



Б.55

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

42

А.А. Бехтенов, Г.Г. Вандергрифт  
В.И. Волосов

ПРОДОЛЬНЫЕ ТОКИ В ОТКРЫТЫХ  
МАГНИТНЫХ ЛОВУШКАХ

ПРЕПРИНТ 85-132

БИБЛИОТЕКА  
Института ядерной  
Физики СО АН СССР  
ИЯФ. № \_\_\_\_\_



НОВОСИБИРСК



I. В в е д е н и е

Одна из особенностей открытых магнитных ловушек — это наличие продольных потоков плазмы через "пробки" ловушки. Очевидно, что физические процессы в ловушке могут существенно влиять на величину и структуру потоков плазмы, с другой стороны эти потоки (в частности, поток электронов) могут заметно воздействовать на физические процессы в ловушке.

Продольные токи ионов и электронов в среднем равны между собой при условии, что в плазме отсутствуют заметные поперечные потоки частиц, а также при равенстве мощности источников ионов и электронов в плазме.

Время жизни ионов в ловушке определяется продольными потенциалами: магнитным, электрическим и центробежным, а электронов, в основном, электрическими потенциалами: амбиполярным потенциалом в области пробки и барьерным потенциалом в дебаевском слое вблизи концевых электродов (см.рис.1). При условиях, рассмотренных выше, времена жизни электронов и ионов практически равны.

Если известно время жизни частиц в плазме —  $\tau_p$ , их средняя плотность  $n_\alpha$  ( $\alpha = e, i$ ), и длина ловушки  $L$ , то плотность продольного тока, уходящего из ловушки, равна:

$$j_\alpha = \frac{n_\alpha \cdot L}{\tau_p} \quad (1)$$

Ниже, для краткости, величина  $j_\alpha$  называется продольным током. Впервые расчеты удержания плазмы, и, соответственно, продольных стационарных токов в простейшем "пробкотроне" были проведены в [1], сегодня эти расчеты проводятся, как правило, численно [2].

Если в открытой ловушке происходят какие-либо колебательные процессы, изменяющие величину барьерного электрического потенциала плазмы  $\varphi(z, \theta)$  во времени, то величина продольного

\*Калифорнийский Университет, Ирвайн, США.



электронного тока также будет изменяться во времени; при этом продольный ток ионов практически не меняется, т.к. ионы, уходящие из ловушки, лишь доускоряются барьерным потенциалом. В случае периодических процессов, если глубина модуляции продольного тока невелика, можно рассматривать переменную составляющую этого тока как некоторый дополнительный продольный электронный ток

$$j_1 = j_0 \cdot e^{-i\omega t}$$

Подобный ток может существенно влиять на величину потенциалов в ловушке, и, соответственно, на устойчивость плазмы. Ниже исследуется величина этого тока и его зависимость от частоты колебаний.

## 2. Задача о токе $j_1(t)$

Рассмотрим задачу о влиянии колебаний потенциала плазмы на величину продольного электронного тока  $j(t)$ ;

$$\varphi = \varphi_0(z) + \varphi_1(r, \theta, z) \cdot e^{-i\omega t} \quad (2)$$

$$j = j_0 + j_1 \cdot e^{-i\omega t}$$

Пусть величины  $|\varphi_1| \ll |\varphi_0|$  и  $|j_1| \ll |j_0|$ ; пусть также  $\partial U_0 / \partial z \geq 0$  во всей области от центра ловушки до концевое-го электрода, здесь  $U_0 = e\varphi_0(z) + \mu \cdot \nabla B$ . Рассматриваются потенциальные колебания с  $K_z = 0$ , т.е.  $\partial \varphi_1 / \partial z = 0$  всюду кроме дебаевского слоя вблизи концевое-го электрода.

При наличии азимутального дрейфа электронов, задача рассматривается во вращающейся системе координат, где этот дрейф отсутствует. Учет азимутального дрейфа в лабораторной системе координат осуществляется заменой  $\omega \rightarrow \omega - \ell \Omega_e$ , где  $\ell$  - азимутальное волновое число,  $\Omega_e$  - частота дрейфа.

При нахождении условий ухода электронов через потенциальный барьер рассматривается, для упрощения, задача для сферически симметричного случая. Так как исследуется только относительная величина добавочных продольных токов, т.е.

$(j_1 / j_0)$ , то в I-ом приближении это упрощение не влияет на результат.

Предполагается, что длина свободного пробега электронов много больше продольного размера системы

$$\lambda_e \gg L \quad (3)$$

Обратный предельный случай ( $\lambda_e \ll L$ ) - задача о контакте со стенкой плотной холодной плазмы подробно исследовалась в ряде работ [3-5]. Кулоновское время  $\tau_{ee}$  здесь меньше пролетного времени ( $\tau_B$ ). Величина среднего электронного тока, уходящего из ловушки, равна:

$$j_0 \approx e \cdot n \cdot v_e \cdot e^{-\frac{e\varphi}{T}} = e \cdot n \cdot v_i \quad (4)$$

возмущение потенциала плазмы с частотой  $\omega$  приводит к добавочным продольным токам порядка:

$$j_1 = -j_0 \frac{e \cdot \varphi_1(t)}{T_e} \quad (5)$$

В работе [5] отмечалось, что помимо членов  $\sim \varphi_1$ , в выражении (5) в зависимости от постановки задачи могут присутствовать члены  $\sim n_1$ , того же порядка, что и член  $\sim \varphi_1$ . Можно показать, что при условии  $\lambda \gg L$  члены пропорциональные  $n_1$ , дают малую поправку к  $j_1$ ; она, по крайней мере в  $(\lambda / L)^{1/2}$  раз меньше, чем  $j_1$ .

Предполагается, что в плазме имеются стационарные источники ионов и электронов, которые компенсируют продольные потери; предполагается также, что вторичная электронная эмиссия мала и ею можно пренебречь.

Для упрощения, предполагается, что электроны уходят из ловушки только через одну из пробок. Величина тока  $j_1$  существенно связана с функцией распределения электронов (по скоростям и по энергии) вблизи этой пробки. Будем ниже обозначать ее как  $f^*$ ; здесь предполагается, что размер области амбиполярного и барьерного потенциалов много меньше длины ловушки.

В рассматриваемой задаче имеется несколько характерных времен. Это - обратная частота колебаний  $\omega^{-1}$ , время продольных (баунс) колебаний электронов в ловушке  $\tau_B = 2L / v_e$  где  $v_e$  - продольная скорость электронов; время электронных кулоновских столкновений  $\tau_{ee} = 3,5 \cdot 10^4 \cdot T_e^{3/2} / n \cdot (\Lambda / \mu_0)$



( $T_e$  в эВ,  $n$  в  $\text{см}^{-3}$ ,  $\Lambda$  - кулоновский логарифм, см., например, [6,7]), время жизни частиц в ловушке  $\tau_p$  и время ион-ионных столкновений  $\tau_{ii}$  (см. там же). Практически для всех типов открытых ловушек  $\tau_p \gg \tau_{ee}$ , кроме того  $\tau_B \ll \tau_{ee}$ . Поэтому сначала можно рассмотреть три простейшие предельные задачи;  $\omega^{-1} \ll \tau_B$ ;  $\tau_B \ll \omega^{-1} \ll \tau_{ee}$  и  $\tau_{ee} \ll \omega^{-1}$ .

### 3. Предельные задачи

Высокие частоты,  $\omega^{-1} \ll \tau_B$

Функция распределения электронов по энергии в окрестности электростатического барьера и по скоростям  $f^*$  приведена на рис.2.

В стационарном случае ( $\psi_1 = 0$ ) через барьер (энергетическая высота барьера -  $\epsilon_0$ , барьерный потенциал  $\psi_0 = \epsilon_0/e$ ) постоянно уходят электроны из "хвоста" функции распределения с энергией  $\epsilon > \epsilon_0$ . Эти электроны могут приобрести избыток энергии над барьером ( $\epsilon - \epsilon_0$ ) лишь за одно прохождение между пробками (пролетное время  $\tau_B$ ). Можно оценить среднюю величину этой энергии  $\overline{\Delta\epsilon}$ , рассматривая процесс диффузионного набора или потери энергии быстрой частицей при прохождении через максвелловскую плазму [6]:

$$\overline{\Delta\epsilon}^2 = \epsilon_0^2 \frac{\tau_B}{\tau_{ee}} \quad (6)$$

или после преобразований:

$$\overline{\Delta\epsilon} \approx T_e \cdot \sqrt{\frac{\tau_B}{\tau_{ee}(T_e)} \cdot \left(\frac{T_e}{\epsilon_0}\right)^{1/2}} \quad (7)$$

Исследуем случай  $\psi_1 \neq 0$ . Пусть в момент времени  $t = 0$  на барьерный потенциал накладывается импульсное возмущение  $\psi_1$  ( $|e\psi_1| \ll \overline{\Delta\epsilon}$ ), причем длительность этого возмущения  $\Delta t \ll \tau_B$ .

В течение этого времени электронный ток, вытекающий из ловушки, изменяется на величину  $j_1$

$$j_1 = e \cdot v_e \cdot \int_{\epsilon_0 + e\psi_1}^{\infty} f^*(\epsilon) \cdot d\epsilon - j_0$$

учитывая, что

$$j_0 = e \cdot v_e \cdot \int_{\epsilon_0}^{\infty} f^*(\epsilon) \cdot d\epsilon \approx e \cdot v_e \cdot f_0 \cdot \overline{\Delta\epsilon} \quad (8)$$

$$j_1 = -j_0 \frac{e\psi_1}{\overline{\Delta\epsilon}} \quad 0 \leq t \leq \Delta t$$

Очевидно, что возмущение функции распределения, определяемое импульсом  $\psi_1$ , может повлиять повторно на величину  $j_1$  в момент времени  $t = \tau_B$ , т.е. через время пролета электронов через ловушку. Повторным влиянием  $\psi_1$  на  $j_1$  можно пренебречь, если  $f^*$  через время  $\tau_B$  за счет перемешивания электронов по скоростям примет вид, близкий к невозмущенной  $f_0^*$ . При этом условии величина  $j_1(t)$  определяется только мгновенными значениями  $\psi_1$ ; т.е. (8) справедливо при любых  $t > 0$ .

Рассмотрим быстрые периодические процессы, когда  $\psi_1 \sim e^{-i\omega t}$ . Обозначим через  $\Delta\tau_B$  - среднее время разброса по  $\tau_B$  для электронов, находящихся вблизи потенциального барьера. Условие перемешивания в этом случае имеет вид  $\Delta\tau_B \cdot \omega \gg 1$ . Это условие означает, что функция распределения  $f^*$  сформирована из электронов, которые взаимодействовали ранее с потенциалом  $\psi_1(t)$  в произвольных фазах. При этом условии величина  $j_1(t)$  определяется только мгновенным  $\psi_1(t)$  аналогично (8) (см. также [8]):

$$j_1 = -j_0 \frac{e \cdot \bar{\psi}_1 \cdot e^{-i\omega t}}{\overline{\Delta\epsilon}} \quad (9)$$

### Промежуточные частоты $\tau_B \ll \omega^{-1} \ll \tau_{ee}$

В этом случае величина тока  $j_1$  определяется изменением функции распределения электронов  $f^*(\epsilon)$  вблизи барьера. Представим ее в виде  $f^* = f_0^* + f_1$ , где  $f_0^*$  - стационарное решение, а  $f_1(\epsilon)$  малая добавка, отличная от нуля в области  $|\epsilon_0 - \epsilon| \ll \epsilon_0$  (но  $|\epsilon_0 - \epsilon| \gg \overline{\Delta\epsilon}$ ), которая определяет величину  $j_1$ . Уравнение Фоккера-Планка для  $f_1$ , можно представить в виде [1]:



$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4\tau_{ee}} \left(\frac{\tau_e}{\varepsilon}\right)^{1/2} \tau_e \left(\tau_e \frac{\partial^2 f_1}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon}\right). \quad (10)$$

Так как ищется решение для  $f_1$ , локализованной на участке  $|\varepsilon - \varepsilon_0| \ll \varepsilon_0$  при  $\varepsilon \gg \tau_e$ , то в (10) можно отбросить член с первой производной по  $\varepsilon$ , можно также считать  $(\tau_e/\varepsilon)^{1/2} = \text{const}$ . При этих условиях уравнение (10) имеет более простую форму:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial \varepsilon^2} \quad (11)$$

Учитывая, что  $f_1 \sim e^{-i\omega t}$ , решение этого уравнения представим в виде:

$$f_1(\varepsilon, t) = f_1(\varepsilon_0, t) \cdot e^{\pm \sqrt{-i\omega} \cdot (\varepsilon - \varepsilon_0) / a} \quad (12)$$

Выбираем решение, затухающее при  $\varepsilon \rightarrow 0$  ( $\text{Im } \omega > 0$ ). Величина  $f_1(\varepsilon_0, t)$  определяется из условий на границе  $\varepsilon = \varepsilon_0$  и, как видно из рис.3 равна

$$f_1(\varepsilon_0, t) = - \left. \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon = \varepsilon_0} \cdot e \cdot \varphi_1(t) \quad (13)$$

Таким образом, из (12), (13) имеем

$$f_1(\varepsilon, t) = - \left. \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon = \varepsilon_0} \cdot e \cdot \varphi_1(t) \cdot e^{+\sqrt{-i\omega} (\varepsilon - \varepsilon_0) / a} \quad (14)$$

Поскольку продольный ток электронов, уходящих из ловушки, пропорционален  $\partial f / \partial \varepsilon$ , т.е.  $j \sim \partial f / \partial \varepsilon$ , то из (10), (14) непосредственно находим

$$j_1(t) = -j_0 \sqrt{-i\omega \cdot \tau_{ee}} \cdot \frac{e \cdot \varphi_1(t)}{\tau_e \sqrt{\left(\frac{\tau_e}{\varepsilon_0}\right)^{1/2} \frac{3\sqrt{\pi}}{4}}} \quad (15)$$

или

$$j_1(t) = -j_0 \sqrt{-i\omega \tau_B} \cdot \frac{e \cdot \varphi_1(t)}{\Delta \varepsilon} \quad (16)$$

где

$$\Delta \varepsilon = \tau_e \sqrt{\frac{\tau_B}{\tau_{ee}} \left(\frac{\tau_e}{\varepsilon_0}\right)^{1/2} \frac{3\sqrt{\pi}}{4}} \quad (17)$$

Низшие частоты  $\tau_{ee} \ll \omega^{-1} \ll \tau_{ii}, \tau_p$

Добавочный ток  $j_1$  связан здесь с полной перестройкой функции распределения при изменении высоты барьера (см. рис.4). Функция  $f$  является стационарным решением уравнения Фоккера-Планка для электронов с потенциальным барьером  $\varepsilon$  (см. [9]). Величину тока  $j_1$  можно найти, сравнивая две подобных функции при разных барьерных потенциалах; при этом предполагается, что мощность источника и температура электронов сохраняются постоянными.

Изменение плотности  $\Delta f$  при изменении  $\varphi$  равно:

$$\begin{aligned} \Delta f &= K \left[ \int_0^{\varepsilon_0 + \varepsilon_1} \left( e^{-\frac{\varepsilon}{T}} - e^{-\frac{\varepsilon_0}{T}} \right) d\varepsilon - \int_0^{\varepsilon_0} \left( e^{-\frac{\varepsilon}{T}} - e^{-\frac{\varepsilon_0}{T}} \right) d\varepsilon \right] = \\ &= \frac{\varepsilon_1}{T} \cdot e^{-\frac{\varepsilon_0}{T}} \cdot \frac{\varepsilon_0}{T} \cdot f_0 \approx \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0}{T^2} \frac{\tau_{ee}}{\tau_p} \cdot f_0 \end{aligned} \quad (18)$$

где



$$j_0 = K \int_0^{\varepsilon_0} \left( e^{-\frac{\varepsilon}{T}} - e^{-\frac{\varepsilon_0}{T}} \right) d\varepsilon$$

Величину продольного тока  $j_1$  можно найти из закона сохранения заряда

$$\operatorname{div} j_1 = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Так как  $\varepsilon_1 = e \cdot \varphi_1(t)$ , то

$$j_1 = -\frac{Lne}{\tau_p} \cdot \frac{e \cdot \varphi_1(t) \cdot \varepsilon_0}{T_e^2} \cdot (-i\omega \tau_{ee}) = -j_0 (-i\omega \tau_{ee}) \cdot \frac{e \varphi_1 \cdot \varepsilon_0}{T_e^2} \quad (19)$$

Представим теперь полученные выше результаты в виде графика  $J(\omega) = -\frac{j_1 \cdot \Delta \varepsilon}{j_0 \cdot e \varphi_1}$  (см. рис. 5). Отрезки прямых, составляющих асимптотические решения, пересекаются в окрестности точек  $\omega^{-1} = \tau_{ee}$  и  $\omega^{-1} = \tau_B$ ; поэтому можно считать, что эти решения правильны по порядку величины по крайней мере вдали от этих точек.

#### 4. Общий случай $\omega^{-1} \ll \tau_{ee}$ и $\omega \lesssim \omega_B$

Рассмотрим задачу о продольном токе  $j_1$  в общем случае, когда характерные частоты колебаний выше обратных кулоновских времен ( $\omega \gg \tau_{ee}^{-1}$ ); при этом они могут лежать в широких пределах относительно  $\omega_B$  ( $\omega \lesssim \omega_B$ ). Будем искать решение в виде:

$$j_1(t) = \int_{-\infty}^t K(t-t_1) \cdot \varphi_1(t_1) dt_1, \quad (20)$$

Функцию  $J(\omega)$ , связывающую  $j_1(t)$  и  $j_0$ , в случае периодического возмущения  $\varphi_1(t) = \varphi_1 \cdot e^{-i\omega t}$  можно с учетом (20) представить в виде:

$$J(\omega) = \int_{-\infty}^0 K_1(-t_1) \cdot e^{-i\omega t_1} dt_1, \quad (21)$$

где

$$K_1(t) = K(t) \cdot \Delta \bar{\varepsilon} / e j_0.$$

Для нахождения  $K(t)$  рассмотрим задачу об импульсном возмущении; пусть  $\varphi_1(t) = \varphi_1$  при  $0 < t < \Delta t$ ,  $\varphi_1(t) = 0$  при  $t \leq 0$  и  $t \geq \Delta t$ ; предполагаем, что  $\Delta t \ll \tau_B$ . Функцию распределения электронов, находящихся вблизи барьера представим в виде:  $f = f_0 + f_1(t)$

$f_0$  - функция распределения электронов в стационарном режиме. При  $\varphi_1 > 0$  в ловушке остается группа электронов, описываемая функцией  $f_1$ , которые при  $\varphi_1 = 0$  должны были бы покинуть ловушку; при  $\varphi_1 < 0$ , образуется аналогичным образом дефицит электронов. Оба случая  $\varphi_1 < 0$  и  $\varphi_1 > 0$  с точностью до знака имеют одинаковые решения; но для удобства будем ниже считать  $\varphi_1 > 0$ , в этом случае  $f_1(t) > 0$ . Вид функций  $f_0$  и  $f_1$  показан на рис. 2; функция  $f_1(t)$  на фазовой плоскости ( $v_{||}, v_{\perp}$ ) на рис. 6.

Рассмотрим эволюцию во времени функции  $f_1(t)$ , предполагая сначала, что время  $\tau_B$  одинаково для всех электронов. В момент времени  $t = \tau_B$  группа электронов, описываемая  $f_1$ , возвращается к потенциальному барьеру и формирует импульс тока  $j_1$ . После прохождения через ловушку функция распределения  $f_1$  расплывается в пространстве скоростей по  $v_{||}$  за счет диффузии на основной массе электронов (см. рис. 7). Распределение этих электронов по энергии имеет вид функции Гаусса с характерным размером  $\Delta \bar{\varepsilon}$ . Очевидно, что половина электронов с энергией  $\varepsilon > \varepsilon_0$  уходит через барьер, а оставшаяся часть с  $\varepsilon < \varepsilon_0$  будет уходить на коллектор при последующих возвращениях этого сгустка электронов к барьеру. Изменение во времени функции распределения  $f_1$  описывается одномерным уравнением диффузии, решая его, можно найти  $f_1(t)$  в последующие моменты времени, если известна  $f_1(t - \tau_B)$ . Следует заметить, что процесс диффузии для  $f_1$  является одномерным



в силу условия  $\Delta \varepsilon \ll T_e$ , т.е. размер области, занятой электронами, много меньше, чем характерные размеры поверхности "конуса потерь". Заметим также, что хотя  $f_i$  на разных участках "конуса потерь" имеет различные значения параметров ( $\varepsilon_0$ ,  $V_{||}$  и т.д.), однако полученные ниже выражения явно не зависят от этих параметров: поэтому они справедливы для  $f_i$ , усредненной по всему "конусу потерь". Обозначим индексом  $N$  число продольных колебаний сгустка. Тогда вид функции распределения по энергии для этих электронов  $f_{1N}$  при  $N$ -ом прохождении барьера имеет вид:

$$f_{1N}(E) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-(E-E')^2} dE' \cdot f_{1,N-1}(E') \quad (22)$$

здесь  $E = (\varepsilon - \varepsilon_0) / 2 \overline{\Delta \varepsilon}$ ;

$$f_{11}(E) = \text{const} \cdot e^{-E^2} \quad (22)$$

Обозначим долю уходящих на каждом шаге электронов через  $\alpha_N$ , тогда, если нормировать

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{11}(E) \cdot dE = 1, \quad \text{или } \alpha_0 = -1$$

то

$$\alpha_N = \int_0^{\infty} f_{1N} \cdot dE \quad (23)$$

Вид функций  $f_{1N}(E)$  приведен на рис.7; так как все электроны из этой группы за достаточно большое время уйдут из ловушки, то очевидно, что:

$$\sum_{N=0}^{\infty} \alpha_N = 0 \quad (24)$$

Таким методом, используя  $\delta$ -образное возмущение, можно определить вид функций  $K(t)$  через  $j_i(t)$

$$j_i(t) = K(t) \cdot \bar{\varphi} \cdot \Delta t$$

где  $j_i(t)$  и  $K(t)$  - состоят из суммы импульсов тока, разнесенных во времени на  $\tau_B$  ( $t = N \tau_B$ ), причем доля электронов, в каждом из них равна  $\alpha_N$  (см.рис.8).

Если предположить, что каждый импульс  $j_{iN}(t)$  на рис.8 имеет нулевую ширину по времени, то можно, интегрируя (21), получить вид  $J(\omega)$  для гармонического возмущения.

Заметим, что величины  $\alpha_N$ , полученные при численном интегрировании (23), совпадают с коэффициентами разложения в ряд функции  $\sqrt{1-x}$ , поэтому для возмущения вида  $e^{-i\omega t}$  функцию  $J(\omega)$  можно представить в виде\*

$$J(\omega) = 1 - \sum \alpha_N e^{iN\omega\tau_B} = \sqrt{1 - e^{i\omega\tau_B}} \quad (25)$$

Рассмотрим теперь более общий случай. За счет того, что в реальной магнитной ловушке величина  $\tau_B$  является различной для разных электронов, вид функции  $j_i(t)$  отличается от рассмотренного выше. Импульсы тока, из которых состоит функция  $j_i(t)$ , имеют колоколообразный вид с характерным временем разброса  $\Delta \tau_B$  (см.рис.8). Следует заметить, что количество электронов, уходящих из ловушки на коллектор, при каждом отражении сгустка от барьера будет (в первом приближении) тем же самым, что и при  $\Delta \tau_B = 0$ .

Уширение  $\Delta \tau_B$  происходит за счет 2-х физических процессов.

Разброс по поперечным скоростям ( $v_{\perp}$ ) обычно приводит к разбросу по времени пролета  $\tau_B$  за счет изменения средней продольной скорости. Можно показать, что в этом случае величина  $\Delta \tau_{B,v}^N$  зависит от времени  $t$  (или  $N$ ) и при  $N$  отражениях равна:

$$\Delta \tau_{B,v}^N = \tau_B \cdot \left( \frac{\Delta v_{\perp}}{v_{\perp}} \right) \cdot N \quad (26)$$

где  $\Delta v_{\perp}$  - средний разброс по  $v_{\perp}$ . В простой зеркальной ловушке (при  $T_i \approx 3 T_e$ ) оценка дает  $\Delta v_{\perp} / v_{\perp} \approx 0.05 + 0.1$ .

\*

$$\alpha_N = \alpha_{N-1} \cdot (2N-3/2N)$$



Другой процесс — это диффузия электронов по энергии, о которой говорилось выше. Очевидно, что этот процесс сопровождается диффузией по  $V_{||}$  и, соответственно, по  $\tau_B$ . Так как изменение энергии зависит от времени  $\sim t^{1/2}$ , т.е.

$$\Delta \left( \frac{1}{2} m v_{||}^2 \right) = T_e \sqrt{\frac{1}{T_{ee}} \cdot \left( \frac{T_e}{\epsilon_0} \right)^{1/2}} \cdot t^{1/2} \quad (27)$$

то можно показать, что уширение импульса тока, связанное с изменением энергии  $\Delta \tau_{B,\epsilon}^N$ , растет  $\sim N^{3/2}$

$$\Delta \tau_{B,\epsilon}^N = \tau_B \left( \frac{\Delta \epsilon}{\epsilon} \right) \cdot N^{3/2} \quad (28)$$

Более детальный анализ формы импульсов тока  $j_i(t)$  можно провести, если учесть точный вид функции распределения вблизи барьера, конфигурацию барьера в пространстве  $V_{\perp}, V_{||}$  и определять  $j_i(t)$ , используя численные решения уравнения Фоккера-Планка. Однако, как будет показано ниже, эти уточнения не могут существенно повлиять на характер функций  $j_i(t)$   $J(\omega)$ .

Для нахождения  $K_i(t)$  и  $J(\omega)$  будем предполагать, что расплывание импульса тока во времени описывается функцией Гаусса; тогда

$$K_i(t) = \sum_{N=0}^{\infty} a_N \cdot e^{i\omega \tau_B N} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi \Delta \tau_B^N}} \cdot e^{-\frac{(t - N\tau_B)^2}{2\Delta \tau_B^N}} \quad (29)$$

из (29) и (21) можно получить выражение для  $J(\omega)$ :

$$J(\omega) = 1 - \sum_{N=1}^{\infty} a_N \cdot e^{-(\Delta \tau_B^N \cdot \omega)^2} \cdot e^{i\omega \tau_B N} \quad (30)$$

Здесь предполагается, что

$$\Delta \tau_B^N = \sqrt{(\Delta \tau_{B,v}^N)^2 + (\Delta \tau_{B,\epsilon}^N)^2}$$

где  $\Delta \tau_{B,v}^N$  и  $\Delta \tau_{B,\epsilon}^N$  взяты из (26) и (28).

Вид функции  $J(\omega)$  для случая, когда можно пренебречь уширением  $\Delta \tau_B$ , т.е.  $\omega \cdot \Delta \tau_B \ll 1$ , приведен на рис.9. При этом выражение (30) переходит в (25). Внешняя кривая на графике построена для случая, когда  $\text{Im } \omega = 0$ . Все кривые при  $\text{Im } \omega > 0$  (неустойчивость) лежат внутри этой кривой, при этом  $|J| \leq 2$ . Внутренняя кривая построена для  $\text{Im } \omega = 0,25 \cdot \tau_B^{-1}$

Вид функции  $J(\omega)$  для реальных систем ( $\omega \cdot \Delta \tau_B^1 \lesssim 1$ ) в соответствии с (30) для случая  $\text{Im } \omega = 0$  приведен на рис.10. Скорость, с которой кривая закручивается и приближается к значению  $J = 1$ , зависит от величины параметра  $\Delta \tau_B^1 / \tau_B$  при  $N = 1$ . Если  $\Delta \tau_B^1$  достаточно велико ( $\Delta \tau_B^1 / \tau_B \gg 0,1$ ), то вид функции  $J(\omega)$  практически не зависит от того, по какому закону изменяется  $\Delta \tau_B(N)$  ( $\sim N$  или  $\sim N^{3/2}$ ).

Для удобства работы с функцией  $J(\omega)$  на рис.11 приведены огибающие максимальных и минимальных значений  $|Re J|$  в зависимости от параметра  $(\Delta \tau_B^1 / \tau_B) \omega \tau_B$ . В экстремальных точках величина  $\omega \tau_B / 2\pi$  равна целым и полуцелым числам — минимумы и максимумы функции  $|Re J|$ , т.е.  $\omega \tau_B = 2\pi M$  (или  $2\pi(M + 1/2)$ ). На графике построены кривые для 2-х случаев: а)  $\Delta \tau_B^N = \Delta \tau_B^1 \cdot N^{3/2}$  — диффузионное уширение, и в)  $\Delta \tau_B^N = \Delta \tau_B^1 \cdot N$  — времяпролетное уширение импульсов тока. Как видно из рисунка, величина показателя степени при  $N$  весьма слабо влияет на вид функции  $J(\omega)$ . Отсюда можно сделать вывод, что вычисление формы импульсов тока в  $j_i(t)$  с помощью более сложных математических методов (например, из точного решения уравнения диффузии) не должно существенно влиять на вид  $J(\omega)$ .

### 5. Задача о $J(\omega)$ при $\omega \ll \tau_B^{-1}$

В случае, если  $\omega$  одного порядка с  $\tau_{ee}^{-1}$ , вид функции может быть найден из численного решения уравнения Фоккера-Планка (11) с учетом источников. Аналитическое решение в общем виде здесь получить не удастся.

Однако, поскольку в этой области отсутствуют какие-либо резонансные процессы с характерной частотой  $\sim \tau_{ee}^{-1}$ , то можно предположить, что  $J(\omega)$  будет монотонной функцией, связывающей решения типа (16) и (19) без каких-либо особенностей.



## 6. Заключение

Полученная выше зависимость величины плотности продольного электронного тока от амплитуды колебаний и их частоты позволяет исследовать различные задачи о влиянии продольных токов на устойчивость плазмы в открытых ловушках.

К этим задачам относится, в частности, проблема стабилизации вращающейся плазмы продольными токами, рассмотренная авторами в [8] при некоторых упрощающих предположениях.

Авторы выражают глубокую благодарность В.В.Арсенину, Б.И.Брейзману и В.В.Мирнову за ценные дискуссии и помощь в работе.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Покажем, что выражения (21) или (30) для  $j_1(t)$  и  $J(\omega)$  в предельных случаях  $\tau_B^{-1} \ll \omega$  или  $\tau_B^{-1} \gg \omega$  совпадают с асимптотическими выражениями (10) и (16).

1. Если  $\tau_B^{-1} \ll \omega$  и, кроме того,  $\Delta\tau_B \cdot \omega > 1$ , то, очевидно, что при интегрировании (20) основной вклад в сумму внесет I-й интеграл ( $N=0$ ), все остальные интегралы ( $1 \leq N < \infty$ ) имеют вид  $\int F(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$ , где  $F(t)$  — плавная функция на интервале много большем, чем период  $2\pi/\omega$ . Как известно, такие интегралы экспоненциально малы по сравнению с I независимо от вида любой достаточно гладкой функции. Этот же результат сразу получается из (30). Таким образом, для  $\Delta\tau_B \cdot \omega > 1$ :

$$j_1 = -j_0 \frac{e\bar{\varphi}}{\Delta\epsilon} \cdot e^{-i\omega t}; \quad J(\omega) = 1 \quad (30)$$

т.е. выражение, совпадающее с (10).

2. Если  $\tau_B^{-1} \gg \omega$ , то  $j_1(t)$  или  $J(\omega)$  можно сразу получить из приближенного выражения (25);  $J(\omega) \cong \sqrt{-i\omega\tau_B}$ . Этот же результат можно получить из (20), представив (20) в виде суммы 2-х членов. Обозначим через  $\tau_B N_m$  на графике  $K(t)$  (рис.7) момент времени, начиная с которого функция  $K(t)$  становится непрерывной кривой, тогда:

$$j_1 = A \int_0^{\tau_B N_m} K(t) \cdot \varphi_1(t) dt + A \int_{\tau_B N_m}^{\infty} K(t) \cdot \varphi_1(t) dt = I + II \quad (31)$$

$A = e^{-i\omega t}$

Учитывая, что  $\omega \ll \tau_B^{-1}$ , независимость интеграла в окрестности  $N_i$  от  $\Delta\tau_B$ , а также (23), первый интеграл можно представить в виде:

$$I = A \int_0^{\tau_B N_m} K(t) \cdot \varphi_1(t) dt = -e^{-i\omega t} \frac{e\bar{\varphi}}{\Delta\epsilon} j_0 \cdot \sum_{N=N_m}^{\infty} a_N$$



Второй интеграл

$$\bar{I} = e^{-i\omega t} \cdot \frac{e\bar{\varphi}_1 \cdot j_0}{\Delta \varepsilon} \cdot \frac{\tau_0^{1/2}}{2\sqrt{\pi}} \int_{t_{nm}}^{\infty} e^{i\omega t_1} \frac{dt_1}{t_1^{3/2}}$$

учитывая, что  $\sum_N a_N = (\pi N)^{-1/2}$  и суммируя I и II, получим:

$$j_1 = -j_0 \frac{e\bar{\varphi}_1}{\Delta \varepsilon} \cdot e^{-i\omega t} \frac{1}{\sqrt{\pi N_m}} \left( 1 - e^{i\omega t_N} + \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{-i\omega t_N} \cdot \text{Erfc} \sqrt{-i\omega t_N} \right) =$$

(32)

$$\approx -j_0 \frac{e\bar{\varphi}_1}{\Delta \varepsilon} \cdot e^{-i\omega t} \cdot \sqrt{-i\omega \tau_0}$$

ЛИТЕРАТУРА :

1. Г.И.Будкер. В сб. "Проблемы управляемых термоядерных реакций" АН СССР, Ш. 3. (1954).
2. Д.Н.Днестровский, Д.П.Костомаров. В сб. "Итоги науки и техники. Физика плазмы". 2, 190, М., ГКНТ, АН СССР (1981).  
Futch A.H., Holdren J.R., Killeen J., Mirin A.A., PLASMA Phys. 14 (1972) 211.
3. W.K.Kunkel, J.Guillory. 7th International Conference on Phen. in Ionized Gases, Belgrade, 2, 702 (1965).
4. M.A.Liberman, S.L.Wong, Pl. Phys. 19, (1977) 745.
5. R.Prater, Phys. Fl. 17 (1974) 193.
6. Б.А.Трубиников. В сб. "Вопросы теории плазмы" под ред. М.А.Леонтовича, I, с.98, М., (1963).
7. С.И.Брагинский. Там же, с.183.
8. А.А.Бехтенов, В.И.Волосов, ЖТФ, 47, 1450 (1977).
9. Г.И.Будкер. См. I, стр. 243.



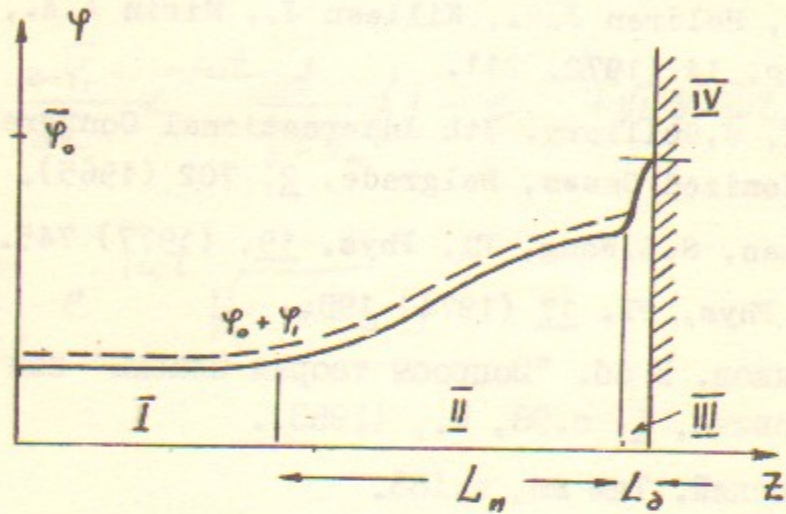


Рис.1. Распределение электрических потенциалов в магнитной ловушке;  $L_n$  - размер пробки;  $L_e$  - размер пристеночного слоя; I - центральная часть ловушки; II - амбиполярный барьер; III - пристеночное падение потенциала; IV - коллектор.

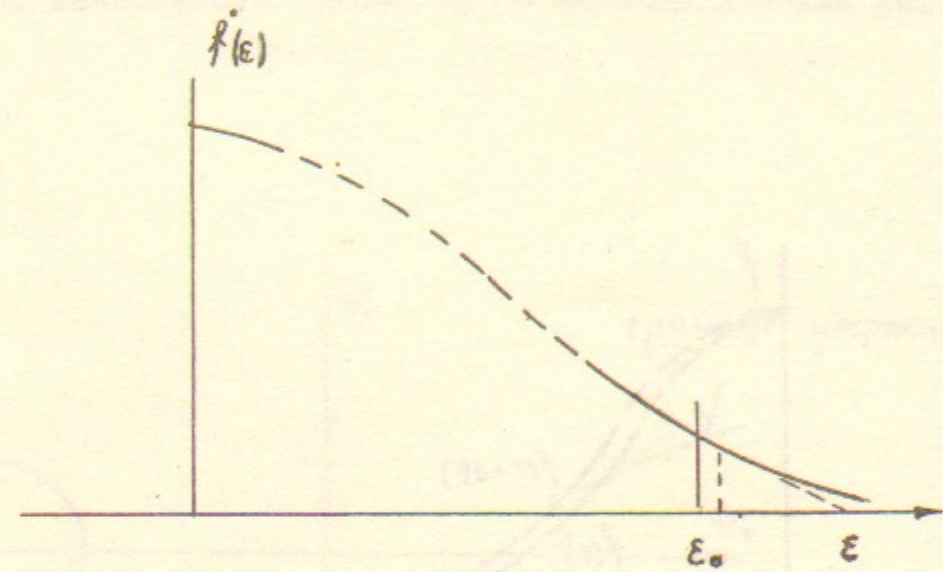
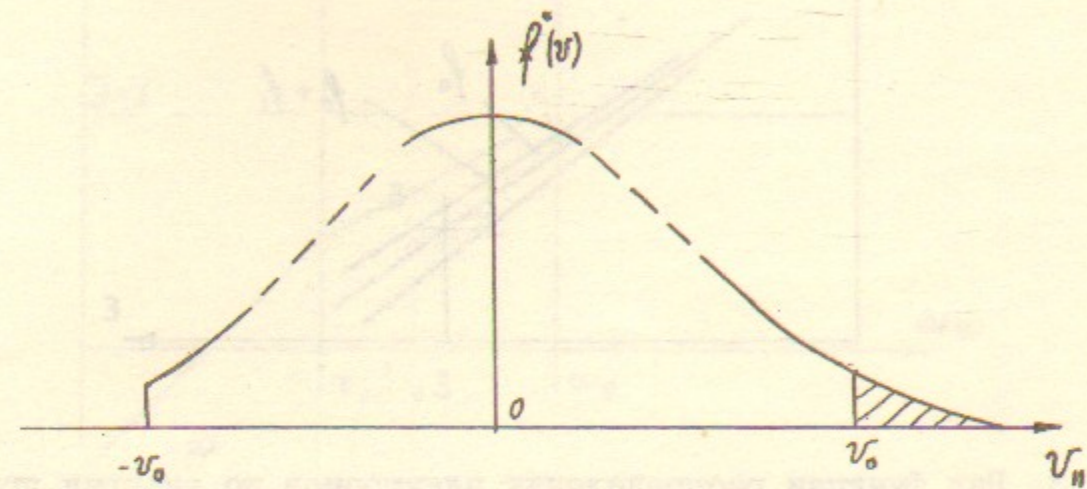


Рис.2. Качественный вид функций распределения электронов по продольной скорости  $f(v_n)$  и по энергии  $f(\epsilon)$  вблизи коллектора.



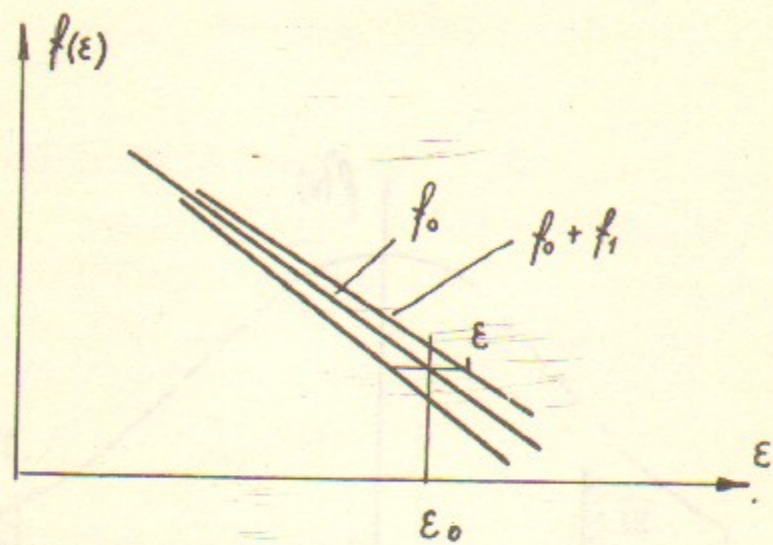


Рис.3. Вид функции распределения электронов по энергии при наличии возмущений с  $\omega \ll \omega_0$  в области  $\epsilon \approx \epsilon_0$ .

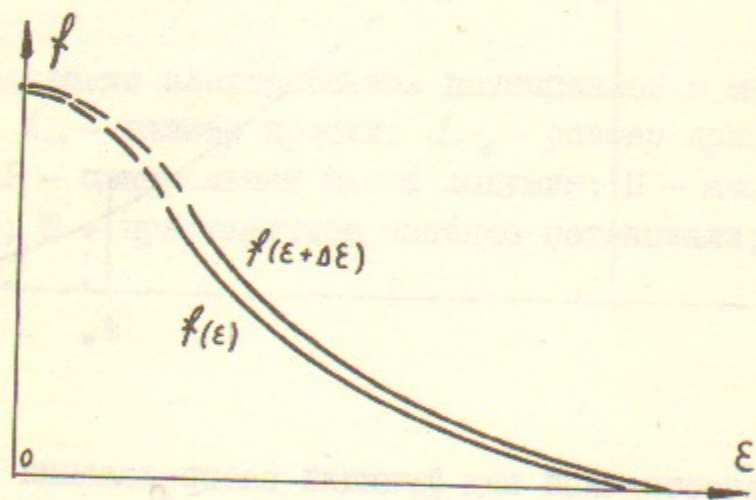


Рис.4. Качественный вид функций распределения электронов по энергии при наличии возмущений с  $\omega \ll \tau_{ee}^{-1}$

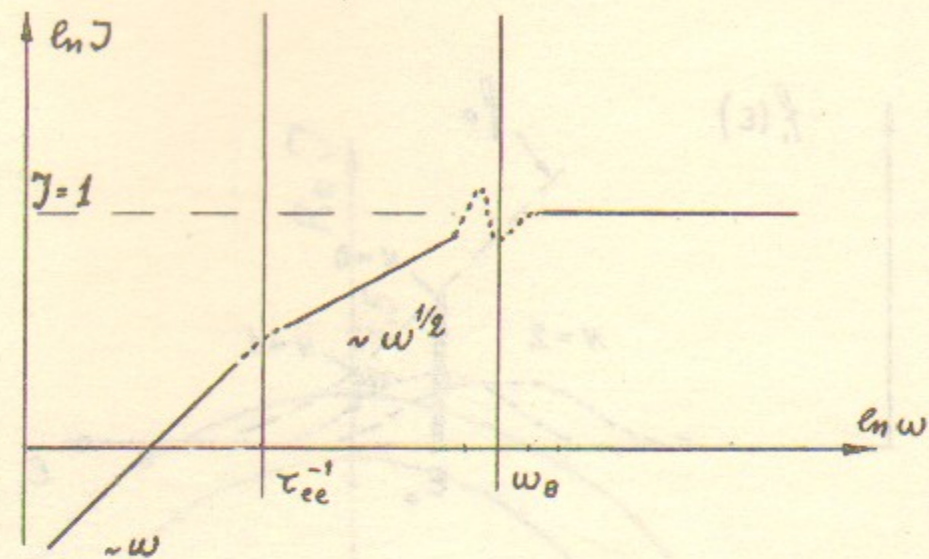


Рис.5. Зависимость  $\Gamma(\omega, \tau_{ee})$  - асимптотические решения.

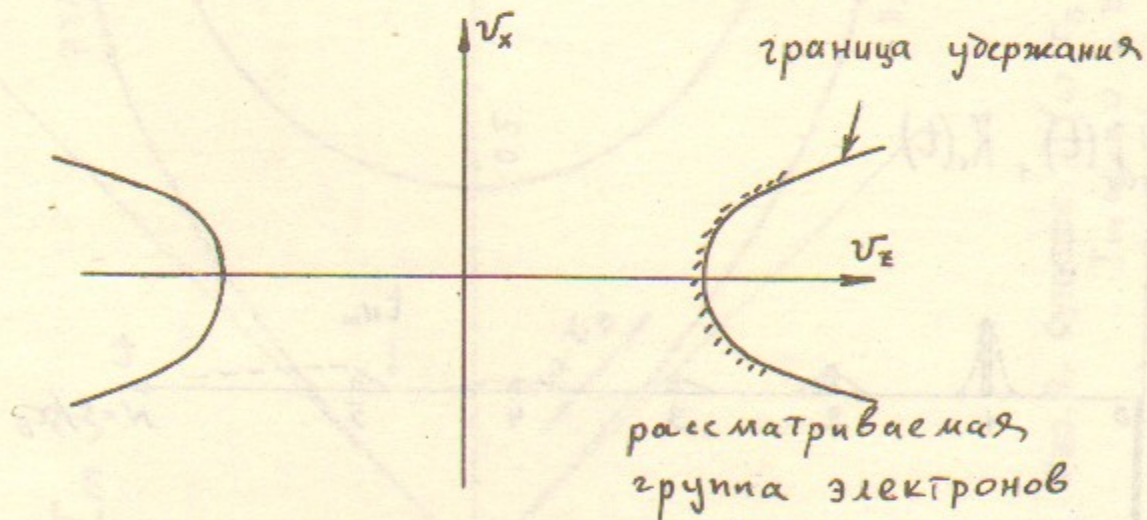


Рис.6. Расположение в фазовом пространстве рассматриваемой группы электронов при  $t = 0$ .



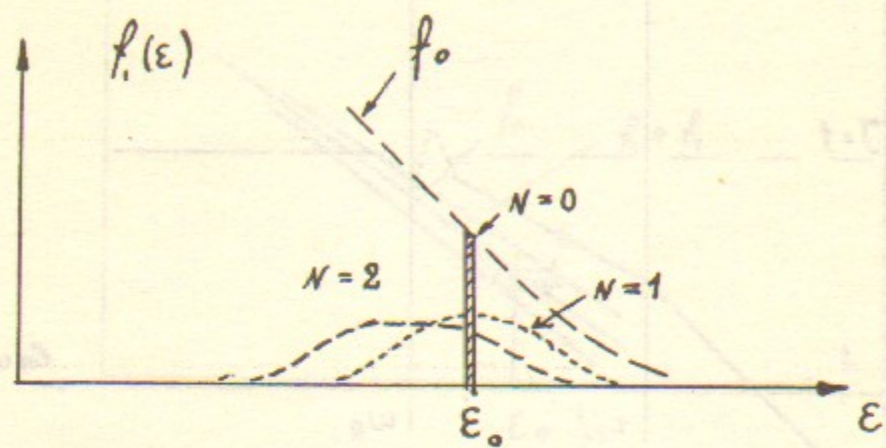


Рис.7. Вид функции распределения рассматриваемой группы электронов вблизи электростатического барьера при последовательных отражениях от барьера  $t = N \cdot \tau_B$ .

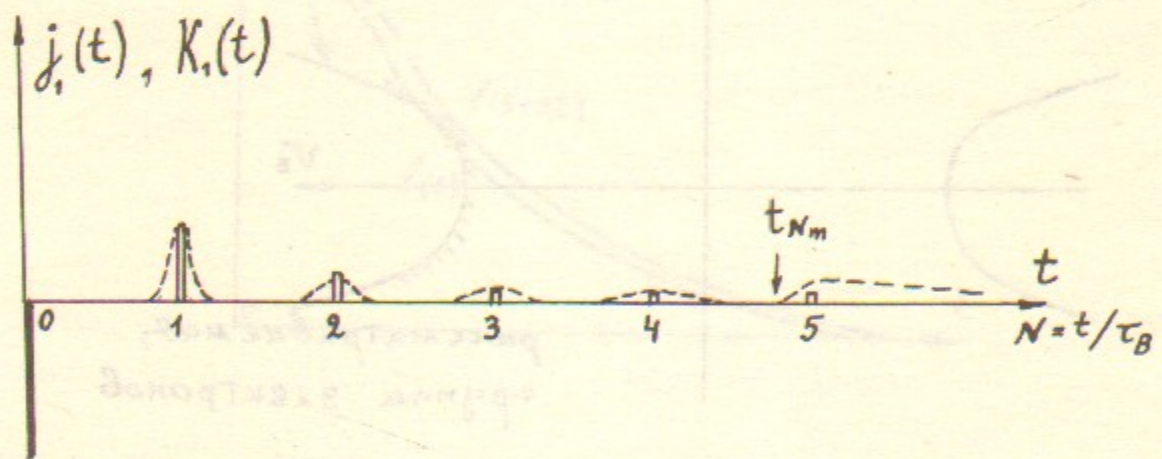


Рис.8. Вид функций  $K_i(t)$  и  $j_i(t)$  при  $\Delta \tau_B = 0$  (сплошная линия) и  $\Delta \tau_B \neq 0$  (пунктир).

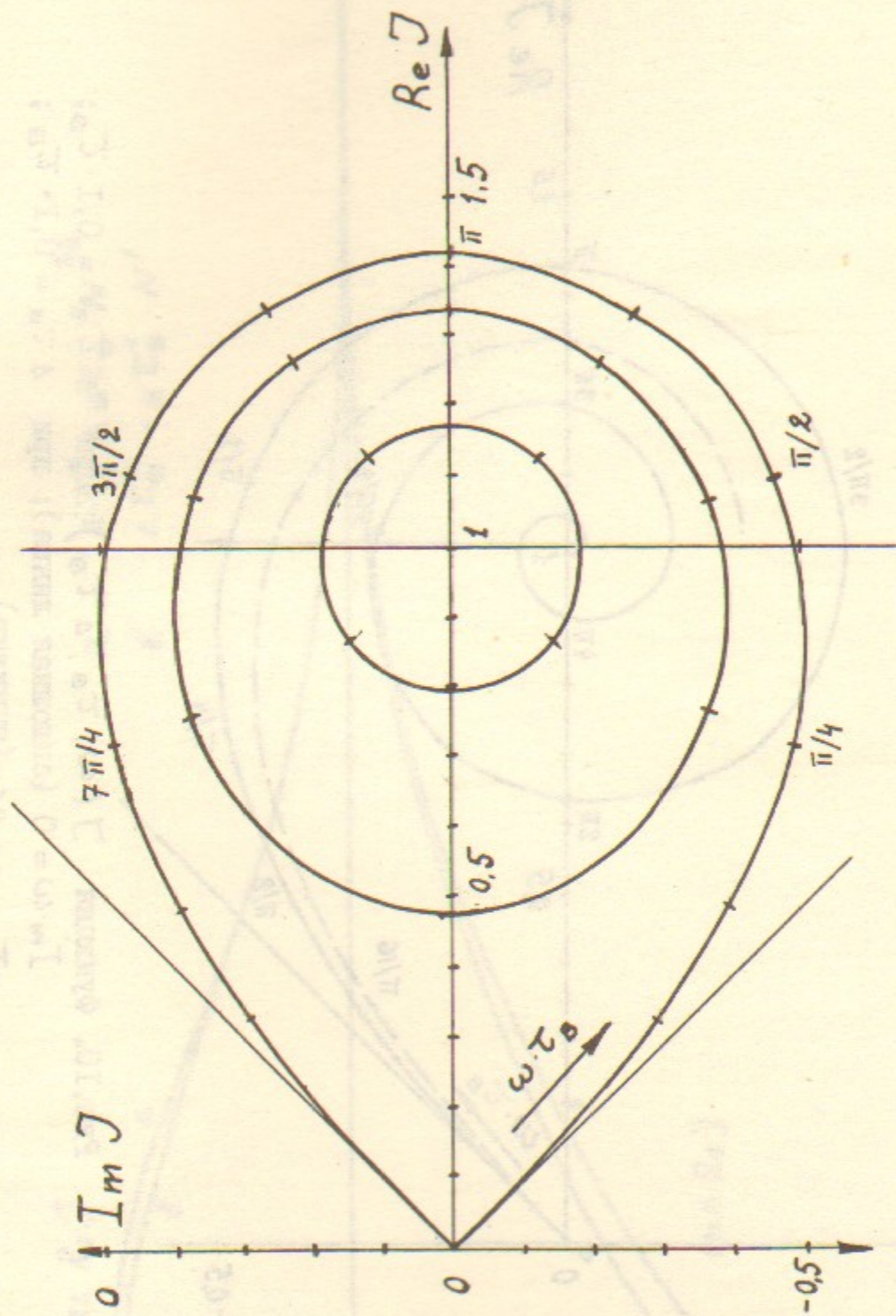


Рис.9. Функция  $Y(\omega, \tau_B)$ , при  $\Delta \tau_B = 0$ ; внешняя кривая  $I_m \omega = 0$ , внутренние кривые  $I_m \omega = 0, 25 \tau_B^{-1}$  и  $I, 0 \cdot \tau_B^{-1}$ .



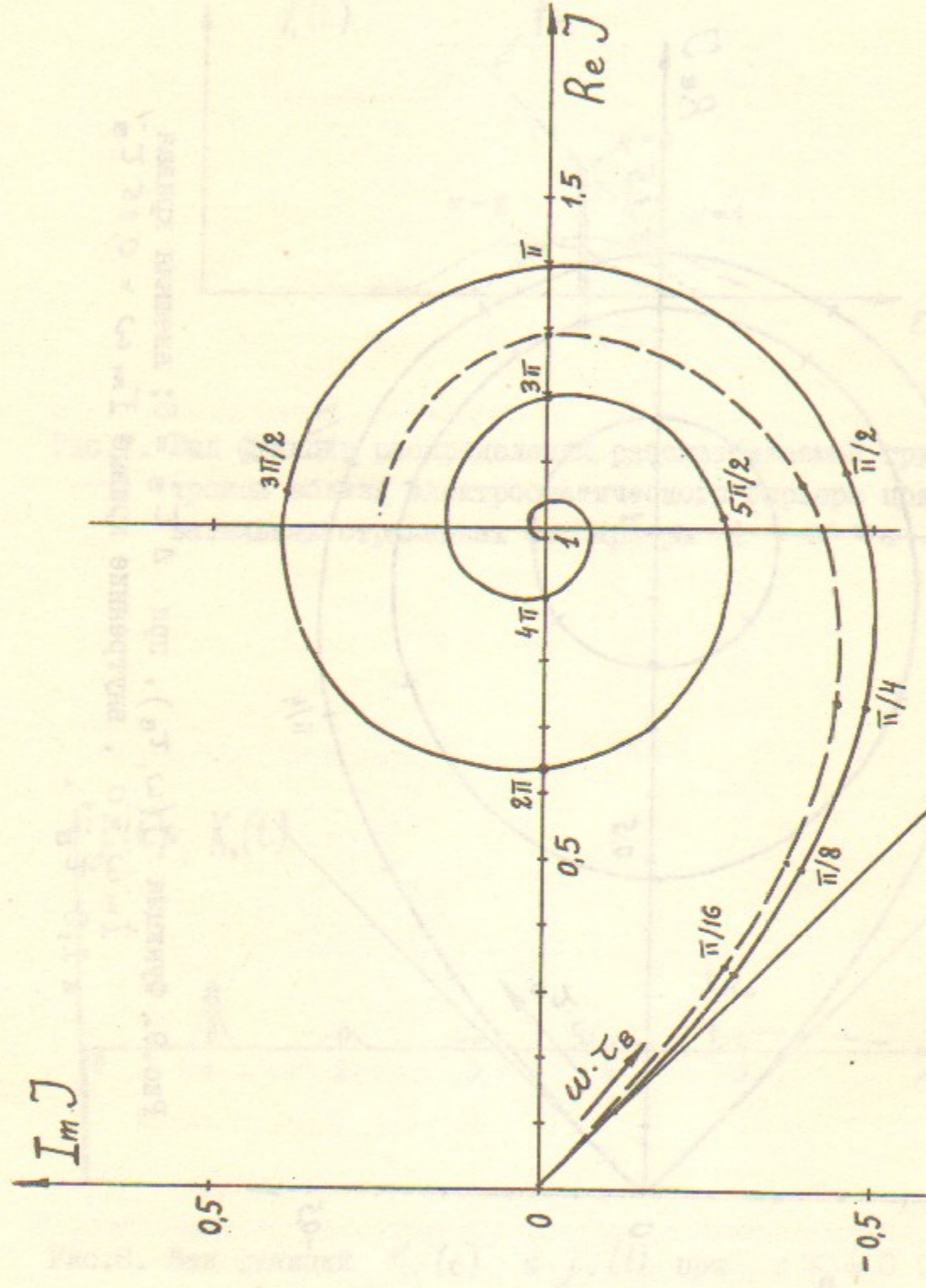


Рис. 10. Функция  $J(\omega, \tau_v, \Delta \tau_v)$ : при  $\Delta \tau_v = 0, 1 \cdot \tau_v$ ;  
 $\text{Im } \omega = 0$  (сплошная линия); при  $\Delta \tau_v = 0, 1 \cdot \tau_v$ ;  
 $\text{Im } \omega = 0, 1 \cdot \omega$  (пунктир).

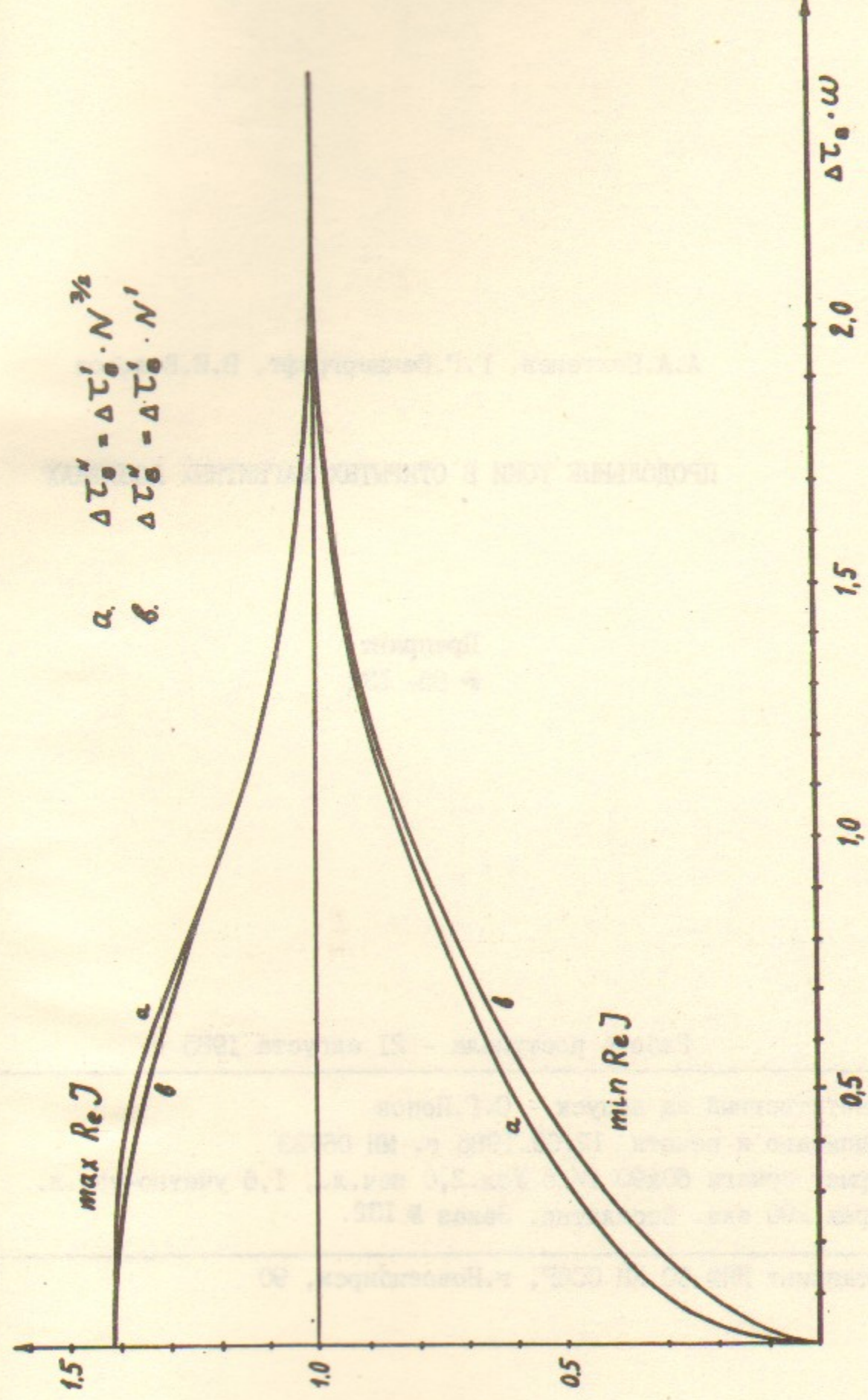


Рис. 11. Отгибание максимальных и минимальных значений  $\text{Re } J$   
 в зависимости от  $\Delta \tau_v \cdot \omega$

а.  $\Delta \tau_v' = \Delta \tau_v' \cdot N^{3/2}$   
 б.  $\Delta \tau_v'' = \Delta \tau_v' \cdot N'$



А.А.Бехтенов, Г.Г.Вандергрифт, В.И.Волосов

ПРОДОЛЬНЫЕ ТОКИ В ОТКРЫТЫХ МАГНИТНЫХ ЛОВУШКАХ

Препринт  
№ 85- I32

Работа поступила -- 21 августа 1985 г.

---

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов

Подписано к печати 12.09.1985 г. МН 06733

Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.2,0 печ.л., 1,6 учетно-изд.л.

Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № I32.

---

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90