



ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

18

Б.В.Чириков, Д.Л.Шепелянский

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА В  
ПРОСТЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМАХ

ПРЕПРИНТ 85-29



НОВОСИБИРСК



ЛОКАЛИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА В ПРОСТЫХ КВАНТОВЫХ  
СИСТЕМАХ

Б.В.Чириков, Д.Л.Шепелянский

А Н Н О Т А Ц И Я

Численные эксперименты с простой квантовой моделью показывают, что длина локализации динамического хаоса определяется скоростью диффузии в классическом пределе ( $\ell \approx D_{cl}$ ). Проведено исследование явления локализации вблизи критического значения параметра модели. Определены условия делокализации в случае неоднородной диффузии.

І. В в е д е н и е

Явление динамического хаоса, т.е. случайного (непредсказуемого) движения полностью детерминированной (динамической) системы классической механики к настоящему времени изучено уже весьма досконально и, в основном, понято (см., например, /1,2/). Помимо важного прикладного значения в проблеме устойчивости движения динамический хаос представляет для физики и большой принципиальный интерес, поскольку он существенно меняет наши традиционные представления о природе и механизме случайности и статистических законов, распространяя последние (при определенных дополнительных условиях) на предельно простые системы (всего 2 степени свободы для консервативной гамильтоновой системы и даже одна степень свободы в случае периодического внешнего возмущения). Для дальнейшего существенно, что источником динамического хаоса является в конечном счете непрерывность фазового пространства в классической механике, а механизм, с помощью которого эта непрерывность трансформируется в хаотичность движения связан с сильной (экспоненциальной) неустойчивостью траекторий /3/. Характерной особенностью динамического хаоса является диффузия в фазовом пространстве, а, значит и непрерывный спектр движения.

Ввиду отмеченного выше фундаментального значения динамического хаоса, возникает естественный и важный вопрос, в какой мере сохраняется это явление в более точной квантовой механике. Ответ на этот вопрос был дан Крыловым Н.С. /32/: в квантовой механике такой хаос невозможен ввиду дискретности спектра любой ограниченной в фазовом пространстве системы равно как и дискретности самого фазового пространства. Поясним, что речь идет о свободной эволюции квантовой системы (ее вектора состояния  $\Psi(t)$ ) без промежуточных измерений.

Возможно, что именно поэтому в большинстве работ по "квантовому хаосу", обзор которых дан в /1,3/, исследуются просто особенности квантового поведения при условии хаоса в классическом пределе. Однако возникает принципиальный вопрос: как совместить отсутствие хаоса в квантовой механике с принципом соответствия, который требует перехода к классической динамике, в том числе и хаотической. Этот вопрос был поставлен и решен в работе /3/.



Идея решения состоит во введении характерных временных масштабов квантовой эволюции, на которых проявляются различные свойства классического хаоса. В настоящий момент известны два таких масштаба. Первый и самый короткий из них (логарифмический)

$$\tau_s \sim \ln q \quad (1.1)$$

определяется быстрым распылением волновых пакетов вследствие экспоненциальной неустойчивости классических траекторий /3,4/. Здесь безразмерное время  $\tau$  измеряется в единицах периода движения, а  $q \propto \hbar^{-1}$  - характерный квантовый параметр задачи (в дальнейшем положим  $\hbar = 1$ ). На этом очень коротком масштабе времени квантовый волновой пакет движется, согласно теореме Эренфеста, по классической траектории и, таким образом, квантовая динамика обладает всеми свойствами классического хаоса.

Второй, значительно более длинный (степенной) и поэтому более важный масштаб времени  $\tau_d$  имеет порядок

$$\ln \tau_d \sim \ln q \quad (1.2)$$

и определяет процессы диффузии и релаксации в квантовой динамике. Этот масштаб был обнаружен в численных экспериментах /5/ и объяснен в /3/. Целью настоящей работы является более подробное изучение диффузионного масштаба  $\tau_d$ .

## 2. Модель

Как и в предыдущих работах /5-8/, мы используем модель, описываемую так называемым стандартным отображением. В классическом пределе отображение  $(I, \theta) \rightarrow (\bar{I}, \bar{\theta})$  имеет вид (в безразмерных величинах):

$$\begin{aligned} \bar{I} &= I + k \sin \theta \\ \bar{\theta} &= \theta + T \bar{I} \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $(I, \theta)$  - переменные действие-фаза,  $T$  - период отображения, а  $k$  - параметр возмущения. В квантовом случае отображение для волновой функции  $\psi \rightarrow \bar{\psi}$  принимает вид /5/:

$$\bar{\psi} = \exp\left(i \frac{T}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \exp(-ik \cos \theta) \psi \quad (2.2)$$

При этом действие квантуется ( $I = n$  - целое), а переход к классическому пределу соответствует  $k \rightarrow \infty, T \rightarrow 0$ ,

$K = kT = \text{const}$ . Последний параметр полностью определяет динамику классической модели (2.1). Квантовая динамика существенно зависит от обоих параметров отображения (2.2). На рис.1 показана грубая схема различных режимов движения этой модели. Квазиклассическая область соответствует левому верхнему квадранту. В классическом пределе в зависимости от значения параметра  $K$  существует два качественно различных режима: финитное ( $|\Delta I| \lesssim \sqrt{k/T}$ ) и инфинитное движение. Критическое значение  $K$ , разделяющее оба режима, равно  $K_{cr} = 0.9716.../9/$ . Следует отметить, что в обоих режимах существуют как регулярные, так и хаотические компоненты движения, причем мера первых стремится к нулю с ростом  $K$  /2/.

При  $K > K_{cr}$  движение в единой хаотической компоненте может быть описано как диффузия по  $I$  со скоростью (см. /10/ и § 5 ниже)

$$D_{cl} \equiv \frac{\langle (\Delta I)^2 \rangle}{\tau} \approx \begin{cases} \frac{k^2}{2} (1 + 2J_2(K)[1 + J_2(K)]); & K \geq 4.5 \\ 0.30 \frac{k^2}{K^2} (K - K_{cr})^3; & K \leq 4.5 \end{cases} \quad (2.3)$$

где  $\tau$  - число итераций отображения, а  $J_2(K)$  - функция Бесселя.

В квазиклассической области закон диффузии (2.3) сохраняется в пределах диффузионного масштаба времени (1.2), который для рассматриваемой модели, согласно /3/, имеет порядок  $\tau_d \sim D_{cl} \sim k^2$ . При  $\tau \ll \tau_d$  квантовая зависимость  $D_q$  хорошо повторяет все детали классической диффузии (рис.2), в том числе и не описываемые простым соотношением (2.3), в согласии с принципом соответствия.

При  $\tau \gg \tau_d$  квантовая диффузия останавливается и переходит в стационарные колебания /13/. На рис.3 приведены результаты наиболее длинного численного моделирования, проведенного Казати /14/. Стационарность колебаний, которая отчетливо видна на рис.3, означает дискретность спектра квазиэнергий модели (2.2) /3/.

Уже по этой причине "квантовый хаос" во всей квазиклассической области не является истинным, как в классическом пре-



деле. Мы будем называть его квазихаосом. Отметим, что отклонения от настоящего хаоса начинаются уже на гораздо меньшем масштабе  $\tau_s$  (I.I), что проявляется, в частности, в отсутствии локальной неустойчивости квантового движения при  $\tau > \tau_s$  /15/ и появлении остаточных корреляций /15,16/ (см. также /1/).

При  $T \gtrsim 1$  движение является существенно квантовым /1/. Тем не менее, квазихаос сохраняется и в этой области при дополнительном условии  $k \gtrsim 1$  (правый верхний квадрант на рис.1). Однако, его статистические свойства, в частности, скорость начальной диффузии, вообще говоря отличаются от области  $T \lesssim 1$  даже при  $k \gg 1$ . В обратном случае  $k \ll 1$  справедлива обычная квантовая теория возмущений (в отсутствие резонанса), что означает малость поправок к невозмущенным состояниям, т.е. регулярность квантовой динамики независимо от характера движения в классическом пределе. Такой механизм квантовой стабилизации классического хаоса, связанный с дискретностью квантового спектра, был рассмотрен в работе Шурыка /17/.

В случае классического нелинейного резонанса условие квантовой стабилизации принимает вид  $k/T \lesssim 1$ , что имеет следующий простой физический смысл: число уровней, захваченных в резонанс,  $\sqrt{k/T} \lesssim 1$  /17/. Если оба параметра малы ( $k \lesssim 1$ ;  $k/T \lesssim 1$ ), то все невозмущенные состояния сохраняются. Это - область глобальной применимости теории возмущений (рис.1, II). При  $k \lesssim 1$ , но  $k/T \gtrsim 1$  невозмущенные состояния сохраняются только между резонансами. Внутри резонансов невозмущенные состояния смешиваются, однако, движение остается регулярным и можно перейти к новым, резонансным, квантовым числам и соответствующим им собственным функциям квазиэнергии (рис.1, II-III). Наконец, в квазиклассической области, при  $k \gtrsim 1$  и  $k/T \gtrsim 1$  (но  $kT \lesssim 1$ ) смешивание происходит для всех невозмущенных состояний, область смешивания не превосходит ширины отдельного резонанса (рис.1, III).

Описанная выше квантовая динамика модели (2.2) имеет место только для иррациональных значений параметра  $T/4\pi$ . В случае рациональных значений  $T/4\pi$  возникает специфическое для данной модели явление квантового резонанса /18/. При этом спектр квазиэнергий становится непрерывным, а действие  $|n|$  растет пропорционально  $\tau$  ( $\tau \rightarrow \infty$ ) при любом  $k$ . Эта особенность модели связана с характером невозмущенного

спектра  $E_n = n^2/2$  и не является типичной для квантовой динамики. По этой же причине динамика модели (2.2) определяется величиной  $T$ , взятой по модулю  $4\pi$ .

### 3. Принцип квантовой локализации хаоса

Следуя /3/, рассмотрим сначала качественно механизм ограничения диффузии (рис.3) в модели (2.2). Он основан на следующих простых физических соображениях. По принципу соответствия квантовое движение в квазиклассической области должно быть в каком-то смысле близко к классическому, по крайней мере на некотором характерном масштабе времени. Это очевидно для самого короткого масштаба  $\tau_s$  (I.I), т.е. до расплывания волновых пакетов, которые движутся по классическим траекториям. При  $\tau \gg \tau_s$  квантовая динамика, конечно, не совпадает полностью с классической, однако, как показывает численное моделирование /3,5,15/, классическая диффузия в системе продолжается. Если бы диффузия была неограниченной, как в классическом пределе, то спектр квазиэнергий системы был бы непрерывным. Существенно, однако, что и в случае чисто дискретного спектра движения со средней плотностью уровней квазиэнергии  $\rho_0$  классическая диффузия может продолжаться в течении времени

$$\tau \sim \tau_d \sim \rho_0 \quad (3.1)$$

Это вытекает непосредственно из принципа неопределенности, поскольку при  $\tau \ll \rho_0$  система не разрешает ("не чувствует") дискретный характер спектра. Оценка (3.1) и определяет диффузионный масштаб времени для модели (2.2).

Конечное значение плотности  $\rho_0$  уровней квазиэнергии требует пояснения. Поскольку все уровни квазиэнергии в рассматриваемом случае определены на интервале  $2\pi$ , а их число бесконечно, то плотность всех уровней системы также бесконечна. Однако плотность  $\rho_0$  в (3.1) определяется только собственными функциями, представленными в данном состоянии системы, эффективное число которых всегда конечно.

Для оценки величины  $\rho_0$  рассмотрим вначале эволюцию одного произвольного невозмущенного состояния. Тогда вследствие классической диффузии за время  $\tau_d$  будет эффективно возбуж-



дено некоторое число соседних невозмущенных состояний  $\Delta n \sim (D_{cl} \tau_d)^{1/2}$ , где номер невозмущенного уровня  $n = 1$ . Это значит, что точные собственные функции системы являются суперпозициями нескольких ( $\sim \Delta n$ ) невозмущенных состояний. И наоборот, любое невозмущенное состояние представляется таким же числом собственных функций. Отсюда  $\rho_0 \sim \Delta n \sim \tau_d$  (3.1) и /3/:

$$\tau_d \sim D_{cl} ; \ell \sim \Delta n \sim D_{cl} \quad (3.2)$$

где  $\ell$  - эффективное число невозмущенных состояний, вовлеченных в стационарные колебания после прекращения диффузии (рис.3). Иначе можно сказать, что величина  $\ell$  определяет размер области локализации собственных функций в невозмущенном базисе (по  $n$ ). Мы будем называть  $\ell$  длиной локализации.

Замечательной особенностью соотношений (3.2) является устанавливаемая ими связь существенно квантовых характеристик движения - диффузионного масштаба  $\tau_d$  и длины локализации  $\ell$ , со скоростью диффузии  $D_{cl}$  в классическом пределе.

Оценка (3.2) для  $\tau_d$ , очевидно, не зависит от начального состояния системы, как и длина локализации собственных функций. Что же касается длины локализации  $\ell$  для стационарных колебаний, то оценка (3.2) справедлива только в том случае, когда размер начального состояния  $\ell_0 \leq \ell$ . Если же  $\ell_0 \gg \ell$ , то по порядку величины размер состояния не изменяется.

В работе /19/ была отмечена аналогия между описанной выше локализацией в импульсном пространстве (по  $n$ ) и хорошо известной локализацией Андерсона в случайном потенциале (см., например, /20/). Наиболее существенное различие между обоими явлениями связано с тем, что в рассматриваемой нами модели (2.2) нет никаких случайных параметров. Продолжая эту аналогию, можно заметить, что квантовый резонанс соответствует делокализованным блоховским состояниям в периодическом потенциале /18,19/. Отметим также, что механизм локализации в обеих системах является, вообще говоря, совершенно различным в зависимости от параметров движения. Так, для модели (2.2) при  $K \gtrsim 1$  и  $k > 1$  локализация связана с остано-

кой классической диффузии вследствие квантовых интерференционных эффектов. Если же  $K \lesssim 1$  ( $k > 1$ ), то локализация определяется квантовым туннелированием в классически недоступную область.

Вопрос о характере спектра модели (2.2) не является тривиальным. Так, в /21/ показано, что непрерывная компонента спектра может присутствовать и при некоторых специальных иррациональных  $T/4\pi$ , очень близких к рациональным числам. В этом смысле динамика неконсервативных моделей оказывается много сложнее, чем консервативных, спектр которых всегда дискретный для финитного движения. Поэтому, если рассматривать (2.2) как модель консервативной системы, которая приближенно описывается в классическом пределе с помощью отображения, то указанные выше трудности отпадают.

#### 4. Квантовая локализация при однородной диффузии

В дальнейшем мы будем рассматривать квантовую локализацию, связанную только с прекращением классической диффузии, т.е. для модели (2.2) мы будем предполагать, что  $K > K_{cr}$  и  $k \gg 1$ . Рассмотрим вначале более простой случай однородной (по  $n$ ) диффузии при  $K \gg 1$ . В этом случае можно также практически пренебречь устойчивой компонентой движения /22/. Для уточнения оценки (3.2) нужно прежде всего определить более аккуратно диффузионный масштаб  $\tau_d$  и/или длину локализации  $\ell$ . Как выяснилось, наиболее удобно это сделать именно для величины  $\ell$ , поскольку закон локализации собственных функций, предсказанный в /23/ по аналогии с локализацией Андерсона, можно приближенно представить в виде следующего простого выражения:

$$\varphi_m(n) = \frac{a_{mn}}{\sqrt{\ell}} e^{-|n-m|/\ell} \quad (4.1)$$

Здесь комплексные амплитуды  $a_{mn}$  являются случайными величинами с  $\langle a_{mn} \rangle = 0$  и  $\langle |a_{mn}|^2 \rangle = 1$ . В силу условий нормировки и ортогональности  $\varphi_m$  величины  $a_{mn}$  не могут быть полностью статистически независимыми, однако, при  $\ell \gg 1$  их корреляции малы /24/ и мы будем ими пренебрегать.

В силу сохранения пространственной четности в модели (2.2) собственные функции должны быть симметричными или ан-



тисимметричными по  $n$ . Этому условию можно удовлетворить, выбрав  $\varphi_m$  в виде ( $m \geq 0$ ):

$$\varphi_m(n) = \frac{a_{m,n}^{(\pm)}}{\sqrt{2l}} e^{-\frac{|n-m|}{l}} \pm \frac{a_{m,-n}^{(\pm)}}{\sqrt{2l}} e^{-\frac{|n+m|}{l}} \quad (4.2)$$

Учитывая статистическую независимость амплитуд  $a_{m,n}$  (в том числе и для пар  $a_{m,n}, a_{m,-n}$ ), получим, что в среднем

$$|\varphi_m(n)|^2 \approx \frac{1}{2l} \left[ e^{-\frac{2|n-m|}{l}} + e^{-\frac{2|n+m|}{l}} \right] \quad (4.3)$$

Пример собственных функций, полученных Израйлевым /25/, приведен на рис.4.

Пусть в начальный момент времени система (2.2) находится в основном состоянии ( $n = 0$ ). Тогда волновая функция  $\psi(n, \tau)$  имеет вид

$$\psi(n, \tau) = \sum_m \varphi_m^*(0) \varphi_m(n) e^{-i\varepsilon_m \tau} \quad (4.4)$$

где  $\varepsilon_m$  - значения квазиэнергии.

Стационарные колебания, устанавливающиеся при  $\tau \gg \tau_d$ , характеризуются усредненным по времени распределением

$$\bar{f}(n) = \overline{|\psi(n, \tau)|^2} = \sum_m |\varphi_m(0)|^2 |\varphi_m(n)|^2 \quad (4.5)$$

Из (4.3) находим

$$\bar{f}(n) = \frac{1}{2l} e^{-\frac{2|n|}{l}} \left( 1 + \frac{2|n|}{l} \right) \quad (4.6)$$

Средняя энергия стационарных колебаний равна

$$\bar{E} = \sum_n \frac{n^2}{2} \bar{f}(n) = \frac{l^2}{2} \quad (4.7)$$

В большинстве численных экспериментов, описываемых ниже, использовалось именно такое начальное состояние. Очевидно,

что соотношения (4.6) и (4.7) останутся справедливыми и в том случае, когда начальное состояние локализовано вблизи  $n = 0$  на длине много меньшей  $l$ .

Отметим, что если начальное состояние соответствует  $n \approx n_0 \gg l$ , то в силу симметрии собственных функций стационарное распределение (4.5) будет иметь два максимума:

$$\bar{f}(n) = \frac{1}{4l} \left\{ \left( 1 + \frac{2|n-n_0|}{l} \right) e^{-\frac{2|n-n_0|}{l}} + \left( 1 + \frac{2|n+n_0|}{l} \right) e^{-\frac{2|n+n_0|}{l}} \right\} \quad (4.8)$$

а время установления этого стационара оказывается экспоненциально большим ( $\sim \exp(2n_0/l) \gg \tau_d$ ). При этом вначале, за время  $\sim \tau_d$ , образуется квазистационарное распределение, соответствующее первому слагаемому в (4.8), которое затем медленно переходит в стационарное распределение (4.8).

Длину локализации  $l$  можно определять из численных экспериментов двумя путями: 1) из стационарного распределения, используя соотношение (4.6) и 2) из средней энергии стационарных колебаний по формуле (4.7). Согласно оценке (3.2) отношение  $\alpha = l/D_{cl}$  не должно зависеть от параметров модели (2.2). Вместо  $D_{cl}$  (2.3) удобно ввести скорость диффузии  $D_0$  в классической модели

$$\bar{p} = p + K \sin \theta; \quad \bar{\theta} = \theta + \bar{p} \quad (4.9)$$

которая измерялась в ряде работ /10,11,22,26/. Из сравнения (2.1) и (4.9) имеем:

$$D_{cl} = \frac{D_0}{T^2}; \quad l T^2 = \alpha D_0 \quad (4.10)$$

На рис.5 приведены полученные нами численные данные для зависимости  $l T^2$  от  $D_0$  в двойном логарифмическом масштабе. Видно, что в диапазоне, охватывающем почти 4 порядка, ожидаемая зависимость (4.10) действительно выполняется, причем среднее значение  $\langle \alpha \rangle = 1.04 \pm 0.03$  очень близко к единице. Значения  $l$  получены из подгонки численных данных для  $\bar{f}(n)$  с помощью соотношения (4.6). Квантовый параметр возмущения  $k$  изменялся в интервале  $5 \pm 120$ ;  $T \leq 1$ ,



а длина локализации  $\ell = 9 \div 180$ .

Фактически, как видно из рис.5, закон локализации (4.10) остается справедливым и в области  $K \sim 1$ , где классическая диффузия становится существенно неоднородной и появляются большие области устойчивого движения. Более подробно этот вопрос будет рассмотрен ниже в §5. Отметим, что в диапазоне значений  $K$  на рис.5 зависимость  $D_0(K)$  является очень сложной (см.(2.3) и (5.1)).

Значительные флуктуации  $\ell$  на рис.5 связаны главным образом с тем, что при не слишком большом квантовом параметре  $k$  (из-за технических ограничений) начальная скорость квантовой диффузии  $D_q$  может существенно отличаться от классической  $D_{cl}$ . Действительно, переход от  $D_{cl}$  к  $D_q$  значительно уменьшает флуктуации отношения  $\alpha = \ell / D_q$  (рис.6). Средние значения  $\alpha$ , полученные двумя методами, совпадают в пределах статистических ошибок между собой и со значением  $\alpha = 1$ , которое мы и примем в дальнейшем. Остающийся разброс точек на рис.6 объясняется в значительной степени трудностью измерения величины  $D_q$  при малых  $\tau_d$ . Отметим, что данные на рис.6 включают и случаи со значениями  $T$  в интервале  $1 \div 5$  ( $k > 5$ ). Это показывает, что закон квантовой локализации  $\ell \approx D_q$  распространяется и на существенно квантовую область  $T > 1$  (см.рис.1).

Пример стационарного распределения показан на рис.7 для  $k = 10$ ;  $T = 0,5$ ;  $K = 5$ . В пределах статистических флуктуаций закон (4.6) выполняется в огромном диапазоне, охватывающем около 10 порядков изменения  $\bar{f}_N$ . Природа обычно присутствующей крупной структуры  $\bar{f}_N(x)$  остается невыясненной.

### 5. Квантовая локализация в критической области ( $\Delta K \rightarrow 0$ )

При  $K \rightarrow K_{cr}$  скорость классической диффузии в модели (4.9) резко падает вследствие образования специфической критической структуры [9,27]. Согласно [27]  $D_0 \propto (\Delta K)^3$  ( $\Delta K = K - K_{cr}$ ). Этот закон согласуется со старыми измерениями  $D_0$  [22] и был более аккуратно проверен нами в интервале  $K = 1.1 \div 2.8$ , где скорость диффузии можно описать следующей эмпирической формулой (см.вставку на рис.5):

$$D_0 \approx 0.30(\Delta K)^3 \quad (5.1)$$

Аналогичные результаты были получены недавно в [26].

Ввиду малой скорости диффузии в этой области измерять начальную скорость квантовой диффузии  $D_q$  не удастся. Поэтому длина локализации, полученная из стационарного распределения, сравнивалась со скоростью классической диффузии, что приводило, в частности к дополнительному разбросу точек на рис.5.

Выражение (5.1) дает среднюю скорость диффузии за время много большее времени перехода между соседними целыми резонансами ( $\approx 130(\Delta K)^{-3}$ ). Локальная скорость диффузии в этой области становится резко неоднородной, опять таки за счет образования критической структуры. Тем не менее, закон квантовой локализации (4.10) удовлетворительно выполняется и в этой области при дополнительном условии, что квантовый параметр  $k$  достаточно большой. В противном случае характер стационарного распределения резко изменяется (рис.8). Здесь неоднородность диффузии приводит к немонотонному изменению  $f(n)$ . Ясно видны 4 целых резонанса, которые соответствуют "плато"  $f(n)$ . Самое нижнее плато определяется ошибками округления при счете. Плато внутри резонансов образуются за счет быстрых колебаний по  $n$ . Между резонансами, в областях критической структуры, скорость диффузии, а вместе с ней и длина локализации резко уменьшается, что и приводит к быстрому падению  $f(n)$ . Будем называть этот случай неоднородной локализацией. Эмпирические значения  $k = k_{cr}$  для границы такой локализации, определенные визуально по виду стационарного распределения, приведены в таблице.

Теоретическую оценку для  $k_{cr}$  можно получить следующим образом. Используя метод, описанный в §3, можно представить длину локализации в виде

$$\ell^2 \sim k^2 + \frac{D_0}{\pi^2} \tau_d \sim \tau_d^2 \quad (5.2)$$

Здесь член  $k^2$  характеризует вклад первого периода возмущения (для начального состояния  $n = 0$ ), который является существенным при  $D_0 \rightarrow 0 (K \rightarrow K_{cr})$ . Из (5.2) видно, что воз-



можно два различных режима квантовой локализации в зависимости от соотношения обоих слагаемых. Если  $k^2 \ll D_0 \tau_d / \tau^2$ , т.е. вкладом первого периода возмущения можно пренебречь, то

$l \sim D_0 / \tau^2$ , и мы возвращаемся к прежнему выражению (4.10). Это - режим быстрой диффузии, которая приводит к гладкому стационарному распределению (рис.7). Этот режим сохраняется и при  $K \rightarrow K_{cr}$ , если только квантовый параметр  $k$  достаточно велик (5.3).

В обратном предельном случае  $D_0 \tau_d / \tau^2 \ll k^2$  медленной диффузии локализация становится неоднородной (рис.8). Граница между этими режимами дается оценкой  $k^2 \sim D_0 \tau_d / \tau^2$  (см.(5.2)), или

$$\frac{D_0 k_{cr}}{k^2} \approx 1 \quad (5.3)$$

где численное значение параметра неоднородности взято из данных таблицы. Расхождения в значениях этого параметра, связанные отчасти с трудностью визуального определения границы, не следует считать слишком большими, учитывая, что скорость диффузии  $D_0$  изменяется почти в 40 раз. Возможно, что систематическое уменьшение параметра неоднородности с  $K$  связано с недостаточно малыми значениями  $\Delta K > 0.33$ .

Границе (5.3) можно придать следующий физический смысл. Выразим критическую длину локализации на границе  $l_{cr} \sim k_{cr}$  в единицах периода отображения (2.1) по  $I = n$ , который равен  $2\pi / \tau$ . Тогда

$$\frac{l'_{cr}}{k} \approx \frac{1}{2\pi}; \quad l' = \frac{l\tau}{2\pi} \quad (5.4)$$

Таким образом, при  $K \rightarrow K_{cr}$  однородная локализация переходит в неоднородную, когда ее длина становится достаточно малой по сравнению с периодом резонансной структуры.

Наконец, можно связать границу (5.3) с характеристиками критической структуры при  $K \rightarrow K_{cr}$ . Простая резонансная теория такой структуры описана в /28/. Согласно этой теории надкритическое возмущение  $\varepsilon = \Delta K > 0$  разрушает все мелкие масштабы критической структуры вплоть до масшта-

ба с характерным временем движения

$$\tau_\varepsilon \sim \varepsilon^{-1} \quad (5.5)$$

Тогда из (5.3) находим

$$\tau_\varepsilon \sim k_{cr}^{1/3} \quad (5.6)$$

где мы использовали оценку  $D_0 \sim \varepsilon^3$  (5.1) и положили  $K \approx 1$ .

Если вместо квантового параметра  $k$  использовать  $\hbar$ , понимая переход к классическому пределу как  $\hbar \rightarrow 0$ , то оценка (5.6) принимает вид  $\tau_\varepsilon \sim \hbar^{-1/3}$  и формально совпадает с результатом работы /29/, полученным другим методом. Однако, интерпретация этого результата у нас совершенно иная. Во-первых, в /29/ время  $\hbar^{-1/3}$  никак не связано с величиной возмущения  $\varepsilon$ . Во-вторых, авторы /29/ понимают его как диффузионный масштаб  $\tau_d$ . На самом деле, однако, последний много больше (см.(5.2)):  $\tau_d \sim k_{cr} \sim \hbar^{-1} \gg \tau_\varepsilon \sim k_{cr}^{1/3}$  ( $k_{cr} \gg 1$ ).

## 6. Делокализация

Если в процессе диффузии ее скорость изменяется, то это может существенно повлиять на характер квантовой локализации. В частности, возможна делокализация, когда квантовая диффузия продолжается неограниченно долго. Это явление было исследовано в работе /3/ на модели (2.2), в которой параметр  $k(\tau)$  явно зависел от времени. В случае степенной зависимости  $k = k_1 \tau^\alpha$  ( $k_1 > 1$ ) делокализация наступает при  $\alpha \geq 1/2$ .

Ниже мы рассмотрим пример неоднородной по  $n$  диффузии, приняв

$$D_{cl}(n) = D_1 n^\beta \quad (6.1)$$

Если  $\beta$  достаточно велико, т.е. скорость диффузии быстро растет с  $n$ , то число невозмущенных состояний ( $\Delta n$ ), связанных диффузией к некоторому моменту времени  $\tau$  будет расти быстрее  $\tau$ . Поскольку число собственных состояний квазиэнергии и их плотность  $\rho_0 \approx \Delta n \sim \tau$ , то равенст-



во (3.1) не достигается и локализации не происходит. Это и определяет условия делокализации.

Пусть начальное  $n = n_0 \sim 1$ . Тогда из уравнения диффузии  $\frac{d}{dt} \langle (\Delta n)^2 \rangle \sim \frac{d}{dt} n^2 \sim D_1 n^\beta$  получаем оценку  $D_1 \tau \sim n^{2-\beta} < D_1 n$ . Последнее неравенство и дает границу делокализации:  $\beta \geq 1$ ;  $D_1 \geq 1$ . Последнее условие эквивалентно требованию, чтобы  $k \sim \sqrt{D_1} \geq 1$  при любом  $\tau$  (граница Шуряка, см. § 2). Отметим, что ограничение  $\beta \geq 1$  в точности совпадает с упомянутым выше условием  $\alpha \geq 1/2$  при явной зависимости скорости диффузии от времени.

Если начальное  $n_0 \gg 1$ , то локализация возможна и при  $\beta > 1$ , когда длина однородной локализации (3.2) с  $D_{cl} = D_{cl}(n_0) < n_0$ . Отсюда условие делокализации /30/

$$D_1 \geq n_0^{1-\beta} \ll 1 \quad (6.2)$$

В противном случае система "не почувствует" роста  $D_{cl}$  с  $n$ . При  $n_0 \sim 1$  условие (6.2) переходит в  $D_1 \geq 1$  (см. выше).

Описанный механизм делокализации рассматривался в задаче о возбуждении атома водорода монохроматическим электрическим полем /30/.

До сих пор мы рассматривали явление квантовой локализации в одномерных моделях. Однако, как показали исследования, проведенные в работах /15,30,31/, при увеличении числа степеней свободы делокализация возможна, при определенных условиях, и в случае однородной диффузии. Оценка границы делокализации по-прежнему получается из соотношения (3.1), в котором, однако, надо учесть, что в многомерном случае число возбуждаемых уровней (а следовательно и плотность состояний  $\rho_0$ ) больше, чем в одномерном. Такое явление многомерной делокализации для атома водорода в переменном электрическом поле рассматривалось в работах /30,31/. Для одномерного случая похожая делокализация происходит при воздействии возмущения с несоизмеримыми частотами. Оценки длины локализации и условия делокализации для такого возмущения были получены в /15/.

## 7. Заключение

Исследование простой модели (2.2) позволило установить закон квантовой локализации динамического хаоса в квазиклассической области. В случае однородной диффузии под действием внешнего периодического возмущения этот закон принимает особенно простой вид (4.10) с  $\alpha \approx 1$ . Это тем более удивительно, что отдельные собственные функции квазиэнергии являются довольно сложными и нерегулярными (рис.4) и лишь весьма приближенно описываются упрощенным выражением (4.2). Закон (4.10) является, по существу, статистическим и описывает среднюю характеристику (длину локализации) стационарного распределения. Разносторонняя проверка этого закона, описанная выше, подтверждает и общий принцип квантовой локализации динамического хаоса, выраженный соотношением (3.1). Это позволяет получать эффективные оценки условий и размера квантовой локализации и в других, более сложных системах. Примером может служить возбуждение атома водорода переменным СВЧ полем, исследованное численно в /30/. Результаты этой работы подтверждают, в частности, и принцип квантовой локализации. Этот принцип был использован в /7/ (вторая работа) для оценки влияния внешнего шума на квантовую диффузию и также подтвержден численным моделированием. Отметим, наконец, что в консервативных системах таким путем можно получать условия эргодичности собственных функций.

Пользуемся случаем выразить искреннюю признательность Ф.М.Израйлеву и Дж.Казати за интересные обсуждения, а также С.Фишману за предоставленную возможность ознакомиться с работами /26,29/ до их опубликования.



## Л и т е р а т у р а

- I. Г.М.Заславский. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.
2. А.Лихтенберг, М.Либерман. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
3. B.V.Chirikov, F.M.Izrailev, D.L.Shepelyansky. Sov. Sci. Rev. 2C (1981) 209.
4. G.P.Berman, G.M.Zaslavsky. Physica 91A (1978) 450.
5. G.Casati, B.V.Chirikov, J.Ford, F.M.Izrailev. Lecture Notes in Physics 93 (1979) 334.
6. T.Hogg, B.A.Huberman. Phys. Rev. Lett. 48 (1982) 711.
7. J.D.Hanson, E.Ott, T.M.Antonsen. Phys. Rev. 29A (1984) 819; Phys. Rev. Lett. 53 (1984) 2187.
8. B.Dorizzi, B.Grammaticos, Y.Pomeau. J. of Stat. Phys. 37 (1984) 93.
9. J.M.Greene. J. Math. Phys. 20 (1979) 1183.
10. A.B.Rechester, M.N.Rosenbluth, R.B.White. Phys. Rev. 23A (1981) 2664.
11. A.B.Rechester, R.B.White. Phys. Rev. Lett. 44 (1980) 1586.
12. Д.Л.Шепелянский. Автореферат диссертации. Новосибирск, 1981.
13. Б.В.Чириков. УФН, 139 (1983) 360.
14. G.Casati. Private communication (1984).
15. D.L.Shepelyansky. Physica 8D (1983) 208.
16. Д.Л.Шепелянский. ТМФ 49 (1981) 117.
17. Э.В.Шуряк. ЖЭТФ 71 (1976) 2039.
18. Ф.М.Израйлев, Д.Л.Шепелянский. ТМФ 43 (1980) 417.
19. S.Fishman, D.R.Grempel, R.E.Prange. Phys. Rev. 29A (1984) 1639.
20. И.М.Лифшиц, С.А.Гредескул, Л.А.Пастур. Введение в теорию неупорядоченных систем. "Наука", М., 1982.
21. G.Casati, I.Guarneri. "Non Recurrent Behaviour in Quantum Dynamics", Comm. Math. Phys. (to appear).
22. B.V.Chirikov. Phys. Rep. 52 (1979) 263.
23. S.Fishman, D.R.Grempel, R.E.Prange. Phys. Rev. Lett. 49 (1982) 509.
24. T.A.Brody et al. Rev. Mod. Phys. 53 (1981) 385.
25. Ф.М.Израйлев. Препринт ИЯФ СО АН СССР 84-63, Новосибирск, 1984.
26. I.Dana, S.Fishman. "Diffusion in the Standard Map", (1984) unpublished.
27. R.S.MacKay, J.D.Meiss, I.C.Percival. Physica D, 13 (1984) 55.
28. B.V.Chirikov, D.L.Shepelyansky. Physica 13D (1984) 395; B.V.Chirikov. Proc. Int. Conf. on Plasma Physics, Lausanne, 1984, Vol. 2, p. 761.
29. S.Fishman, D.R.Grempel, R.E.Prange. Phys. Rev. Lett. 53 (1984) 1212.
30. G.Casati, B.V.Chirikov, D.L.Shepelyansky. Phys. Rev. Lett. 53 (1984) 2525.
31. D.L.Shepelyansky. Proc. Int. Conf. on Quantum Chaos, Como 1983 (Plenum, 1984, p. 187).
32. Н.С.Крылов. Работы по обоснованию статистической физики. М.: АН СССР, 1950.



Т а б л и ц а  
Граница неоднородной локализации

$K$	$D_0$	$k_{cr}$	$D_0 k_{cr} / K^2$
2.0	0.36	15	1.35
1.5	0.047	40	0.84
1.3	0.010	100	0.59

Подписи к рисункам

- Рис.1. Схема различных режимов модели (2.2): I - квантовый квазихаос; II - квантовая теория возмущений; III - изолированные нелинейные резонансы. Область квазиклассики соответствует  $k \gg 1$ ;  $T \ll 1$ .
- Рис.2. Зависимость скорости диффузии от параметра стандартного отображения  $K$ :  $D_{cl} = k^2/2$  - квазилинейный коэффициент диффузии;  $0$  - классическая модель (2.1), численные данные /II/; сплошная кривая - теория (2.3) /I0/;  $X$  - квантовая модель (2.2), численные данные /I2/,  $k \approx 40$ .
- Рис.3. Зависимость энергии  $E$  модели (2.2) от времени (числа итераций)  $\tau$  для  $k = 10$ ;  $K = 5$ . В начальном состоянии  $E = 0$ . Среднее значение энергии стационарных колебаний  $\bar{E} = 580$  показано пунктирной прямой. Средняя скорость роста энергии (нестационарность колебаний)  $2 \langle \dot{E} \rangle \lesssim 10^{-4}$ .
- Рис.4. Пример собственных функций для модели (2.2):  $k = 6$ ;  $T = 0.5$ ;  $K = 3$ .
- Рис.5. Зависимость длины квантовой локализации  $l$  для модели (2.2) от скорости диффузии в классическом пределе  $D_0$  (модель (4.9)): кружки - численные данные; прямая - подгонка зависимости (4.10),  $\alpha = 1.04$ . Вставка: численные данные для зависимости  $D_0(\Delta K)$   $\Delta K = K - K_{cr}$ ;  $K_{cr} = 0.9716 \dots$ . Логарифмы десятичные.
- Рис.6. Отношение  $\alpha = l/D_0$  для разных значений начальной скорости квантовой диффузии  $D_0$ : кружки - значения  $l$  получены из (4.6),  $\langle \alpha \rangle = 1.05 \pm 0.06$  (верхняя пунктирная прямая); точки - то же из (4.7),  $\langle \alpha \rangle = 0.92 \pm 0.04$  (нижняя пунктирная прямая).
- Рис.7. Пример стационарного распределения для  $k = 10$ ,  $T = 0.5$ ,  $K = 5$ :  $x = 2n/l$ ;  $f_N = f(n) 2l/(1+x)$ . Прямая:  $f_N = e^{-x}$ .
- Рис.8. Пример неоднородной локализации:  $K = 1.5$ ;  $\Delta K = 0.528$ ;  $k = 10$ . Период резонансной структуры по  $n$  равен  $2\pi/\pi \approx 42$ .



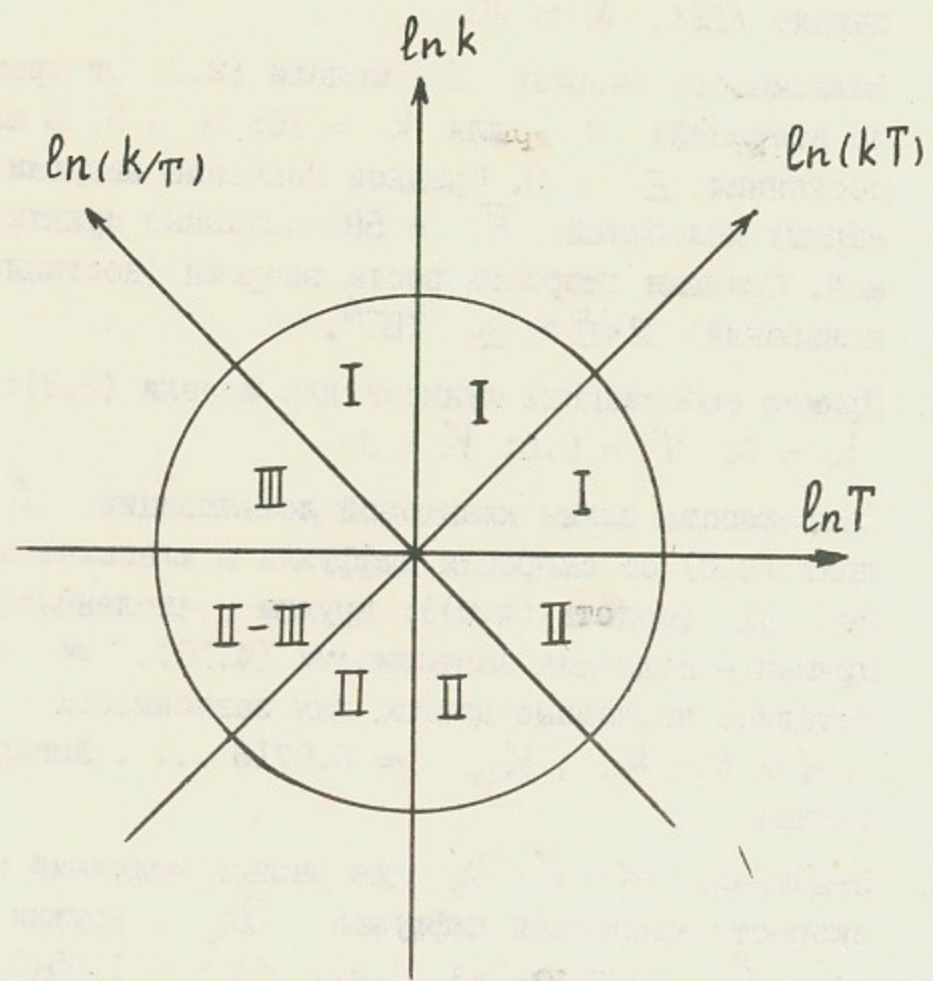


Рис. 1.

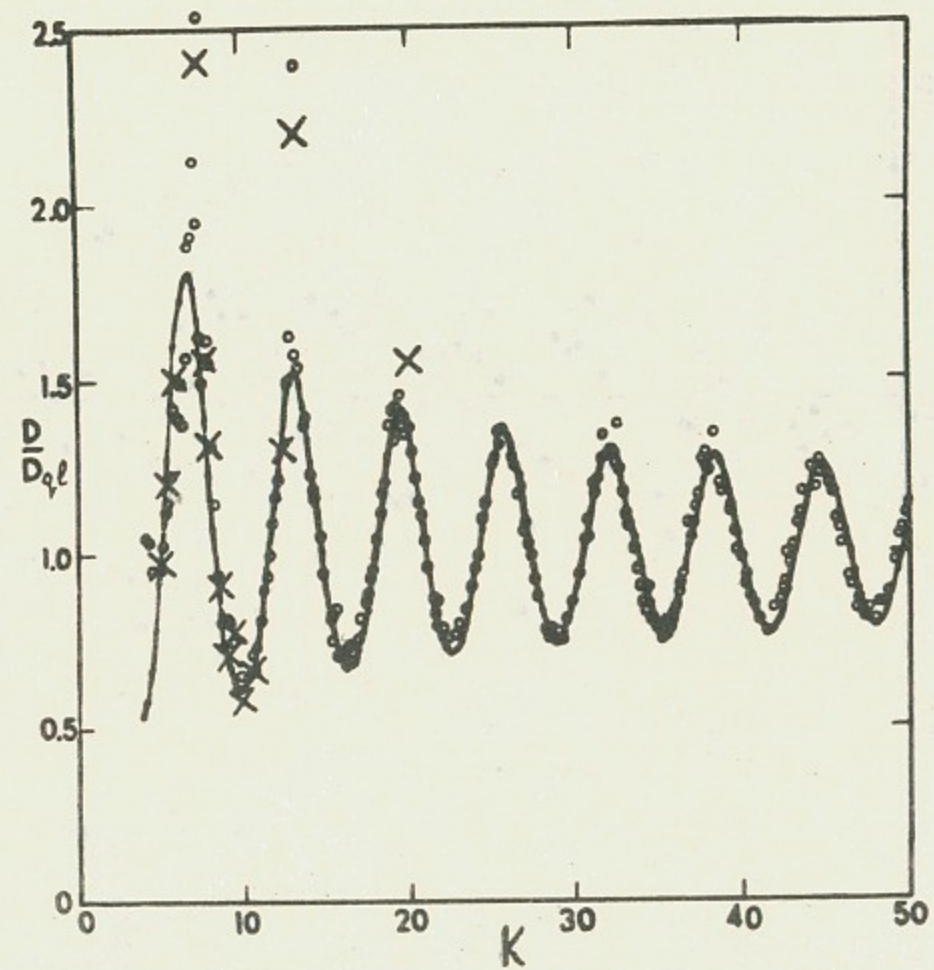


Рис. 2.



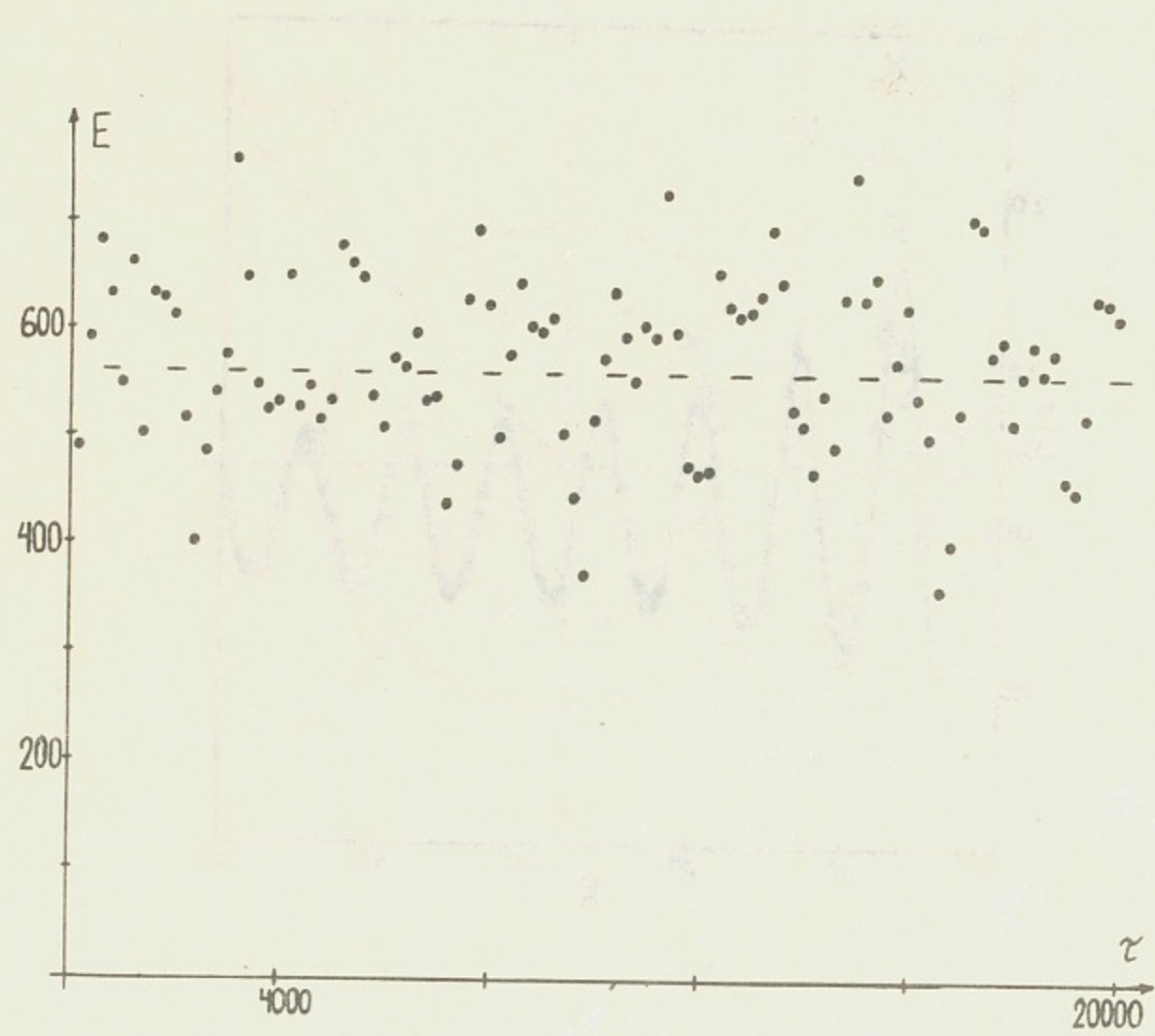


Рис. 3.

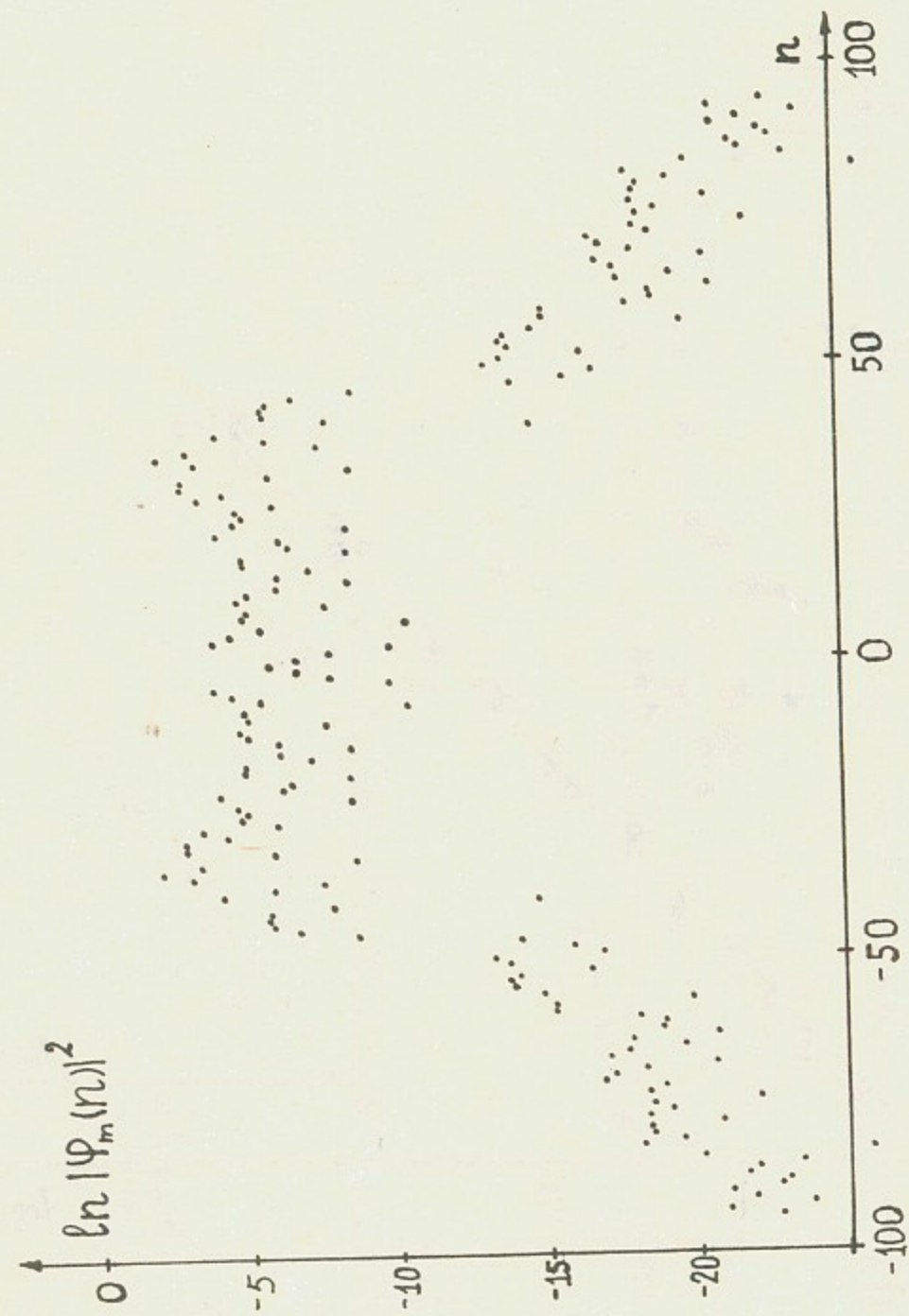


Рис. 4.



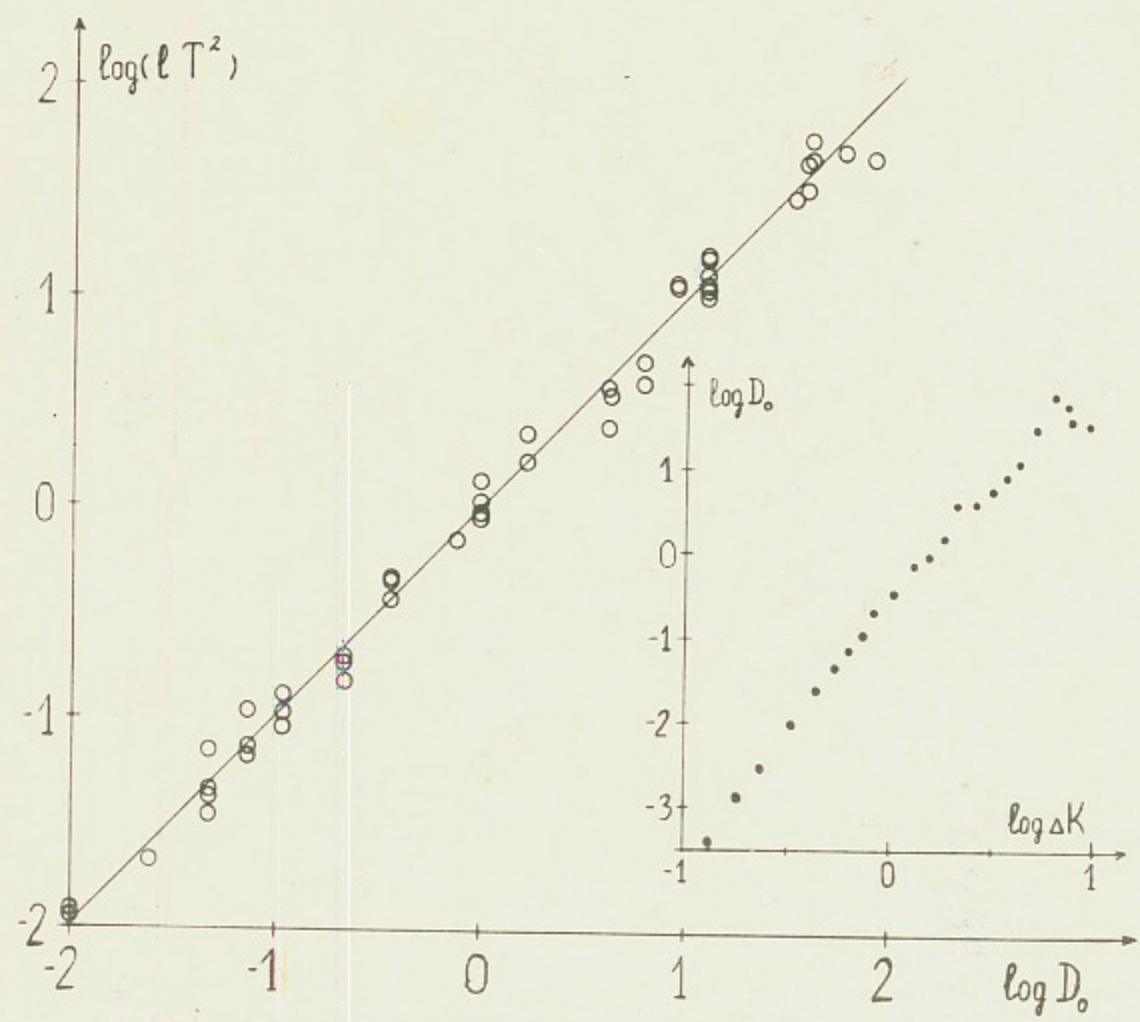


Рис. 5.



Рис. 6.





Рис. 7.

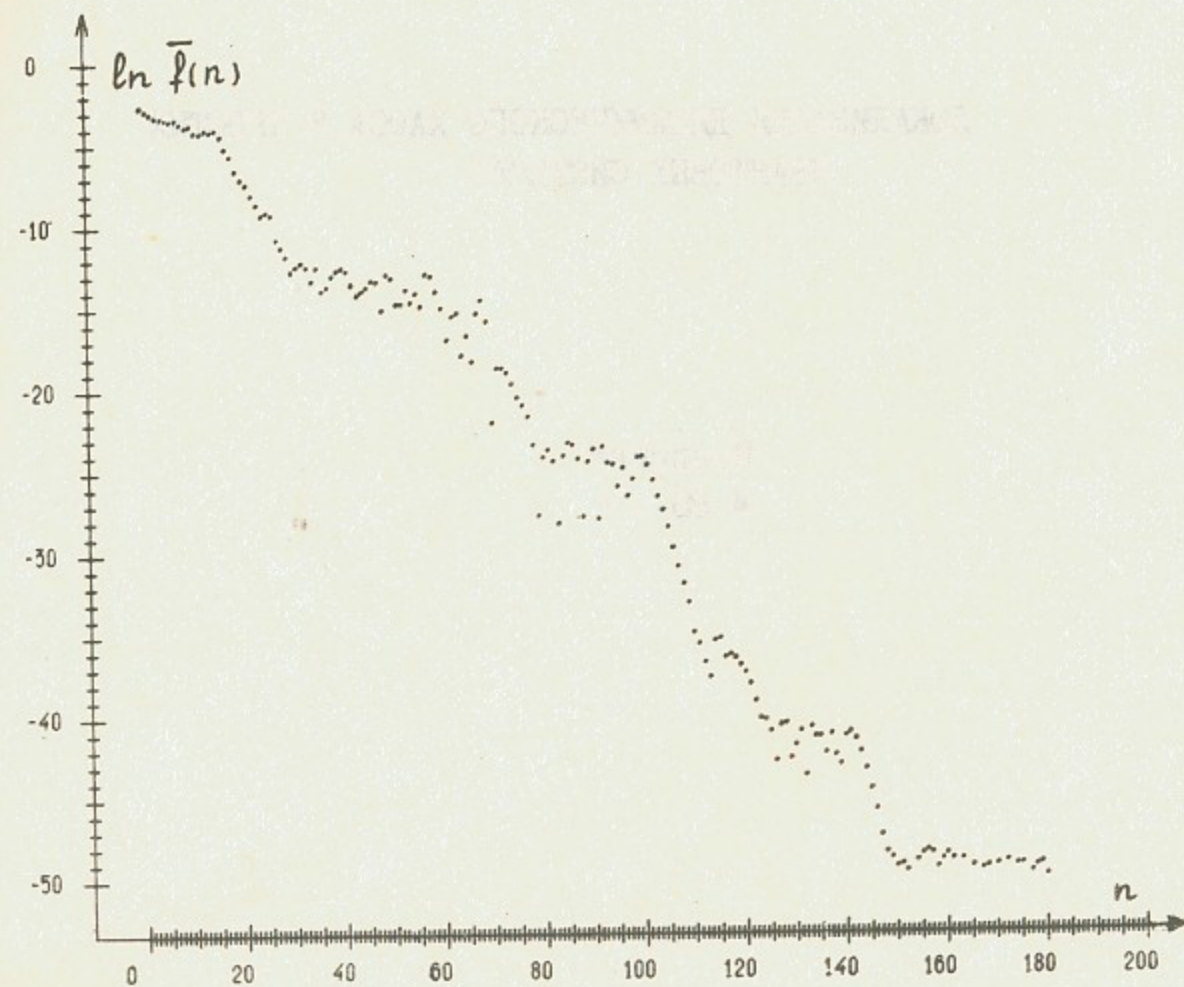


Рис. 8.



Б.В.Чириков, Д.Л.Шепелянский

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА В ПРОСТЫХ  
КВАНТОВЫХ СИСТЕМАХ

Препринт  
№ 85-29

Работа поступила - 28 февраля 1985 г.

---

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов  
Подписано к печати 12.03-1985 г. МН 06575  
Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.2,0 печ.л., 1,6 учетно-изд.л.  
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 29.

---

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90