_6 - \frac{N+1}{N} P_3 \right) \left\{ -(P_V + P_A + P_T) \left[ \frac{2}{\beta'} \left( \frac{\beta\theta}{\beta - \beta'} \right)_+ + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \delta(\beta - \beta') \right] + (P_V + P_A) \frac{\beta - \beta'}{\beta'^2} \theta \left. \right\} + \frac{1}{2} (Q_6 - Q_3) \left( \frac{N-1}{N} P_6 + \frac{N+1}{N} P_3 \right) \cdot \left\{ -(P_V - P_A + P_T) \cdot \right. \\ &\cdot \left[ \frac{2}{\beta'} \left( \frac{\beta\theta'}{\beta + \beta'} \right)_+ + \frac{1}{2} \delta(\beta + \beta') \right] + (P_V + P_A) \frac{\beta + \beta'}{\beta'^2} \theta' \left. \right\} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\bar{q}q}^{\bar{q}q}(\beta|\beta') &= (Q_1 + Q_8) \left( \frac{N-1}{N} P_1 - \frac{1}{N} P_8 \right) \left\{ -(P_V + P_A + P_T) \left[ \frac{2}{\beta'} \left( \frac{\beta\theta}{\beta - \beta'} \right)_+ + \frac{1}{2} \delta(\beta - \beta') \right] + \right. \\ &+ (P_V + P_A) \frac{\beta - \beta'}{\beta'^2} \theta \left. \right\} - \frac{2}{3} n_f Q_1 P_8 P_V \delta(\beta) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{gg}^{\bar{q}q}(\beta|\beta') &= -\frac{\sqrt{n_f}}{2} Q_1 \left\{ \left( \sqrt{\frac{N^2-1}{N}} P_1 + \sqrt{\frac{N^2-4}{2N}} P_{8d} - i\sqrt{\frac{N}{2}} P_{8f} \right) \left[ (P_V + P_A) \frac{\beta^2}{\beta'^4} + \right. \right. \\ &+ (P_V - P_A) \frac{(\beta - \beta')^2}{\beta'^4} \left. \right] \theta - \left( \sqrt{\frac{N^2-1}{N}} P_1 + \sqrt{\frac{N^2-4}{2N}} P_{8d} + i\sqrt{\frac{N}{2}} P_{8f} \right) \left[ (P_V - P_A) \frac{\beta^2}{\beta'^4} + \right. \\ &+ (P_V + P_A) \frac{(\beta + \beta')^2}{\beta'^4} \left. \right] \theta' + \frac{2}{3} i\sqrt{2N} P_{8f} P_V \frac{\delta(\beta)}{\beta'} \left. \right\} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{qq}^{gg}(\beta|\beta') &= -\sqrt{n_f} Q_1 \left\{ \left( \sqrt{\frac{N^2-1}{N}} P_1 + \sqrt{\frac{N^2-4}{2N}} P_{8d} + i\sqrt{\frac{N}{2}} P_{8f} \right) \left[ P_V + P_A + \right. \right. \\ &\left. (P_V - P_A) \frac{(\beta - \beta')^2}{\beta'^2} \right] \theta - \left( \sqrt{\frac{N^2-1}{N}} P_1 + \sqrt{\frac{N^2-4}{2N}} P_{8d} - i\sqrt{\frac{N}{2}} P_{8f} \right) \left[ P_V - P_A + (P_V + P_A) \frac{(\beta + \beta')^2}{\beta'^2} \right] \theta' ; \end{aligned}$$

$$\Phi_{gg}^{gg}(\beta|\beta') = (N P_1 + P_0 - P_{27} + \frac{N}{2} P_{8d} + \frac{N}{2} P_{8f}) \left\{ -(P_V + P_A + P_T) \left[ \frac{2\beta}{\beta'^2} \left( \frac{\beta\theta}{\beta - \beta'} \right)_+ + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \delta(\beta - \beta') \left( \frac{1}{6} + \frac{N_L}{3N} \right) + 2 \left[ P_V (\beta'^2 + \beta^2) + 2 P_A \beta \beta' \right] \frac{\beta - \beta'}{\beta'^4} \theta \left\{ + (N P_3 + P_6 - P_{15}) + \right. \\
& + \frac{N}{2} P_{8d} - \frac{N}{2} P_{8f} \left. \right\} - (P_V - P_A + P_T) \left[ - \frac{2\beta}{\beta'^2} \left( \frac{\beta \theta'}{\beta + \beta'} \right)_+ + \delta(\beta + \beta') \left( \frac{1}{6} + \frac{N_L}{3N} \right) \right] + \\
& + 2 \left[ P_V (\beta'^2 + \beta^2) + 2 P_A \beta \beta' \right] \frac{\beta + \beta'}{\beta'^4} \theta' \left. \right\}; \\
\Phi_{qq}^{qq}(\beta|\beta') & = (N P_3 + P_6 - P_{15}) \left\{ - (P_V + P_A + P_T) \left[ \frac{\beta + \beta'}{\beta'^2} \left( \frac{\beta \theta'}{\beta - \beta'} \right)_+ + \delta(\beta - \beta') \left( \frac{1}{6} + \frac{N_L}{3N} \right) \right] + \right. \\
& + (P_V + P_A) \frac{\beta'^2 - \beta^2}{\beta'^3} \theta \left. \right\} - \left( \frac{1}{N} P_3 + P_6 - P_{15} \right) \left\{ (P_V + P_A) \frac{\beta'^2 - \beta^2}{\beta'^3} - P_T \frac{\beta}{\beta'^2} \right\} \theta'. \quad (61)
\end{aligned}$$

Эти формулы в той части, которая соответствует бесцветным каналам  $P_1, P_V, P_1, P_A$ , фактически совпадают с полученными в работах [4, 5, It] (с точностью до несущественного множителя в переходных ядрах  $\Phi_{qq}^{qq}, \Phi_{qq}^{qq}$ ): Отметим, что выражения (61) могут быть записаны в виде линейной комбинации слагаемых вида  $\delta_{\beta, \beta'}$  представляющих собой скалярные произведения волновых функций, получаемых из трехчастичных вершин (45) при  $K_{21} = 0, \beta_2 = \beta', \beta_1 = \beta, z = \beta/\beta'$ .

### 6. Уравнения для моментов

Решение уравнения эволюции (41) в общем случае (при  $t = \ell > 2$ ) представляет большие трудности. Но задача упрощается, если от партонных корреляторов  $N$  как функций  $\beta$  перейти к их моментам; при этом система интегральных уравнений для функций нескольких переменных превращается в систему алгебраических линейных уравнений. Решая секулярное уравнение для этой системы, мы получим аномальные размерности для определенных линейных комбинаций операторов, перенормирующихся мультипликативно.

Определим момент партонного коррелятора следующим образом:

$$N^{\{z\}}(n_1, \dots, n_\ell) = \int N^{\{z\}}(\beta_1, \dots, \beta_\ell) \prod_{j=1}^{\ell} (\beta_j^{n_j} d\beta_j / (n_j + 1)!), \quad (62)$$

где  $n_j$  принимают целые неотрицательные значения (мы используем одно и то же обозначение для функций  $N^{\{z\}}$  в левой и правой части, различая их указанием аргументов). Множитель  $1/(n_j + 1)!$  введен для упрощения возникающих формул. Интегрирование в правой части (62) ведется по всем значениям  $\beta_j$ , как положительным, так и отрицательным; это означает, что суммируются вклады различных кинематических областей, каждой из которых отвечает свой партонный коррелятор (напомним, что изменение знака  $\beta$  переводит частицу из начального состояния в античастицу в конечном состоянии и наоборот). В действительности область изменения  $\beta$  является ограниченной; например, для глубоко-неупругого рассеяния  $|\beta_j| < 1$ . Отметим, что мы вводим избыточный набор моментов; используя соотношение (32), можно было бы уменьшить их число, но мы не будем делать этого, чтобы не нарушать симметрии между частицами. При нашем определении матрица аномальных размерностей вырождена: для данного полного момента  $j$  эта матрица содержит, в частности, те же собственные значения, что и аналогичная матрица для любого из моментов  $j' < j$ . Эти собственные значения отвечают оператором  $O_j \sim (2)^{j-j'} O_{j'}$ .

С учетом формулы (62) уравнения эволюции (41) могут быть переписаны в виде:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} N^{z_1 \dots z_\ell} (n_1, \dots, n_\ell) = \sum_{i < j} \sum_{z_i' z_j'} \sum_{n_i' n_j'} [\Phi_{z_i' z_j'}^{z_i z_j}]_{n_i' n_j'}^{n_i n_j} \delta_{n_i + n_j, n_i' + n_j' + \Delta S_{ij}} \quad (63)$$

$$N^{z_1 \dots z_i \dots z_j \dots z_\ell} (n_1, \dots, n_i', \dots, n_j', \dots, n_\ell),$$

где

$$\Delta S_{ij} = S_i' + S_j' - S_i - S_j \quad (64)$$

( $S_i$  - спин  $i$ -й частицы). Коэффициенты  $[\Phi_{z_i' z_j'}^{z_i z_j}]_{n_i' n_j'}^{n_i n_j}$  по определению связаны с ядрами (55) следующим преобразованием:

$$\int d\beta_1 d\beta_2 \frac{\beta_1^{n_1} \beta_2^{n_2}}{(n_1 + 1)! (n_2 + 1)!} \delta(\beta_1 + \beta_2 - \beta_1' - \beta_2') f(\beta_1, \beta_2, \beta_1', \beta_2') = \quad (65)$$

$$= \sum_{n'_1, n'_2} [f]_{n'_1, n'_2}^{n_1, n_2} \frac{(\beta'_1)^{n'_1} (\beta'_2)^{n'_2}}{(n'_1+1)! (n'_2+1)!}$$

В силу сохранения полного момента  $j$ ,  $n'_1 + n'_2 = n_1 + n_2$ , если отвлечься от несущественного сдвига на  $\Delta S_{ij} = \pm 1$  для переходных ядер (переводящих два глюона в кварк-антикварковую пару или наоборот) (см. (70)). Этот сдвиг возник из-за не совсем обычной нормировки спиноров и векторов (25); его можно было бы устранить переопределением моментов, но возникающие при этом дробные степени  $\beta$  затруднили бы объединенное рассмотрение областей с разными знаками  $\beta$ .

Используя выражения (57) для функций  $J$ , входящих в ядра (55), можно найти их преобразование, отвечающее определению (65):

$$[J]_{n'_1, n'_2}^{n_1, n_2} = \frac{(n'_1+1)(n'_2+1)}{(n_1+n_2+1)(n_1+1)(n_2+1)}; \quad \left[ \frac{\beta_1 \beta_2 J}{(\beta_1 + \beta_2)^2} \right]_{n'_1, n'_2}^{n_1, n_2} = \frac{(n'_1+1)(n'_2+1)}{(n_1+n_2+1)(n_1+n_2+2)(n_1+n_2+3)}$$

$$[J_{11'}]_{n'_1, n'_2}^{n_1, n_2} = [J_{12'}]_{n'_2, n'_1}^{n_1, n_2} = [J_{21'}]_{n'_1, n'_2}^{n_2, n_1} = [J_{22'}]_{n'_2, n'_1}^{n_2, n_1} = \frac{(\delta_{11} + \theta_{11})}{(n_1+1)(n_2+1)} (n'_2+1);$$

$$\left[ \left( \frac{\beta_1}{\beta_2} J_{11'} \right)_+ \right]_{n'_1, n'_2}^{n_1, n_2} = \left[ \left( \frac{\beta_1}{\beta_2} J_{12'} \right)_+ \right]_{n'_2, n'_1}^{n_1, n_2} = \left[ \left( \frac{\beta_2}{\beta_1} J_{21'} \right)_+ \right]_{n'_1, n'_2}^{n_2, n_1} = \left[ \left( \frac{\beta_2}{\beta_1} J_{22'} \right)_+ \right]_{n'_2, n'_1}^{n_2, n_1} =$$

$$= \delta_{11} (S_{n_1+1} - 1) - \frac{(n'_2+1) \theta_{11}}{(n_2+1)(n'_1-n_1)}; \quad (66)$$

$$[J_1]_{n'_1, n'_2}^{n_1, n_2} = [J_2]_{n'_2, n'_1}^{n_1, n_2} = (n_1+n_2+2)^{-1} \left[ \delta_{11} + \frac{n'_2+1}{n_2+1} \delta_{11} + \frac{n'_1+1}{n_1+1} \theta_{2'2} \right],$$

где

$$S_n = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m}; \quad \theta_{ik} = \theta(n'_i - n_k - \frac{1}{2}); \quad \delta_{ik} = \delta_{n'_i, n_k}. \quad (67)$$

В формулах (66) предполагается равенство  $n_1 + n_2 = n'_1 + n'_2$ , в противном случае выписанные величины обращаются в нуль. С помощью рекуррентных соотношений

$$[\beta_1 f]_{n'_1, n'_2}^{n_1, n_2} = (n_1+2) [f]_{n'_1, n'_2}^{n_1+1, n_2}, \quad [\beta_2 f]_{n'_1, n'_2}^{n_1, n_2} = (n_2+1) [f]_{n'_1, n'_2}^{n_1, n_2+1}, \quad (68)$$

$$[\beta_1' f]_{n'_1, n'_2}^{n_1, n_2} = (n_1+1) [f]_{n'_1-1, n'_2}^{n_1, n_2}, \quad [\beta_2' f]_{n'_1, n'_2}^{n_1, n_2} = (n_2+1) [f]_{n'_1, n'_2-1}^{n_1, n_2},$$

легко получаемых из определения преобразования (65), формулы (66) позволяют из (55) найти явные выражения для коэффициентов  $[\Phi_{z_i z_j}^{z_i z_j}]_{n'_i, n'_j}^{n_i, n_j}$ , входящих в (63):

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ \uparrow & \uparrow \\ \text{---} & \text{---} \\ 1' & 2' \end{matrix} : [\Phi_{qq}^{qq}]_{n'_1, n'_2}^{n_1, n_2} = [\Phi_{\bar{q}\bar{q}}^{\bar{q}\bar{q}}]_{n'_1, n'_2}^{n_1, n_2} = -\frac{1}{2} (Q_6 + Q_3) \left( \frac{N-1}{N} P_6 - \frac{N+1}{N} P_3 \right) \{ (P_T + P_V + P_A) \cdot$$

$$\cdot \left[ -\delta_{11} \left( S_{n_1+1} + S_{n_2+1} - \frac{3}{2} \right) + \frac{(n'_2+1) \theta_{1'1}}{(n_2+1)(n'_1-n_1)} + \frac{(n'_1+1) \theta_{2'2}}{(n_1+1)(n_2-n_2)} \right] + \frac{P_V + P_A}{n_1+n_2+2} (\delta_{1'1} +$$

$$+ \frac{n'_2+1}{n_2+1} \theta_{1'1} + \frac{n'_1+1}{n_1+1} \theta_{2'2}) \} + \frac{1}{2} (Q_6 - Q_3) \left( \frac{N-1}{N} P_6 + \frac{N+1}{N} P_3 \right) \{ (P_T + P_V - P_A) \left[ -\delta_{1'2} \left( S_{n_1+1} + \right. \right.$$

$$\left. + S_{n_2+1} - \frac{3}{2} \right) + \frac{(n'_2+1) \theta_{1'2}}{(n_1+1)(n_1-n_2)} + \frac{(n'_1+1) \theta_{2'1}}{(n_2+1)(n_2-n_1)} \right] + \frac{P_V - P_A}{n_1+n_2-2} (\delta_{1'2} +$$

$$+ \frac{n'_2+1}{(n_2+1)} \theta_{1'1} + \frac{(n'_1+1) \theta_{2'2}}{(n_1+1)} \theta_{2'2} \} - 4 n_1 Q_1 P_3 P_V \frac{(n'_1+1)(n'_2+1)}{(n_1+n_2+1)(n_1+n_2+2)(n_1+n_2+3)};$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ \uparrow & \uparrow \\ \text{---} & \text{---} \\ 1' & 2' \end{matrix} : [\Phi_{gg}^{gg}]_{n'_1, n'_2}^{n_1, n_2} = -[\Phi_{g\bar{g}}^{g\bar{g}}]_{n'_1, n'_2}^{n_1, n_2} = -\frac{1}{2} n_1 Q_1 \left\{ \left( \sqrt{\frac{N^2-1}{N}} P_1 + \sqrt{\frac{N^2-4}{2N}} P_{8d} - \right. \right.$$

$$-i\sqrt{\frac{N}{2}}P_{8f}) \left[ \frac{P_A}{n_1+n_2+2} \left( \frac{(n_2'+1)}{(n_2+1)(n_1'+2)} \theta_{22'} - \frac{(n_1'+1)}{(n_1+1)(n_2'+2)} \theta_{11'} \right) + \frac{P_V}{(n_1+n_2+1)(n_1+n_2+2)} \right. \\ \left. \cdot \frac{n_2'+1}{n_1'+2} \left( 1 - \frac{n_1}{n_2+1} + 4 \frac{n_1'+1}{n_1+n_2+3} \right) \theta_{22'} - \frac{n_1'+1}{n_2'+2} \left( 1 - \frac{n_2}{n_1+1} + 4 \frac{n_2'+1}{n_1+n_2+3} \right) \theta_{11'} + \right. \\ \left. + (P_{8f} \rightarrow -P_{8f}, P_A \rightarrow -P_A, n_1' \leftrightarrow n_2') \right];$$

$$\left[ \Phi_{\bar{q}q}^{gg} \right]_{n_1' n_2'}^{n_1 n_2} = -\sqrt{n_f} Q_1 \left\{ \left( \sqrt{\frac{N^2-1}{N}} P_1 + \sqrt{\frac{N^2-4}{2N}} P_{8d} + i\sqrt{\frac{N}{2}} P_{8f} \right) \right. \\ \left. \cdot \left[ \frac{P_A}{n_1'+n_2'+2} \left( \frac{(n_1'+1)(n_2'+2)}{n_1+1} \theta_{2'2} - \frac{(n_2'+1)(n_1+2)}{n_2+1} \theta_{1'1} \right) + P_V \frac{(n_1'+1)(n_2'+1)}{(n_1'+n_2'+2)(n_1'+n_2'+1)} \left( \frac{n_2+2}{n_1+1} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left( 1 - \frac{n_1'}{n_2'+1} + 4 \frac{n_1+1}{n_1'+n_2'+3} \right) \theta_{2'2} - \frac{n_1+2}{n_2+1} \left( 1 - \frac{n_2'}{n_1'+1} + 4 \frac{n_2+1}{n_1'+n_2'+3} \right) \theta_{1'1} \right) + \right. \\ \left. + (P_{8f} \rightarrow -P_{8f}, P_A \rightarrow -P_A, n_1 \leftrightarrow n_2) \right];$$

$$\left[ \Phi_{\bar{q}q}^{gg} \right]_{n_1' n_2'}^{n_1 n_2} = (N P_1 + P_0 - P_{27} + \frac{N}{2} P_{8d} + \frac{N}{2} P_{8f}) \left\{ -(P_T + P_V + P_A) \left[ \delta_{1'1} (S_{n_1'+2} + \right. \right. \\ \left. \left. S_{n_2'+2} - \frac{1}{6} + \frac{n_f}{3N}) - \frac{(n_2'+1)(n_1+2) \theta_{1'1}}{(n_2+1)(n_1'+2)(n_1'-n_1)} - \frac{(n_1'+1)(n_2+2) \theta_{2'2}}{(n_1+1)(n_2'+2)(n_2'-n_2)} \right] + 2P_A \left[ \frac{1}{n_1+n_2+3} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(n_1'-n_1) \theta_{1'1}}{(n_2+1)(n_1'+2)} - \frac{(n_2'-n_2) \theta_{2'2}}{(n_1+1)(n_2'+2)} \right] + \frac{2P_V}{n_1+n_2+2} \left[ 1 + \frac{(n_1+1)(n_2'+1) + (n_1'+1)(n_2+1)}{(n_1+n_2+3)(n_1+n_2+4)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \left( \frac{n_1+n_2+2}{(n_1+n_2+4)(n_1'+2)} + \frac{1}{(n_2+1)} \right) (n_1'-n_1) \theta_{1'1} - \left( \frac{n_1+n_2+2}{(n_1+n_2+4)(n_2'+2)} + \frac{1}{(n_1+1)} \right) (n_2'-n_2) \theta_{2'2} \right] \right\} + \\ + (P_{8f} \rightarrow -P_{8f}; P_A \rightarrow -P_A, n_1 \leftrightarrow n_2);$$

$$\left[ \Phi_{\bar{q}q}^{gg} \right]_{n_1' n_2'}^{n_1 n_2} = \left[ \Phi_{\bar{q}q}^{gg} \right]_{n_1' n_2'}^{n_1 n_2} = (N P_3 + P_6 - P_{15}) \left\{ (P_T + P_V + P_A) \right. \quad (69)$$

$$\left[ -\delta_{1'1} (S_{n_1'+2} + S_{n_2'+2} - \frac{5}{3} + \frac{n_f}{6N}) + \frac{(n_2'+1) \theta_{1'1}}{(n_2+1)(n_1'+n_1)} + \frac{(n_1'+1)(n_2+2) \theta_{2'2}}{(n_1+1)(n_2'+2)(n_2'-n_2)} + (P_V + P_A) \right. \\ \left. \cdot \left[ \frac{n_1'+2}{n_1+n_2+3} - \frac{n_1(n_1'+1)}{(n_1+1)(n_1+n_2+2)} - \frac{(n_1'-n_1) \theta_{1'1}}{(n_1+1)(n_2+1)} - \frac{(n_2'-n_2) \theta_{2'2}}{(n_1+1)(n_2'+2)} \right] \right\} - \left( \frac{1}{N} P_3 + P_6 - P_{15} \right) \cdot \\ \left\{ P_T \frac{(n_1'+1)(\theta_{2'1} + \delta_{2'1})}{(n_2+1)(n_2'+2)} + \frac{P_V + P_A}{n_1+n_2+2} \left[ -\frac{n_1'+2}{n_1+n_2+3} + \frac{(n_1'-n_2) \theta_{1'2}}{n_1+1} - \frac{n_1'(n_2'-n_1) \theta_{2'1}}{(n_2+1)(n_2'+2)} \right] \right\}$$

Индексы  $n_i, n_i'$  в формулах (69) связаны соотношением

$$n_1 + n_2 - n_1' - n_2' = \Delta S_{12}. \quad (70)$$

### 7. Факторизация и другие свойства парных ядер

Выражения (69) для матриц  $\left[ \Phi \right]_{n_1' n_2'}^{n_1 n_2}$  можно записать в более компактном факторизованном виде, если произвести их диагонализацию. При этом вся существенная информация содержится в собственных значениях этих матриц — аномальных размерностях операторов твиста 2, в то время как матрицы поворота, приводящие их к диагональному виду, определяются некоторым общим свойством теории — конформной инвариантностью.

Из двухчастичных операторов вида (I3)–(I5) можно составить определенные линейные комбинации (при фиксированном  $n_1+n_2$ ), отвечающие неприводимым представлениям конформной группы. Известно, [I3], что такие конформные операторы перенормируются мультипликативно в однопетлевом приближении. Поскольку каждое парное ядро  $\Phi_{2'2'}^{2'2'}(\beta_1, \beta_2 | \beta_1', \beta_2')$  описывает перенормировку некоторого двухчастичного оператора, то матричные элементы соответствующих конформных операторов являются собственными функциями этих ядер. Таким образом, собственные функции имеют вид однородных полиномов  $\sum_k C_k \beta_1^k \beta_2^{n-k}$  с коэффициентами  $C_k$ , определяемыми из условия конформности. Эти полиномы для системы двух фермионов, двух глюонов и системы кварк-глюон, соответственно имеют вид [I4] (с точностью до нормировки):

$$R_{n+1}^{qq}(\beta_1, \beta_2) = \sum_{k=0}^n \frac{n!(n+2)! (-1)^k \beta_1^k \beta_2^{n-k}}{k!(k+1)!(n-k)!(n-k+1)!};$$



$$R_{n+2}^{gg}(\beta_1, \beta_2) = \sum_{k=0}^n \frac{n!(n+4)!(-1)^{k+1} \beta_1^k \beta_2^{n-k}}{k!(k+2)!(n-k)!(n-k+2)!}; \quad (71)$$

$$R_{n+\frac{3}{2}}^{gg}(\beta_1, \beta_2) = \sum_{k=0}^n \frac{n!(n+3)!(-1)^k \beta_1^k \beta_2^{n-k}}{k!(k+1)!(n-k)!(n-k+2)!}.$$

Здесь через  $n$  обозначена степень полинома по  $\beta$ , то есть число производных в соответствующем операторе; нижний индекс у  $R$  в левой части отвечает спину оператора  $j = n + s_1 + s_2$ . Относительная нормировка полиномов  $R^{gg}$  и  $R^{gg}$  выбрана так, чтобы при  $\beta_1 + \beta_2 = 0$  выполнялось соотношение  $\beta_2 R_j^{gg} = R_j^{gg}$ .

Используя выражения (55) для ядер  $\Phi$ , можно убедиться, что полиномы (71) удовлетворяют уравнениям:

$$\int d\beta_1 d\beta_2 \delta(\beta_1 + \beta_2 - \beta'_1 - \beta'_2) R_j^{z_1 z_2}(\beta_1, \beta_2) \Phi_{z'_1 z'_2}^{z_1 z_2}(\beta_1, \beta_2 | \beta'_1, \beta'_2) = \Lambda_{z'_1 z'_2}^{z_1 z_2}(j) R_j^{z'_1 z'_2}(\beta'_1, \beta'_2). \quad (72)$$

Собственные числа  $\Lambda_{z'_1 z'_2}^{z_1 z_2}(j)$ , которые определяют аномальные размерности вышеуказанных двухчастичных конформных операторов, имеют следующий вид для разных ядер:

$$\begin{aligned} \uparrow \uparrow &= \frac{1}{2}(Q_6 + Q_3) \left( \frac{N-1}{N} P_6 - \frac{N+1}{N} P_3 \right) \left[ (P_V + P_A + P_T) \left( 2S_j - \frac{3}{2} \right) - \frac{P_V + P_A}{j(j+1)} \right] + \\ &+ \frac{1}{2}(-1)^j (Q_6 - Q_3) \left( \frac{N-1}{N} P_6 + \frac{N+1}{N} P_3 \right) \left[ (P_V + P_T - P_A) \left( 2S_j - \frac{3}{2} \right) - \frac{P_V - P_A}{j(j+1)} \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \uparrow \downarrow &= -(Q_1 + Q_8) \left( \frac{N-1}{N} P_1 - \frac{1}{N} P_8 \right) \left[ (P_V + P_T + P_A) \left( 2S_j - \frac{3}{2} \right) - \frac{P_V + P_A}{j(j+1)} \right] - \\ &- \frac{2}{3} n_P Q_1 P_8 P_V \delta_{j1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \uparrow \uparrow &= \frac{1}{2} n_P Q_1 \left\{ \left( \sqrt{\frac{N-1}{N}} P_1 + \sqrt{\frac{N-4}{2N}} P_{8d} - i \sqrt{\frac{N}{2}} P_{8f} \right) \frac{1}{j(j+1)} \left[ (j-1)(P_V + P_A) + \frac{4P_V}{j+2} \right] + \right. \\ &\left. + (-1)^j \left( \sqrt{\frac{N-1}{N}} P_1 + \sqrt{\frac{N-4}{2N}} P_{8d} + i \sqrt{\frac{N}{2}} P_{8f} \right) \frac{1}{j(j+1)} \left[ (j-1)(P_V - P_A) + \frac{4P_V}{j+2} \right] + \frac{2}{3} i \sqrt{2N} P_{8f} P_V \delta_{j1} \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \uparrow \downarrow &= \sqrt{n_P} Q_1 \left\{ \left( \sqrt{\frac{N-1}{N}} P_1 + \sqrt{\frac{N-4}{2N}} P_{8d} + i \sqrt{\frac{N}{2}} P_{8f} \right) \frac{1}{j(j+1)} \left[ (j+2)(P_V + P_A) + \frac{4P_V}{j-1} \right] + \right. \\ &\left. + (-1)^j \left( \sqrt{\frac{N-1}{N}} P_1 + \sqrt{\frac{N-4}{2N}} P_{8d} - i \sqrt{\frac{N}{2}} P_{8f} \right) \frac{1}{j(j+1)} \left[ (j+2)(P_V - P_A) + \frac{4P_V}{j-1} \right] \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \uparrow \uparrow &= -(N P_1 + P_0 - P_{27} + \frac{N}{2} P_{8d} + \frac{N}{2} P_{8f}) \left[ (P_V + P_A + P_T) \left( 2S_j - \frac{11}{6} + \frac{n_P}{3N} \right) - \right. \\ &- \frac{4}{j(j+1)} \left( P_V + P_A + \frac{3P_V}{(j-1)(j+2)} \right) \left. \right] + (-1)^{j+1} (N P_1 + P_0 - P_{27} + \frac{N}{2} P_{8d} - \frac{N}{2} P_{8f}) \left[ (P_V - P_A + P_T) \left( 2S_j - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{11}{6} + \frac{n_P}{3N} \right) - \frac{4}{j(j+1)} \left( P_V - P_A + \frac{3P_V}{(j-1)(j+2)} \right) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \uparrow \downarrow &= -(N P_3 + P_6 - P_{15}) \left[ (P_V + P_A + P_T) \left( 2S_{j-\frac{1}{2}} + \frac{2}{2j+1} - \frac{5}{3} + \frac{n_P}{6N} \right) - \right. \\ &- (P_V + P_A) \frac{2}{(j-\frac{1}{2})(j+\frac{3}{2})} \left. \right] + \left( \frac{1}{N} P_3 + P_6 - P_{15} \right) \frac{(-1)^{j-\frac{1}{2}}}{j+\frac{1}{2}} \left[ P_T - \frac{2(P_V + P_A)}{(j-\frac{1}{2})(j+\frac{3}{2})} \right]. \quad (73) \end{aligned}$$

Полиномы (71) удовлетворяют соотношениям ортогональности

$$\langle \beta_1^{2s_1} \beta_2^{2s_2} R_j^{z_1 z_2} R_{j'}^{z_1 z_2} \rangle = \frac{\delta_{jj'}}{n_{z_1 z_2}^{z_1 z_2}} (\beta_1 + \beta_2)^{2j+1},$$

$$\langle R(\beta_1, \beta_2) \rangle \equiv \int_{-\beta_1}^{\beta_2} d\beta f(\beta_1 + \beta, \beta_2 - \beta), \quad (74)$$

где нормировочные константы  $n_{z_1 z_2}^{z_1 z_2}$  равны

$$n_j^{gg} = \frac{j(2j+1)}{j+1}, \quad h_j^{gg} = \frac{j(j-1)(2j+1)}{(j+1)(j+2)}; \quad h_j^{gg} = \frac{4j^2 - 1}{2j+3} \quad (75)$$

Используя эти соотношения, можно разложить произведение  $\beta_1^{n_1} \beta_2^{n_2}$  по однородным полиномам вида  $(\beta_1 + \beta_2)^i R_j(\beta_1, \beta_2)$  :

$$\beta_1^{n_1} \beta_2^{n_2} = \sum_j A_{n_1 n_2}^j (\beta_1 + \beta_2)^{n_1 + n_2 - j + s} R_j^{z_1 z_2}(\beta_1, \beta_2), \quad (76)$$

$$A_{n_1 n_2}^j = h_j^{z_1 z_2} \frac{\langle \beta_1^{n_1 + 2s_1} \beta_2^{n_2 + 2s_2} R_j^{z_1 z_2} \rangle}{(\beta_1 + \beta_2)^{n_1 + n_2 + j + s + 1}}, \quad (77)$$

где  $s = s_1 + s_2$  (правая часть в (77) фактически не зависит от  $\beta_1, \beta_2$ ). С помощью явных выражений (71) для  $R_j^{z_1 z_2}$  можно выполнить содержащееся в (77) интегрирование и записать результат в виде обобщенной гипергеометрической функции  ${}_3F_2$  от единичного аргумента, которую можно также выразить через обычный коэффициент Клебша-Гордана  $C_{\ell_1 m_1, \ell_2 m_2}^{\ell m}$  [15]. Если обозначить

$$\chi_n^z(\beta) = \frac{1}{(n+1)!} \beta^n \alpha_z(n), \quad \alpha_q(n) = \sqrt{n+1}, \quad \alpha_g(n) = \sqrt{\frac{n+1}{n+2}},$$

$$U_{n,j}^{z_1 z_2}(\beta_1, \beta_2) = (\beta_1 + \beta_2)^{n-j+s} R_j^{z_1 z_2}(\beta_1, \beta_2) \left[ h_j^{z_1 z_2} ((n+s-j)!(n+s+1-j)!) \right]^{-1/2} \quad (78)$$

то разложение (76) примет вид

$$\chi_{n_1}^{z_1}(\beta_1) \chi_{n_2}^{z_2}(\beta_2) = \sum_j (V^{z_1 z_2})_{n_1 n_2}^j U_{n_1 + n_2, j}^{z_1 z_2}(\beta_1, \beta_2), \quad (79)$$

$$(V^{z_1 z_2})_{n_1 n_2}^j = (-1)^{n_1 + 2s_1 - 1} C_{\frac{n_1 + n_2}{2}, \frac{n_2 - n_1}{2}, \frac{n_1 + n_2}{2} + s, \frac{n_1 - n_2}{2} + \Delta s}^{j, \Delta s}, \quad (80)$$

где  $s = s_1 + s_2, \Delta s = s_1 - s_2, S_q = \frac{1}{2}, S_g = 1$ . Обратное разложение, которое нетрудно получить из (71) и (78), содержит те же самые матрицы  $V$  :

$$U_{n,j}^{z_1 z_2}(\beta_1, \beta_2) = \sum_k (V^{z_1 z_2})_{k, n-k}^j \chi_k^{z_1}(\beta_1) \chi_{n-k}^{z_2}(\beta_2). \quad (81)$$

Значения, пробегаемые индексом суммирования в (79) и (81), оп-

ределяются правилами сложения моментов, входящих в коэффициент Клебша-Гордана (80).

Подставляя разложение (79) с учетом (78) в (65) и принимая во внимание соотношение (72), можно выражения (69) для ядер

$$\left[ \Phi_{z_1' z_2'}^{z_1 z_2} \right]_{n_1' n_2'}^{n_1 n_2} \quad \text{переписать в факторизованном виде:}$$

$$\left[ \Phi_{z_1' z_2'}^{z_1 z_2} \right]_{n_1' n_2'}^{n_1 n_2} = \frac{\alpha_{z_1'}(n_1') \alpha_{z_2'}(n_2')}{\alpha_{z_1}(n_1) \alpha_{z_2}(n_2)} \sum_j (V^{z_1 z_2})_{n_1 n_2}^j (V^{z_1' z_2'})_{n_1' n_2'}^j \Lambda_{z_1' z_2'}^{z_1 z_2}(j) \left( \frac{j+1}{j-1} \right)^{\frac{\Delta s_{12}}{2}}, \quad (82)$$

где  $\Delta s_{12}$  дается формулами (64) и (70), а  $\Lambda_{z_1' z_2'}^{z_1 z_2}(j)$  приведены в (73). Отметим, что матрицы  $V^{z_1 z_2}$  в (82) различны для разных сортов частиц 1, 2, но не зависят от их аромата цвета или спиральности, которые входят только в  $\Lambda_{z_1' z_2'}^{z_1 z_2}(j)$ .

Учитывая, что каждая из трех систем полиномов (71), рассматриваемых как функции одной переменной  $(\beta_1 - \beta_2)$  при фиксированном значении  $(\beta_1 + \beta_2)$ , обладает свойством полноты, [16] мы можем для ядер (55) с помощью соотношений (72) и (74) получить следующее представление:

$$\Phi_{z_1' z_2'}^{z_1 z_2}(\beta_1, \beta_2 | \beta_1', \beta_2') = \sum_j h_j^{z_1 z_2} \Lambda_{z_1' z_2'}^{z_1 z_2}(j) \frac{\beta_1^{2s_1} \beta_2^{2s_2}}{(\beta_1 + \beta_2)^{2j+1}} \quad (83)$$

$$\cdot R_j^{z_1 z_2}(\beta_1, \beta_2) R_j^{z_1' z_2'}(\beta_1', \beta_2'),$$

справедливое в области  $\beta_i > 0, \beta_i' > 0, \beta_1 + \beta_2 = \beta_1' + \beta_2'$ . В случае разных знаков  $\beta_i$  формула (83) обобщается путем замены суммы на интеграл типа Зоммерфельда-Ватсона с соответствующим аналитическим продолжением по  $j$  ;

Ряд свойств парных ядер  $\Phi_{z_1' z_2'}^{z_1 z_2}$  вытекает из наличия в теории сохраняющихся операторов; поскольку их аномальные размерности равны нулю, то для ядер  $\Phi(\beta)$  должны выполняться определенные интегральные соотношения (правила сумм). Так, сохранение бесцветных векторного и аксиального токов означает, что вклады в  $(\Lambda_{q\bar{q}}^{q\bar{q}})_j$ , пропорциональные  $R_V$  и  $R_A$ , обращаются в нуль при  $j = 1$ . Аналогичным образом сохранение тензора энергии-импульса приводит к тому, что в матрице

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{q\bar{q}}^{q\bar{q}} & \Lambda_{g\bar{g}}^{q\bar{q}} \\ \Lambda_{q\bar{q}}^{g\bar{g}} & \Lambda_{g\bar{g}}^{g\bar{g}} \end{pmatrix} \quad (84)$$

одно из собственных значений, отвечающих проектору  $Q_i P_i P_i$ , обращается в нуль при  $j = 2$ . Формулы (73), как можно проверить, удовлетворяют указанным условиям.

Более сложным является вопрос о сохранении цветных векторного и аксиального токов, поскольку эти величины не являются калибровочно-инвариантными. Аномальные размерности таких токов формально содержат инфракрасные расходимости, возникающие за счет перенормировочных вкладов (см. (37), (38)). Переопределение с помощью (39) делает аномальные размерности конечными, но, поскольку такая процедура неоднозначна, их обращение в нуль при  $j = 1$  не является обязательным. Формулы (71) показывают, что это условие выполняется для тех цветных состояний, которые по своим квантовым числам отличаются от глюона (это прежде всего состояния  $Q_{3,6,8} P_{V,A}$  с несинглетным ароматом, а также синглетное состояние  $Q_1 P_3 P_A$ ), но оно нарушается для состояния  $Q_1 P_3 P_V$ , в котором разрешен переход через один глюон (график рис.5,в). В последнем случае матрица смешивания (82) имеет сингулярность при  $j = 1$ , так что одно из ее собственных значений обращается в бесконечность, другое же конечно, но отлично от нуля. Заметим, что оно становится нулевым, если мы отбросим вклад одноглюонного графика рис.5в.

Ряд свойств парных ядер вытекает из их сопоставления с соответствующими выражениями для суперсимметричной теории, где кварки являются майорановскими и преобразуются по присоединенному представлению цветовой группы. В последнем случае возникает большое число соотношений, связывающих канал рассеяния (ядро  $\phi_{q\bar{q}}^{q\bar{q}}$ ) с аннигиляционным (ядра  $\phi_{q\bar{q}}^{q\bar{q}}$ ,  $\phi_{g\bar{g}}^{q\bar{q}}$  и т.д.). Переход от суперсимметричной теории к КХД в однопетлевом приближении по существу сводится к тривиальной замене цветных множителей, в то время как функции, определяющие зависимость ядер от  $\beta$  или от  $j$ , остаются теми же самыми; поэтому после выделения цветных множителей соотношения остаются справедливыми и для КХД. Примером являются соотношения Докшицера [12]

$$\left[ \phi_{q\bar{q}}^{q\bar{q}}(\beta) + \phi_{q\bar{q}}^{g\bar{g}}(\beta) - \phi_{g\bar{g}}^{q\bar{q}}(\beta) - \phi_{g\bar{g}}^{g\bar{g}}(\beta) \right]_{V,A,T} = 0 \quad (85)$$

где ядра  $\phi_{z_1 z_2}^{z_1 z_2}(\beta)$  даются формулами (61) при  $\beta' = 1$  с отбрасыванием множителей, содержащих проекторы аромата и цвета (для суперсимметричной теории эти множители одинаковы во всех каналах). Индекс  $V, A$  или  $T$  соответствует одному из спиральных проекторов. Подробное рассмотрение показывает, что между 8 элементами двух матриц (84), соответствующих каналам  $P_V$  и  $P_A$ , имеется 6 связей, так что только два из них являются независимыми. Это дает, помимо (85), также следующие соотношения:

$$\left( \beta \frac{d}{d\beta} - 2 \right) \left[ \phi_g^q(\beta) \right]_{V,A} = \left( \beta \frac{d}{d\beta} + 1 \right) \left[ \phi_q^g(\beta) \right]_{V,A}; \quad (86)$$

$$\left[ \phi_q^q(\beta) - \phi_g^g(\beta) \right]_{V \pm A} = \pm \beta \left[ \phi_q^q(\beta) + \phi_q^g(\beta) \right]_{V \pm A}. \quad (87)$$

Вывод формул (85)–(87) будет приведен в отдельной работе.

### 8. Уравнения эволюции для операторов твиста 3

Как уже отмечалось, разработанная техника применима к рассмотрению КПО произвольного твиста. Ввиду недостатка места мы здесь ограничимся ее иллюстрацией на примере операторов твиста 3, возникающих в задаче о глубоко-неупругом рассеянии на поляризованной мишени [6]. В следующей работе будет рассмотрен случай операторов твиста 4.

В работах [6] показано, что операторы твиста 3, встречающиеся в поляризованном глубоко-неупругом рассеянии, могут быть сведены к КПО вида (10). Матричные элементы (29) таких операторов выражаются через трехчастичные партонные корреляторы двух видов:

$$N^{\bar{q}qg}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \equiv N(\beta_1, \beta_2, \beta_3), \quad N^{g\bar{q}q}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \equiv M(\beta_1, \beta_2, \beta_3). \quad (88)$$

Уравнения эволюции (4I) для них имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{N}^{z_1 z_2 z_3}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = & \sum_{\{z_i'\}} \int d\beta \left[ \Phi_{z_1' z_2'}^{z_1 z_2}(\beta_1, \beta_2 | \beta_1 + \beta, \beta_2 - \beta) N^{z_1' z_2' z_3}(\beta_1 + \beta, \beta_2 - \beta, \beta_3) \right. \\ & + \Phi_{z_1' z_3'}^{z_1 z_3}(\beta_1, \beta_3 | \beta_1 + \beta, \beta_3 - \beta) N^{z_1' z_2' z_3}(\beta_1 + \beta, \beta_2, \beta_3 - \beta) + \\ & \left. + \Phi_{z_2' z_3'}^{z_2 z_3}(\beta_2, \beta_3 | \beta_2 + \beta, \beta_3 - \beta) N^{z_1' z_2' z_3}(\beta_1, \beta_2 + \beta, \beta_3 - \beta) \right]; \end{aligned} \quad (89)$$

(точка над  $N$  означает производную по  $\bar{\xi}$ ). По цвету корреляторы (88) являются синглетными, что касается аромата, то по нему кварковые корреляторы  $N$  возможны двух типов — синглетного и октетного (для группы  $SU(3)$ ). Обращаясь к спиральному составу корреляторов (88) заметим, что матричные элементы операторов (10) отличны от нуля только при условии, что спиральность одного из партонов противоположна по знаку спиральностям двух других партонов; в частности, должны быть противоположными спиральности кварка и антикварка. Кроме того, сохранение четности приводит к вырождению относительно изменения знаков спиральностей всех трех частиц. Поэтому вместо 8 возможных комбинаций спиральностей мы можем ограничиться рассмотрением для коррелятора  $M$  лишь трех из них:  $(+-)$ ,  $(+ -)$ ,  $(- +)$ , а для коррелятора  $N$  — лишь двух последних. Далее тождественность глюонов означает, что все глюонные корреляторы связаны соотношениями:

$$\begin{aligned} M^{+-}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = -M^{+-}(\beta_2, \beta_1, \beta_3) = M^{+-}(\beta_2, \beta_3, \beta_1) = \\ = -M^{+-}(\beta_1, \beta_3, \beta_2) = M^{+-}(\beta_3, \beta_1, \beta_2) = -M^{+-}(\beta_3, \beta_2, \beta_1) \end{aligned} \quad (90)$$

(минус при перестановках возникает за счет антисимметрии цветовой структуры).

Таким образом, из всех корреляторов (88) мы должны рассмотреть следующие:

$$N_8^{-++}, N_8^{+-+}, N_1^{-++}, N_1^{+-+}, M^{-++}, \quad (91)$$

где нижний индекс указывает аромат. В уравнениях эволюции первые два коррелятора отщепляются от трех последних. Поскольку ядро  $\Phi_{\bar{q}q}^{qq}$  и октетная ( $\sim Q_8$ ) часть ядра  $\Phi_{\bar{q}q}^{\bar{q}q}$ , как видно из (55), содержат спиральные проекторы только в комбинации  $P_V + P_A$ , сохраняющей спиральности частиц, то первые два из корреляторов (91) не смешиваются между собой. Учитывая, кроме того, сохранение зарядовой четности и вытекающие из него свойства симметрии ядер относительно обращения кварковой линии (см. (55)), мы получим для корреляторов  $N_8^{-++}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  и  $N_8^{+-+}(\beta_2, \beta_1, \beta_3)$  одинаковые уравнения эволюции. Для трех последних корреляторов (91) сохранение зарядовой четности приводит к отщеплению комбинации  $N_1^{-++}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) - N_1^{+-+}(\beta_2, \beta_1, \beta_3)$ , которая не входит в выражения для матричных элементов операторов (10).

Итак, нам достаточно рассмотреть следующие три коррелятора:

$$\begin{aligned} N_8^{-++}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) & \equiv N_8(\beta_1, \beta_2, \beta_3); \\ N_1^{-++}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) + N_1^{+-+}(\beta_2, \beta_1, \beta_3) & \equiv N_1(\beta_1, \beta_2, \beta_3); \\ M^{-++}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) & \equiv M(\beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{aligned} \quad (92)$$

из которых первый не смешивается с двумя последними.

Выписать для этих корреляторов уравнения эволюции (89) в явном виде не составляет труда. Мы не будем этого делать, а перейдем к уравнениям для моментов (63). Они имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{N}_1(n_1, n_2, n_3) = & \sum_{\{n_i'\}} \left\{ [(\Phi_{\bar{q}q}^{\bar{q}q})_{V+A}]_{n_1' n_2'}^{n_1 n_2} N_1(n_1', n_2', n_3) + [(\Phi_{\bar{q}q}^{\bar{q}q})_{V-A}]_{n_1' n_2'}^{n_1 n_2} \right. \\ & \cdot N_1(n_2', n_1', n_3) + [(\Phi_{qg}^{qg})_{V+A}]_{n_1' n_3'}^{n_1 n_3} N_1(n_1', n_2', n_3) + [(\Phi_{qg}^{qg})_T]_{n_2' n_3'}^{n_2 n_3} N_1(n_1', n_2', n_3) \\ & \left. + 4 [(\Phi_{qg}^{\bar{q}q})_{V+A}]_{n_1' n_2'}^{n_1 n_2} M(n_1', n_2', n_3) \right\}; \end{aligned} \quad (93)$$

$$\begin{aligned} \dot{M}(n_1, n_2, n_3) = & \sum_{\{n_i'\}} \left\{ 2 \left[ \left( \Phi_{gg}^{gg} \right)_{V+A} \right]_{n_1' n_2'}^{n_1 n_2} M(n_1', n_2', n_3) + 2 \left[ \left( \Phi_{gg}^{gg} \right)_{V+A} \right]_{n_1' n_3'}^{n_1 n_3} \right. \\ & \cdot M(n_1', n_2, n_3') + \left[ \left( \Phi_{gg}^{gg} \right)_{V+A} \right]_{n_2' n_3'}^{n_2 n_3} M(n_1, n_2', n_3') + \\ & \left. + \left[ \left( \Phi_{gg}^{gg} \right)_{V+A} \right]_{n_1' n_2'}^{n_1 n_2} N_1(n_1', n_2', n_3) + \left[ \left( \Phi_{gg}^{gg} \right)_{V+A} \right]_{n_1' n_3'}^{n_1 n_3} N_1(n_1', n_3', n_2) \right\}, \end{aligned}$$

где  $\Phi_{V \pm A} = (\Phi_V \pm \Phi_A)/2$ . Цветовая и ароматовая структура ядер не указана ввиду ее очевидности. Уравнение для коррелятора  $\sqrt{8}$  совпадает с первым из уравнений (93) при выброшенном последнем члене.

Рассмотрим в качестве примера систему (93) при сумме индексов  $n_1 + n_2 + n_3 = 2$  в корреляторе  $\mathcal{N}$ , что соответствует моменту  $j = 3$ . Обозначив

$$\begin{aligned} X &= N_1(002), \quad Y = N_1(011), \quad Z = N_1(101), \\ U &= N_1(020), \quad V = N_1(200), \quad W = N_1(110), \\ M &= iM(010) = -iM(001), \end{aligned} \quad (94)$$

и подставляя в (93) значения  $\left[ \Phi \right]_{n_1' n_2'}^{n_1 n_2}$  из (69), будем иметь систему:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= X \cdot \left( -\frac{73}{30}N - \frac{1}{60N} - n_k \right) + Y \left( \frac{2}{3}N - \frac{2}{9N} \right) + Z \left( \frac{14}{15}N + \frac{8}{45N} \right) + \\ &+ U \left( \frac{N}{6} - \frac{1}{2N} \right) + V \left( \frac{3}{10}N + \frac{1}{5N} \right); \\ \dot{Y} &= X \left( \frac{3}{8}N - \frac{1}{8N} \right) + Y \left( -\frac{7}{3}N + \frac{1}{2N} - \frac{2}{3}n_k \right) + Z \left( -\frac{2}{3N} - \frac{n_k}{3} \right) + \\ &+ U \frac{N}{2} + W \left( \frac{3}{4}N + \frac{1}{4N} \right) - \frac{m}{6} \sqrt{\frac{N n_k}{2}}; \\ \dot{Z} &= X \left( \frac{21}{40}N + \frac{1}{10N} \right) + Y \left( -\frac{2}{3N} - \frac{n_k}{3} \right) + Z \left( -\frac{149}{60}N + \frac{13}{20N} - \frac{2}{3}n_k \right) + \end{aligned} \quad (95)$$

$$\begin{aligned} &+ V \left( \frac{27}{40}N + \frac{3}{40N} \right) + W \left( \frac{N}{2} - \frac{1}{2N} \right) + \frac{m}{6} \sqrt{\frac{N n_k}{2}}; \\ \dot{U} &= X \left( \frac{N}{12} - \frac{1}{4N} \right) + Y \cdot \frac{4}{9}N + U \left( -\frac{11}{6}N + \frac{17}{12N} - \frac{8}{15}n_k \right) + V \left( -\frac{1}{4N} - \frac{n_k}{5} \right) + \\ &+ W \left( -\frac{5}{6N} - \frac{4}{15}n_k \right) + m \cdot \frac{17}{90} \sqrt{\frac{N n_k}{2}}; \\ \dot{V} &= X \left( \frac{3N}{20} + \frac{1}{10N} \right) + Z \left( \frac{3}{5}N + \frac{1}{15N} \right) + U \left( -\frac{1}{4N} - \frac{n_k}{5} \right) + V \left( -\frac{11}{5}N + \frac{37}{60N} - \right. \\ &\left. - \frac{8}{15}n_k \right) + W \left( -\frac{5}{6N} - \frac{4}{15}n_k \right) - \frac{m}{30} \sqrt{\frac{N n_k}{2}}; \\ \dot{W} &= Y \left( \frac{N}{2} + \frac{1}{6N} \right) + Z \left( \frac{N}{3} - \frac{1}{3N} \right) + U \left( -\frac{5}{8N} - \frac{n_k}{5} \right) + V \left( -\frac{5}{8N} - \frac{n_k}{5} \right) + \\ &+ W \left( -\frac{9}{4}N - \frac{4}{3N} - \frac{3}{5}n_k \right) - m \cdot \frac{7}{60} \sqrt{\frac{N n_k}{2}}; \\ \dot{M} &= \sqrt{\frac{N n_k}{2}} \left( -\frac{2}{3}Y + \frac{2}{3}Z + \frac{17}{20}U - \frac{3}{20}V - \frac{7}{10}W \right) - m \left( \frac{197}{60}N + n_k \right). \end{aligned}$$

Эта система, как мы уже упоминали выше, должна содержать в себе в качестве подсистемы все уравнения для более низких моментов. Чтобы проверить это, воспользуемся равенством (32), из которого с учетом (62) вытекает соотношение

$$\begin{aligned} (n_1+2) \mathcal{N}(n_1+1, n_2, n_3) + (n_2+2) \mathcal{N}(n_1, n_2+1, n_3) + \\ + (n_3+2) \mathcal{N}(n_1, n_2, n_3+1) \sim \mathcal{N}(n_1, n_2, n_3) \end{aligned} \quad (96)$$

В соответствии с этим соотношением введем новые переменные

$$z = 2y + 3u + 2w, \quad s = 2z + 3v + 2w, \quad t = 3x + 2y + 2z, \quad (97)$$

которые пропорциональны  $N_1(010)$ ,  $N_1(100)$  и  $N_1(001)$ . Исключая из системы (95) переменные  $x$ ,  $y$ ,  $z$  с помощью (97), получим, что  $z$ ,  $s$ ,  $t$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned}\dot{z} &= z\left(-\frac{3}{2}N + \frac{1}{N} - \frac{2}{3}n_k\right) + s\left(-\frac{2}{3N} - \frac{n_k}{3}\right) + t\left(\frac{N}{3} - \frac{1}{3N}\right), \\ \dot{s} &= z\left(-\frac{2}{3N} - \frac{n_k}{3}\right) + s\left(-\frac{7}{4}N + \frac{1}{4N} - \frac{2}{3}n_k\right) + t\left(\frac{N}{2} + \frac{1}{6N}\right), \\ \dot{t} &= z\left(\frac{N}{2} - \frac{1}{2N}\right) + s\left(\frac{3}{4}N + \frac{1}{4N}\right) + t\left(-\frac{11}{6}N - n_k\right).\end{aligned}\quad (98)$$

В свою очередь из системы (98) выделяется уравнение

$$\dot{z} + \dot{s} + \dot{t} = \left(-N - \frac{1}{6N} - n_k\right)(z + s + t), \quad (99)$$

отвечающее моменту  $I$ , то есть коррелятору  $N(0,0,0)$ . Уравнение (99) определяет аномальную размерность КПО с  $j=1$ . Чтобы получить аномальные размерности операторов с  $j=2$ , положим в системе (98)  $t = -z - s$ , после чего она примет вид

$$\dot{z} = z\left(-\frac{11}{6}N - \frac{2}{3}n_k\right) + s\left(-\frac{1}{3}N - \frac{1}{3N} - \frac{n_k}{3}\right); \quad (100)$$

$$\dot{s} = z\left(-\frac{N}{2} - \frac{5}{6N} - \frac{n_k}{3}\right) + s\left(-\frac{9}{4}N + \frac{1}{12N} - \frac{2}{3}n_k\right);$$

Решая характеристическое уравнение этой системы, найдем искомые аномальные размерности.

Наконец, положив в (95) и (97)  $z = s = t = 0$ , получим систему, определяющую аномальные размерности операторов с моментом  $j=3$ :

$$\begin{aligned}\dot{u} &= u\left(-\frac{29}{12}N + \frac{7}{6N} - \frac{8}{15}n_k\right) + v\left(\frac{N}{12} - \frac{1}{2N} - \frac{n_k}{5}\right) + w\left(-\frac{N}{3} - \frac{7}{6N} - \frac{4}{15}n_k\right) \\ &+ m \frac{17}{90} \sqrt{\frac{Nn_k}{2}};\end{aligned}$$

(101)

$$\dot{v} = u\left(\frac{3}{20}N - \frac{3}{20N} - \frac{1}{5}n_k\right) + v\left(-\frac{59}{20}N + \frac{37}{60N} - \frac{8}{15}n_k\right) + w\left(-\frac{2}{5}N - \frac{23}{20N} - \frac{4}{15}n_k\right) - \frac{m}{30} \sqrt{\frac{Nn_k}{2}};$$

$$\begin{aligned}\dot{w} &= u\left(-\frac{3}{4}N - \frac{7}{8N} - \frac{1}{5}n_k\right) + v\left(-\frac{1}{2}N - \frac{1}{8N} - \frac{1}{5}n_k\right) + w\left(-\frac{37}{12}N + \frac{3}{2N} - \frac{3}{5}n_k\right) - m \cdot \frac{7}{60} \sqrt{\frac{Nn_k}{2}};\end{aligned}$$

$$\dot{m} = \left(\frac{37}{20}u - \frac{23}{20}v - \frac{7}{10}w\right) \sqrt{\frac{Nn_k}{2}} - m \cdot \left(\frac{197}{60}N + n_k\right).$$

Эта система совпадает с полученной в работе [6], если обозначить

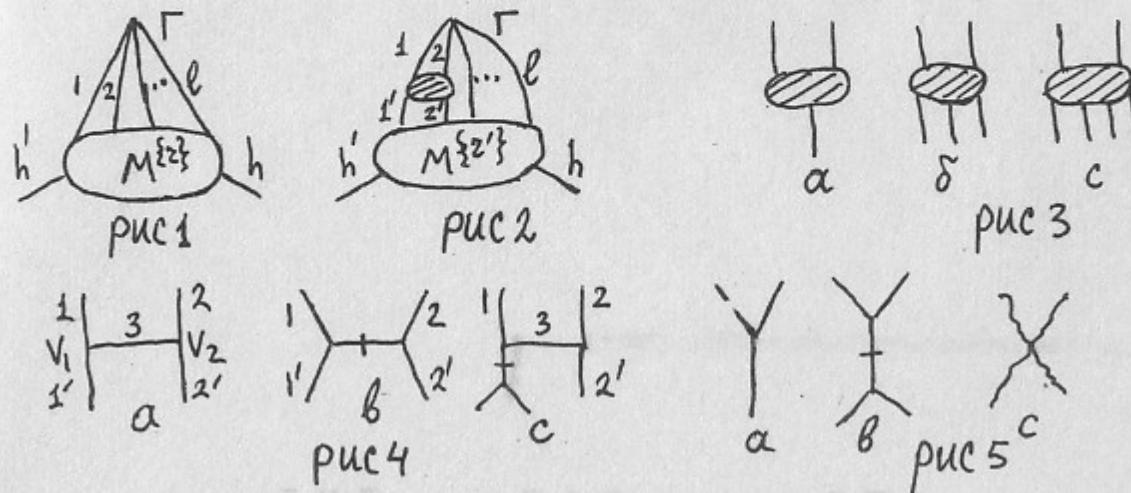
$$u = z^1_4, \quad v = z^3_4, \quad w = -\frac{3}{2}z^2_4, \quad m = -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{n_k}{2N}} L^1_3. \quad (102)$$

В следующей работе мы надеемся использовать развитый здесь аппарат для вычисления аномальных размерностей операторов твиста 4, которые определяют степенные поправки к глубоко-неупругому  $ep$ -рассеянию [7,8]. Большая часть этих операторов принадлежит классу квазипортонных операторов, который замкнут относительно перенормировок. По-видимому матричные элементы остальных операторов могут быть выражены через нефизические моменты КПО, так что для вычисления полной матрицы аномальных размерностей можно использовать только полученные здесь результаты.

В заключение авторы благодарят за обсуждения и интерес к работе В.А.Хозе, Б.Л.Иоффе, В.Н.Байера, В.С.Фадина, А.Грозина, Ю.Пинелиса.

Л и т е р а т у р а

- I. Christ N., Hasslacher B., Mueller A., Phys. Rev., 1972, 26, 3543;  
Politzer H.D., Phys. Rep., 1974, 14c, 130;  
Gross D., Wilczek F. Phys. Rev. Lett., 1973, 30, 1343.
2. Shuryak E.V., Vainshtein A.I. Nucl. Phys., 1982, B201, 141;  
Okawa M., Nucl. Phys., 1980, B172, 481.
3. Фейнман Р. Взаимодействие фотонов с адронами. М.: Мир, 1975.
4. Липатов Л.Н. ЯФ, 1974, 20, 181.  
Бухвостов А.П., Липатов Л.Н., Попов В.Н. ЯФ, 1974, 20, 532.
5. G. Altarelli, G. Parisi, Nucl. Phys., 1977, B126, 298.
6. Бухвостов А.П., Кураев Э.А., Липатов Л.Н. ЖЭТФ, 1984, 87, стр. 37.
7. Jaffe R.L., Soldate M., Phys. Rev., 1982, D26, 49;  
Wada S., Nucl. Phys., 1982, B202, 201.
8. Ellis R.K., Furmanski W., Petronzio R., Nucl. Phys., 1983, B212, 20.
9. Farach G.R., Jackson D.R., Phys. Rev. Lett., 1979, 43, 246.  
Черняк В.Л., Китницкий А.Р. ЯФ, 1980, 31, p.1053.
10. Okawa M., Nucl. Phys., 1981, B187, 71.
- II. Dokshitzer Y.L., Duakoнов Д.И., Troyan S.I., Phys. Rep., 1980, 58c, 269;  
Baier V.N., Fadin V.S., Khoze V.A., Nucl. Phys., 1973, B65, 381.
12. Cvitanović P., Group Theory. Nordita notes, 1984.
13. Макеенко Ю.М. Препринт ИТЭФ-124, Москва, 1980; ЯФ, 1981, 33, с.842.
14. Ohzondorf Th., Nucl. Phys., 1982, B198, 26.
15. Кис А.П., Бандзайтис А.А. Теория момента количества движения в квантовой механике. Вильнюс: Мокелас, 1977.  
Варшалович Д.А. и др. Квантовая теория углового момента Л. "Наука", 1975.
16. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. "Наука", 1973.



$$\text{Diagram} = \frac{1}{2} \left[ \text{Diagram 1} - \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} \right]$$

$$\text{Diagram} = \text{Diagram 1} - \text{Diagram 2} - \frac{1}{2} \left[ \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} \right]$$

$$\text{Diagram} = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} - \frac{1}{2} \left[ \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} \right]$$

$$\text{Diagram} = \frac{1}{2} \left[ \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} \right]$$

$$\text{Diagram} = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3}$$

$$\text{Diagram} = \frac{1}{2} \left[ \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} - \text{Diagram 5} - \text{Diagram 6} \right]$$

рис 6

А.П.Бухвостов, Э.А.Кураев, Л.Н.Липатов,  
Г.В.Фролов

УРАВНЕНИЯ ЭВОЛЮЦИИ ДЛЯ КВАЗИПАРТОННЫХ  
ОПЕРАТОРОВ

Препринт  
№ 84-8

Работа поступила - 3 декабря 1984 г.

---

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов

Подписано к печати 30.01.85г. МН 06506

Формат бумаги 60x90 I/16 Усл.2,9 печ.л., 2,4 учетно-изд.л.

Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 8

---

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90