ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР 24

Д.Л. Шепелянский

КВАНТОВАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА

ПРЕПРИНТ 85-112

НОВОСИБИРСК

КВАНТОВАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА

Д.Л.Шепелянский

АННОТАЦИЯ

Предложен динамический подход к задаче квантового ограничения хаоса, играющего существенную роль при возбуждении многоуровневых систем сильным полем. Получено выражение для длины локализации собственных функций квазиэнергии через классическую скорость диффузии: $\ell = D/2$. Развит численный метод определения ℓ в одномерных системах. Обсуждается возможность использования такого подхода для задач одномерной локализации Андерсона в твердом теле.

I. Введение

В последние годы значительно возрос интерес к диффузионному возбуждению атомов и молекул сильным монохроматическим полем (см., например, [I–6]). Возникновение диффузии в отсутствии внешних случайных сил обусловлено хаотической динамикой соответствующей классической системы. К настоящему времени явление динамического хаоса в классических системах достаточно хорошо изучено и в основном понято [7–9] . Вместе с тем исследование простых моделей показало, что динамика квантовых систем стохастических в классическом пределе обладает рядом особенностей (см.,например, [8,I0–I2]), из которых наиболее интересной является эффект квантового ограничения диффузии [I0,II,I3].Примером физической системы, в которой этот эффект играет существенную роль, является высоковозбужденный атом водорода в монохроматическом поле[I4,I5] . В работах [I6] была установлена аналогия между явлением квантового ограничения диффузии и локализацией Андерсона в твердом теле [I7]. Поэтому исследование этого явления может представлять определенный интерес и для задач локализации в неупорядоченных системах [I8].

В настоящей работе на примере простых моделей с периодическим возмущением исследуется локализация собственных функций квазиэнергии (определение СФКЭ дано в [I9]), приводящая к квантовому ограничению диффузии. Развит динамический подход, при котором локализация в квантовой системе определяется динамикой некоторой гамильтоновой системы с многими степенями свободы. На основе этого подхода предложен численный метод нахождения длина локализации ℓ . В квазиклассической области $\ell \gg 1$ получено простое выражение для длины локализации через скорость классической диффузии: $\ell = D/2$, которое удовлетворительно согласуется с данными численных экспериментов. Исследован случай неоднородной локализации, имеющей место в области критического значения параметра стохастичности. В качестве примера приложения к задачам локализации в твердом теле рассмотрена модель Ллойда с многими соседями.

2. Модель

Для исследования динамики квантовых систем стохастических в классическом пределе выберем модель обобщенного ротатора с гамильтонианом:

$$\hat{H} = H_0(\hat{n}) + V(\theta)\,\delta_T(t) \qquad (1)$$

где $\hat{n} = -i\frac{\partial}{\partial\theta}$, $\delta_T(t)$ – периодическая δ-функция, θ – фаза в интервале $[0,2\pi]$, $V(\theta)$ – внешнее возмущение, H_0 – безразмерно, $\hbar = 1$ [10,11,13,16]. Здесь $H_0(n)$ задает энергии невозмущенных уровней n. Динамика соответствующей классической системы определяется уравнениями движения с гамильтонианом (1), где n, θ – классические сопряженные переменные действие-фаза. После интегрирования на периоде T получаем отображение:

$$\bar{n} = n - \frac{\partial V}{\partial\theta} \qquad (2)$$

$$\bar{\theta} = \theta + T\,\frac{\partial H_0(\bar{n})}{\partial \bar{n}}$$

где $\bar{n}, \bar{\theta}$ – значения переменных n, θ через период. При достаточно сильном возмущении происходит перекрытие резонансов [7], что приводит к диффузионному росту действия $\langle(\Delta n)^2\rangle = D\tau$, где τ – число периодов. Скорость диффузия D, вообще говоря, сложным образом зависит от параметров системы. Однако, в области развитого хаоса фазы $\theta(\tau)$ независимы и равновероятно распределены в интервале $[0,2\pi]$, что позволяет использовать для вычисления D квазилинейное приближение [9]. В этом случае скорость диффузии равна

$$D_{ql} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)^2 d\theta \qquad (3)$$

Условия применимости квазиклассического приближения для системы (1) заключаются в том, чтобы за один период возмущения возбуждалось большое число уровней $D \gg 1$, а также чтобы безразмерный параметр $T \ll 1$ $(T \propto \hbar)$ [8,10,11,13].

Наиболее исследованной моделью с гамильтонианом (1) является квантовое стандартное отображение:

$$\hat{H} = \frac{\hat{n}^2}{2} + k\cos\theta\,\delta_T(t) \qquad (4)$$

Динамика соответствующей классической системы задается стандартным отображением [7-9]:

$$\bar{P} = P + K\sin\theta$$
$$\bar{\theta} = \theta + \bar{P} \qquad (5)$$

где $P = Tn$, $K = kT$. При $K \le K_{cr} = 0{,}9716\ldots$ [20] изменение Δn ограничено $|\Delta n| \le \sqrt{k/T}$, а при $K > K_{cr}$ $(\Delta n)^2$ растет по диффузионному закону со скоростью $D = D_0(K)/T^2$, где $D_0(K)$ – скорость диффузии по P в стандартном отображении (5). В единой хаотической компоненте зависимость скорости диффузии от параметра стохастичности K приближенно описывается следующим выражением:

$$D_0 \approx \begin{cases} \frac{K^2}{2}\left[1 + 2J_2(K) + 2J_2^2(K)\right], & K \ge 4.5 \\ 0.3(\Delta K)^3, & K < 4.5 \end{cases} \qquad (6)$$

где $J_2(K)$ – функция Бесселя, $\Delta K = K - K_{cr}$. При $K \ge 4{,}5$ зависимость $D_0(K)$ имеет вид осцилляций, затухающих с ростом K [21,22]. Предельное значение $D_0 = K^2/2$ соответствует квазилинейному приближению (3), когда фазы $\theta(\tau)$ в (5) случайны и независимы. При $K \to K_{cr}$ в (6) использована эмпирическая формула, полученная из численных экспериментов [13]. Значение показателя $\eta \approx 3$ в степенной зависимости $D_0 \propto (\Delta K)^\eta$ близко к теоретическому значению [23,24]. Аналогичные численные результаты были получены в [25].

Численные эксперименты с квантовым стандартным отображением (4) [10,11,13,16,26-28] показали, что с течением времени диффузионный рост $\langle n^2\rangle$ останавливается, т.е. под действием поля эффективно возбуждается конечное число уровней $(\Delta n \sim \ell)$. Аналогичный результат был получен для предложенной в [16] псевдослучайной модели Ллойда с $V(\theta) = 2\,\mathrm{arctg}(E - 2k\cos\theta)$ [29]. Естественная интерпретация такого квантового ограничения диффузии связана с локализацией СФКЭ, которая аналогична локализации Андерсона в одномерной детерминированной (неслучайной) решетке [16,13,30]. В работах [11,13] была получена теоретическая оценка для числа возбужденных уровней и длины локализации

($\Delta n \sim \ell$) :

$$\ell = \alpha D \sim \Delta n \sim \tau_D \qquad (7)$$

где α – неизвестная числовая константа. Вывод соотношения (7) основан на следующих соображениях. Пусть одно невозмущенное состояние разлагается на ℓ истинных СФКЭ. Тогда одно СФКЭ представляется в виде суперпозиции ℓ невозмущенных состояний. Так как квазиэнергии распределены на интервале $[0,2\pi]$, то среднее расстояние между ними $\Delta\omega \sim 1/\ell$. Диффузия будет продолжаться только в течение конечного времени τ_D пока не проявится дискретность спектра. Согласно соотношению неопределенности $\tau_D \sim 1/\Delta\omega \sim \ell$. За это время диффузионно возбудится число уровней $\Delta n \sim (D\tau_D)^{1/2} \sim \ell$. Откуда и получаем соотношение (7). При этом условие его применимости $D \gg 1$. В случае d -мерной невозмущенной системы условие квантового ограничения хаоса имеет вид

$$\tau_D \gtrsim [D_1 \dots D_d]^{1/2} \; \tau_D^{d/2} \qquad (8)$$

В разделе 5 этот критерий будет использован для нахождения условий локализации в трехмерной модели Ллойда. Косвенное определение длины локализации по стационарному распределению в невозмущенном базисе в численных экспериментах для квантового стандартного отображения [13] и высоковозбужденного атома водорода в монохроматическом поле [15] подтвердило правильность соотношения (7).

3. Локализация собственных функций квазиэнергии

Рассмотрим уравнение, которому удовлетворяет СФКЭ с квазиэнергией ω [16]:

$$u_n^- = e^{i(\omega - TH_0(n))} u_n^+$$
$$u^+(\theta) = e^{-iV(\theta)} u^-(\theta) \qquad (9)$$

Здесь $u^{\mp}(\theta)$ значения функции до и после действия возмущения, $u_n^{\pm}$ -фурье-компоненты $u^{\pm}(\theta)$. Введем $\bar u = e^{\pm iV/2} u^{\pm}/g$,

где g – произвольная функция θ. Тогда из (9) следует

$$\sum_r \bar u_{n+r} (W_{-r}^- - e^{-i2\chi_n} W_{-r}^+) = 0 \qquad (10)$$

где $W^{\pm}(\theta) = e^{\pm iV/2} g(\theta) = \sum_r W_r^{\pm} e^{ir\theta}$, $\chi_n = (\omega - TH_0(n))/2$.
В дальнейшем будем рассматривать случай, когда g действительно, а $W^{\pm}(\theta)$ – четная функция θ. Тогда $W_r^+ = W_{-r}^{-*}$, $W_r^- = W_r e^{i\varphi_r} = W_{-r}^-$. С учетом этих соотношений из (10) получаем

$$\sum_r \bar u_{n+r} W_r \sin(\chi_n + \varphi_r) = 0 \qquad (11)$$

Отметим, что выбор $g(\theta)$ произволен и не влияет на локализацию в исходной модели (9). В [16] было неявно принято $g = 1/\cos V/2$. Такой выбор привел к возникновению нефизической особенности для потенциалов с $V(\theta) \geq \pi$. Так для модели (4) при значениях параметра $k \geq \pi$ в (11) матричные элементы взаимодействия W_r не убывали с r. На самом деле в этой модели удобно положить g =1, что приводит к конечному эффективному числу взаимодействующих соседей.

Уравнение (11) может быть представлено в виде $\hat W \vec u = E \vec u$:

$$E_n u_n + \sum_{m \neq n} W_{nm} u_m = E u_n \qquad (11a)$$

где $E_n = W_0 \cos\varphi_0 \, tg\chi_n$, $E = -W_0 \sin\varphi_0$,
$W_{nm} = W_{m-n} \sin\varphi_{m-n} + tg\chi_n \, W_{m-n}\cos\varphi_{m-n}$.
Следует, однако, отметить, что оператор $\hat W$ оказывается вообще говоря, неэрмитовым (если $W_{m-n}\cos\varphi_{m-n} \neq 0$). Тем не менее задача на собственные значения квазиэнергии (9) может быть сведена к виду (11a) с эрмитовым гамильтонианом $\hat W$. Для этого преобразуем первое уравнение (9) к виду $\hat D(u^+ + u^-) - i(u^+ - u^-) = 0$, где в n представлении $D_n = tg\chi_n$ – диагональная матрица. Умножив второе уравнение в (9) на произвольный оператор G^{-1} и вводя $\bar u = \hat G^{-1} e^{iV/2} u^+ = \hat G^{-1} e^{-iV/2} u^-$ получим

$$[\hat D(e^{i\frac{V}{2}} + e^{-i\frac{V}{2}})G + i(e^{i\frac{V}{2}} - e^{-i\frac{V}{2}})G]\bar u = 0$$

Домножив слева на $\hat{G}^{+}(e^{i\frac{\hat{V}}{2}}+e^{-i\frac{\hat{V}}{2}})$ приходим к гамильтоновой форме уравнения (IIа) $(\hat{W}^{+}=\hat{W})$

$$\hat{W}\bar{u}=[\hat{G}^{+}\cos\frac{\hat{V}}{2}\ \hat{D}\cos\frac{\hat{V}}{2}\hat{G}-\hat{G}^{+}\sin\frac{\hat{V}}{2}\cos\frac{\hat{V}}{2}\hat{G}]\bar{u}=0 \qquad \text{(IIб)}$$

В том случае, когда $[G,V]=0$ и $G^{+}=G$ (IIб) записывается в виде

$$\sum_{m}[\sum_{n_1}(W_{n-n_1}\cos\varphi_{n-n_1}\,tg\,\chi_{n_1}W_{n_1-m}\cos\varphi_{n-m}]\bar{u}_m+ \qquad \text{(IIв)}$$

$$+\sum_{m\neq n}[\sum_{n_1}W_{n-n_1}\cos\varphi_{n-n_1}\sin\varphi_{n_1-n}W_{n_1-m}]\bar{u}_m=E\bar{u}_n,$$

$$E=-\sum_{r}W_r W_{-r}\sin\varphi_r\cos\varphi_{-r}$$

Уравнения (IIб,в) имеют место при произвольном виде потенциала $V(\theta)$ (четность V не обязательна). В том случае, когда $\cos V/2\neq 0$ можно положить $\hat{G}=1/\cos\frac{\hat{V}}{2}$ и тогда (IIб) сведется к системе с диагональным беспорядком, которая была получена в [I6]:

$$(D-tg\frac{V}{2})\bar{u}=0$$

Однако, как отмечалось, такое преобразование допустимо только при $\cos V/2\neq 0$. В противном случае недиагональный беспорядок остается.

Формулы (9,I0,II,IIа-в) дают связь между локализацией ЭФКЭ и одномерной локализацией Андерсона. При этом квазиэнергия ω как бы определяет потенциал взаимодействия, а собственное значение энергии E рассматривается как параметр. Кроме того невозмущенный номер уровня n в модели (I) соответствует дискретной пространственной координате в одномерной цепочке. Поскольку в одномерной неупорядоченной (случайной) цепочке все собственные функции локализованы, то естественно ожидать экспоненциальной локализации СФКЭ в модели (I). Отметим, что форма уравнений (IIб,в) удобна для сравнения с локализацией Андерсона. Однако, представление уравнений (9) в виде (I0), (II) более удобно для численных экспериментов (см.ниже). Если модель сразу задана в виде (II), то ее можно свести к некоторой модели (I) при условии, что $\sum W_r W_{r+n}\sin(\varphi_r-\varphi_{r+n})=0$. Тогда согласно (I0) $W^{\pm}(\theta)=\sum_r W_r e^{\mp i\varphi_r-ir\theta}$, а $e^{iV}=W^{+}/W^{-}$.

Рассмотрим теперь предложенную в [I6] модель ротатора с потенциалом $V=2arctg(E-2k\cos\theta)$. Выбрав $g=1/\cos\frac{V}{2}$ получим $W_0e^{i\varphi_0}=1-iE$, $W_{\pm1}e^{i\varphi_{\pm1}}=ik$, $W_r=0$ при $|r|>1$. Уравнение (II) принимает вид

$$E_n u_n+k u_{n+1}+k u_{n-1}=E u_n \qquad \text{(I2)}$$

где $E_n=tg\,\chi_n$, $\chi_n=(\omega-TH_0(n))/2$, здесь и далее черту в $\bar{u}_n$ опускаем. Если χ_n равномерно заполняют интервал $[0,\pi]$, то распределение флуктуаций E_n имеет вид

$$P(E_n)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+E_n^2} \qquad \text{(I3)}$$

В том случае ,когда значения фазы χ_n случайны и независимы, модель (I2) представляет собой хорошо известную в твердом теле модель Ллойда [3I,I8]. В этой модели имеет место экспоненциальная локализация собственных функций $u_n\propto e^{-\gamma|n|}$. Точное значение показателя γ равно [I8]:

$$\gamma=arch\left[\frac{1}{4k}\left(\sqrt{(2k+E)^2+1}+\sqrt{(2k-E)^2+1}\right)\right] \qquad \text{(I4)}$$

Длина локализации $l=1/\gamma$. При $l\gg 1$ из (I4) получаем $l=\sqrt{4k^2-E^2}$. Для определения неизвестного численного множителя α в оценке (7) вычислим скорость диффузии D. Ввиду случайности χ_n фазы $\theta(\tau)$ в (2) случайны и независимы и $D=D_{ql}$. Вычисление интеграла (3) в области $D_{ql}\gg 1$ дает $D_{ql}=2\sqrt{4k^2-E^2}$. Откуда получаем, что $\alpha=1/2$.

Пусть теперь $H=n^2/2$. Тогда фазы χ_n уже не являются случайными. Более того, при значениях параметра $T=\frac{4\pi p}{q}$, где p, q – целые взаимно простые числа E_n в (I2) становятся периодической функцией n, что соответствует случаю идеального кристалла и нелокализованным собственным функциям. В этом случае квантового резонанса [32] спектр квазиэнергий непрерывен и состоит из q зон. В [33] было показано, что непрерывная компонента сохраняется и для некоторых специальных иррациональных $T/4\pi$ очень близких к рациональным числам.

Можно, однако, высказать гипотезу, что для типичных иррациональных значений $T/4\pi$ $(c_2/q^{2+\varepsilon}<|\frac{qT}{4\pi}-p|<c_1/q^2)$, мера которых на единичном отрезке [0,I] равна единице, всегда будет

иметь место экспоненциальная локализация с показателем γ из (I4). Численные эксперименты, в которых явно находились собственные функции квазиэнергии, подтверждают эту гипотезу [I6]. Вместе с тем, такой метод определения длины локализации ℓ представляется слишком трудоемким. Гораздо более простым является прямое определение инкремента экспоненциального убывания из уравнения (I2). Для этого достаточно задать два произвольных значения u_{n-1}, u_n, а затем вычислят из (I2) остальные $u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots$. Этот процесс можно рассматривать как динамику некоторой гамильтоновой системы с одной степенью свободы, задаваемую отсбражением

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$$

где матрица $M = \begin{pmatrix} (E-E_n)/k & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Гамильтоновость следует из того, что $\det M$ =I. Согласно общей теории гамильтоновых систем [9] в этом случае имеется два показателя Ляпунова $\gamma^+ = -\gamma^-$, которые определяют скорость экспоненциального роста и убывания собственных векторов. В численных экспериментах прямая итерация уравнения (I2) всегда приводит к выходу на растущий собственный вектор. Получаемый при этот инкремент γ^+ дает обратную длину локализации собственных функций [I8]. Условие $\gamma^+ > 0$ и есть условие экспоненциальной локализации. Отношение получаемой таким методом величины ℓ_{ex} к теоретическому значению $1/\gamma$ оказывается близким к единице (см.рис.I). Параметры модели менялись в интервалах 0.0I $\le k \le$ I000, I0$^{-6} \le T \le$ I, 0 $\le E \le$ 2. Величина γ^+ определялась на интервале I $\le n \le$ I0^5 и не зависела от параметров ω и T. Некоторое уменьшение ℓ_{ex} по сравнению с теоретическим значением $1/\gamma$ в области $1/\gamma \sim$ I0^3, связано, по-видимому, с недостаточно большим интервалом по n. Получаемые значения u_n можно рассматривать как собственную функцию на некотором интервале по n. В тех случаях, когда $T \ll$ I зависимость u_n от n имела вид ступенек размера $\Delta n \sim \frac{1}{Tn}$. С ростом n их размер уменьшался и при $Tn \sim$ I они исчезали. Оценка для величины Δn, естественно, получается из условия, что набег фазы $\Delta \chi_n = \frac{1}{2} T n \Delta n \sim 1$. Отметим, что в рас-

сматриваемой модели квазиклассика ($k \gg$ I) всегда соответствует области развитого хаоса, где $\ell = D_{cl}/2$. Действительно, в этом случае в классическом отображении (2) всегда происходит сильное растяжение по фазе ($\partial\bar{\theta}/\partial\theta \sim k^3 T$), приводящее к хаосу.

Рекуррентное определение u_n из уравнения (I2) позволяет исследовать статистику флуктуаций СФКЭ в численном эксперименте. Введем величину $z_n = u_{n+1}/u_n$. В модели со случайными фазами χ_n распределение значений z при E = 0 имеет вид [I8]:

$$P(z) = \frac{1}{\pi} \frac{\delta}{\delta^2 + z^2} \qquad (I5)$$

где $\delta = (\sqrt{4k^2+1} + 1)/2k$.

Результаты численных экспериментов для случайной и псевдослучайной ($H_0 = n^2/2$) моделей Ллойда удовлетворительно согласуются с этим распределением (рис.2). Возникновение медленно убывающих флуктуаций связано с $E_n = tg\chi_n$, приводящему к (I3).

Зависимость u_n от n можно представить в виде $u_n = e^{\gamma n + \xi_n}$, где среднее значение $\langle \xi_n \rangle = 0$. Представляет определенный интерес вопрос о поведении $\langle \xi_n^2 \rangle$. Если бы $\Delta\xi_n = \xi_{n+1} - \xi_n$ были случайны и независимы, то $\langle \xi_n^2 \rangle$ росло бы диффузионно с n : $\langle \xi_n^2 \rangle = D_\xi n$. Однако, такая независимость $\Delta\xi_n$, вообще говоря, отсутствует и поэтому для вычисления $\langle \xi_n^2 \rangle$ требуется учитывать корреляции на разных n, что значительно усложняет задачу. Предварительные численные эксперименты показали, что диффузионный рост $\langle \xi_n^2 \rangle$ в псевдослучайной модели Ллойда, по-видимому, отсутствует. Так, при k =3, $T = 0.5$, $E = 0$ величина D_ξ уменьшалась от 0.I2 до 0.0II при увеличении интервала по n от I0^5 до I0^6. Вместе с тем, для окончательного ответа на вопрос о поведении $\langle \xi_n^2 \rangle$ требуются дальнейшие более подробные исследования.

4. Квантовое стандартное отображение

Рассмотрим теперь случай, когда в (II) отличны от нуля только W_r с $|r| \le N$, $W_r e^{i\varphi_r} = W_{-r} e^{i\varphi_{-r}}$. Тогда (II), так же как и при N =I, задает некоторую гамильтоновую систему с N степенями свободы. Ее динамика в дискретном времени n определяется матрицей M размерности $2N \times 2N$,

$\det M = 1$, а матричные элементы равны $M_{1j} = \dfrac{-W_{N-j}\sin(\chi_n+\varphi_{N-j})}{W_N \sin(\chi_n+\varphi_N)}$

и $M_{ij} = \delta_{i,j+1}$ при $i > 1$ $(1 \leq i,j \leq 2N)$. Для гамильтоновости требуется, чтобы матрица M наряду с собственным значением λ имела и собственное значение $1/\lambda$ [9]. Для этого необходимо, чтобы характеристический полином $\rho(\lambda) = \det|M - \lambda E|$ был возвратным, т.е. $\rho(\lambda) = \lambda^{2N}\rho(1/\lambda) = \lambda^{2N} + a_1\lambda^{2N-1} + \ldots + a_{2N-1}\lambda + 1$,где $a_1 = a_{2N-1}$, $a_2 = a_{2N-2}$ и т.д. Из явного вида матрицы M следует, что $a_j = -M_{1j}$ и необходимым условием гамильтоновости является $W_r e^{i\varphi_r} = W_{-r} e^{-i\varphi_r}$. Покажем, что это условие оказывается достаточным. Для этого требуется, чтобы характеристический полином для произведения произвольного числа матриц M_n (матрица M_n меняется с изменением n), также был возвратным. Тогда произведение матриц M_n поворотом может быть приведено к симплектической матрице S_m $(\Pi = \prod_{n=1}^{m} M_n = Q S_m Q^{-1})$, что и означает гамильтоновость динамики [9]. Для доказательства заметим, что $M_n^I = M_n^{-1}$, где знак I означает операцию инверсии элементов матрицы относительно центра (транспонирование относительно главной, а затем побочной диагоналей). Легко видеть, что если $A^I = A^{-1}$, $B^I = B^{-1}$, то $(AB)^I = B^I A^I = (AB)^{-1}$. Кроме того, тогда $\det A = \det A^I$, и если $\det A = 1$, то и $\det A^I = 1$. Покажем теперь, что если $A^I = A^{-1}$, то характеристический полином является возвратным: $\rho(\lambda) =$

$$= \det|A - \lambda E| = \det|E - \lambda A^I| = (-\lambda)^{2N} \cdot \det|(A - \tfrac{1}{\lambda}E)^I| = \lambda^{2N}\det|A - \tfrac{1}{\lambda}E| =$$

$$= \lambda^{2N}\rho(1/\lambda)$$

Что и требовалось доказать. Вследствие этого в системе имеется N положительных и N отрицательных показателей Ляпунова, причем ввиду гамильтоновости $\gamma_i^+ = -\gamma_i^-$. По аналогии со случаем $N = 1$ естественно предположить, что асимптотически длина локализации СФКЭ будет определяться минимальным положительным показателем Ляпунова γ_0. Отличие $\gamma_0 = 1/\ell$ от нуля ($\gamma_0 > 0$) приводит к тому, что все СФКЭ экспоненциально локализованы, а спектр квазиэнергий является чисто точечным. Техника вычисления <u>всех</u> показателей Ляпунова подробно описана в [9]. При этом удается найти не только все γ_i , но и определить зависимость нормы собственного вектора $\|u_n^{(i)}\| = \left(\sum_{m=1}^{2N} |u_{n+m}^{(i)}|^2\right)^{1/2}$ от n . Для СФКЭ это означает, что известно поведение собственной функции, усредненной по $2N$ уровням.

Предложенный метод наименьшего показателя Ляпунова был использован для вычисления длины локализации в квантовом стандартном отображении (4). Выбрав в этой модели $g = 1$ из (4),(9) получим, что в (II) $W_r = J_r(k/2)$, $\varphi_r = -\frac{\pi r}{2}$, $\chi_n = (\omega - \frac{Tn^2}{2})/2$, где $J_r(k/2)$ — функция Бесселя. Уравнение (II) преобразуется к виду:

$$J_0(k/2)\, tg\chi_n\, u_n - J_1(k/2)(u_{n+1} + u_{n-1}) - \qquad (16)$$
$$- J_2(k/2)\, tg\chi_n\, (u_{n+2} + u_{n-2}) +$$
$$+ J_3(k/2)(u_{n+3} + u_{n-3}) + J_4(k/2)\, tg\chi_n\, (u_{n+4} + u_{n-4}) + \ldots = 0$$

Откуда видно, что локализация в модели (4) соответствует локализации в одномерной нерегулярной (но неслучайной) цепочке (IIв) при энергии E=0. Из-за быстрого падения $J_r(k/2)$ при $|r| > k/2$ в численных экспериментах можно было ограничиться конечным числом взаимодействующих соседей $N \sim k/2$. Проверка показала, что дальнейшее увеличение N не меняет минимальные показатели, а сказывается только на максимальных. Другая проверка состояла в том, что отрицательные показатели должны быть равны по модулю положительным, что также имело место при счете на достаточно большом интервале по n . Как правило, этот интервал составлял $\sim 10^5$ уровней. Сравнение длины локализации, вычисленной указанным выше способом с СФКЭ полученными в численных экспериментах [16] показывает, что длина локализации действительно определяется наименьшим показателем Ляпунова (рис.3). Пример вычисления двух показателей Ляпунова приведен на рис.4.

Проверка соотношения (7) проводилась для различных значений параметров: $5 \leq k \leq 75$; $1{,}5 \leq K \leq 29$, $T \leq 1$ и $T/4\pi$ — произвольное (типичное) иррациональное число. Полученные значения $\alpha = \ell/D$ для разных D представлены на рис.5. Среднее значение $<\alpha> = 0.57$ со среднеквадратичным разбросом $\Delta = 0.11$. В качестве D брались значения скорости диффузии в классической системе полученные в работе [13]. При $K > 10$ использовалось теоретическое значение (6). Разброс точек на рис.5 определяется, по-видимому, тем, что в ряде случаев квазиклассическое приближение было недостаточно хорошим (например, $T \sim 1$). Для устранения этой причины разброса было бы более точным в таких случаях вместо D подставлять в (7) скорость квантовой диффузии D_q, как это было сделано в [13]. Другая причина разброса связана с тем, что для получения очень точного значения ℓ требуется большой интервал усреднения по n (см.рис.4). Зависимость ℓ от k при фиксированном K представлена на рис.6. В противоположном случае, когда $k = const$, а меняется T изменение ℓ происходит за счет зависимости $D_0(K)$ (рис.7). Осцилляции скорости диффузии и длины локализации с K связана с влиянием разновременных корреляций $C(\tau) = <\sin\theta(0)\sin\theta(\tau)>$. Теоретическая кривая (6) при $K \gtrsim 4.5$ на рис.7, полученная в [21,22], соответствует учету только первых четырех корреляций при $\tau \leq 4$ [9]. Однако при специальных значениях K (например, $K = 6.6$), когда имеет место "микротронный" резонанс, интеграл от корреляций расходится, что приводит формально к бесконечной скорости диффузии [34,35]. В этом случае величина ℓ определяется скоростью диффузии в квантовой системе, которая оказывается конечной из-за того, что совпадение квантовых и классических корреляций имеет место только для не слишком больших τ [26]. Так, при $k = 20$, $K = 6.6$ длина локализации $\ell \approx 220$, а отношения $\ell/D = 0.7$ (здесь взято D из (6)), $\ell/D_{q\ell} = 1.1$. При $K \gg 1$, когда применимо квазилинейное приближение зависимость D от T исчезает и $\ell = D_{q\ell}/2 = k^2/4$. Аналогичное выражение для ℓ получается при случайных χ_n, что действительно подтверждается численными экспериментами. Если $H_0 \propto n^\beta$ с $\beta > 2$, то это соответствует тому, что $K \propto n^{\beta-2}$ и на больших n работает квазилинейное приближение. Поэтому для систем с $\beta > 2$ длина локализации равна $\ell = k^2/4$. Анализ численных данных для модели (4) при $1 < T < 2\pi$ и $k = 20, 30$ показал, что для имеющихся 15 случаев среднее значение отношения $\ell/D_{q\ell}$ равно $<\alpha> = 0.64$, $\Delta = 0.10$. Это значение оказывается несколько больше, чем в области квазиклассики ($T < 1$). Тем не менее в целом можно считать, что в области $T > 1$ длина

локализации удовлетворительно описывается соотношением $\ell = D_{q\ell}/2$. Более точное выражение можно получить заменив $D_{q\ell}$ на квантовую скорость диффузии D_q. Отметим, что зная величину $\ell = D_0/2T^2$ можно оценить ширину зон в случае квантового резонанса $T = 4\pi p/q$:

$$\Delta\omega \sim e^{-q/\ell}$$

При этом расстояние между зонами $\sim 1/q$. Аналогичная оценка для псевдослучайной модели Ллойда была получена в [16].

В квазиклассической области длина локализации

$$\ell = \frac{D_0(K)}{2T^2} \qquad (17)$$

Это соотношение сохраняется не только в области развитого хаоса $K \gtrsim 4$, где мера островков устойчивости пренебрежимо мала [7], но и при $\Delta K = K - K_{cr} \ll 1$, когда скорость диффузии определяется сложной иерархической структурой [23,24] и устойчивая компонента занимает около 50% всей фазовой плоскости [7]. Полученные численные данные удовлетворительно согласуются с формулой (17). При этом скорость диффузии в стандартном отображении D_0 меняется на 4 порядка (рис.8). Следует, однако, отметить, что соотношение (17) выполняется только тогда, когда длина локализации значительно превышает число взаимодействующих соседей $2N \approx k$. В противном случае $D_0/2T^2 \ll k$ диффузия оказывается чересчур медленной и не приводит к увеличению длины локализации ($\ell \sim k$). Таким образом, соотношение (17) выполняется при условии

$$k > k_{cr} = \frac{\varkappa K^2}{D_0} \gg 1 \qquad (18)$$

где константа $\varkappa \sim 1$ может быть определена из численных экспериментов. Неравенство (18), впервые полученное в работе [13], дает условие однородной локализации. В обратном предельном случае $k \ll k_{cr}$ длина локализации $\ell \sim N \sim k$ оказывается сравнимой с периодом резонансной структуры $\Delta n = 2\pi/T$ и оказывается существенно неоднородной [13]. Пример однородной и неоднородной локализаций представлен на рис.9. В неоднородном случае размер наблюдаемых ступенек равен периоду резонансной структуры $2\pi/T$. Аналогичные ступеньки наблюдались для стационарного распределения (20) в численных экспериментах [13].

В отличие от псевдослучайной модели Ллойда эти ступеньки сохраняются и при очень больших значениях n. Так, например, на рис.9 зависимость $\|u_n\|$ от n представлена в той области, где $n \approx 3\cdot 10^4$. В области устойчивости ($k \gg 1$, $K \ll 1$) численные данные показывают, что локализация по порядку величины равна числу взаимодействующих соседей

$$\ell \approx \frac{k}{4} \qquad (19)$$

В этой области из-за малости резонансов локализация становится почти однородной.

Значение $\varkappa$ в (18) численно можно определить из того условия, что при фиксированном $k \gg 1$, начиная с некоторых $K = kT$, определяемая величина α в (7) начинает резко расти (т.е. соотношение (17) нарушается). Получаемое таким образом значение $\varkappa \approx 1.3$ (для $k_{cr} = 20,30,40$), что согласуется с результатами [13] $\varkappa \approx 1$. Отметим, что диффузионный масштаб $\tau_D \sim k_{cr} \propto \hbar^{-1}$ в области $k \sim k_{cr}$ существенно превышает значение $\tau_D \sim k_{cr}^{1/3} \propto \hbar^{-1/3}$ полученное в [36]. Обсуждение этого вопроса дано в [13].

Рассмотрим теперь вопрос о свойствах стационарного распределения по невозмущенным уровням $\bar f(n) = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int d\tau\, f(n,\tau)$. Это распределение может быть выражено через СФКЭ $\varphi_m(n)$ с квазиэнергией ω_m [13]. В том случае, когда начально возбужден один уровень с $n=0$, имеем

$$\bar f(n) = \sum_m |\varphi_m(0)|^2\, |\varphi_m(n)|^2 \qquad (20)$$

Численные эксперименты [13] показали, что $\bar f(n) \propto e^{-2|n|/\ell_s}$, а длина локализации стационарного распределения $\ell_s \approx D$ ($\ell_s/D = \alpha_s$, $\langle \alpha_s \rangle = 1.04$, $\Delta = 0.20$ см.рис.8). Сравнение с данными для длины локализации СФКЭ ℓ, полученными методом наименьшего показателя Ляпунова (рис.8), показывает, что $\ell_s \approx 2\ell$. Вместе с тем, в [13] в приближении, что флуктуации $\varphi_m(n)$ малы и ими можно пренебречь было получено, что $\ell_s = \ell$ (фактически было принято, что $|\varphi_m(n)|^2 = \frac{1}{\ell} e^{-2|n-m|/\ell}$). Причина этого расхождения заключается, по-видимому, в присутствии сильных флуктуаций в $\varphi_m(n)$ и разном характере усреднений для $\bar f(n)$ и ℓ. Действительно, асимптотика $\bar f(n)$ опреде-

ляется показателем $\gamma_s = \frac{1}{\ell_s} = (\ln\langle|\varphi_m(n)|^2\rangle)/2n$, где среднее $\langle\ldots\rangle$ вычисляется по состояниям с разными квазиэнергиями и тем самым разным потенциалам взаимодействия в цепочке (16). В то же время длина локализации СФКЭ равна $\frac{1}{\ell} = \left\langle \frac{\ln|\varphi_m(n)|^2}{2n} \right\rangle$. При наличии сильных флуктуаций разный характер усреднений может приводить к отличию ℓ_s от ℓ. Такое явление происходит, например, при вычислении коррелятора плотность-плотность $\rho_\infty(x-x', E) = \left\langle \sum_{discr} \delta(E-E_n)\, |\psi_n(x)\psi_n(x')|^2 \right\rangle$ в неупорядоченных системах (здесь $\psi_n(x)$ – собственные функции с энергией E_n) [18]. В области больших энергий E для $\rho_\infty(x-x', E)$ получается, что $\ell_s = 4\ell$ [18]. Из сравнения (20) с выражением для $\rho_\infty(x-x', E)$ видно, что стационарное распределение $\bar f_n$ является аналогом коррелятора плотность-плотность. Причина сильных флуктуаций $\varphi_m(n)$, так же как и в псевдослучайной модели Ллойда, связана с флуктуациями $\mathrm{tg}\,\gamma_n$ в (16). Однако их свойства оказываются более сложными из-за того, что большое число соседей ($N > 1$) приводит к тому, что на интервале $\delta n \sim N$ значения u_n сильно скоррелированы друг с другом. На рис.10 приведен пример интегрального распределения флуктуаций $F(z)$ для величины $z(\delta n) = \|u_{n+\delta n}\|/\|u_n\|$. При больших z вероятность $F(z)$ убывает степенным образом, однако, для вычисления показателя степени и понимания особенностей поведения $F(z)$ требуются дальнейшие более подробные исследования. Знание флуктуационных свойств $\varphi_m(n)$ необходимо для вычисления стационарного распределения $\bar f(n)$ и величины ℓ_s. При этом надо иметь ввиду, что, вообще говоря, собственная функция $\varphi_m(n)$ представляет собой некоторую линейную комбинацию из N векторов, соответствующих убывающим показателям Ляпунова γ_i^-. Естественно считать, что асимптотика $\bar f(n)$ будет определяться собственным вектором с наименьшим по модулю показателем. Однако, для вычисления средних характеристик, например, энергии $\langle E_n \rangle = \langle n^2 \rangle/2$, роль остальных векторов может оказаться существенна. Причем для вычисления требуется знать не только спектр показателей $\gamma_i^+ = -\gamma_i^-$, но и веса с которыми соответствующие собственные вектора входят в собственную функцию. Пример спектра показателей Ляпунова в области квантового хаоса ($K > K_{cr}$) и области устойчивости ($K < K_{cr}$) представлен на рис.11. Видно, что структура спектра в этих двух случаях оказывается различной. Так, в устойчивой области имеется много близких показателей, в то время как в области квантового хаоса γ_i существенно отличаются друг от друга. Каким образом можно было бы аналитически вычислить весь спектр показателей и как он сказывается на стационарном распределении остается пока неясным. Возможно, что вид распределения будет таким же, как в [I3] $\bar{f}(n) = \frac{1}{2\ell_s} \exp(-\frac{2|n|}{\ell_s})(1+\frac{2|n|}{\ell_s})$, но с $\ell_s = 2\ell$.

5. Модель Ллойда с многими соседями

В качестве простого примера приложения к задачам твердого тела рассмотрим модель цепочки:

$$E_n u_n + \sum_{\substack{r=-N \\ r\neq 0}}^{N} W_r u_{n+r} = E u_n \tag{2I}$$

где E_n случайные независимые величины с распределеньем (I3). Тогда можно положить $E_n = tg\, \gamma_n$ и задача сводится к модели ротатора (I) со случайными $\gamma_n = (\omega - T H_0(n))/2$ и потенциалом

$$V(\theta) = 2 arctg \left(E - 2\sum_{r=1}^{N} W_r \cos r\theta\right) \tag{22}$$

(см.(II), где надо положить $W_r e^{i\varphi_r} = i W_r$, $W_0 e^{i\varphi_0} = 1 - iE$). Согласно (7) длина локализации собственных функций с энергией E равна $\ell = D_{q\ell}/2$, где скорость диффузии $D = D_{q\ell}$ дается формулой (3) с потенциалом (22). Для проверки этого соотношения в модели (2I) с $W_r = k$ были проведены численные эксперименты, в которых ℓ вычислялось методом наименьшего показателя Ляпунова. Параметры модели менялись в интервалах: $0.1 \leq k \leq 50$, $4 \leq N \leq 20$, $E = 0$. Полученные значения $\alpha = \ell/D$ для разных D представлены на рис.5. Среднее значение $\langle\alpha\rangle = 0.52$ с $\Delta = 0.07$ удовлетворительно согласуется с теоретическим значением $\alpha = 1/2$. В области $k \gg 1$, $N \gg 1$ величина $\ell = \frac{D_{q\ell}}{2} \approx 2kN^2$ (7) позволяет найти также зависимость ℓ от энергии E. Сравнение теории с численным экспериментом в этом случае также демонстрирует удовлетворительное согласие в области $D \gg 1$ (рис.I2).

Рассмотрим теперь случай большей размерности $d = 3$. Тогда уравнение (2I) принимает вид

$$E_{n_1 n_2 n_3} u_{n_1 n_2 n_3} + [k_1(u_{n_1+1\, n_2 n_3} + u_{n_1-1\, n_2 n_3}) + k_2(u_{n_1 n_2+1\, n_3} + u_{n_1 n_2-1\, n_3}) + k_3(u_{n_1 n_2 n_3+1} + u_{n_1 n_2 n_3-1})] = E u_{n_1 n_2 n_3} \tag{23}$$

где выбрана модель с взаимодействием только между ближайшими соседями, а распределение $E_{n_1 n_2 n_3}$ имеет вид (I3). Аналогично случаю $d = 1$ получаем, что (23) эквивалентно модели ротатора (I), но в размерности $d = 3$. Потенциал возмущения зависит теперь от трех фазовых переменных

$$V = 2 arctg(E - 2k_1 \cos\theta_1 - 2k_2 \cos\theta_2 - 2k_3 \cos\theta_3) \tag{23}$$

а $E_{n_1 n_2 n_3} = tg[(\omega - T H_0(n_1, n_2, n_3))/2]$. Согласно (8) необходимое условие локализации собственных функций имеет вид

$$D_1 D_2 D_3 \lesssim 1 \tag{24}$$

При $E = 0$ и $k_1 \sim k_2 \sim k_3$ получаем, что локализация имеет место при $k_1 \lesssim 1$. Это условие разумно согласуется с критерием локализации Андерсона [I7] : $\Delta \gtrsim k_1$, где Δ – характерный интервал, в котором случайно меняются невозмущенные значения E_n. Для распределения (I3) $\Delta \sim 1$. Условие $k_1 \lesssim 1$ соответствует фактически квантовой границе устойчивости [I], когда переходы на соседние уровни малы. В двумерном случае при $k_1 \gg k_2$ из (23) и (3) следует, что $D_1 \sim k_1$, $D_2 \sim k_2^2/k_1$. Тогда их (8) условие локализации $k_2 \lesssim 1$. В противном случае согласно оценке (8) будет иметь место делокализации. Следует однако отметить, что в размерности $d = 2$ временная зависимость в левой и правой частях (8) одинакова (нет запаса по степени τ_D). Поэтому возможно, что при $d = 2$ и $k_2 \gg 1$ будет иметь место локализация, но ее длина будет экспоненциально расти с $D_1 D_2$. Для выяснения этого требуется более подробный анализ. При размерности $d = 3$ и $k_1 \gg k_2 \sim k_3$ имеем $D_1 \sim k_1$, $D_2 \sim D_3 \sim k_2^2/k_1$. В этом случае локализация возможна при выполнении (24). При этом, однако, надо потребовать, чтобы соотношение (8) выполнялось для времени $\tau_D \sim k_1$, в течение которого диффузия идет по уровням n_1 (возбуждается $\Delta n_1 \sim k_1$, $\Delta n_2 \sim (D_2 k_1)^{1/2}$, $\Delta n_3 \sim (D_3 k_1)^{1/2}$). Это дает следующее условие локализации $k_2^2 \sim k_2 k_3 \lesssim 1$. В том случае, когда $D_1 \gg D_2 \gg D_3$ и $D_1 D_2 \gg 1$ в качестве τ_D надо взять время квантового ограничения хаоса в двумерной системе, если оно конечно.

Для примера рассмотрим еще локализацию в одномерной системе с недиагональным беспорядком ($\hat{W} u = E u$):

$$W_{nm} = k\,(\delta_{n,m+1} + \delta_{n,m-1}) + (\delta_{n,m_1} + \delta_{n,m_1+1} + \delta_{n,m_1-1})\,\delta_{m_1,m_2}\,\mathrm{tg}\,\chi_{m_1} \cdot (\delta_{m_2,m} + \delta_{m_2,m+1} + \delta_{m_2,m-1}) \qquad (25)$$

где по повторяющимся индексам проводится суммирование, $\delta_{n,m}$ – единичная δ-функция, а χ_m – случайны и независимы. Уравнение на собственные значения энергии имеет вид $\hat{W} u = E u$. Согласно (II)–(IIв) системе (25) можно сопоставить квантовый ротатор (I) со случайным спектром $T H_0(n)$ и возмущением $W(\theta) = e^{-iV/2} g(\theta) = \sum_r W_r e^{i\varphi_r} e^{ir\theta}$, где $W_0 e^{i\varphi_0} = 3 - iE$, $W_{\pm 1} e^{i\varphi_{\pm 1}} = 2 + ik$, $W_{\pm 2} e^{i\varphi_{\pm 2}} = 1$. Откуда $W(\theta) = 3 - iE + 2(2+ik)\cos\theta + 2\cos 2\theta$ и потенциал равен

$$V(\theta) = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{E - 2k\cos\theta}{3 + 4\cos\theta + 2\cos 2\theta}\right) \qquad (26)$$

Согласно (7) длина локализации в модели (25) равна $l = D_{2l}/2$ (при $l \gg 1$)), где D_{2l} дается формулой (3) с $V(\theta)$ из (26). Аналогичным образом можно вычислять потенциал V и длину локализации и в других моделях одномерных цепочек вида (IIб,в).

6. Заключение

Развитый численный метод наименьшего показателя Ляпунова позволил найти длину локализации в различных простых системах. С его помощью удалось проверить и подтвердить принцип квантового ограничения хаоса [II,I3], на основе которого было получено выражение для длины локализации СФКЭ через скорость классической диффузии (7). Сравнение с точно решаемой моделью позволило определить неизвестную константу в (7) $\alpha = 1/2$. Численные данные для различных моделей удовлетворительно согласуются с этим значением. Можно думать, что метод наименьшего показателя Ляпунова найдет приложения в задачах одномерной локализации в неупорядоченных системах.

Простое выражение для длины локализации СФКЭ $l = D/2$ позволяет получать эффективные оценки для числа уровней, возбуждаемых внешним полем. Отметим, что по сравнению с локализацией в твердом теле локализация СФКЭ обладает рядом отличительных особенностей. Так, для СФКЭ делокализация может иметь место и в одномерном случае за счет увеличения скорости диффузии с номером уровня [II,I3]. В отличие от задач твердого тела такая ситуация в СФКЭ является довольно типичной. Примером системы, в которой имеет место такая делокализация, может служить высоковозбужденный атом водорода в монохроматическом электрическом поле [I4,I5]. Другая отличительная особенность локализации СФКЭ состоит в том, что число степеней свободы (размерность пространства d), вообще говоря, неограниченна и может быть значительно больше трех. Кроме того при исследовании СФКЭ возникает интересная задача о локализации в детерминированном (неслучайном) потенциале. К сожалению строгие математические результаты в этой области очень немногочисленны [33,37–39], и, в основном, относятся к несоразмерным структурам, когда в (I) $H_0(n)$ является линейной функцией n. На основе принципа квантового ограничения хаоса (8) можно высказать гипотезу, что в детерминированных системах типа (I) с произвольной размерностью d (вне квантового резонанса) локализация всегда будет иметь место, если соответствующая классическая система интегрируема. Действительно, в этом случае скорость диффузии равна нулю и условие локализации (8) выполнено. В случае линейной зависимости $H_0(n)$ от n имеется строгое доказательство локализации для произвольного d [38], что можно рассматривать как частичное подтверждение этой гипотезы.

Пользуясь случаем, автор выражает искреннюю благодарность Б.В.Чирикову за обсуждение и ценные замечания.

Литература

I. Шуряк Э.В. ЖЭТФ, 1976, 71, 2039.

2. Акулин В.М., Вурдов В.Д., Есадзе Г.Г., Карлов Н.В., Прохоров А.М., Сусанин А.А., Хохлов Э.М. Письма в ЖЭТФ, 1984, 40, 432.

3. Евсеев А.В., Цурецкий А.А., Тяхт В.В. ЖЭТФ, 1985, 88, 60.

4. Bayfield J.E., Koch P.M. Phys. Rev. Lett., 1974, 33, 258; Bayfield J.E., Pinnaduwage L.A. Phys. Rev. Lett. 1985, 54, 313.

5. Jones D.A., Leopold J.G., Percival I.C. J. Phys. Ser. B, 1980, 13, 31.

6. Делоне Н.Б., Крайнов В.П., Шепелянский Д.Л. УФН, 1983, 140, 355.

7. Chirikov B.V. Phys. Rep., 1979, 52, 263.

8. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.

9. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.

I0. Casati G., Chirikov B.V., Ford J., Izrailev F.M. Lectures Notes in Physics, Springer 1979, 93, 334.

II. Chirikov B.V., Izrailev F.M., Shepelyansky D.L. Soviet Scientific Reviews, 1981, 2C, 209.

I2. Proc. Int. Conf. on Quantum Chaos, Como 1983 (Plenum 1985) Edited by G.Casati.

I3. Чириков Б.В., Шепелянский Д.Л. Препринт ИЯФ СО АН СССР 85-29, Новосибирск, 1985.

I4. Shepelyansky D.L. Preprint 83-61, INP, Novosibirsk, 1983; Proc. Int. Conf. on Quantum Chaos, Como 1983 (Plenum 1985) p. 187.

I5. Casati G., Chirikov B.V., Shepelyansky D.L. Phys. Rev. Lett. 1984, 53, 2525

I6. Fishman S., Grempel D.R., Prange R.E. Phys. Rev. Lett. 1982, 49, 509; Phys. Rev. A, 1984, 29, 1639.

I7. Anderson P.W. Phys. Rev. 1958, 109, 1492.

I8. Лифшиц И.М., Гредескул С.А., Пастур Л.А. Введение в теорию неупорядоченных систем. М.: Наука, 1982.

I9. Базь А.И., Зельдович Я.Б., Переломов А.М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М.: Наука, 1971.

20. Greene J.M. J. Math. Phys. 1979, 20, 1183.

2I. Rechester A.B., White R.B. Phys. Rev. Lett. 1980, 44, 1586.

22. Rechester A.B., Rosenbluth M.N., White R.B. Phys. Rev. A 1981, 23, 2664.

23. MacKay R.S., Meiss J.D., Percival I.C. Physica D, 1984, 13, 55.

24. Chirikov B.V. Proc. Int. Conf. on Plasma Physics, Lausanne, 1984, 2, 761.

25. Dana I., Fishman S. Physica D, 1985, to appear.

26. Shepelyansky D.L. Physica D, 1983, 8, 208.

27. Hogg T., Huberman B.A. Phys. Rev. Lett. 1982, 48, 711.

28. Hanson J.D., Ott E., Antonsen T.M. Phys. Rev. A1984, 29, 819; Phys. Rev. Lett. 1984, 53, 2187.

29. Dorizzi B., Grammaticos B., Pomeau Y. J. of Stat. Phys. 1984, 37, 93.

30. Чириков Б.В. УФН 1983, 139, 360.

3I. Lloyd P. J. Phys. 1969, 2C, 1717.

32. Израйлев Ф.М., Шепелянский Д.Л. ТМФ 1981, 43, 417.

33. Casati G., Guarneri I. Comm. Math. Phys. 1984, 95, 121.

34. Karney C.F.F. Physica D, 1983, 8, 360.

35. Chirikov B.V., Shepelyansky D.L. Physica D 1984, 13, 395.

36. Fishman S., Grempel D.R., Prange R.E. Phys. Rev. Lett. 1984, 53, 1212.

37. Fishman S., Grempel D.R., Prange R.E. Phys. Rev. Lett. 1982, 49, 833.

38. Figotin A.L., Pastur L.A. Comm. Math. Phys., 1984, 95, 401.

39. Bellisard J. "Stability and Instability in Quantum Mechanics". (To appear in Lectures Notes in Math.).

Подписи к рисункам

Рис.I. Отношение экспериментальных значений длины локализации ℓ_{ex} (точки) к теоретической (I4) в псевдослучайной модели Ллойда (I2) с $\chi_n = (\omega - Tn^2/2)/2$ Здесь и далее логарифмы десятичные.

Рис.2. Интегральное распределение $F(z) = \int\limits_{|y|>z}^{\infty} P(y)\,dy$ флуктуаций $z_n = |u_{n+1}/u_n|$ в псевдослучайной модели Ллойда (I2) при k =I0, T = 0,5. Точки – численные данные, гладкая кривая – теоретическое распределение $F(z) = 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(X/\delta)$ для случайной модели Ллойда (см.(I5)).

Рис.3. Локализация СФКЭ в квантовом стандартном отображении (4); k = 2,8, T = 4,867. Точки и кружки – собственные функции с разными квазиэнергиями (численные данные [I6]). Прямые соответствуют значению ℓ, полученному методом наименьшего показателя Ляпунова.

Рис.4. Пример вычисления длины локализации в модели (4) при k =40, K =I0. Сплошные линии соответствуют положительным показателям Ляпунова, а пунктирные отрицательным. На рисунке приведены два минимальных показателя ($\gamma = 1/\ell$).

Рис.5. Отношение $\alpha = \ell/D$ для разных D в квантовом стантартном отображении (кружки) и модели Ллойда с многими соседями (см.(2I) с $W_r = k$, точки). Прямая – теоретическое значение α = I/2.

Рис.6. Зависимость длины локализации от числа ближайших соседей $2N \approx k$ в модели (4) при K =5. Точки – численные данные, прямая – теория $\ell = D_{q\ell}/2$, $D_{q\ell} = k^2/2$.

Рис.7. Зависимость длины локализации в квантовом стандартном отображении от классического параметра стохастичности K (кресты, k = 30). Кружки и кривая – численные данные и теория для классической скорости диффузии $D(K)$ [2I,22].

Рис.8. Зависимость длины локализации в (4) от скорости диффузии D_0 в стандартном отображении (5). Кружки – численные данные [I3] для длины локализации ℓ_s, полученной из стационарного распределения (20). Пунктирная прямая соответствует среднему значению $\langle \alpha_s \rangle$ = I.04. Точки – длина локализации, полученная из СФКЭ методом минимального показателя Ляпунова. Прямая – теоретическая формула (I7). На вставке представлены численные данные [I3] для зависимости D_0 от $\Delta K = K - K_{cr}$, K_{cr} = 0,97I6....

Рис.9. Зависимость усредненной СФКЭ $\|u_n\| = \left(\sum\limits_{m=1}^{2N} |u_{n+m}|^2\right)^{1/2}$ от n в (4).
а) Однородная локализация при k = 20, K =5.
б) Неоднородная локализация при k = 20, K = I.3.
Явно видны периодические осцилляции с $\Delta n = \frac{2\pi}{T}$, связанные с резонансной структурой. Прямые соответствуют экспериментальным значениям ℓ, полученным на интервале $n \approx 5 \cdot 10^4$.

Рис.I0. Интегральное распределение $F(z)$ флуктуаций $z(\delta n) = \|u_{n+\delta n}\| / \|u_n\|$ (ср.с рис.2) в (4).
Точки – k = I0, K = 5, δn = 20;
Кружки – k = 20, K = 5, δn = 35.

Рис.II. Спектр показателей Ляпунова γ_i^+ в (4).
Точки – область квантового хаоса k = 30, K = 5;
Кружки – область устойчивости k = 30, K =0,003.

Рис.I2. Зависимость длины локализации от энергии в модели Ллойда с многими соседями (2I), $W_r = k$, k =I, N=I2. Точки – численные данные, гладкая кривая – теория $\ell = D/2$, с $D = D_{q\ell}$ из (3) с потенциалом (22).

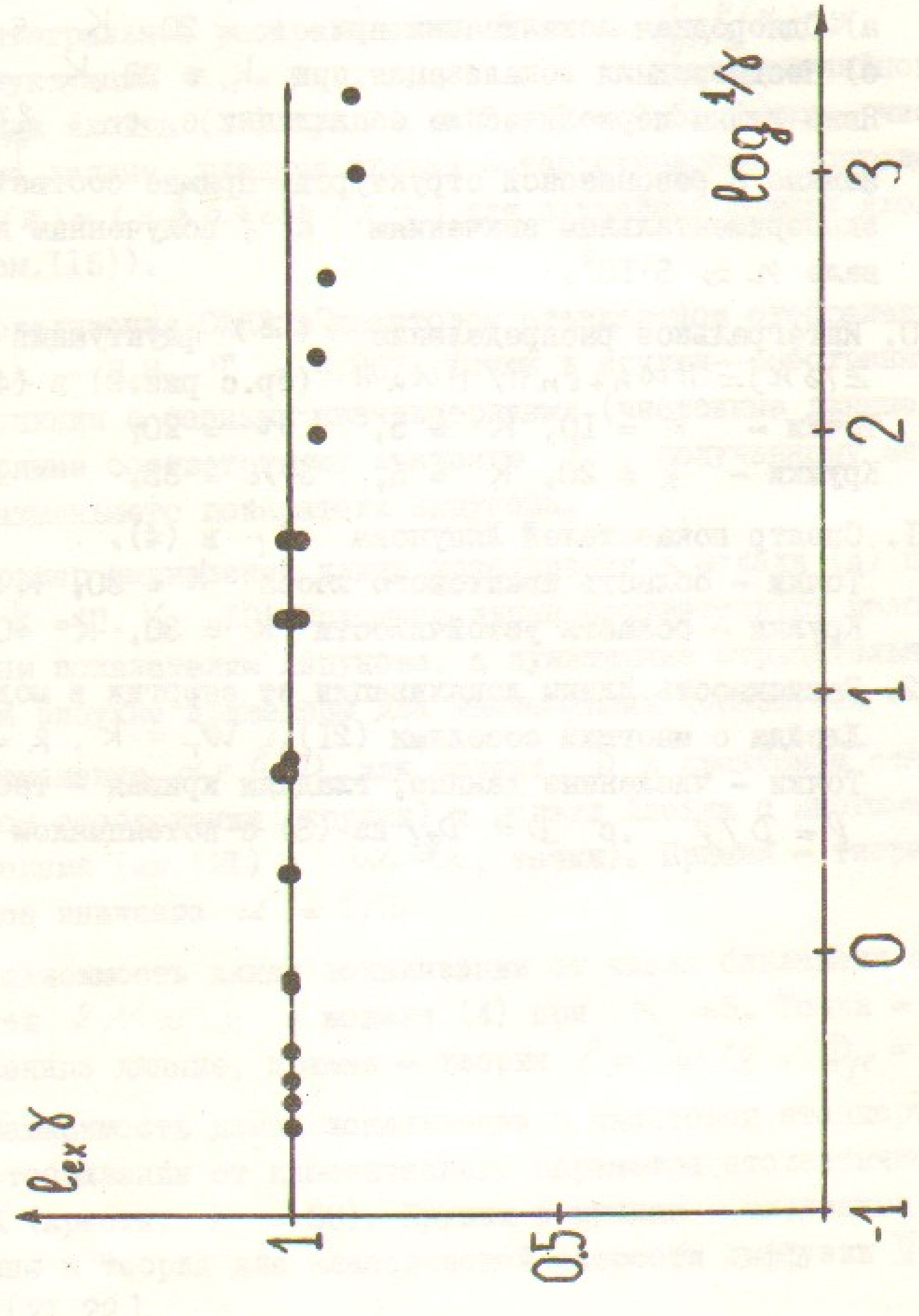


Рис.I

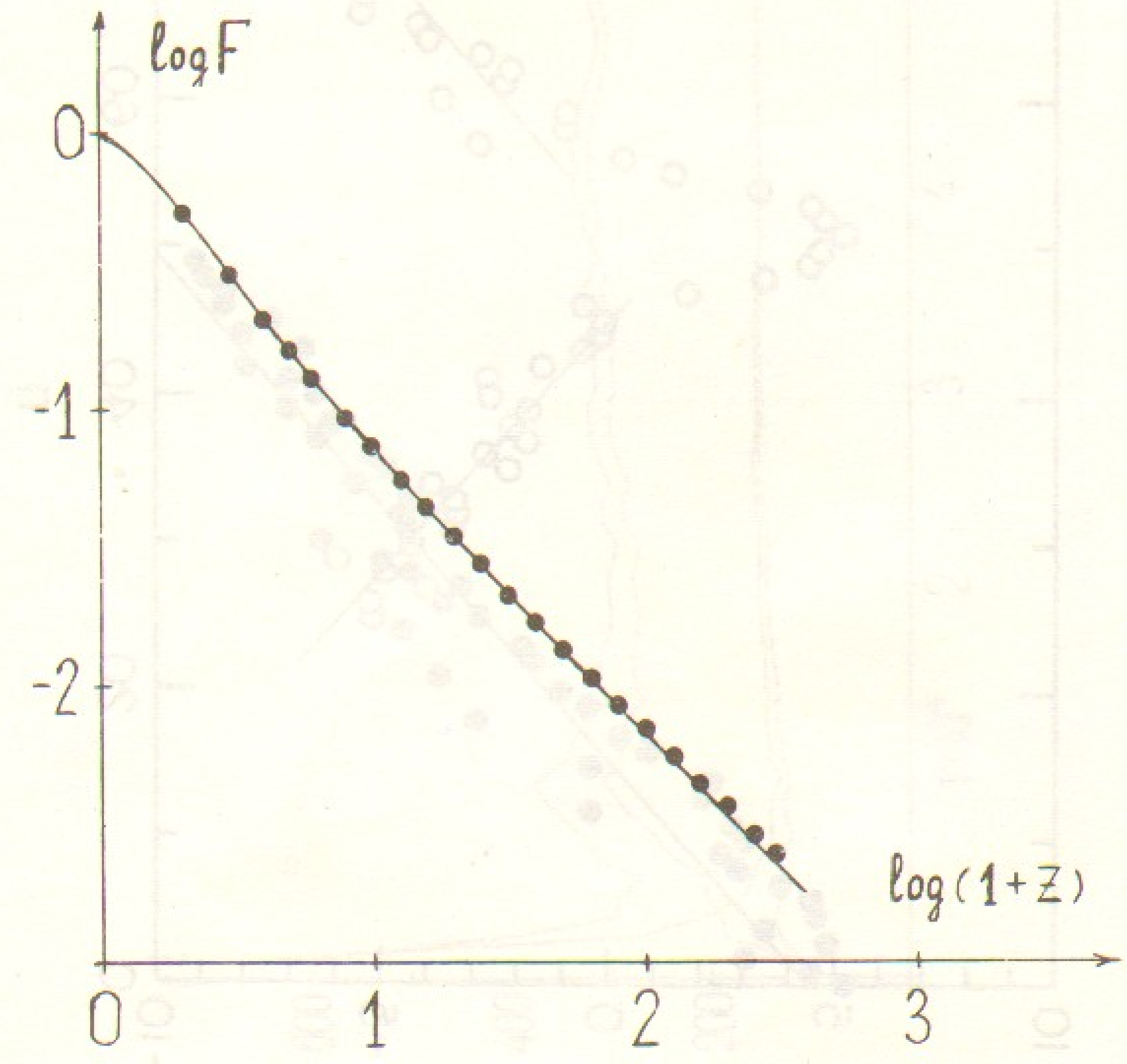


Рис.2

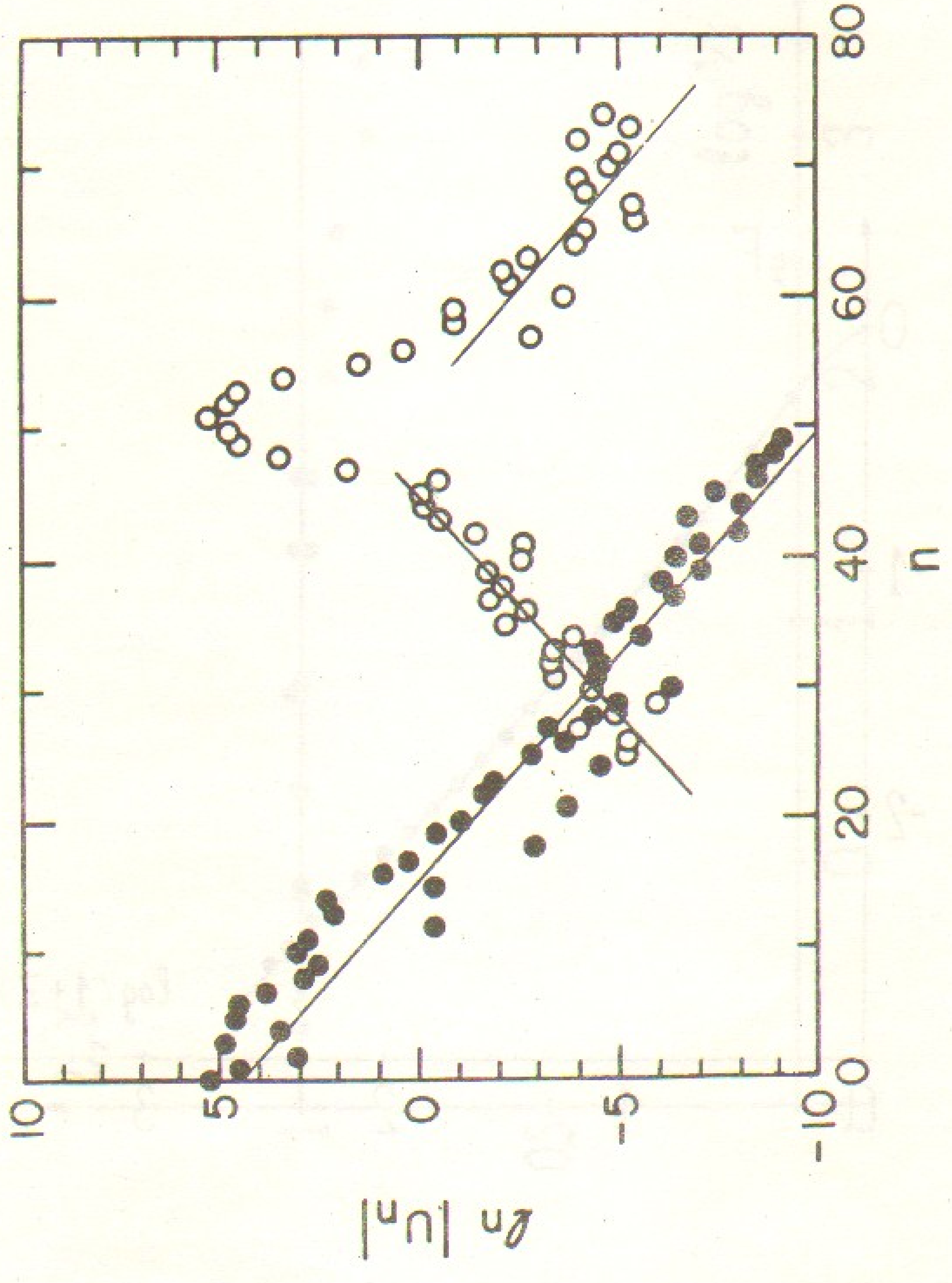


Рис.3

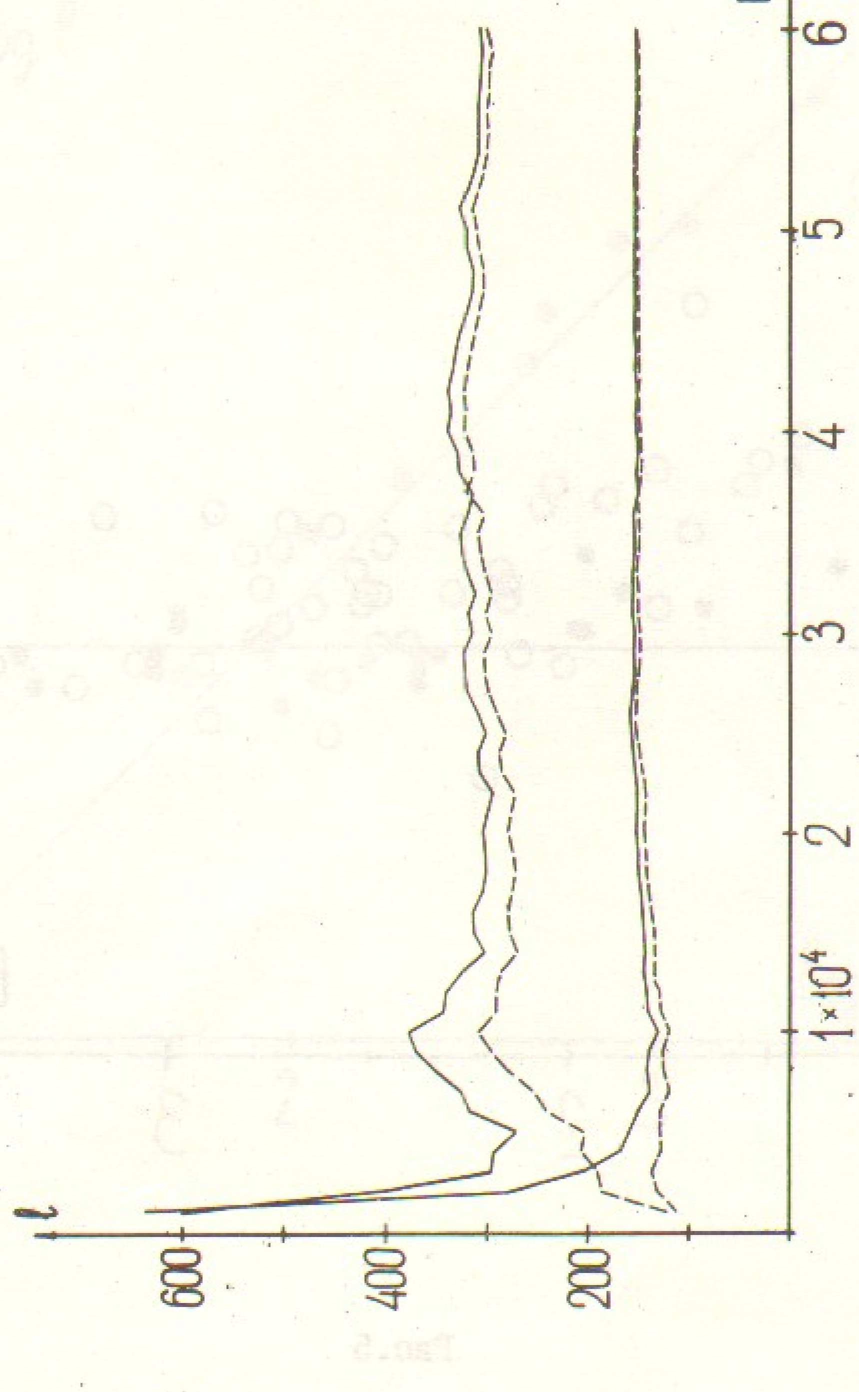


Рис.4

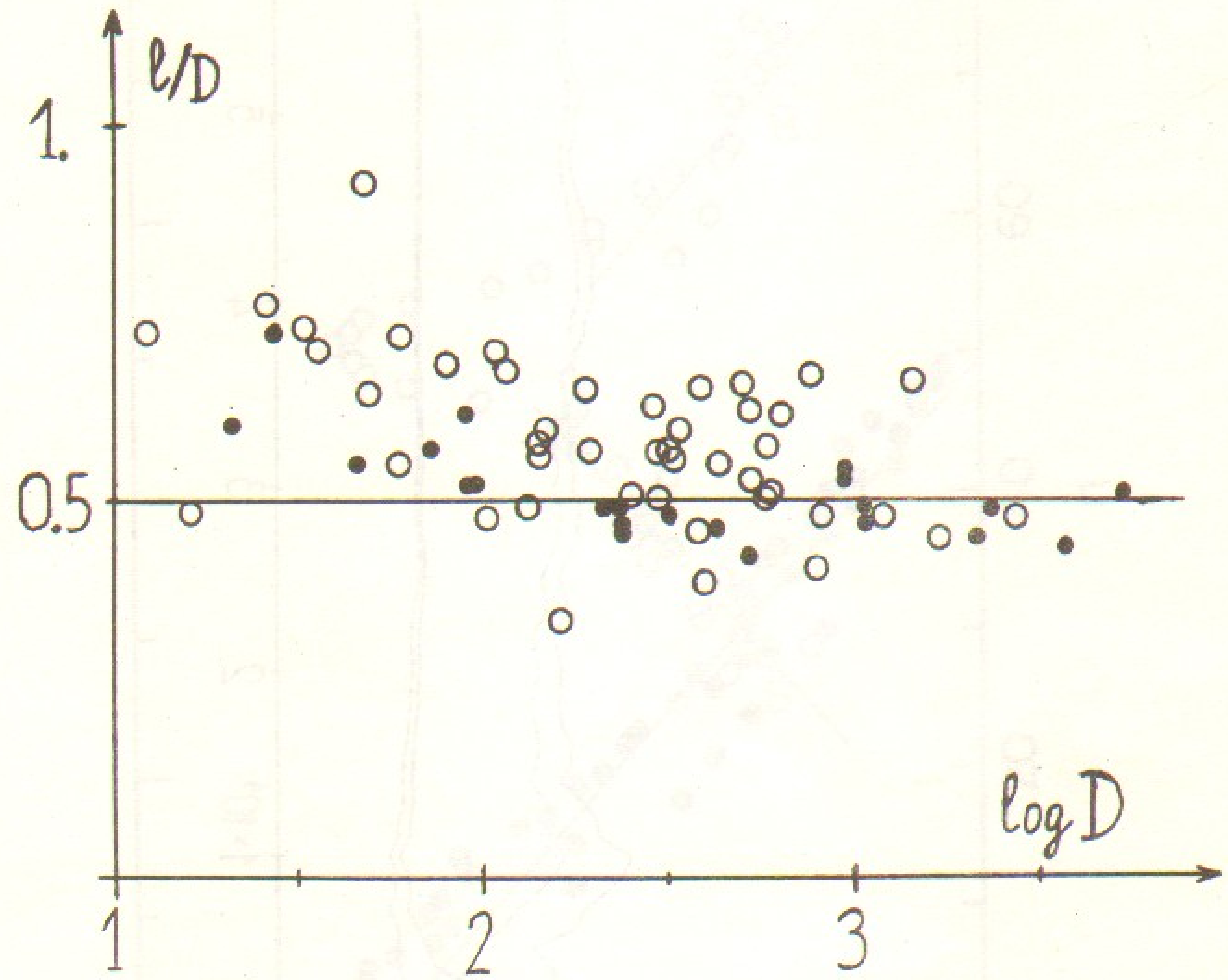


Рис.5

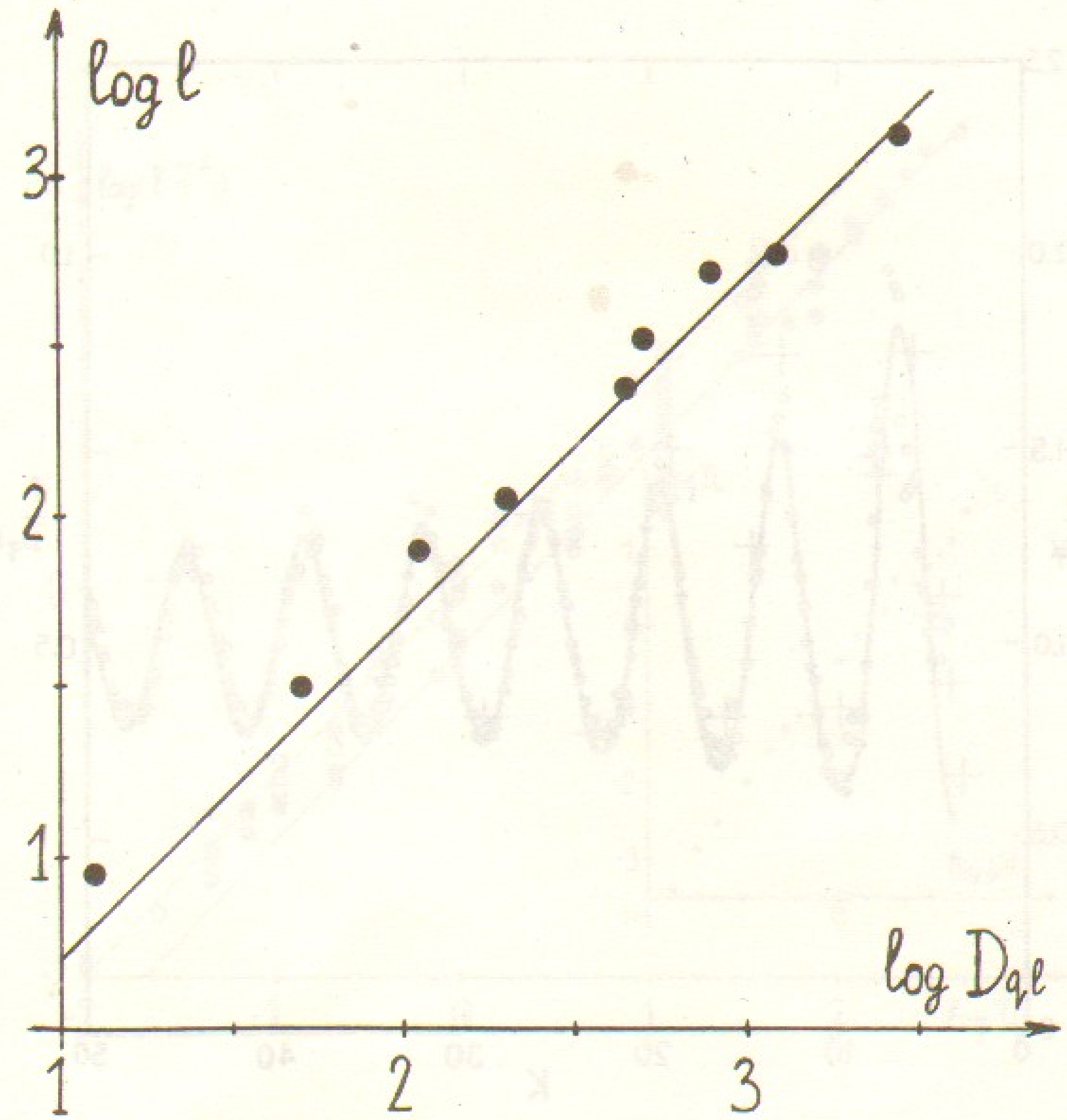
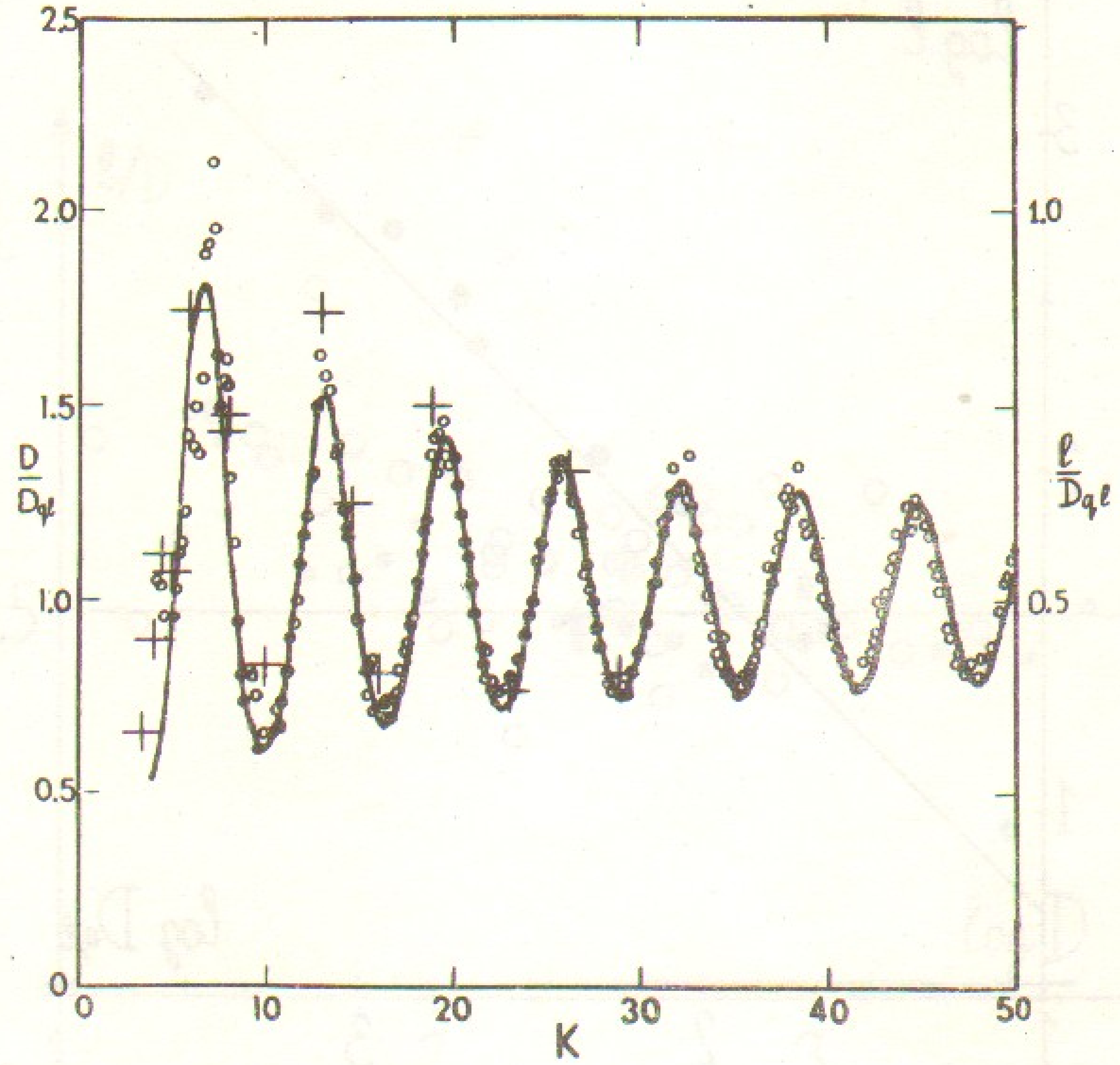
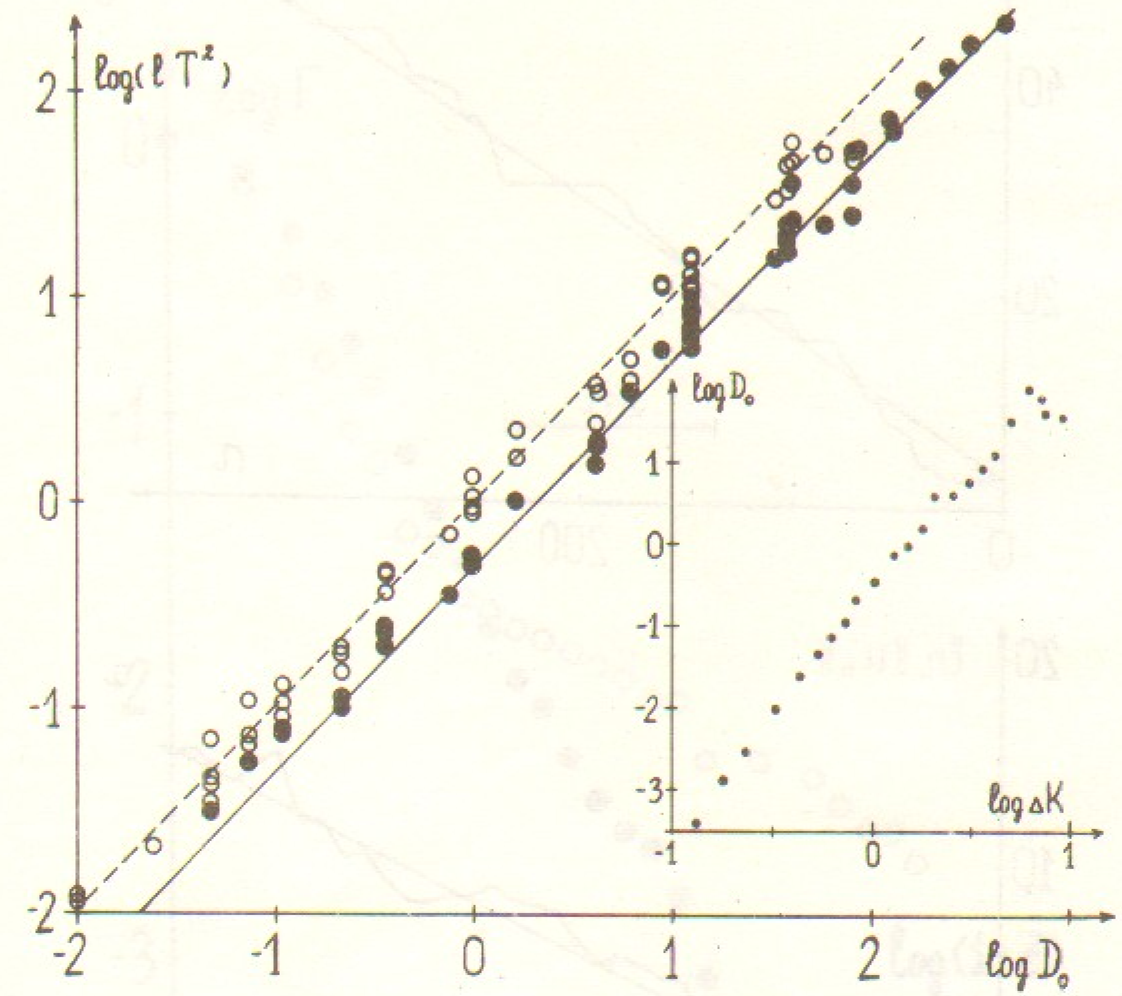


Рис.6



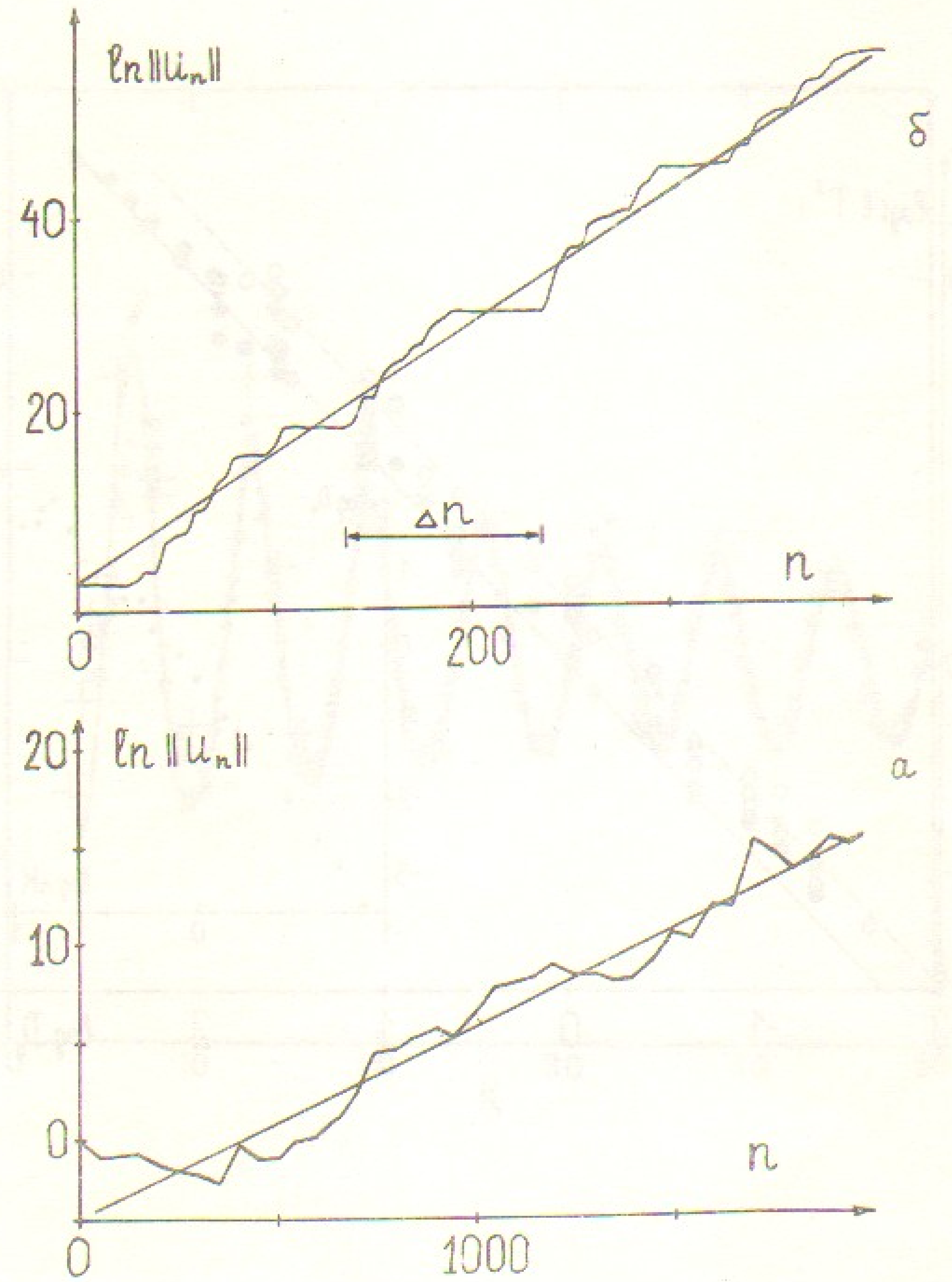
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
1.0
0.5
0
10
20
30
40
50
K
$\frac{D}{D_{ql}}$
$\frac{l}{D_{ql}}$

Рис.7



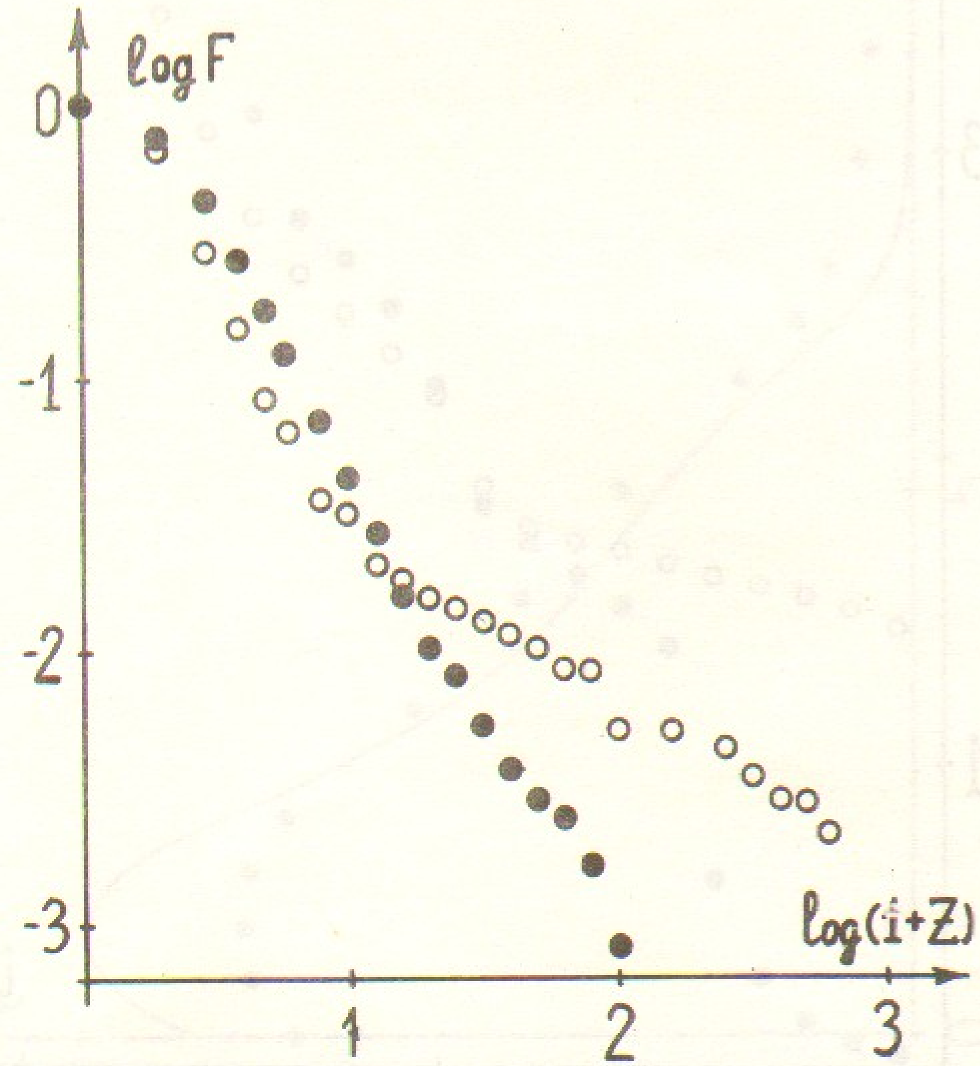
$\log(l\,T^2)$
2
1
0
-1
-2
-1
0
1
2
$\log D_o$
$\log D_o$
1
0
-1
-2
-3
$\log \Delta K$
-1
0
1

Рис.8



$\ln\|u_n\|$
40
20
Δn
n
0
200
б
20
$\ln\|u_n\|$
a
10
0
n
0
1000

Рис.9



log F
0
-1
-2
-3
log(i+Z)
1
2
3

Рис.10

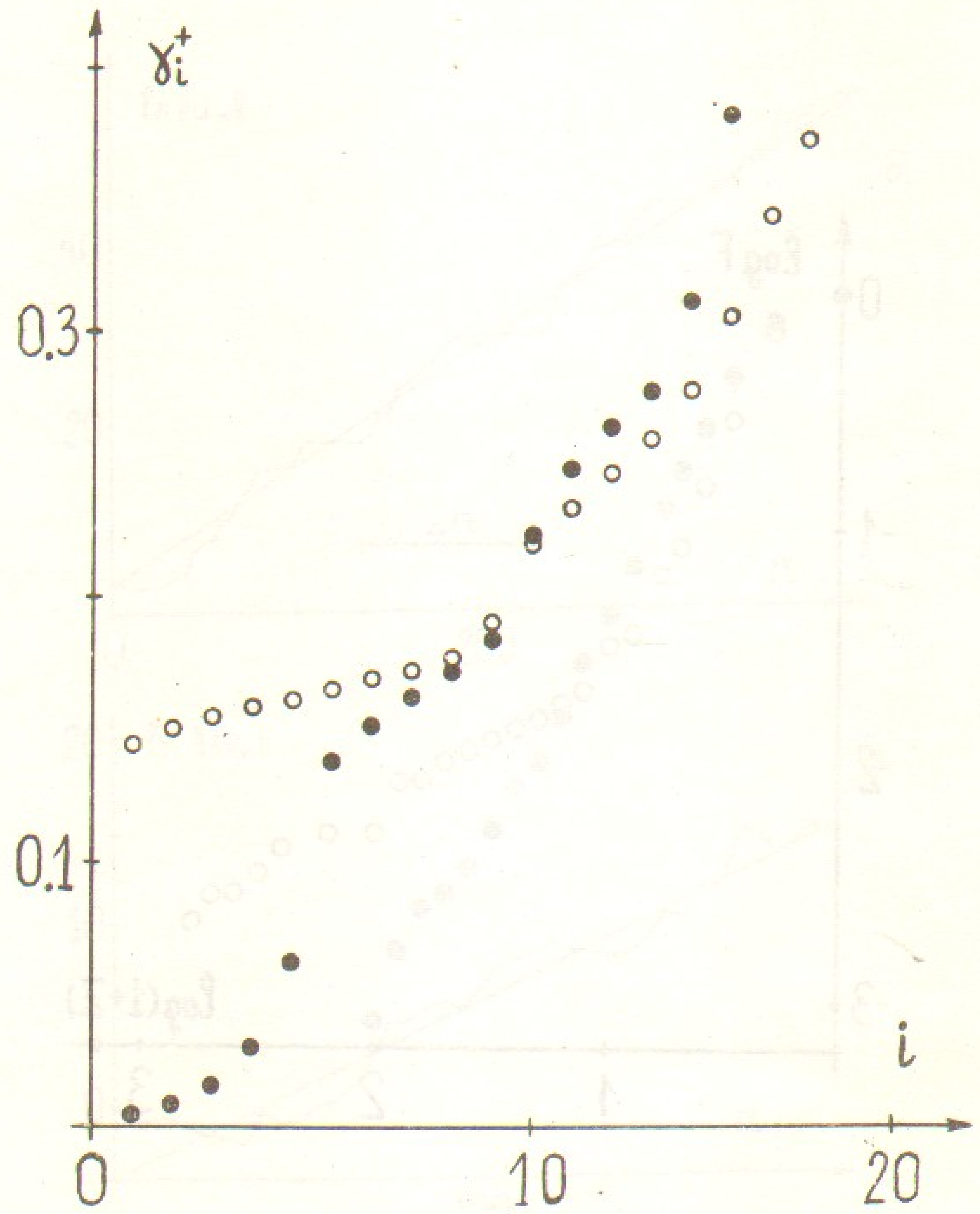


Рис.II

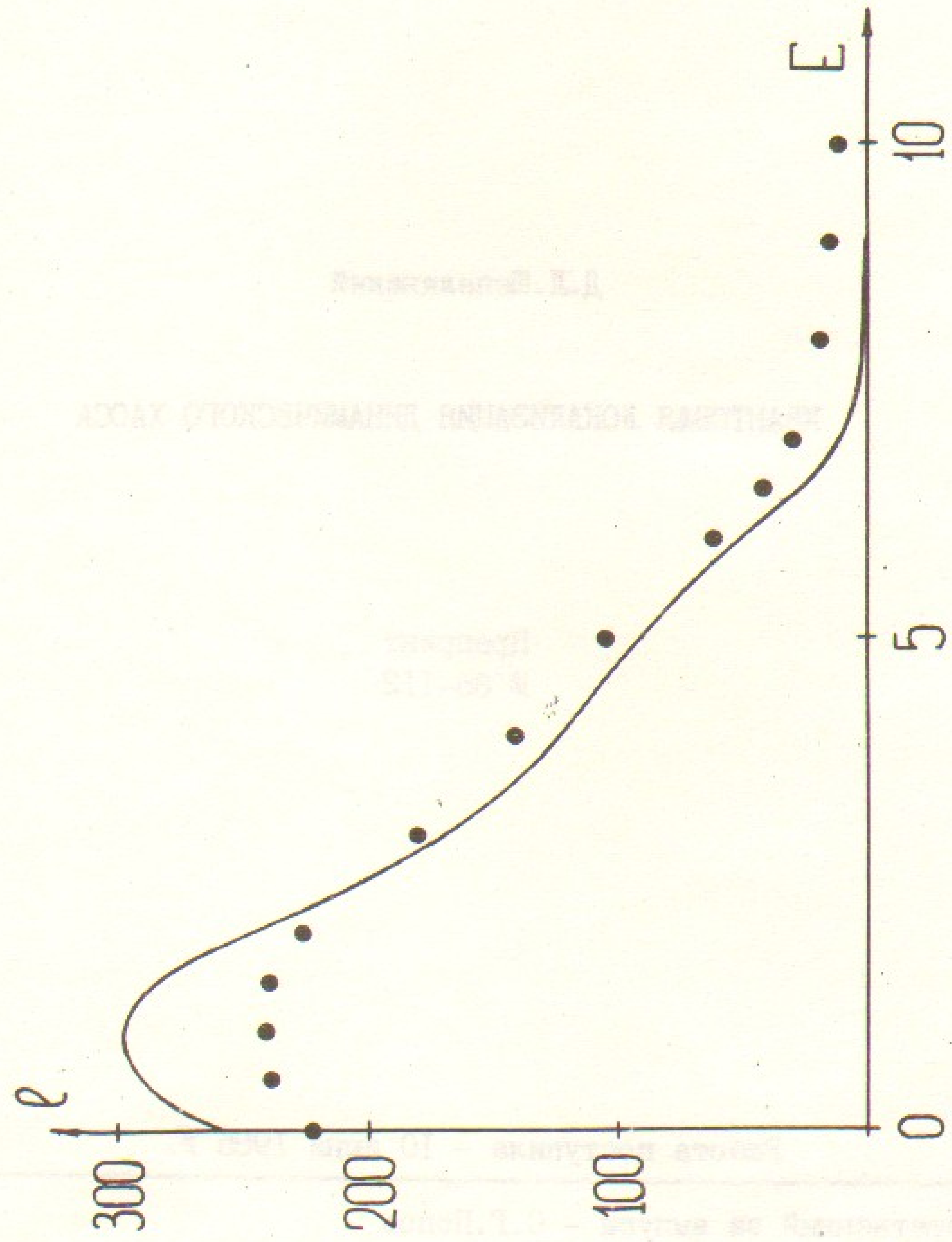


Рис.I2

Д.Л.Шепелянский

КВАНТОВАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА

Препринт
№ 85-112

Работа поступила - 10 июня 1985 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати 28.08-1985 г. МН 06716
Формат бумаги 60х90 1/16 Усл.2,6 печ.л., 2,1 учетно-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 112.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90