



ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

48

Д.Д. Рютов, Г.В. Ступаков

**О ВОЗМОЖНОСТИ СТАБИЛИЗАЦИИ
ЖЕЛОБКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ
В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ
ПРОБКОТРОНЕ**

ПРЕПРИНТ 85-146



НОВОСИБИРСК

MHD STABILIZATION OF LARGE SCALE FLUTE MODES IN AXISYMMETRIC MIRROR TRAPS

D.D.Ryutov, G.V.Stupakov

A b s t r a c t

A nonparaxial ("fat") axisymmetric mirror cell is proposed to provide MHD stability of an ambipolar trap. It is shown that such a mirror cell can stabilize the most dangerous $m = 1$ flute mode which is not stabilized by the FLR effect. The role of pressure anisotropy is also considered. In the case of weak FLR effect, we show that the field configuration considered stabilizes a few lowest modes so that only small scale modes localized near the plasma edge remain unstable.

I. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время основным методом стабилизации желобковой неустойчивости плазмы в открытых ловушках является метод создания "магнитной ямы" с помощью мультипольных обмоток. Однако неизбежно возникающее при этом нарушение аксиальной симметрии плазмы ведет к ряду нежелательных последствий, в частности, к появлению усиленного поперечного переноса [1] и к искажению равновесия плазмы на длинных участках однородного поля [2]. Поэтому в последнее время появилось несколько предложений, касающихся возможности стабилизации желобковых возмущений в рамках осесимметричных магнитных конфигураций [3-10]. Большая часть этих предложений основана на применении систем с неодносвязной плазмой [4,6,9] и антипробокотронов [5,7]. Но переход к неодносвязной плазме связан с определенными техническими трудностями, а, главное, с уменьшением толщины плазмы (что несет в себе опасность возбуждения микронеустойчивостей); в отношении же применения антипробокотронов следует заметить, что их функционирование будет в существенной мере зависеть от поведения горячей плазмы вблизи нуля магнитного поля, а этот вопрос пока мало изучен экспериментально.

Стабилизации плазмы в рамках "естественной" геометрии открытых ловушек посвящены работы [3,8,10]. А.В.Тимофеев [3] предложил стабилизировать плазму целиком за счет кинетических эффектов, напоминающих эффекты конечного ларморовского радиуса (КЛР). Такой подход кажется обещающим, но сегодня не вполне ясна возможная роль колебаний с отрицательной энергией, которые могут появляться в системах с быстрым дрейфом ионов. В статье [8] подробно исследована неоднократно упоминавшаяся ранее возможность стабилизации плазмы при помощи создания в ней популяции "плещущихся" ионов, имеющих точку остановки в облас-

*) В нашей работе речь идет об установках с большой длиной свободного пробега частиц плазмы, главным образом, об амбиполярных ловушках; в случае систем с малой длиной свободного пробега давно известен эффективный механизм стабилизации потоком запробочной плазмы [11-12].

ти благоприятной кривизны силовых линий; к сожалению, в работе [8] было выяснено, что технические требования к системе инъекции в этом случае очень жесткие. В работе [10] для обеспечения стабилизации предлагается разместить вблизи поверхности плазмы проводящий кожух. Однако, в этом случае стабилизация, если и возникает, то только при высоком давлении плазмы и большой степени ее анизотропии.

Приведенная краткая сводка работ по МГД-стабилизации осесимметричных ловушек показывает, что хотя имеется целый ряд интересных предложений, проблему все же нельзя считать исчерпанной. Поэтому в настоящем сообщении исследуется еще одна возможность создания осесимметричного МГД-стабилизатора для открытых (главным образом, амбиполярных) ловушек.

Мы рассматриваем стабилизатор в виде непараксиального пробкотрона, в котором поперечный размер плазмы сравним с расстоянием между пробками, и показываем, что в нем могут быть сделаны устойчивыми крупномасштабные желобковые колебания. Что касается мелкомасштабных колебаний, то они могут быть стабилизированы эффектом КЛР. Возможно даже, что полной их стабилизации не потребуется, так как некоторый уровень МГД-активности на высших модах не будет приводить к чересчур быстрым потерям плазмы. Существенно, что стабилизация осуществляется в рамках "естественной" геометрии открытых ловушек и не требует перехода к неодносвязной плазме.

Дальнейший план изложения следующий. В разделе 2 обсуждаются некоторые важные для рассматриваемой нами постановки задачи свойства функции $U(\phi)$ — удельного объема силовых трубок (ϕ — магнитный поток внутри данной магнитной поверхности). В разделе 3, в связи с проблемой стабилизации амбиполярных ловушек, рассмотрена задача об устойчивости плазмы относительно ее смещения как целого. Предполагается, что все моды, кроме основной, стабилизированы эффектом КЛР в длинном центральном пробкотроне. Показано, что действительно существуют такие конфигурации магнитного поля непараксиального пробкотрона, которые обеспечивают устойчивость системы относительно "глобальной" моды, причем запас устойчивости очень велик. Анализ ведется на основе энергетического принципа для идеального газа

с показателем адиабаты $\gamma = 5/3^*$). В разделе 4 обсуждается, как эти результаты меняются при переходе к энергетическому принципу Крускала-Обермана [14]. В разделе 5, вновь в рамках приближения идеального газа, рассматриваются неустойчивости высоких мод. В разделе 6 содержится обсуждение полученных результатов. Ряд вопросов вычислительного характера вынесен в приложения.

2. СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $U(\phi)$ В ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ОТКРЫТОЙ ЛОВУШКЕ

Рассмотрим вопрос о желобковой неустойчивости плазмы в отдельном осесимметричном пробкотроне. Плазму будем считать идеальным газом с давлением p и показателем адиабаты γ , пробочное отношение будем считать очень большим (что оправдывает возможность описания плазмы как изотропного газа). В рамках этой модели выражение для потенциальной энергии желобкового возмущения имеет вид (см. [15], а также Приложение I):

$$\delta W = \text{const} \int d\phi (\tau_0 B_0 \xi_r)^2 \left[U' p' + \frac{\gamma p}{U} U'^2 \right], \quad (1)$$

где

$$U = \int \frac{d\ell}{B} \quad (2)$$

— удельный объем силовой трубки (интегрирование ведется по силовой линии между бесконечно сильными пробками), ϕ — магнитный поток внутри данной магнитной поверхности, ξ_r — радиальная компонента смещения в экваториальной плоскости ловушки, τ_0 и B_0 — радиус магнитной поверхности и магнитное поле в экваториальной плоскости ловушки, а штрих обозначает дифференцирование по ϕ . Константа, стоящая перед интегралом (1), положительна.

Достаточным для устойчивости пробкотрона по отношению ко всем классам желобковых возмущений было бы наличие некоторого интервала значений ϕ , в котором $dU/d\phi < 0$. Тогда именно с этим интервалом можно было бы совместить область, где

* Краткое сообщение о результатах раздела 3 было опубликовано в [13].

давление падает до нуля, и определяемое формулой (1) значение δW было бы положительным для всех типов возмущений.

Однако, в системах с "естественной" геометрией, где внутри области удержания нет магнитных катушек, и плазма не имеет "дырки" у магнитной оси^{*}, функция $U(\phi)$, по-видимому, является монотонно возрастающей. Строгое доказательство этого факта, впрочем, отсутствует, но имеются многочисленные аргументы, подтверждающие такую точку зрения.

Давно известно, что на магнитной оси (при $\phi = 0$) производная U' положительна (см., например, [18]), т.е. U во всяком случае возрастает в некоторой окрестности оси. В настоящей работе (см. Приложение 2) показано, что на магнитной оси всегда $U'' > 0$, т.е. в некоторой окрестности оси возрастает не только функция U , но и её первая производная.

При удалении от магнитной оси область удержания плазмы обычно ограничивается сепаратрисой, проходящей через нуль (нули) магнитного поля (в качестве примера см. рис.1). Легко показать (см. Приложение 3), что при приближении к сепаратрисе U возрастает по закону

$$U \sim \ln \frac{1}{|\phi_s - \phi|}, \quad (3)$$

где ϕ_s - магнитный поток, заключенный внутри сепаратрисы. Таким образом, если где-либо монотонность зависимости $U(\phi)$ и нарушается, то это может иметь место только при промежуточных значениях ϕ . Дополнительно ограничивает возможность появления локального минимума U указанное в работе [19] неравенство $U(\phi) > \text{const} \cdot l^2(\phi)$, где $l(\phi)$ - длина силовой линии (между пробками) на магнитной поверхности, заключающей поток ϕ .

В случае плоского магнитного поля можно строго доказать монотонность функции $U(\phi)$ при удалении от магнитной оси (Приложение 4).

Таким образом, известные сегодня факты скорее противоречат возможности существования минимума функции $U(\phi)$ между

^{*} Как это имеет место, например, в ловушке типа Андреолетти-Фюрта [16,17].

осью и сепаратрисой, чем подкрепляют такую возможность. Во всяком случае, ни одного примера поля, имеющего минимум U (в рассматриваемой "естественной" геометрии), не построено. Поэтому в следующем разделе мы попытаемся решить более узкую задачу, состоящую в отыскании такой конфигурации магнитного поля осесимметричного пробкотрона, которая бы обеспечивала стабилизацию глобальной моды $m = 1$.

3. УСТОЙЧИВОСТЬ ГЛОБАЛЬНОЙ ЖЕЛОБКОВОЙ МОДЫ В АМБИПОЛЯРНОЙ ЛОВУШКЕ С НЕПАРАКСИАЛЬНЫМ СТАБИЛИЗАТОРОМ

Будем считать, что пробкотрон входит в состав амбиполярной ловушки, имеющей длинную центральную ячейку, наличие которой обеспечивает стабилизацию всех желобковых мод (кроме глобальной моды $m = 1$) вследствие эффектов конечного ларморовского радиуса (КЛР), ср. [10].

Эффекты КЛР на длинном однородном участке центрального пробкотрона не оказывают влияния на жесткое смещение плазмы на этом участке. Такое смещение вызывается однородным электрическим полем, которому соответствует возмущение потенциала вида

$$\varphi = \text{const} \sqrt{\phi} \cos \theta, \quad (4)$$

где θ - азимутальный угол. В желобковом возмущении потенциал φ постоянен вдоль силовых линий. Поэтому в концевом пробкотроне потенциал также будет задаваться формулой (4). В этом случае потенциальная энергия возмущения определяется формулой (П.19):

$$\delta W = A \int \phi \left[\rho' U' + \gamma \frac{\rho}{U} U'^2 \right] d\phi, \quad (5)$$

где $A > 0$ - не существенная для дальнейшего постоянная.

Если поперечный размер плазмы мал по сравнению с масштабом изменения магнитного поля, то имеет место неравенство $|\rho'|/\rho \gg U'/U$, и последним слагаемым в выражении (5) можно пренебречь. Выполняя в первом слагаемом интегрирование по частям и учитывая, что в приосевой области $\phi U'' \rightarrow 0$, получаем, что для "тонкой" плазмы

$$\delta W = - A U' \Big|_{\phi=0} \cdot \int p d\phi < 0, \quad (6)$$

т.е. "тонкая" плазма универсальным образом, независимо от профиля давления $p(\phi)$, оказывается неустойчивой по отношению к глобальной моде, ср. [4].

Последнее слагаемое в (5), играющее стабилизирующую роль, становится существенным на расстояниях от оси, сравнимых с длиной концевого пробкотрона. Поэтому стабилизировать глобальную моду если и можно, то только в случае, когда плазма "толстая" (и параксиальное приближение нарушается).

Любое радиальное распределение давления можно "набрать" из отдельных дельта-функций вида

$$p = p_0 \delta(\phi - \phi_0). \quad (7)$$

Поскольку выражение (5) линейно по p , для доказательства возможности существования устойчивых профилей давления достаточно проверить, что $\delta W > 0$ хотя бы при одном положении пика давления вида (7). Подставляя (7) в (5) и выполняя в первом слагаемом интегрирование по частям, находим:

$$\delta W = A p_0 F(\phi),$$

где

$$F(\phi) \equiv \gamma \frac{\phi}{U} U'^2 - (\phi U')'. \quad (8)$$

При малых ϕ $F(\phi) \approx -U'$ и, в соответствии со сказанным в разделе 2, $F(\phi) < 0$. При $\phi \rightarrow \phi_s$ пользуясь оценкой (3), получаем, что $F(\phi) \approx -a/(\phi - \phi_s)^2$ с $a > 0$, т.е. здесь также $F(\phi) < 0$. Таким образом, устойчивые состояния могут существовать только при промежуточных значениях ϕ , в некоторой кольцевой области. Замечательно, что если такая область ("кольцо устойчивости") существует, то внутри неё устойчиво (по отношению к глобальной моде) любое распределение давления.

Кольцо устойчивости существует далеко не во всякой конфигурации магнитного поля. В частности, магнитное поле двух точечных катушек, силовые линии которого изображены на рис.1, таким свойством не обладает; функция $F(\phi)$ для этого поля изображена на рис.2. Если же на это поле наложить однородное поле ΔB , направленное вдоль оси катушек, то в интервале значений

$$0,023 B_* < \Delta B < 0,20 B_*,$$

где B_* - поле в точке 0 на рис.1, возникает кольцо устойчивости. Для $\Delta B = 6 \cdot 10^{-2} B_*$ график функции $F(\phi)$ и силовые линии изображены на рис.2 и 3, соответственно. На рис.4 приведены графики функций $U(\phi)$ и $B_0(\phi)$ (B_0 - поле в экваториальной плоскости пробкотрона) для этого поля.

Создавая плазму в "кольце устойчивости", мы обеспечим некоторый запас МГД-устойчивости, который позволит поместить определенное количество плазмы и в приосевую область крайних пробкотронов. Так, для магнитной конфигурации, изображенной на рис.3, численный расчет показывает, что для распределений давления вида

$$p = \begin{cases} p_a (U/U_a)^{-\alpha}, & \phi < \phi^* \\ 0, & \phi > \phi^* \end{cases} \quad (9)$$

где ϕ^* - магнитный поток, соответствующий внешней границе кольца устойчивости, а индекс "а" относится к значениям p и U на магнитной оси, устойчивость имеется при $\alpha < 0,87$ (предельный профиль давления, отвечающий $\alpha = 0,87$, показан на рис.4).

4. КИНЕТИЧЕСКИЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП

Выше мы использовали для анализа устойчивости энергетический принцип в модели идеальной магнитной гидродинамики. Более адекватным для бесстолкновительной плазмы является энергетический принцип Крускала-Обермана [14], который не ограничен приближением изотропного давления и позволяет исследовать также устойчивость равновесий анизотропной плазмы. Нужные нам выражения для потенциальной энергии Крускала-Обермана выведены в Приложении I.

Рассмотрим сначала, что нового вносит энергетический принцип Крускала-Обермана в задачу об устойчивости изотропной плазмы, рассмотренную в предыдущем разделе. Выражение для δW теперь дается формулой (III.23), которая для смещения вида (4) принимает вид

$$\delta W = A \int \phi \left[p' U' + \frac{15}{2} p \int d\lambda \frac{1}{\mathcal{L}_1} \left(\frac{d\mathcal{L}_2}{d\phi} \right)^2 \right] d\phi, \quad (10)$$

где $A > 0$, а интегралы \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 определены формулой (III.24). Соответственно, изменяется выражение для функции $F(\phi)$, знак которой определяет устойчивость дельтаобразных распределений давления; вместо (8) имеем

$$F(\phi) \equiv -(\phi U')' + \frac{15}{2} \phi \int d\lambda \frac{1}{\mathcal{L}_1} \left(\frac{d\mathcal{L}_2}{d\phi} \right)^2. \quad (11)$$

Эта функция по-прежнему отрицательна при малых ϕ , когда $F(\phi) \approx -U'|_{\phi=0}$. Вычисления, вынесенные в Приложение 5, показывают, что сохраняется и асимптотика при $\phi \rightarrow \phi_s$: $F(\phi)$ стремится к минус бесконечности пропорционально $(\phi - \phi_s)^{-2}$. Следовательно, как и прежде, устойчивые состояния, если они есть, образуют кольцо устойчивости. Нужно подчеркнуть, однако, что это кольцо будет шире, чем то, которое следует из магнитной гидродинамики, поскольку, как известно, энергетический принцип Крускала-Обермана предсказывает лучшую устойчивость плазмы, чем магнитная гидродинамика с показателем адиабаты $\gamma = 5/3$.

Чтобы проиллюстрировать количественно эффект улучшения устойчивости плазмы в непараксиальной системе при переходе к энергетическому принципу Крускала-Обермана, в Приложении 6 приведено решение задачи о желобковой неустойчивости изотропной плазмы, удерживаемой магнитным полем тока, текущего по тонкому прямому проводнику. Результат показывает, что вычисления на основе выражения для энергии (III.23) приводят к увеличению в 1,05 раза порогового градиента давления, при котором возникает неустойчивость, по сравнению с предсказанием магнитной гидродинамики.

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости плазмы с сильно анизотропной функцией распределения. С практической точки зре-

ния такая ситуация представляет меньший интерес, так как, во-первых, создание сильно анизотропных распределений в условиях, характерных для термоядерных реакторов, требует исключительно высоких энергий инжекции (см. [8]) и, во-вторых, такие распределения более подвержены микронеустойчивостям. Тем не менее, мы рассмотрим и эти распределения, поскольку они могут реализоваться в современных установках небольшого масштаба с низкой температурой электронов^{*}.

Начнем с плазмы с $p_{||} = 0$. Она занимает экваториальную плоскость ловушки ($z = 0$). Чтобы плазма была устойчива относительно смещений вдоль силовой линии, магнитное поле должно иметь "продольный" минимум при $z = 0$. Для выяснения условий существования этого минимума, проведем разложение поля вблизи плоскости $z = 0$. Зависимость от r магнитного поля в этой плоскости будем считать известной: $B_z|_{z=0} = B_0(r)$. Воспользуемся уравнениями $\text{rot } \vec{B} = 0$ и $\text{div } \vec{B} = 0$, которые в данном случае имеют вид:

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial r},$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_z).$$

Из этих уравнений получаем, что

$$B_r(r, z) = z \frac{dB_0}{dr} + O(z^3), \quad (12)$$

$$B_z(r, z) = B_0(r) - \frac{z^2}{2r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dB_0}{dr} \right) + O(z^4). \quad (13)$$

Уравнение силовой линии в том же приближении имеет вид:

^{*} Малость температуры электронов позволяет снизить энергию инжекции $\mathcal{E}_{инж}$, так как для получения узких угловых распределений требуется выполнить условие $\mathcal{E}_{инж} \gg (m_i/m_e)^{1/3} T_e$.

$$\tau = \tau_0 + \frac{z^2}{2B_0} \left. \frac{dB_0}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_0} + O(z^4), \quad (I4)$$

где τ_0 - расстояние от силовой линии до оси при $z = 0$. Магнитное поле на силовой линии находится из уравнений (I2) - (I4):

$$B^2(\tau_0, z) = B_0^2(\tau_0) + z^2 \left[2 \left(\frac{dB_0}{d\tau} \right)^2 - \frac{B_0}{\tau} \frac{d}{d\tau} \left(\tau \frac{dB_0}{d\tau} \right) \right] \Big|_{\tau=\tau_0} + O(z^4).$$

Отсюда видно, что плазма с $p_{||} = 0$ может существовать только на тех радиусах, где выполнено условие:

$$2 \left(\frac{dB_0}{d\tau} \right)^2 > \frac{B_0}{\tau} \frac{d}{d\tau} \left(\tau \frac{dB_0}{d\tau} \right). \quad (I5)$$

Выясним, возможна ли устойчивость в такой системе по отношению ко всем желобковым модам. Из выражения (III.20) видно, что внешняя граница плазмы может быть устойчива только если она расположена в области, где $dB_0/d\tau > 0$. Теперь следует рассмотреть две возможности: 1) B_0 монотонно возрастает от самой оси до внешней границы плазмы; 2) в промежутке есть минимум(ы). В первом случае вблизи оси (при $\tau \rightarrow 0$) обязательно нарушается неравенство (I5)*, т.е. приосевая область пуста и плазма имеет внутреннюю границу, где $\partial w_{\perp} / \partial \tau < 0$. Но в силу условия $dB_0/d\tau > 0$ внутренняя граница неустойчива. Таким образом, в первом случае абсолютная устойчивость невозможна. Переходя ко второму случаю, рассмотрим окрестность ближайшего к внешней границе плазмы минимума B_0 . В окрестности минимума, там, где производная $dB_0/d\tau$ достаточно мала, неравенство (I5) обязательно нарушается, т.е. область около минимума пуста и плазма имеет внутреннюю границу, расположенную с внешней стороны от минимума. Но тогда эта граница неустойчива. Итак, мы показали, что абсолютная устойчивость дисковой плазмы невозможна.

* Напомним, что вблизи оси $B_0 = c_1 + c_2 \tau^2$.

Проверим поэтому, не может ли такая плазма быть устойчивой по отношению к глобальной моде. Это условие сводится к тому, чтобы хотя бы в одной точке по радиусу одновременно с (I5) было выполнено неравенство

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\phi}{\tau B_0} \frac{dB_0}{d\tau} > 0 \quad (I6)$$

(см. (III.17)). Легко проверить, что в приосевой области совместить неравенства (I5) и (I6) невозможно. Но на конечных расстояниях от оси они могут быть удовлетворены одновременно. Например, в магнитном поле, изображенном на рис.3, это происходит в интервале $0,49\tau_s < \tau < 0,83\tau_s$, где τ_s - радиус сепаратрисы.

Рассмотрим теперь обратный предельный случай, когда поперечная составляющая скорости частиц в экваториальной плоскости очень мала (крайний случай наклонной инжекции). Пробочное отношение при этом будем считать настолько большим, что эти частицы все же удерживаются в ловушке, останавливаясь в области очень сильного поля в пробке. Энергия возмущения в этом случае определяется соотношением (III.20). Для устойчивости глобальной моды требуется, чтобы хотя бы на одной магнитной поверхности выполнялось условие

$$\frac{d}{d\phi} \frac{\phi}{\ell^3} \frac{d\ell}{d\phi} > 0 \quad (I7)$$

(см. (III.18)). Для магнитного поля, показанного на рис.3, это условие не выполняется нигде, так что этот случай не дает преимуществ по сравнению со случаем изотропной плазмы, где в таком же поле имеется широкое кольцо устойчивости.

5. УСТОЙЧИВОСТЬ ВЫСШИХ МОД

Тот факт, что в "кольце устойчивости" функция $F(\phi)$ достигает очень больших положительных (соответствующих устойчивости) значений, вселяет надежду на то, что если отказаться от стабилизирующего эффекта КЛР, то в рассматриваемой системе может быть стабилизирована не только глобальная мода $m = 1$, $n = 0$ (n - номер радиальной собственной моды), но и несколько следующих мод желобковых колебаний.

Чтобы выяснить этот вопрос, мы отбросим предположение о смещении плазмы как целого, соответствующем зависимости (4), и обратимся к уравнению для собственной функции $\varphi(\varphi)$. Для амбиполярной ловушки с длинным центральным соленоидом в пренебрежении эффектами КЛР это уравнение имеет вид (см. вывод в Приложении 7):

$$\frac{1}{\rho_z} (\rho_z \varphi \varphi')' - \frac{m^2 \varphi}{4\varphi} - \frac{m^2 B_z^2}{2\omega^2 \rho_z L_z} \varphi \left(\frac{\gamma}{U} U'^2 \rho + U' \rho' \right) = 0 \quad (18)$$

При выводе уравнения предполагалось, что основной вклад в инерцию желобка вносит центральный соленоид (длина его обозначается через L_z , напряженность магнитного поля в нем — через B_z , плотность плазмы на однородном участке — через $\rho_z = \rho_z(\varphi)$), а в движущую силу неустойчивости — крутые концевые пробкотроны (так что U следует вычислять только по концевым ячейкам).

Считая для простоты $\rho_z = \cos t$, заменой $\chi = \varphi / \sqrt{\varphi}$ уравнение (18) можно свести к уравнению Шредингера

$$\chi'' - V(\varphi) \chi = 0, \quad (19)$$

соответствующему полной энергии $E = 0$, в котором "потенциальная энергия" $V(\varphi)$ определяется формулой

$$V(\varphi) = \frac{m^2 - 1}{4\varphi^2} - \frac{m^2 B_z^2}{2\omega^2 \rho_z L_z \varphi} \left(\frac{\gamma}{U} U'^2 \rho + U' \rho' \right) \quad (20)$$

Собственные частоты находятся из условия последовательного появления уровней с нулевой энергией в потенциале (20), который зависит от частоты как от параметра.

Если никаких специальных мер по созданию "кольца устойчивости" не предпринимается, то имеется неустойчивость глобальной моды, причем характерный инкремент неустойчивости по порядку величины может быть оценен из соотношения

$$\omega^2 \sim -\Gamma^2 \equiv \frac{\rho_k}{L_k L_z \rho_z},$$

где L_k и ρ_k — длина концевой пробкотрона и характерное давление в нем. Для плавно спадающего по радиусу профиля давления форма потенциальной энергии $V(\varphi)$ в этом случае имеет вид, показанный на рис.5б (подразумевается, что $\omega^2 \sim -\Gamma^2$, и что поток φ нормирован на свое значение на сепаратрисе; при этом характерное значение $|V|$ порядка единицы). В потенциальную яму такого вида при $|\omega| \sim \Gamma$ "вмещается" не только собственное решение $m = 1, n = 0$, но и решения с $m > 1, n \neq 0$, т.е. одновременно неустойчиво много мод.

Если в системе имеется ярко выраженное "кольцо устойчивости", т.е. в выражении для V член $\gamma U'^2 \rho / U$ существенно превышает член $U' \rho'$ везде, за исключением узкой области вблизи точек обращения ρ в нуль, то при $|\omega| \sim \Gamma$ форма потенциальной ямы существенно меняется и приобретает вид, показанный на рис.5в. В такой потенциальной яме искомые уровни с $E = 0$ отсутствуют, так как участок, где $V < 0$, узкий и неглубокий. Чтобы уровни появились, следует уменьшить $|\omega|$ до значений $\sim \Gamma \Delta / L_k$, где Δ — ширина той области ловушки, где $V < 0$ (при ярко выраженном эффекте стабилизации кольцом устойчивости $\Delta \ll L_k$), или же увеличить m до значений $m \sim L_k / \Delta$. Тогда глубина потенциальной ямы вблизи точки обращения ρ в нуль станет достаточной для появления в ней уровня с $E = 0$. Характерный пространственный масштаб соответствующей собственной функции есть Δ , причем возмущения экспоненциально спадают в направлении к оси системы.

Таким образом, мы приходим к выводу, что в непараксиальном пробкотроне при правильно подобранном профиле магнитного поля неустойчивыми остаются только желобковые возмущения, масштаб которых мал по сравнению с L_k и которые локализованы вблизи внешней границы плазмы. Не исключено, что соответствующая остаточная МГД-активность не будет приводить к чересчур быстрым поперечным потерям плазмы; кроме того высокие моды легко стабилизируются эффектом КЛР.

6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Мы установили, что при отказе от приближения параксиальности устойчивость плазмы в осесимметричном пробкотроне относительно желобковых возмущений может быть существенно улучше-

на. Специальным подбором конфигурации магнитного поля можно добиться того, чтобы стали устойчивыми первые несколько мод желобковых возмущений. При этом существенно, что устойчивыми могут быть распределения давления плазмы без провала на оси.

Приведенные в статье численные примеры относятся, в основном, к изотропной плазме. Чтобы эта модель имела смысл, мы вынуждены рассматривать ловушки с очень большим пробочным отношением (иначе плазму нельзя считать изотропной). Переход к ловушкам с умеренным пробочным отношением требует рассмотрения анизотропной плазмы. Исследованный нами случай "дисковой" плазмы ($p_{\parallel} = 0$, $p_{\perp} \neq 0$) показывает, что "кольцо устойчивости" существует даже в этом крайнем случае. Соответственно, есть уверенность в том, что основные качественные выводы нашей работы сохранятся и при промежуточных степенях анизотропии. Поиск наиболее привлекательных магнитных конфигураций требует в этом случае кропотливого численного анализа.

В целом результаты нашей работы указывают на реальность создания осесимметричных открытых ловушек, обладающих "естественной" геометрией магнитного поля и устойчивых относительно крупномасштабных желобковых возмущений.

Авторы приносят глубокую благодарность И.А.Котельникову за проведение численных расчетов.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ЖЕЛОБКОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Выражение для потенциальной энергии желобковых возмущений при произвольной функции распределения хорошо известно. Его можно найти, например, в монографии А.Б.Михайловского [15], стр. 236. Тем не менее, мы все же приведем вывод этого выражения, близкий по духу к использованному в [15] и имеющий то достоинство, что он позволяет относительно просто получить результат для всех предельных случаев, рассматриваемых в нашей работе.

С самого начала будем считать магнитное поле осесимметричным. Состояние плазмы будем описывать с помощью функции распределения $f(\mu, I, \vec{r})$, определенной следующим образом:

$$dN = f(\mu, I, \vec{r}) d\mu dI dS \quad (\text{III.1})$$

есть число частиц, имеющих магнитный момент μ и продольный адиабатический инвариант I в интервалах $d\mu$, dI и находящихся в силовой трубке, которая опирается на площадку dS в экваториальной плоскости ловушки. Такое описание является адекватным, если время движения между точками остановки мало по сравнению с характерным временем перестановки магнитных трубок. В выражении (III.1) и всюду ниже в этом Приложении под \vec{r} понимается двумерный вектор, определяющий положение точки в экваториальной плоскости ловушки.

Энергия частицы ε может быть, в принципе, выражена через μ , I и \vec{r} : $\varepsilon = \varepsilon(\mu, I, \vec{r})$, что позволяет записать следующее выражение для энергии частиц в системе:

$$W = \int \varepsilon(\mu, I, \vec{r}) f(\mu, I, \vec{r}) d\mu dI dS. \quad (\text{III.2})$$

Найдем изменение энергии плазмы при некотором перемещении силовых трубок. Перемещение будем характеризовать лагранжевым вектором смещения $\vec{\eta}(\vec{r})$, где под \vec{r} понимаются

невозмущенные координаты трубок. Поскольку величины μ и I сохраняются, то изменение энергии одной частицы при смещении равно $\varepsilon(\mu, I, \vec{r} + \vec{\eta}(\vec{r})) - \varepsilon(\mu, I, \vec{r})$, соответственно изменение энергии всей плазмы дается следующим выражением:

$$\delta W = \int [\varepsilon(\mu, I, \vec{r} + \vec{\eta}(\vec{r})) - \varepsilon(\mu, I, \vec{r})] f(\mu, I, \vec{r}) d\mu dI dS. \quad (\text{Ш.3})$$

Это — точное выражение, без предположения о малости возмущения.

Смещение $\vec{\eta}$ в желобковом возмущении определяется уравнением

$$\dot{\vec{\eta}} = \frac{c}{B^2} [\vec{B}, \nabla\varphi], \quad (\text{Ш.4})$$

где $\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$ — электростатический потенциал в возмущении*. Все величины в правой части берутся в точке $\vec{r} + \vec{\eta}(\vec{r}, t)$ т.е. выражение для $\dot{\vec{\eta}}$ можно записать в виде

$$\dot{\vec{\eta}} = \vec{f}(t, \vec{r} + \vec{\eta}), \quad (\text{Ш.5})$$

где \vec{f} — некоторая векторная функция, имеющая первый порядок малости. Если в правой части положить $\vec{\eta} = 0$, получим вектор смещения линейного приближения:

$$\xi_i \equiv \eta_i^{(1)} = \int_0^t f_i(t', \vec{r}) dt'. \quad (\text{Ш.6})$$

Подставляя $\eta_i^{(1)}$ в правую часть (Ш.5), проводя в ней разложение до членов $\sim \eta$ и выполняя интегрирование по dt , находим, что выражение для η с точностью до членов второго порядка имеет вид:

$$\eta_i^{(2)} = \xi_i + \frac{1}{2} \xi_k \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \Delta \eta_i^{(2)}, \quad (\text{Ш.7})$$

* Мы говорим здесь о движении в экваториальной плоскости; что же касается желобкового характера перемещения всей трубки, то он обеспечивается постоянством φ вдоль трубки.

$$\Delta \eta_i^{(2)} = \frac{1}{2} \int_0^t dt' \left(\xi_k \frac{\partial \dot{\xi}_i}{\partial x_k} - \dot{\xi}_k \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \right).$$

Для анализа линейной устойчивости требуется найти разницу между $\varepsilon(\mu, I, \vec{r} + \vec{\eta})$ и $\varepsilon(\mu, I, \vec{r})$ с точностью до членов второго порядка по амплитуде возмущений. Учитывая осесимметричность задачи и пользуясь формулой (Ш.7) с нужной точностью получаем:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mu, I, \vec{r} + \vec{\eta}) - \varepsilon(\mu, I, \vec{r}) &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \xi_r + \frac{1}{2r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} x_i \xi_k \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\xi_\theta^2}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \frac{1}{2} \xi_r^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} x_i \Delta \eta_i^{(2)}. \end{aligned} \quad (\text{Ш.8})$$

Легко проверить, что при условии (Ш.4),

$$\xi_r = -\frac{1}{rB} \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^r B \xi_\theta dr', \quad (\text{Ш.9})$$

(здесь B — поле в экваториальной плоскости ловушки).

Поскольку задача периодична по θ , то входящий в (Ш.8) член $\xi_r \partial \varepsilon / \partial r$ при интегрировании по θ выпадает. Произведение $x_i \Delta \eta_i^{(2)}$ приводится к виду

$$x_i \Delta \eta_i^{(2)} = \frac{1}{2cB^2 r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial r} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \theta} \right)$$

и при интегрировании по $d\theta$ также выпадает. Что касается члена $(1/2r)(\partial \varepsilon / \partial r) x_i \xi_k \partial \xi_i / \partial x_k$, то его после некоторых вычислений можно привести к виду:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} x_i \xi_k \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} &= \frac{1}{2r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \left(r \xi_r \frac{\partial \xi_r}{\partial r} - \xi_\theta^2 + \xi_\theta \frac{\partial \xi_r}{\partial \theta} \right) = \\ &= \frac{1}{2r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \left[r \xi_r \frac{\partial \xi_r}{\partial r} - \xi_\theta^2 + \frac{\xi_r}{B} \frac{\partial}{\partial r} (rB \xi_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\xi_r \xi_\theta) \right] \end{aligned}$$

(мы воспользовались соотношением (Ш.9)). При интегрировании

по $d\theta$ последнее слагаемое в квадратных скобках выпадает.

С учетом всех сделанных замечаний, находим следующее выражение для δW , справедливое с точностью до членов $\sim \xi^2$ (что и требуется для анализа линейной устойчивости):

$$\delta W = \frac{1}{2} \int dI d\mu \int dS f \cdot \hat{D} \epsilon, \quad (\text{III.10})$$

где оператор \hat{D} определяется соотношением

$$\hat{D} \epsilon = \frac{1}{2B} \frac{\partial \epsilon}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} (rB \xi_r^2) + \xi_r^2 \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial r^2}.$$

Выражение (III.10) можно преобразовать к стандартной форме, приведенной, например, в [15]. Мы, однако, не будем этого делать, а воспользуемся выражением (III.10), чтобы получить нужные нам формулы для δW в трех предельных случаях: плазмы с $p_{||} = 0$, плазмы с $p_{\perp} = 0$ и изотропной плазмы, описываемой как газ с показателем адиабаты γ .

В первом случае плазма сосредоточена вблизи экваториальной плоскости ловушки. Проводя интегрирование по нормали к этой плоскости, можно найти w_{\perp} — энергию, приходящуюся на единицу площади. При перемещении элемента плазмы из положения \vec{r} в положение $\vec{r} + \vec{\eta}$ его энергия изменится (вследствие сохранения магнитного момента частиц) от $w_{\perp}(\vec{r}) dS$ до $w_{\perp}(\vec{r}) [B(\vec{r} + \vec{\eta})/B(\vec{r})] dS$. Соответственно, для δW вместо (III.3) имеем:

$$\delta W = \int [B(\vec{r} + \vec{\eta}) - B(\vec{r})] \frac{w_{\perp}(\vec{r})}{B(\vec{r})} dS. \quad (\text{III.11})$$

Рассмотрим теперь обратный предельный случай, когда поперечная составляющая скорости частиц в экваториальной плоскости очень мала (крайний случай наклонной инжекции). Пробочное отношение при этом будем считать настолько большим, что эти частицы все же удерживаются в ловушке, останавливаясь в области очень сильного поля в пробке. Продольный адиабатический инвариант для каждой частицы сводится при этом просто к

произведению продольного импульса частицы на длину l силовой линии между пробками (в рассматриваемой модели почти на всей длине трубки, за исключением непосредственной окрестности пробки, продольный импульс частицы постоянен). Соответственно, при перемещениях трубки энергия частицы меняется пропорционально l^{-2} . Обозначим через $w_{||}(\vec{r}) dS$ энергию, заключенную в силовой трубке, опирающейся на площадку dS в экваториальной плоскости. В силу вышесказанного, в рассматриваемом случае имеем:

$$\delta W = \int \left[\frac{1}{l^2(\vec{r} + \vec{\eta})} - \frac{1}{l^2(\vec{r})} \right] w_{||}(\vec{r}) l^2(\vec{r}) dS. \quad (\text{III.12})$$

В модели плазмы как идеального газа с показателем адиабаты γ энергия отдельной силовой трубки, опирающейся на площадку dS в экваториальной плоскости, равна $p U d\phi / (\gamma - 1)$, где U — удельный объем трубки, а $d\phi = B dS$ — поток, заключенный в трубке. При смещении трубки давление внутри нее меняется по адиабатическому закону пропорционально $U^{-\gamma}$, соответственно ее энергия будет пропорциональна $U^{1-\gamma}$. Следовательно в этой модели

$$\delta W = \frac{1}{\gamma - 1} \int [U^{1-\gamma}(\vec{r} + \vec{\eta}) - U^{1-\gamma}(\vec{r})] p(\vec{r}) B U^{\gamma} dS. \quad (\text{III.13})$$

Сравнивая формулы (III.11) — (III.13) с (III.3), можно по аналогии с (III.10) сразу записать следующие выражения для δW во втором приближении:

$$\delta W = \frac{1}{2} \int dS \frac{w_{\perp}}{B} \hat{D} B, \quad (\text{III.14})$$

$$\delta W = \frac{1}{2} \int dS w_{||} l^2 \hat{D} \frac{1}{l^2}, \quad (\text{III.15})$$

$$\delta W = \frac{1}{2(\gamma - 1)} \int dS B p U^{\gamma} \hat{D} U^{1-\gamma}. \quad (\text{III.16})$$

Для глобальной моды $m = 1$, возмущение потенциала в которой определяется соотношением (4), эти выражения преобразовываются к виду:

$$\delta W = \text{const} \int d\phi \frac{w_{\perp}}{B^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \phi \frac{\partial B_0}{\partial \phi}, \quad (\text{III.17})$$

$$\delta W = -\text{const} \int d\phi \frac{w_{\parallel} \ell^2}{B} \frac{\partial}{\partial \phi} \phi \frac{\partial \ell}{\ell^3 \partial \phi}, \quad (\text{III.18})$$

$$\delta W = \text{const} \int d\phi \cdot \rho \left[\gamma \frac{\phi}{U} U'^2 - (\phi U')' \right], \quad (\text{III.19})$$

где константы, стоящие перед знаками интегралов, положительны.

Приведем также выражения для δW для произвольных смещений плазмы (эти выражения легко получаются из (III.14) - (III.16) с помощью интегрирования по частям):

$$\delta W = -\text{const} \int d\phi \tau_0^2 \xi_r^2 \left[B_0' w_{\perp}' - 2 \frac{w_{\perp}}{B_0} B_0'^2 \right], \quad (\text{III.20})$$

$$\delta W = \text{const} \int d\phi \tau_0^2 B_0^2 \xi_r^2 \left[\left(\frac{w_{\parallel}}{B_0} \right)' \frac{\ell'}{\ell} + 2 \frac{w_{\parallel}}{B_0} \left(\frac{\ell'}{\ell} \right)^2 \right], \quad (\text{III.21})$$

$$\delta W = \text{const} \int d\phi \tau_0^2 B_0^2 \xi_r^2 \left[U' \rho' + \gamma \frac{\rho}{U} U'^2 \right]. \quad (\text{III.22})$$

В выражениях (III.20) - (III.22) мы вернулись к обозначениям τ_0 и B_0 радиуса и магнитного поля в экваториальной плоскости ловушки, принятым в основном тексте настоящей работы.

Из (III.10) путем довольно громоздких вычислений можно получить также известное выражение для δW в случае изотропной плазмы (когда $f = f(\varepsilon)$):

$$\delta W = \text{const} \int d\phi \tau_0^2 B_0^2 \xi_r^2. \quad (\text{III.23})$$

$$\cdot \left[\rho' U' + \frac{15}{2} \rho \int \frac{d\lambda}{L_1} (L_2')^2 \right],$$

где

$$L_1 = \int \frac{d\ell}{\sqrt{1-\lambda B}}, \quad L_2 = \int \sqrt{1-\lambda B} d\ell \quad (\text{III.24})$$

(интегрирование по $d\ell$ ведется между нулями подкоренного выражения).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ U В ПАРАКСИАЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Получим несколько первых членов разложения U по степеням ϕ . Для этого заметим, что U можно представить в виде

$$U = \int \frac{dz}{B_z(\phi, z)}, \quad (\text{П2.1})$$

где $B_z - z$ - составляющая магнитного поля. Обозначим через $r(\phi, z)$ радиус магнитной поверхности, заключающей поток ϕ . По определению $r(\phi, z)$,

$$\phi = 2 \int_0^{r(\phi, z)} B_z(r', z) r' dr'. \quad (\text{П2.2})$$

Для удобства записи мы здесь, как и всюду в статье, понимаем под ϕ магнитный поток, деленный на π . Из (П2.2) имеем

$$\frac{1}{B_z(\phi, z)} = \frac{d}{d\phi} r^2(\phi, z), \quad (\text{П2.3})$$

т.е. выражение (П2.1) для U может быть представлено в виде:

$$U(\phi) = \frac{d}{d\phi} \int r^2(\phi, z) dz \quad (\text{П2.4})$$

Воспользуемся, далее, известным параксиальным разложением z - составляющей магнитного поля (которое получается с помощью уравнения $\Delta B_z = 0$):

$$B_z(r, z) = b - \frac{1}{2^2} b'' r^2 + \frac{1}{2^6} b^{(iv)} r^4 - \frac{1}{2^9 3^2} b^{(vi)} r^6 + \dots \quad (\text{П2.5})$$

где $b = b(z)$ - магнитное поле на оси.

С помощью (П2.2) и (П2.5) получаем, что

$$\varphi = b z^2 - \frac{1}{2^3} b'' z^4 + \frac{1}{2^6 3} b^{(iv)} z^6 - \frac{1}{2^{10} 3^2} b^{(vi)} z^8 + \dots \quad (\text{П2.6})$$

Отсюда можно, в принципе, найти функцию $z^2(\varphi, z)$. Несколько первых членов разложения этой функции по степеням φ выглядят следующим образом:

$$z^2 = \frac{\varphi}{b} + \frac{b''}{2^3 b^3} \varphi^2 + \frac{1}{2^5 b^4} \left[\frac{(b'')^2}{b} - \frac{b^{(iv)}}{6} \right] \varphi^3 +$$

$$+ \frac{1}{2^9 b^5} \left[\frac{5(b'')^3}{b^2} - \frac{5b'' b^{(iv)}}{3b} + \frac{b^{(vi)}}{2 \cdot 3^2} \right] \varphi^4 + \dots$$

Подставляя это выражение в (П2.4) и проводя почленное интегрирование по dz , можно получить разложение U по степеням φ .

Выпишем четыре первых члена этого разложения

$$U = \int \frac{dz}{b} + \alpha \varphi + \beta \varphi^2 + \gamma \varphi^3 + \dots,$$

где

$$\alpha = \frac{1}{4} \int \frac{b''}{b^3} dz = \frac{3}{4} \int \left[\left(\frac{1}{b} \right)' \right]^2 dz, \quad (\text{П2.7})$$

$$\beta = \frac{3}{32} \int \left[\frac{(b'')^2}{b^5} - \frac{b^{(iv)}}{6b^4} \right] dz = \frac{5}{32} \int \frac{1}{b} \left[\left(\frac{1}{b} \right)'' \right]^2 dz, \quad (\text{П2.8})$$

$$\gamma = \frac{1}{128} \int \left[5 \frac{(b'')^3}{b^7} - \frac{5}{3} \frac{b'' b^{(iv)}}{b^6} + \frac{b^{(vi)}}{18b^5} \right] dz. \quad (\text{П2.9})$$

Выражения для α и β с помощью интегрирования по частям мы представили в форме, делающей очевидной их положительность. Что же касается коэффициента γ , то установить, является он знакоопределенным или нет, так просто не удастся. Мы приведем здесь еще одно выражение для γ :

$$\gamma = \frac{35}{2304} \left\{ - \frac{45}{7(3m+n)} \int \left[(b^n (b' b^m)')' \right]^2 dz + \right.$$

$$+ \int dz \left[\left(\frac{45}{7(3m+n)} + 1 \right) \frac{(b''')^2}{b^6} + \frac{45}{7(3m+n)} (3m^2 + 6m + n^2) \frac{(b')^2 (b'')^2}{b^8} + \right.$$

$$\left. \left. + \left(\frac{45m(m+n-1)}{7(3m+n)} [m(m+n-1) + \frac{18}{5}(3m+n) + \frac{144}{5}] + \frac{432}{5} \right) \frac{(b')^6}{b^{10}} \right] \right\},$$

в котором γ представлено в виде суммы знакоопределенных слагаемых.

ПОВЕДЕНИЕ ФУНКЦИИ $U(\phi)$ ВЕЛИЗИ СЕПАРАТРИСЫ

При приближении к сепаратрисе основной вклад в U будут вносить малые окрестности тех точек на сепаратрисе, в которых B обращается в нуль. Для простоты будем считать, что имеется только одна такая точка и выберем декартову систему координат так, чтобы плоскость x, y совпадала с плоскостью, в которой лежит сепаратриса, а точка нулевого поля находилась в начале системы координат. Вблизи нулевой точки можно пренебречь эффектами, связанными с цилиндрической геометрией задачи и считать магнитное поле плоским. В этом приближении первые члены разложения составляющих вектора \vec{B} по степеням x и y имеют вид*

$$B_x = \alpha x, \quad B_y = \alpha y, \quad (ПЗ.1)$$

где α — константа, относительно которой предполагается, что $\alpha \neq 0$. Силовые линии поля (ПЗ.1) представляют собой гиперболы, которые задаются уравнением

$$\psi = \frac{1}{2}(y^2 - x^2) = \text{const}. \quad (ПЗ.2)$$

Для поля (ПЗ.1) дифференциал дуги равен

$$dl = dx \sqrt{1 + \frac{B_y^2}{B_x^2}} = dx \sqrt{1 + \frac{x^2}{2\psi + x^2}}, \quad (ПЗ.3)$$

а модуль магнитного поля меняется вдоль силовой линии по закону

$$B = \alpha \sqrt{x^2 + y^2} = \alpha \sqrt{2(\psi + x^2)}. \quad (ПЗ.4)$$

В результате интеграл U принимает следующий вид

* Представление (ПЗ.1) фиксирует ориентацию осей выбранной системы координат.

$$U(\psi) = \int \frac{dl}{B} = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sqrt{1 + \frac{x^2}{2\psi + x^2}}}{\sqrt{\psi + x^2}} = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\psi + x^2}}. \quad (ПЗ.5)$$

Несмотря на то, что этот интеграл логарифмически расходится на верхнем пределе, с его помощью можно получить грубую оценку для U , если заменить верхний предел на величину x_{\max} , по порядку величины равную расстоянию от точки нулевого магнитного поля до оси ловушки:

$$U(\psi) \approx \frac{2}{\alpha} \ln \frac{x_{\max}}{\sqrt{|\psi|}}. \quad (ПЗ.6)$$

Замечая теперь, что величина ψ пропорциональна разности потоков $\phi - \phi_s$, мы приходим к результату (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО МОНОТОННОСТИ ФУНКЦИИ $U(\phi)$ В ПЛОСКОМ СЛУЧАЕ

Рассмотрим магнитное поле, имеющее только составляющие $B_x(x, z)$ и $B_z(x, z)$ (ось z является аналогом оси системы в осесимметричном случае, а координата x — аналогом радиуса). Плоское поле представляет определенный методический интерес и, кроме того, может имитировать некоторые элементы открытых ловушек с кольцевой плазмой (см., напр., [5]) в условиях, когда расстояние от оси системы до кольца много меньше толщины кольца. В плоском поле под ϕ следует понимать величину

$$\phi = \int_0^x B_z(x', z) dx'. \quad (П4.1)$$

Найдем производные $dU/d\phi$ и $d^2U/d\phi^2$. Предварительно решим вспомогательную задачу об отыскании приращения функции вида

$$I(\phi) = \int f(\phi, l) dl, \quad (П4.2)$$

(где f — произвольная функция своих аргументов) при переходе с одной магнитной поверхности на другую. Учитывая, что $\text{rot } \vec{B} = 0$, имеем

$$\delta I = \int B dl \delta \left(\frac{f}{B} \right); \quad (П4.3)$$

под $\delta(f/B)$ понимается изменение функции f/B при переходе с одной магнитной поверхности на другую, близкую к первой, по нормали к ним. Соответственно,

$$\delta \left(\frac{f}{B} \right) = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{f}{B} \right) \delta n, \quad (П4.4)$$

где δn — расстояние между магнитными поверхностями. Оно связано с потоком $\delta\phi$ между этими поверхностями соотношением

$$\delta n = \frac{\delta\phi}{B}. \quad (П4.5)$$

Из (П4.3) — (П4.5) находим, что

$$\delta I = \delta\phi \int dl \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{f}{B} \right),$$

т.е.

$$\frac{dI}{d\phi} = \int dl \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{f}{B} \right). \quad (П4.6)$$

Взяв в качестве f функцию $1/B$, из (П4.6) получим

$$\frac{dU}{d\phi} = -2 \int \frac{dl}{B^3} \frac{\partial B}{\partial n}. \quad (П4.7)$$

На магнитной оси, ввиду четности функции $B(x, z)$ по первому аргументу, имеем $\partial B / \partial n = 0$, т.е.

$$\left. \frac{dU}{d\phi} \right|_{\phi=0} = 0. \quad (П4.8)$$

Во избежание недоразумений, подчеркнем, что этот факт относится только к плоскому полю; в осесимметричном случае на оси $dU/d\phi > 0$ (см. (П2.7)).

Беря в качестве f функцию $B^{-3} \partial B / \partial n$, из (П4.6) и (П4.7) получаем:

$$\frac{d^2U}{d\phi^2} = -2 \int dl \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{B^4} \frac{\partial B}{\partial n}. \quad (П4.9)$$

Ниже мы докажем, что всегда $d^2U/d\phi^2 > 0$. Совместно с соотношением (П4.8) это будет означать, что U монотонно возрастает при удалении от магнитной оси.

Приступим к доказательству положительности $d^2U/d\phi^2$. Раскрывая производные в выражении (П4.9), получим:

$$\frac{d^2 U}{d\phi^2} = 8 \int \frac{dl}{B^5} \left(\frac{\partial B}{\partial n} \right)^2 - 2 \int \frac{dl}{B^4} \frac{\partial^2 B}{\partial n^2} \quad (\text{П4.10})$$

С другой стороны, учитывая соотношения $\text{div} \vec{B} = 0$ и $\text{rot} \vec{B} = 0$, можно после некоторых вычислений убедиться в том, что

$$\frac{\partial^2 B}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial l^2} = \frac{2}{B} \left[\left(\frac{\partial B}{\partial l} \right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial n} \right)^2 \right] \quad (\text{П4.11})$$

Подставляя отсюда $\partial^2 B / \partial n^2$ во второй из интегралов в (П4.10), находим:

$$\frac{d^2 U}{d\phi^2} = 4 \int \frac{dl}{B^5} \left[\left(\frac{\partial B}{\partial n} \right)^2 - \left(\frac{\partial B}{\partial l} \right)^2 \right] + 2 \int \frac{dl}{B^4} \frac{\partial^2 B}{\partial l^2}.$$

Выполняя в последнем слагаемом интегрирование по частям, получаем окончательно

$$\frac{d^2 U}{d\phi^2} = 4 \int \frac{dl}{B^5} \left[\left(\frac{\partial B}{\partial n} \right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial l} \right)^2 \right] > 0, \quad (\text{П4.12})$$

чем и исчерпывается доказательство.

Прямо воспроизвести такое же доказательство в осесимметричном случае не удастся. В осесимметричном случае вместо (П4.6) имеем

$$\frac{dI}{d\phi} = \int \frac{dl}{r} \frac{\partial}{\partial n} \frac{f}{B}$$

(под ϕ понимается магнитный поток, деленный на π), а вместо (П4.9), соответственно,

$$\frac{d^2 U}{d\phi^2} = -2 \int \frac{dl}{r} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r B^4} \frac{\partial B}{\partial n}.$$

Соотношение (П4.11) заменяется на

$$\frac{\partial^2 B}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial l^2} = \frac{2}{B} \left[\left(\frac{\partial B}{\partial n} \right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial l} \right)^2 \right] -$$

$$- \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial B}{\partial n} + \frac{2}{B} \left(\frac{B_r}{r} \right)^2 + \frac{2 B_r}{r B} \frac{\partial B}{\partial l},$$

и вместо (П4.12) получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U}{d\phi^2} = & 4 \int \frac{dl}{r^2 B^5} \left[\left(\frac{\partial B}{\partial n} \right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial l} \right)^2 \right] + \\ & + 4 \int \frac{dl}{r^3 B^4} \left(\frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial B}{\partial n} - \frac{B_r^2}{r B} \right). \end{aligned}$$

Появление ряда дополнительных (по сравнению с (П4.12)) слагаемых не позволяет в данном случае сделать столь же простое заключение о знакоопределенности $d^2 U / d\phi^2$.

КИНЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ВБЛИЗИ СЕПАРАТРИСЫ

Исследуем поведение функции F , задаваемой выражением (II), вблизи сепаратрисы. С помощью формулы (ПЗ.6) находим:

$$\frac{dU}{d\psi} = -\frac{1}{\alpha\psi}, \quad (\text{ПБ.1})$$

$$\frac{d^2U}{d\psi^2} = \frac{1}{\alpha\psi^2}.$$

Пользуясь (ПЗ.3), (ПЗ.4), (ПБ.1) и заменяя $\partial/\partial\phi$ на $\partial/\partial\psi$, при $\phi \rightarrow \phi_s$ получаем:

$$F \approx -\frac{\phi_s}{\alpha\psi^2} + \frac{15}{2}\phi_s \int_0^{B_{\min}^{-1}} d\lambda \frac{I_1^2}{I_2}, \quad (\text{ПБ.2})$$

где

$$I_1 = 2^{3/2} \frac{d}{d\psi} \int_0^{x_m} dx \left[\frac{\psi+x^2}{2\psi+x^2} \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{2(\psi+x^2)} \right) \right]^{1/2}, \quad (\text{ПБ.3})$$

$$I_2 = 2^{3/2} \int_0^{x_m} dx \left[\frac{\psi+x^2}{(2\psi+x^2)(1 - \frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{2(\psi+x^2)})} \right]^{1/2},$$

а x_m определяется из условия обращения в нуль подкоренных выражений в (ПБ.3). Заменой переменных

$$u^2 = 1 + \frac{x^2}{\psi}, \quad \xi = \frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{\psi} \quad (\text{ПБ.4})$$

в интегралах (ПБ.3) выражение (ПБ.2) можно привести к следующему виду

$$F = -\frac{\phi_s}{\alpha\psi^2} + \frac{15}{2} \frac{\phi_s}{\alpha\psi^2} A, \quad (\text{ПБ.5})$$

где

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{1/\sqrt{2}} d\xi \frac{(A_1 + A_2)^2}{A_3},$$

$$A_1 = \int_1^{1/\sqrt{2}\xi} du \left[\frac{u^2-1}{(u^2+1)^3} (1-\sqrt{2}u\xi) \right]^{1/2},$$

$$A_2 = \frac{\xi}{\sqrt{2}} \int_1^{1/\sqrt{2}\xi} du \frac{u}{(u^4-1)^{1/2} (1-\sqrt{2}u\xi)^{1/2}},$$

$$A_3 = \int_1^{1/\sqrt{2}\xi} du \frac{u^2}{(u^4-1)^{1/2} (1-\sqrt{2}u\xi)^{1/2}}.$$

Как видно из (ПБ.5) поведение F при $\psi \rightarrow 0$ теперь определяется величиной A . Численное интегрирование дает для A следующее значение

$$A = 0,074,$$

так что

$$F = -0,44 \frac{\phi_s}{\alpha\psi^2} \xrightarrow{\psi \rightarrow 0} -\infty$$

СРАВНЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО И МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПРИНЦИПОВ

Для того чтобы оценить роль кинетических эффектов в непараксиальном магнитном поле, рассмотрим устойчивость цилиндрического плазменного шнура с $\beta \ll 1$, по оси которого течет линейный ток, относительно мелкомасштабных желобковых мод. Магнитное поле тока имеет только азимутальную составляющую, $B_\theta = \alpha/r$, где α — константа, соответственно $U = 2\pi r^2/\alpha$. Для мелкомасштабных желобковых колебаний критерий устойчивости носит локальный характер и состоит в требовании положительной определенности подынтегральной функции в интеграле энергии. В магнитной гидродинамике, как следует из (III.22), этот критерий устойчивости имеет вид ($\gamma = 5/3$):

$$\frac{d \ln p}{dr} > -\gamma \frac{d \ln U}{dr} = -\frac{10}{3} \frac{1}{r}. \quad (\text{П6.1})$$

Обращаясь теперь к кинетическому выражению для энергии (III.23), прежде всего находим, что

$$L_1 = 2\pi r \left(1 - \frac{\lambda \alpha}{r}\right)^{-1/2}, \quad L_2 = 2\pi r \left(1 - \frac{\lambda \alpha}{r}\right)^{1/2},$$

что позволяет записать условие положительной определенности подынтегрального выражения в (III.23) в виде

$$\frac{d \ln p}{dr} > -\frac{15\pi}{r} \left(\frac{dU}{dr}\right)^{-1} \int_0^{r/\alpha} d\lambda \sqrt{1 - \frac{\lambda \alpha}{r}} \left[\frac{d}{dr} r \left(1 - \frac{\lambda \alpha}{r}\right)^{1/2}\right]^2 = -\frac{7}{2r}. \quad (\text{П6.2})$$

Сравнивая (П6.1) и (П6.2), видим, что кинетический расчет в 1,05 раза увеличивает пороговый градиент давления, при котором возникает неустойчивость.

Положение точки на магнитной поверхности, охватывающей поток Φ , будем определять азимутальным углом θ и длиной l дуги силовой линии (l отсчитывается от экваториальной плоскости системы). Обозначим возмущение электростатического потенциала через φ и заметим, что в желобковых колебаниях

$$\varphi = \varphi(\Phi, \theta) \quad (\text{П7.1})$$

(зависимости от l нет).

Линеаризованная система уравнений, описывающая желобковые возмущения, пропорциональные $e^{-i\omega t}$, имеет вид:

$$-i\omega \rho \delta \vec{v} = \frac{1}{c} [\delta \vec{j}, \vec{B}] - \nabla \delta p, \quad (\text{П7.2})$$

$$\frac{1}{c} [\delta \vec{v}, \vec{B}] - \nabla \varphi = 0, \quad (\text{П7.3})$$

$$-i\omega \delta p + \text{div} \rho \delta \vec{v} = 0, \quad (\text{П7.4})$$

$$-i\omega \left(\frac{\delta p}{\rho} - \gamma \frac{\delta p}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho} \delta \vec{v} \cdot \nabla p - \frac{\gamma}{\rho} \delta \vec{v} \cdot \nabla p = 0 \quad (\text{П7.5})$$

Из (П7.2) и (П7.3) имеем:

$$\delta \vec{j}_1 = \frac{1}{B^2} \left\{ i\omega \rho c \nabla \varphi + [\vec{B}, \nabla \delta p] \right\}, \quad (\text{П7.6})$$

$$\delta \vec{v}_1 = \frac{c}{B^2} [\vec{B}, \nabla \varphi], \quad \delta v_{||} = -\frac{i}{\omega \rho} \frac{\partial \delta p}{\partial l}, \quad (\text{П7.7})$$

а из (П7.4) и (П7.5) —

$$i\omega \frac{\delta p}{\rho} = \frac{1}{\rho} \delta \vec{v} \cdot \nabla p + \gamma \text{div} \delta \vec{v}. \quad (\text{П7.8})$$

Подставляя $\delta \vec{v}_1$ и $\delta v_{||}$ из (П7.7) в (П7.8) и учитывая, что φ не зависит от l , для возмущений вида $e^{im\theta}$ находим:

$$\frac{\delta p}{p} = \varphi \frac{mc}{\omega} \left(2\gamma \frac{\partial \ln B}{\partial \varphi} - \frac{\partial \ln p}{\partial \varphi} \right) - \frac{\gamma B}{\omega^2 r} \frac{\partial}{\partial \ell} \frac{1}{B} \frac{\partial \delta p}{\partial \ell}. \quad (\text{П7.9})$$

Это соотношение позволяет, в принципе, выразить δp через φ на данной силовой линии.

Чтобы получить замкнутую систему уравнений, воспользуемся условием квазинейтральности $\text{div } \vec{j} = 0$, которое можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial \ell} \frac{j_{\parallel}}{B} = -\frac{1}{B} \text{div } \vec{j}_{\perp}.$$

Интегрируя это уравнение вдоль силовой линии по области, занятой плазмой, и учитывая, что на границе плазмы $j_{\parallel} = 0$, находим:

$$\int \frac{d\ell}{B} \text{div } \vec{j}_{\perp} = 0 \quad (\text{П7.10})$$

Подставляя сюда выражение для \vec{j}_{\perp} из (П7.6), находим уравнение, которое совместно с (П7.9) образует замкнутую систему для функций δp и φ

$$\int \frac{d\ell}{B} \left[B^2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{r}{B^2} \left(-i\omega r c^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} + \frac{imc}{r} \delta p \right) + \frac{im}{r} \left(\frac{\omega r c^2 m}{B^2 r} \varphi - cr \frac{\partial \delta p}{\partial \varphi} \right) \right] = 0. \quad (\text{П7.11})$$

Поскольку φ не зависит от ℓ , интегрирование по $d\ell$ в слагаемых, содержащих φ , проводится очень просто, в результате чего получаем:

$$-\frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\int \frac{r^2 p}{B} d\ell \right] \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} + m^2 \varphi \int \frac{r d\ell}{B^3 r^2} = \frac{im}{r} \int d\ell \delta p B \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{B^2}. \quad (\text{П7.12})$$

Левая часть этого уравнения происходит из инерционных членов уравнения движения (первое слагаемое связано с движением плазмы в азимутальном направлении, а второе — в радиальном направлении), а правая часть описывает "возвращающую силу".

Анализ системы (П7.9), (П7.12) сильно упрощается в случае амбиполярной ловушки, состоящей из длинного параксиального центрального пробкотрона и двух коротких непараксиальных концевых пробкотронов. В этом случае основной вклад в "возвращающую силу" вносят концевые пробкотроны, а в инерцию — центральный. Соответственно, частота колебаний оказывается много меньше, чем S_k/L_k , где S_k и L_k , соответственно, скорость звука в концевом пробкотроне и длина концевых пробкотронов. Поэтому последнее слагаемое в правой части уравнения (П7.9), оцененное по порядку величины, оказывается намного больше левой части уравнения (П7.9). Это означает, что на самом деле возмущение давления в концевом пробкотроне почти постоянно вдоль силовой линии. Найти это возмущение можно, интегрируя уравнение (П7.9), с весом B^{-1} по длине концевых пробкотронов:

$$\frac{\delta p}{p} U = -\varphi \frac{mc}{\omega} \left(\gamma \frac{dU}{d\varphi} + U \frac{d \ln p}{d\varphi} \right). \quad (\text{П7.13})$$

Здесь уместно заметить, что мы считаем давление изотропным и одновременно допускаем наличие перепада давления и плотности между концевым и центральным пробкотронами и между концевым пробкотроном и торцевой стенкой. Такое рассмотрение непротиворечиво, если пробочное отношение в концевом пробкотроне очень велико: тогда вклад в интеграл (и другие аналогичные интегралы) околопробочной области, где приближение изотропной плазмы дает погрешность порядка единицы, мал из-за наличия множителя B^{-1} .

Как уже отмечалось, в амбиполярной ловушке с длинным центральным пробкотроном, основной вклад в интегралы, входящие в левую часть уравнения (П7.12), вносит участок однородного поля в центральном пробкотроне. Здесь $B = B_{\parallel}$, $\varphi = r^2 B_{\parallel} / 2$, $r = r_{\parallel}(\varphi)$ так что

$$\int \frac{r^2 p}{B} d\ell = \frac{2\varphi r_{\parallel}(\varphi) L_{\parallel}}{B_{\parallel}^2}; \quad \int \frac{r d\ell}{B^3 r^2} = \frac{r_{\parallel}(\varphi) L_{\parallel}}{2\varphi B_{\parallel}^2}$$

(условие применимости нашего приближения состоит в том, что вклад в эти интегралы от концевых пробкотронов мал, т.е. что центральный пробкотрон достаточно длинный). Учитывая, что в правой части (П7.12) величину δp следует считать постоянной, а интегрирование вести по концевому пробкотрону, с помощью (П7.13) получаем следующее уравнение для φ :

$$-\frac{1}{\rho_{\text{ц}}} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho_{\text{ц}} \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} + \frac{m^2 \varphi}{4 \varphi} + \frac{m^2 B_{\text{ц}}^2}{2 \omega^2 \rho_{\text{ц}} L_{\text{ц}}} \varphi \left[\frac{\chi p}{U} \left(\frac{dU}{d\varphi} \right)^2 + \frac{dp}{d\varphi} \frac{dU}{d\varphi} \right] = 0. \quad (\text{П7.14})$$

ЛИТЕРАТУРА:

1. Рютов Д.Д., Ступаков Г.В. Письма в ЖЭТФ, 1977, 26, 186.
2. Ступаков Г.В. Физика плазмы, 1979, 5, 871.
3. Тимофеев А.В. Письма в ЖЭТФ, 1979, 29, 227.
4. Арсенин В.В. Физика плазмы, 1979, 5, 1293.
5. Logan V.G. Comments on Plasma Phys. and Contr. Fusion, 1980, 6, 199.
6. Арсенин В.В. Физика плазмы, 1982, 8, 484.
7. Димов Г.И. Препринт ИЯФ СО АН СССР № 82-150; Новосибирск, 1982.
8. Hinton F.L., Rosenbluth M.N. Nucl. Fusion, 1982, 22, 1547.
9. Арсенин В.В. Письма в ЖЭТФ, 1983, 37, 534.
10. Kesner J. Nucl. Fusion, 1985, 25, 275.
11. Мирнов В.В., Рютов Д.Д. Письма в ЖЭТФ, 1979, 5, 678.
12. Nagornyi V.P., Ryutov D.D., Stupakov G.V. Nucl. Fusion, 1984, 24, 1421.
13. Рютов Д.Д., Ступаков Г.В. Письма в ЖЭТФ, 1985, 42, 29.
14. Kruekal M.D., Oberman C.R. Phys. Fluids, 1958, 1, 275.
15. Михайловский А.Б. Теория плазменных неустойчивостей. М.: Атомиздат, 1971.
16. Andreoletti J. Comptes Rendus, 1963, 257, 1235.
17. Furth H.P. Phys. Rev. Lett., 1963, 11, 308.
18. Морозов А.И., Соловьев Л.С. В сб.: Вопросы теории плазмы /Под ред. Леонтовича М.А. М.: Госатомиздат, 1963, вып.2, с.3.
19. Кадомцев Б.Б. В сб.: Вопросы теории плазмы /Под ред. Леонтовича М.А. М.: Госатомиздат, 1963, вып.2, с.132.

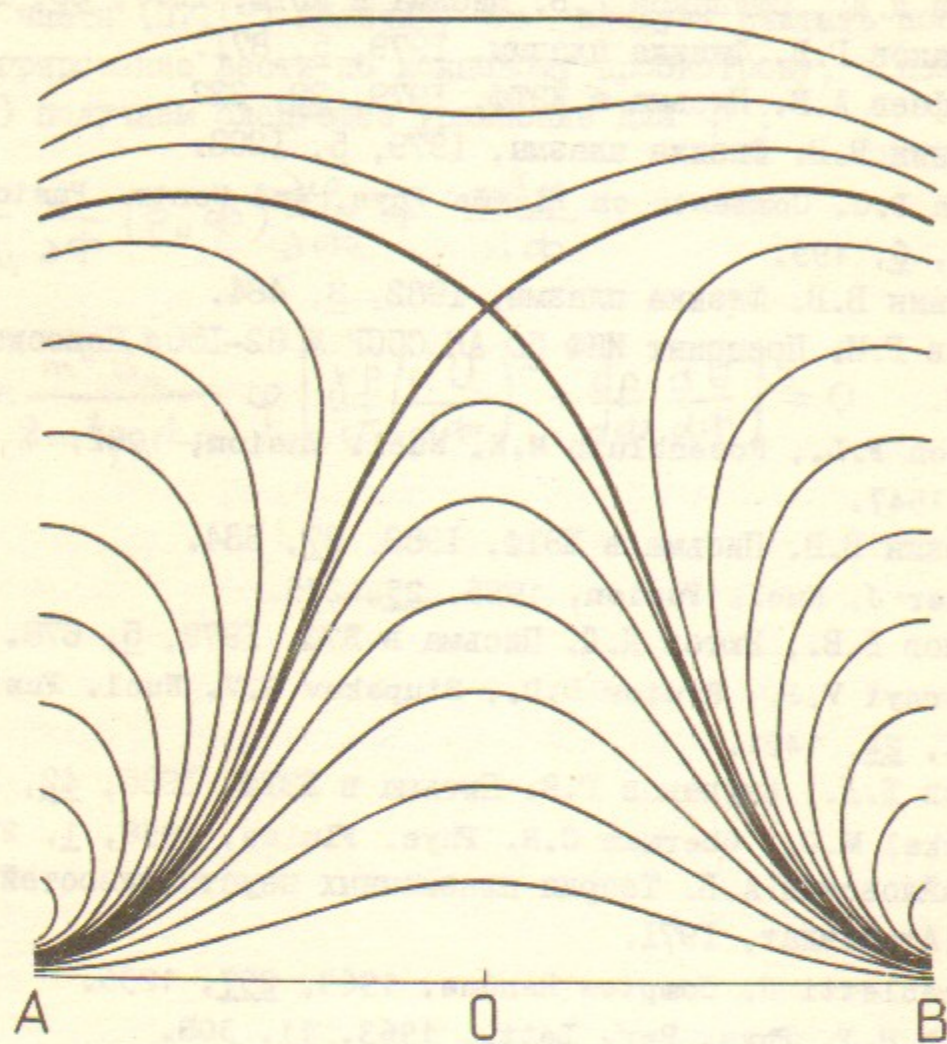


Рис.1. Силовые линии магнитного поля двух "точечных" пробочных катушек, расположенных в точках А и В. Жирной линией показана сепаратриса, проходящая через нуль магнитного поля. Точка О равноудалена от точек А и В.

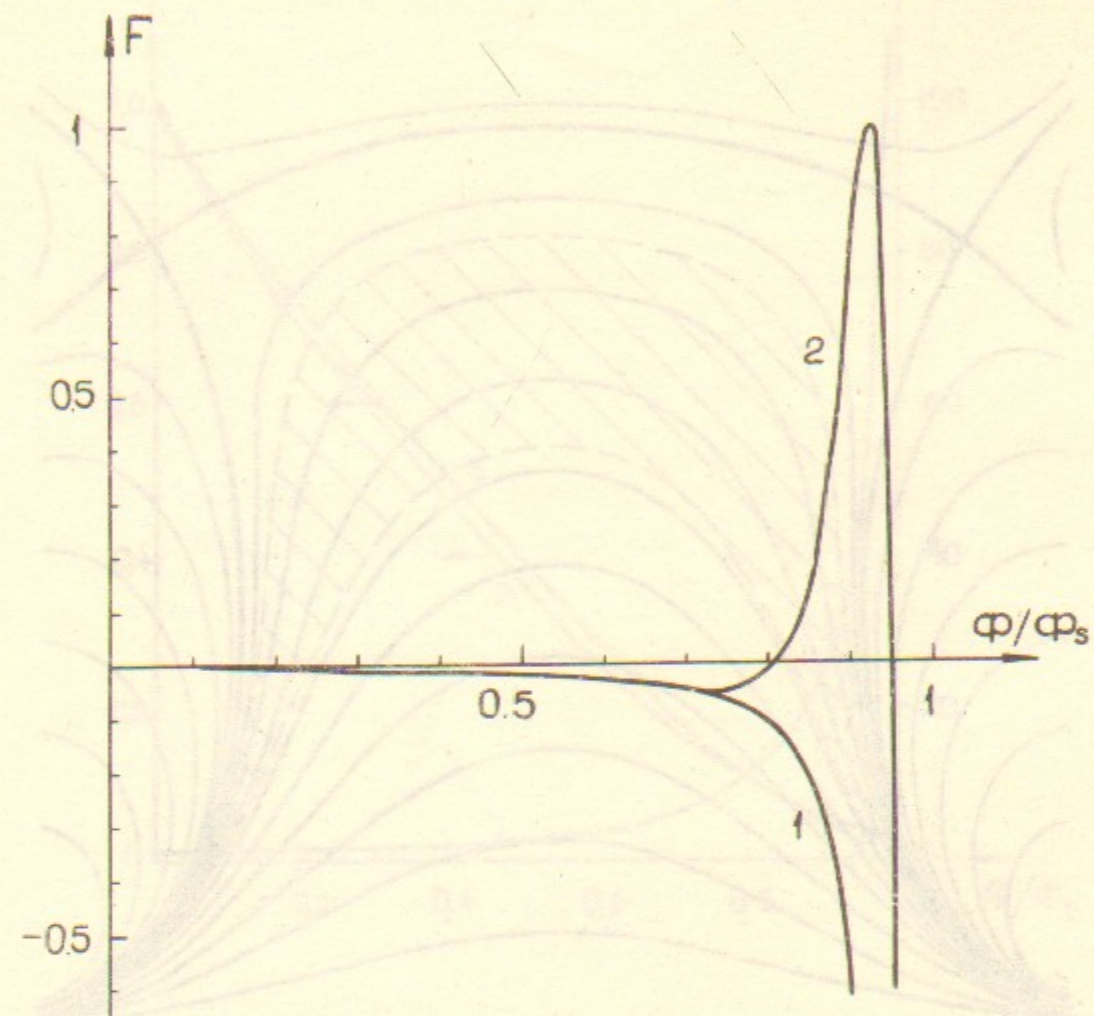


Рис.2. График функции $F(\varphi)$ (в произвольных единицах), задаваемой выражением (8). Кривая (1) соответствует полю двух точечных катушек, а кривая (2) соответствует суперпозиции этого поля и однородного поля, $\Delta B = 0,06 B_*$.

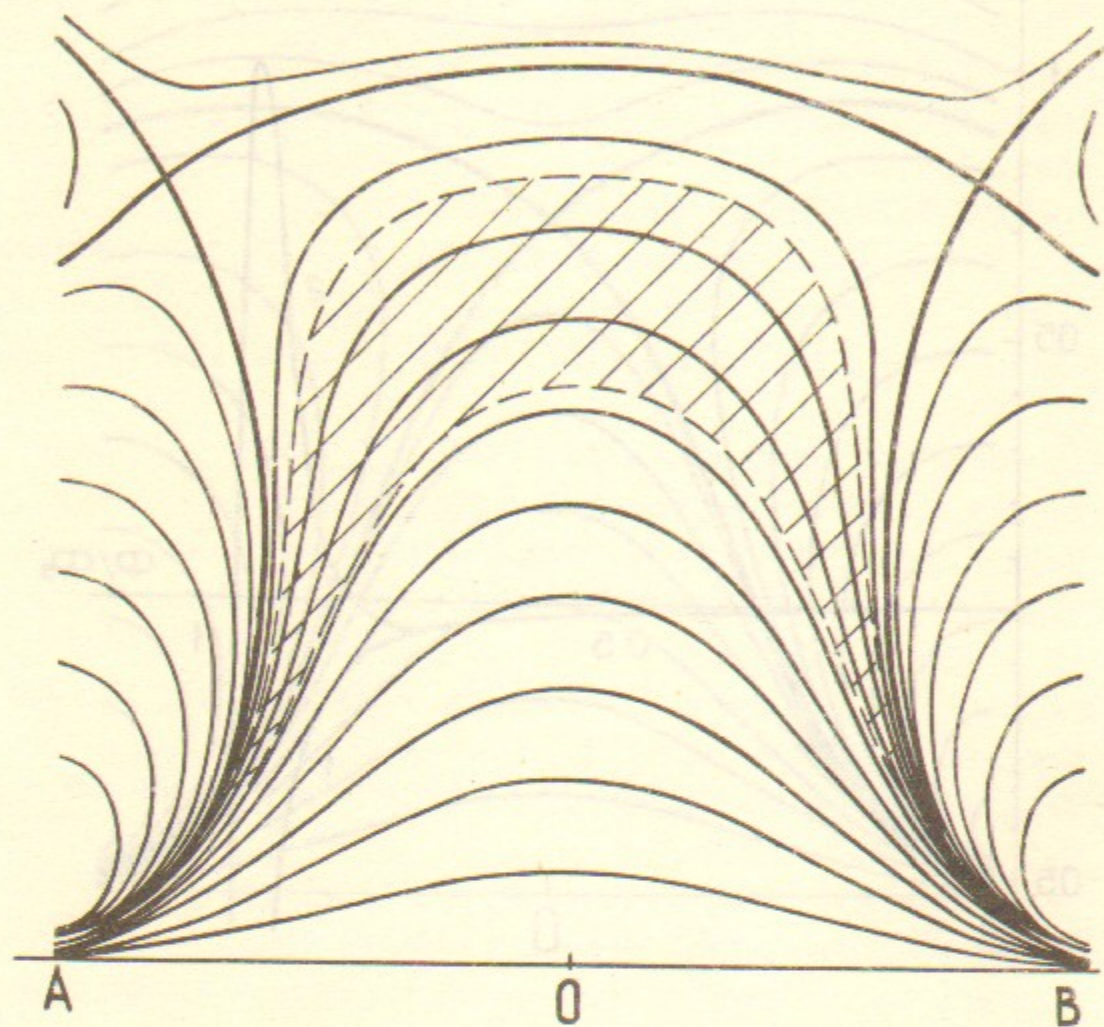


Рис.3. Силовые линии суперпозиции поля двух точечных катушек и однородного поля, $\Delta B = 0,06 B_*$. Сепаратриса показана жирной линией. Заштрихована область, соответствующая кольцу устойчивости.

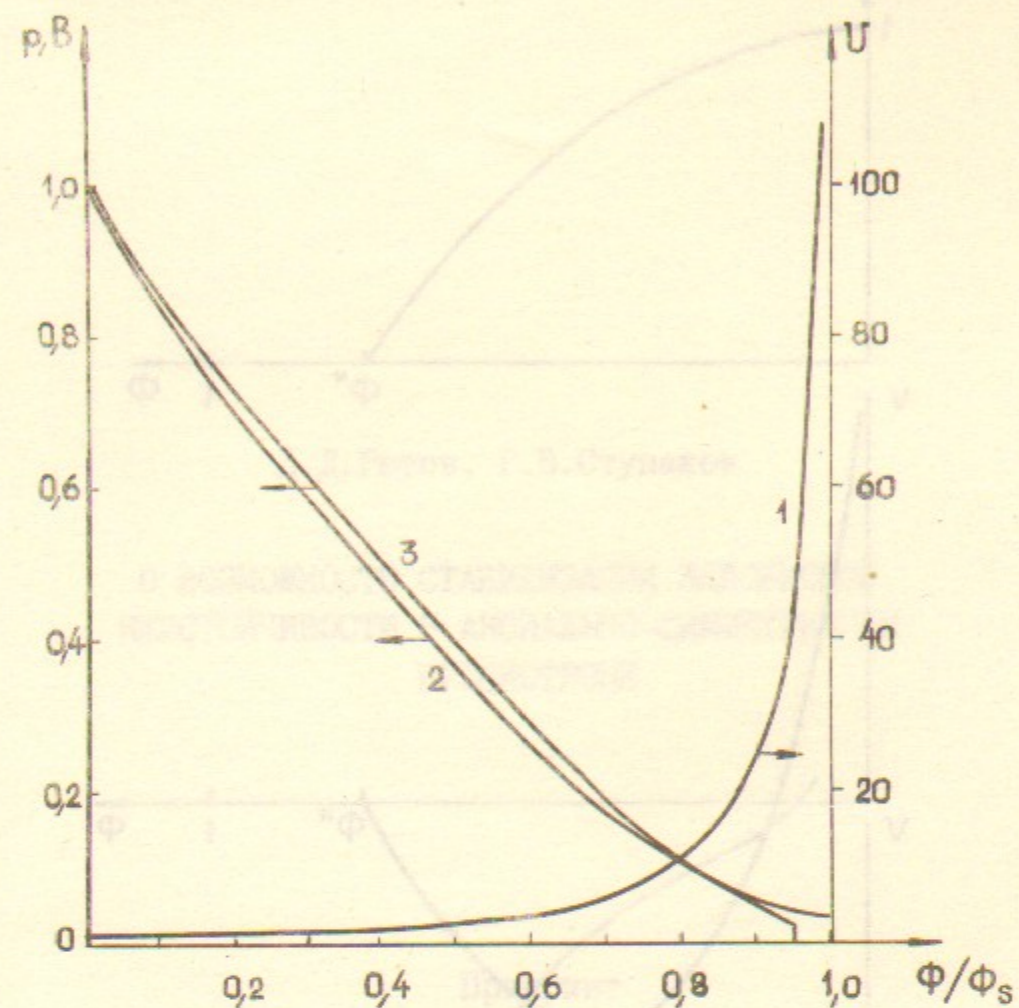


Рис.4. Графики зависимостей $U(\phi)$ (кривая 1), $B(\phi)$ (кривая 2) и $r(\phi) \propto U^{-0,87}$ (кривая 3) для поля, изображенного на рис.3. Зависимости $r(\phi)$ и $B(\phi)$ нормированы на их значения на оси ловушки, $U(\phi)$ приведена в произвольных единицах.

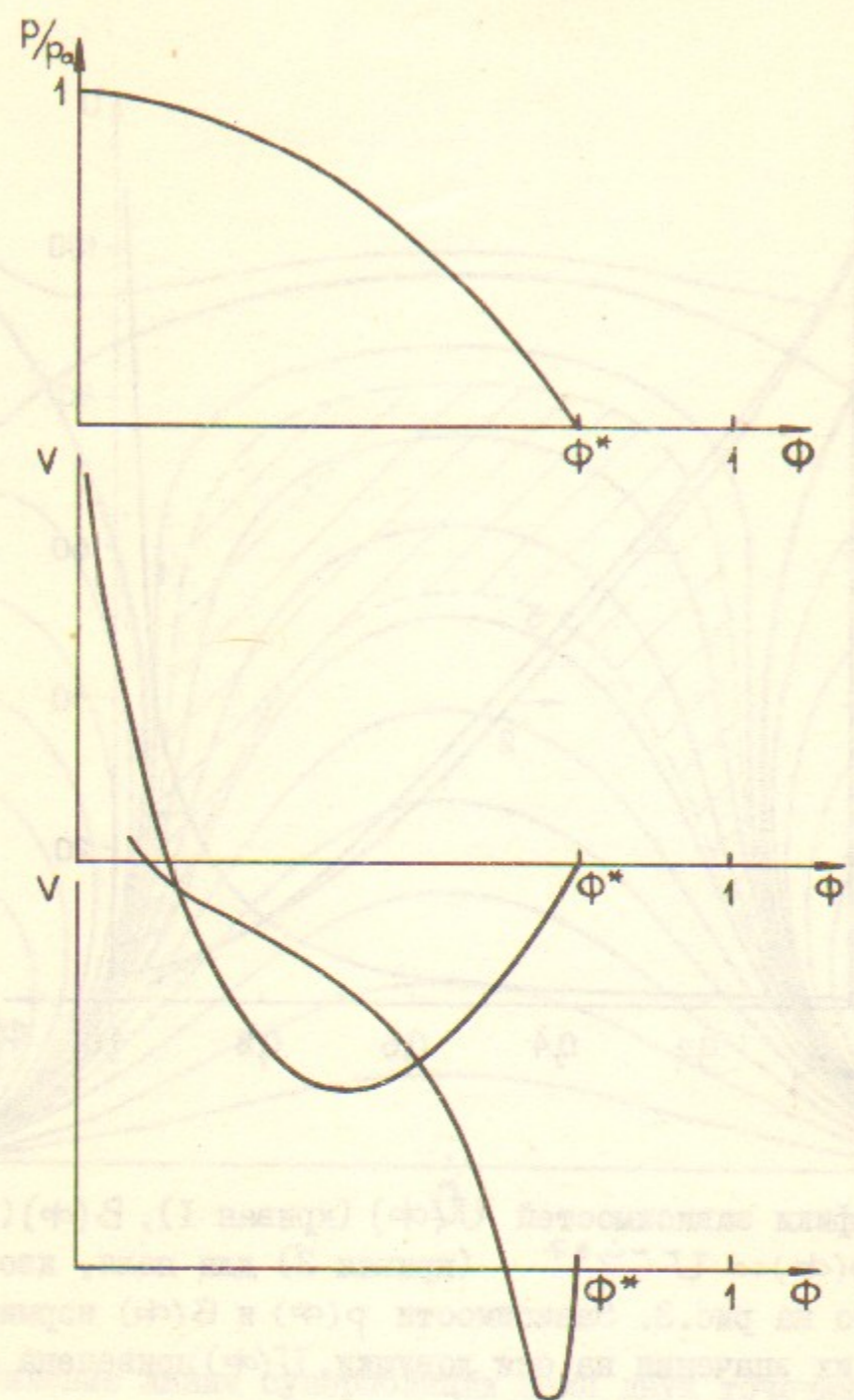


Рис.5. К вопросу об устойчивости высших мод в непараксиальном пробкотроне: а) профиль давления $p(\phi)$; подразумевается, что в присековой области $|p'/p| < \gamma U'/U$; б) форма "потенциальной энергии" $V(\phi)$ в отсутствие "кольца устойчивости" при $|\omega| \sim \Gamma$ и $m = 1$; в) форма "потенциальной энергии" при наличии четко выраженного "кольца устойчивости" при $|\omega| \sim \Gamma$ и $m = 1$.

Д.Д.Рютов, Г.В.Ступаков

О ВОЗМОЖНОСТИ СТАБИЛИЗАЦИИ ЖЕЛОБКОВОЙ
НЕУСТОЙЧИВОСТИ В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ
ПРОБКОТРОНЕ

Препринт
№ 85-146

Работа поступила - 7 мая 1985 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати 30.12.1985 г. МН 06840
Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.2,9 печ.л., 2,5 учетно-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 146.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90