



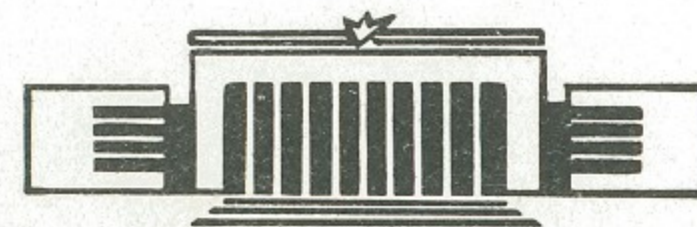
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

20

В.В.Соколов

**ИНТЕГРАЛ КВАЗИЭНЕРГИЙ
КАНОНИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ**

ПРЕПРИНТ 85-31



НОВОСИБИРСК

В.В.Соколов

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассматриваются канонические /сохраняющие площадь/ отображения фазовой плоскости переменных действие-угол, коэффициенты которых не зависят явным образом от номера отображения. Подобно тому, как отсутствие явной зависимости от времени коэффициентов канонической системы дифференциальных уравнений приводит к сохранению энергии, изучаемые отображения могут иметь интеграл движения - интеграл квазиэнергий. В статье показано, как такой интеграл можно построить в виде ряда аналитических функций, ряда теории возмущений и ускоренно сходящегося ряда теории КАМ. Полученные ряды сходятся лишь в ограниченных областях фазовой плоскости, а их суммы имеют простые полюсы в неподвижных /резонансных/ точках отображения. При достаточно малой константе возмущения g оказывается возможным найти приближенные регулярные выражения для интеграла квазиэнергии вблизи любого заданного резонанса с любой конечной точностью по g . Области применимости полученных выражений перекрываются между собой, что позволяет построить при малых g приближенный фазовый портрет отображения на всей фазовой плоскости.

Предлагаемый метод легко обобщается на квантовые отображения.

І. В В Е Д Е Н И Е

Интегрируемость механических систем тесно связана с существованием достаточного количества независимых аналитических /глобальных/ интегралов движения (см., например, (1), стр.234). Интегрируемые системы представляют собой, однако, специальный и довольно узкий класс механических систем. В большинстве случаев глобальные интегралы (кроме тех, что обусловлены симметриями системы) отсутствуют, а движение носит нерегулярный, стохастический характер (2-5).

Среди неинтегрируемых систем особое внимание, начиная с классических работ А.Пуанкаре, привлекают системы, близкие к интегрируемым. В этом случае функция Гамильтона является суммой интегрируемой H_0 и неинтегрируемой gV (возмущение) частей. Фазовое пространство таких систем состоит из причудливо переплетающихся между собой областей регулярного и хаотического движения, причем размеры этих областей контролируются величиной константы возмущения g . Хотя глобальные интегралы движения в таких случаях отсутствуют, в областях регулярного движения существуют локальные интегралы.

Многие особенности неинтегрируемых систем подобного рода проявляются уже у простейших систем с одной степенью свободы, описываемых двумерными каноническими отображениями в фазовом пространстве (2-5).

$$(I) \begin{cases} \theta_{T+1} = \theta_T + \omega_0(I_{T+1}) + gG(I_{T+1}, \theta_T) \\ I_{T+1} = I_T + gF(I_{T+1}, \theta_T) \end{cases} \quad \frac{\partial G}{\partial \theta_T} = -\frac{\partial F}{\partial I_{T+1}}$$

(I_T, θ_T - переменные действие-угол невозмущенной системы, $T = 0, 1, 2, \dots$). За последние 10-15 лет изучению таких отображений было посвящено значительное количество работ. К ним приводятся, в частности, с помощью метода сечений Пуанкаре задачи о движении консервативных систем с двумя степенями свободы. Они возникают также и в ряде практически важных задач, таких, например, как фазовое движение в микротроне /6/, движение частиц в магнитных ловушках /7/, или взаимодействие пучков в ускорителях со встречными пучками /8/. Фазовая плоскость отображений типа (I) состоит обычно из перемежающихся областей регулярного и стохастического движения, причем пока константа g меньше неко-

того критического значения $q_{сл}$. области хаотического движения изолированы друг от друга, в то время как при $q > q_{сл}$ изолированными между собой оказываются области регулярного движения /3/.

Характерной особенностью отображения (I) является отсутствие в правых частях явной зависимости от номера отображения T . Подобно тому, как отсутствие явной зависимости от времени правых частей канонической системы дифференциальных уравнений означает консервативность, т.е. сохранение энергии, можно надеяться на существование некоторого интеграла движения и у отображения (I). Будем в дальнейшем называть его интегралом квазиэнергии $\tilde{H}(I_T, \theta_T)$. В следующем разделе этой статьи показано, как он может быть построен в виде некоторого функционального ряда. Такой ряд имеет, однако, лишь формальный смысл, т.к., вообще говоря, расходится. Тем не менее, при достаточно малой константе возмущения q вблизи заданной эллиптической неподвижной точки /точки резонанса/ отображения (I) имеется область фазового пространства, где он оказывается сходящимся. Расходимость ряда вне этой области обусловлена влиянием других резонансов, благодаря чему аналитическое продолжение суммы ряда, построенного вблизи заданной неподвижной точки, имеет особенности в других резонансных точках. В свою очередь, вблизи каждой из них можно построить свой ряд, сходящийся в некоторой ее окрестности. При малых значениях константы возмущения q области сходимости этих рядов, как будет видно из дальнейшего, пересекаются. Поэтому хотя даже в конечном порядке по q не удается построить единого для всей фазовой плоскости аналитического выражения для интеграла квазиэнергии, описывающего движение около всех проявляющихся в этом приближении резонансов, такое перекрытие позволяет получить приближенный глобальный фазовый портрет отображения (I). Неинтегрируемость (I) сказывается в появлении разрывов $\tilde{H}(I, \theta)$ на некоторых фазовых кривых, проходящих между соседними резонансами и обусловленных влиянием резонансов более высокого порядка, центры которых лежат на этих кривых. В то же время такой фазовый портрет не учитывает стохастической компоненты движения.

Сравнение полученных в этой статье результатов с результатами численного интегрирования с помощью ЭВМ известного стандартного отображения Чирикова-Тейлора /3,4/ выявило весьма

удовлетворительное согласие между ними. Подробные результаты такого сравнения будут опубликованы отдельно.

В третьем разделе этой статьи описан метод построения рядов теории возмущений для квазиэнергии вблизи любого заданного резонанса, а в четвертом – метод построения ускорено сходящегося ряда, когда на каждом шаге приближения разложение ведется вблизи новой, уточненной на предыдущем шаге фазовой траектории движения.

II. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ РЯД ДЛЯ ИНТЕГРАЛА КВАЗИЭНЕРГИИ

В дальнейшем вместо отображения типа (I) будет удобнее рассматривать систему, описываемую функцией Гамильтона

$$(2) \quad \begin{aligned} H(I, \theta; t) &= H_0(I) + q \Delta(t) V(I, \theta) \\ V(I, \theta + 2\pi) &= V(I, \theta); \quad \Delta(t) = \sum_{T=-\infty}^{\infty} \delta(t - T) \end{aligned}$$

За единицу измерения времени в (2) выбран интервал между δ -образными толчками; поэтому время t безразмерно. Если интересоваться только значениями переменных I, θ в моменты $t = T$, то (2) эквивалентно некоторому каноническому отображению /3,4/. В момент толчка канонические переменные меняются, вообще говоря, скачкообразно. Условимся обозначать через I_T, θ_T их значения непосредственно перед толчком с номером T , считая, что первый из них происходит в момент $t = T = 0$.

Система (2) неконсервативна и ее энергия не сохраняется. Ниже мы убедимся, однако, что может существовать функция $\tilde{H}(I, \theta)$, остающаяся постоянной при всех $t = T$ – квазиэнергия. Для этого удобно исходить из уравнения Лиувилля для функции распределения $\rho(I, \theta; t)$ в фазовой плоскости, которая удовлетворяет уравнению

$$(3) \quad i \frac{\partial}{\partial t} \rho(I, \theta; t) = \hat{L}_H \rho(I, \theta; t)$$

Эрмитовский оператор Лиувилля в этом уравнении равен $\hat{L}_H = \hat{L}_0 + q \Delta(t) \hat{L}_V$. Здесь введены обозначения:

$$\hat{L}_F = \frac{\partial F}{\partial I} \hat{m} - \frac{\partial F}{\partial \theta} \hat{q}; \quad \hat{m} = -i \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \hat{q} = -i \frac{\partial}{\partial I}$$

В частности, $\hat{L}_0 \equiv \hat{L}_H = \partial H_0(I) / \partial I \hat{m} = \omega_0(I) \hat{m}$

Для моментов $t = T-0$ решение уравнения (3) можно представить в виде /9/:

$$(4) \quad \rho_T(I, \theta) = \hat{U}(g) \rho_0(I, \theta),$$

где оператор

$$(5) \quad \hat{U}(g) = \exp(-i\hat{L}_0) \exp(-ig\hat{L}_V) = \exp(-i\hat{L}).$$

В силу эрмитовости операторов Лиувилля как каждый из сомножителей, образующих оператор \hat{U} , так и сам этот оператор унитарны. Поэтому определенный последним равенством в (5) оператор \hat{L} эрмитов.

Поставим теперь следующий вопрос: является ли оператор \hat{L} оператором лиувилевского типа $\hat{L} = \hat{L}_{\tilde{H}}$? В этом разделе построен функциональный ряд для $\tilde{H}(I, \theta)$. Ответ на поставленный вопрос зависит, следовательно, от сходимости полученного ряда. В тех областях фазовой плоскости, где сходимость имеет место равенство (4) принимает вид

$$\rho_T(I, \theta) = \exp(-i\hat{L}_{\tilde{H}}T) \rho_0(I, \theta),$$

откуда ясно, что $\tilde{H}(I, \theta)$ является искомым интегралом движения — интегралом квазиэнергии. Если, например, в последнем равенстве заменить T непрерывным временем t , мы получим функцию распределения $\tilde{\rho}(I, \theta; t)$ консервативной системы с функцией Гамильтона $\tilde{H}(I, \theta)$. По построению все динамические переменные такой консервативной системы будут при $t = T$ совпадать с соответствующими переменными исходной системы (2) и отвечающего ей отображения.

Чтобы найти $\tilde{H}(I, \theta)$, введем зависящий от некоторого параметра S унитарный оператор

$$(6) \quad \hat{U}(s) = \exp(-is\hat{L}_0) \exp(-isg\hat{L}_V) = \exp[-is\hat{L}(s)].$$

Очевидно, $\hat{L}(1) = \hat{L}$. Составим теперь уравнение для $\hat{L}(s)$, для чего продифференцируем (6) по s . После умножения обеих частей получившегося равенства на $\hat{U}^{-1}(s)$ находим

$$\hat{L}(s) + \int_0^s ds' e^{-is'\hat{L}(s)} \frac{d\hat{L}(s)}{ds} e^{is'\hat{L}(s)} = e^{-is\hat{L}_0} (\hat{L}_0 + g\hat{L}_V) e^{is\hat{L}_0}$$

или

$$(7) \quad \hat{L}(s) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{(k+1)!} s^{k+1} \left[\hat{L}(s), \underbrace{[\hat{L}(s), \dots [\hat{L}(s), \frac{d\hat{L}(s)}{ds}]]}_k \right] = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} s^k [\hat{L}_0, \underbrace{[\hat{L}_0, \dots [\hat{L}_0, \hat{L}_0 + g\hat{L}_V]]}_k].$$

Вычисление коммутаторов в правой части производится с помощью формулы

$$(8) \quad [\hat{L}_{F_1}, \hat{L}_{F_2}] = -i \hat{L}_{\{F_1, F_2\}},$$

где $\{F_1, F_2\} = \frac{\partial F_1}{\partial I} \frac{\partial F_2}{\partial \theta} - \frac{\partial F_1}{\partial \theta} \frac{\partial F_2}{\partial I}$ — скобка Пуассона. Результат равен оператору $\hat{L}_{F(s)}$, где $F(s) \equiv F(I, \theta; s) = H_0(I) + gV(I, \theta - s\omega_0(I))$.

Уравнение (7) позволяет последовательно определить все производные $\hat{L}(s)$ в точке $s = 0$ и с помощью ряда Тейлора построить затем $\hat{L}(1)$. Для удовлетворения равенства (7) необходимо, чтобы и левая часть в (7) также была оператором Лиувилевского типа, для чего, в свою очередь, достаточно, чтобы $\hat{L} = \hat{L}_{\tilde{H}}$. Подстановка этого равенства в (7) приводит к уравнению

$$(9) \quad \tilde{H}(s) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} s^{k+1} Q_k(s) = F(s),$$

где введено обозначение

$$Q_k(s) = \left\{ \tilde{H}(s), \left\{ \tilde{H}(s), \dots \left\{ \tilde{H}(s), \frac{d\tilde{H}(s)}{ds} \right\} \right\} \right\}_k.$$

После n -кратного дифференцирования (9) по s / $n = 0, 1, 2, \dots$ / и перехода к $s = 0$, получим окончательно /индекс над буквой означает порядок производной по s /:

$$\tilde{H}(0) = H_0 + gV$$

$$(10) \quad \tilde{H}^{(n)}(0) + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+1}{k+1} Q_k^{(n-k)}(0) = g \left[-\omega_0(I) \right]^{n+1} \frac{\partial^{n+1} V}{\partial \theta^{n+1}},$$

откуда

$$\tilde{H}^{(0)}(0) = -\frac{1}{2} g \omega_0(I) \frac{\partial V}{\partial \theta}, \quad \tilde{H}^{(2)}(0) = \frac{1}{6} g \omega_0^2(I) \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} - \frac{1}{6} g^2 \left\{ V, \omega_0(I) \frac{\partial V}{\partial \theta} \right\} \text{ и т. д.}$$

Производная $\tilde{H}^{(n)}(0)$ является конечной суммой повторных скобок Пауссона функций $H_0(I)$ и $V(I, \theta)$, которая не содержит слагаемых выше n -ного порядка по константе возмущения g . Поэтому искомый функциональный ряд для $\tilde{H}(I, \theta)$ имеет вид

$$(II) \quad \tilde{H}(I, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tilde{H}^{(n)}(I, \theta; s=0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^n g^\nu h_{n\nu}(I, \theta),$$

причем при аналитических H_0 и V все функции $h_{n\nu}$ также аналитичны.

В общем случае исследование сходимости ряда (II) представляет собой очень сложную задачу. Если, однако, возмущение слабое $g \ll 1$, можно сначала отсуммировать в (II) члены первого порядка по g , затем - второго и т.д. Как видно из (I0) все $\tilde{H}^{(n)}(0)$ при $n \neq 0$ по крайней мере $\sim g^n$. Поэтому при вычислениях $\tilde{H}^{(n)}(0)$ мы будем получать члены высшего порядка по g всякий раз, как только в повторных скобках Пауссона производные $\tilde{H}^{(s)}$ встречаются более одного раза. Следовательно, с линейной по g точностью

$$Q_k^{(n-k)}(0) \approx \left\{ H_0, \left\{ H_0, \dots, \left\{ H_0, \tilde{H}^{(0)} \right\} \right\} \right\} = \omega_0^k(I) \frac{\partial^k \tilde{H}^{(n-k+1)}}{\partial \theta^k}.$$

Подстановка в (I0) приводит после этого к уравнению

$$\tilde{H}^{(n+1)}(0) + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \omega_0^k(I) \left(\frac{\partial^k \tilde{H}^{(n-k+1)}}{\partial \theta^k} \right) = g \left[-\omega_0(I) \right]^{n+1} \frac{\partial^{n+1} V}{\partial \theta^{n+1}},$$

решение которого имеет вид

$$\tilde{H}^{(n)}(0) = g B_n \omega_0^n(I) \frac{\partial^n V}{\partial \theta^n},$$

где B_n - числа Бернулли. Таким образом, в первом порядке по g

$$\tilde{H}(I, \theta) = H_0(I) + g \tilde{V}_0(I, \theta),$$

где

$$(12) \quad \tilde{V}_0(I, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B_n \omega_0^n(I) \frac{\partial^n V(I, \theta)}{\partial \theta^n}$$

Функция $\tilde{V}_0(I, \theta)$ подобно $V(I, \theta)$ периодична по θ с периодом 2π . Поэтому обе стороны (12) можно разложить в ряд

Фурье по θ и производить вычисления для каждой гармоники в отдельности. В дальнейшем мы будем считать для простоты, что $V(I, \theta)$ имеет всего одну гармонику и равно просто $-\cos \theta$. Ряд по n в (12) в этом случае сходится в области $|\omega_0(I)| < 2\pi$. В точках $\omega_0(I) = \pm 2\pi$, где он начинает расходиться, лежат ближайшие от $\omega_0(I) = 0$ целые резонансы системы. После подстановки в (12) $V(I, \theta) = -\cos \theta$ ряд суммируется к функции

$$(13) \quad \tilde{V}_0(I, \theta) = -\frac{\frac{1}{2} \omega_0(I)}{\sin \frac{1}{2} \omega_0(I)} \cos \left(\theta - \frac{1}{2} \omega_0(I) \right).$$

Аналогичным образом можно убедиться, что в том случае, когда $V(I, \theta)$ является произвольной периодической по θ функцией, \sin - и \cos -амплитуды Фурье $\tilde{V}_0(I, \theta)$ выражаются через соответствующие амплитуды возмущения $V(I, \theta)$ с помощью формул:

$$\begin{cases} \tilde{u}_m(I) = \frac{1}{2} m \omega_0(I) \left[u_m(I) \operatorname{ctg} \frac{m}{2} \omega_0(I) - \delta_m(I) \right] \\ \tilde{v}_m(I) = \frac{1}{2} m \omega_0(I) \left[v_m(I) \operatorname{ctg} \frac{m}{2} \omega_0(I) + u_m(I) \right] \end{cases}$$

Получаемое с помощью (13) приближенное выражение для интеграла квазиэнергии справедливо в полосе фазовой плоскости, содержащей целый резонанс $\omega_0(I) = 0$. Вне этой полосы формула (13) служит аналитическим продолжением ряда (12) за пределы области его сходимости. В точках $\omega_0(I) = 2\pi l$ / $l \neq 0$ - целое/, где расположены другие целые резонансы, оно имеет простые полюсы по $\omega_0(I)$ /резонансные знаменатели/. Легко видеть, однако, что вблизи каждого из этих резонансов можно построить свой сходящийся ряд типа (12), в результате чего особенность в точке резонанса исчезает. Оператор $\exp(-i\hat{L}_0) = \exp[-i\omega_0(I)\hat{m}]$, действующий в пространстве периодических по θ функций, эквивалентен при $\omega_0(I) = 2\pi l$ единичному. Вблизи соответствующих значений действия $I \in \omega_0(I) = 2\pi l + \bar{\omega}_0(I)$, где уже $|\bar{\omega}_0(I)| < 2\pi$. Поэтому около l -того резонанса $\exp(-i\hat{L}_0) \Rightarrow \exp[-i\bar{\omega}_0(I)\hat{m}]$. Это приведет в (12) к замене $\omega_0(I) \rightarrow \bar{\omega}_0(I)$ и ряд будет сходиться к функции, которая получается из (13) такой же заменой. Найденные подобным образом приближенные выражения для $\tilde{H}(I, \theta)$ справедливы в окрестности любого целого резонанса, причем области сходимости рядов перекрываются между собой. В области перекрытия на достаточном удалении от

обоих резонансов имеется полоса, где полученные выражения хотя и не тождественны, но сохраняются примерно с одинаковой точностью, а различия не превышают вклада членов следующего порядка по g . В этой полосе интегральные кривые, принадлежащие к семействам, описывающим движение около соседних целых резонансов близки, но проходятся фазовой точкой в противоположных направлениях. Поэтому на какой-то из них необходимо сделать разрыв, позволяющий перейти от одного из выражений для $\hat{H}(I, \theta)$ к другому. Из дальнейшего будет видно, что на одной из этих кривых, с другой стороны, лежат 2 центра полуполого резонанса, для описания которого необходимо удержать члены второго порядка по g /см. следующий раздел/. Линия разрыва естественным образом совмещается с этой интегральной кривой. Можно заключить поэтому, что причиной разрыва интеграла квазиэнергии первого порядка является влияние полуполого резонанса, проявляющегося во втором порядке по g .

Учет членов более высокого порядка по g приводит к функции $\tilde{V}(I, \theta; g) = \tilde{V}_0(I, \theta) + g\tilde{V}_1(I, \theta) + \dots$. Однако вычисление даже второго члена этого разложения с помощью (I0), (II) оказывается довольно громоздким. В следующем разделе описан метод, позволяющий непосредственно получить $\tilde{V}(I, \theta)$ в виде ряда теории возмущений по g .

III. РЯД ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассмотрим зависимость оператора \hat{U} из (5) от константы g , считая, что, в соответствии с результатами предыдущего раздела, $\hat{I} = \hat{I}_H$, причем

$$(I4) \quad \hat{H}(I, \theta; g) = H_0(I) + g\tilde{V}(I, \theta; g).$$

Дифференцируя обе части второго из равенств (5) по g и учитывая (I4), получаем

$$(I5) \quad \int_0^1 d\zeta \exp(i\zeta \hat{I}_H) \hat{I} \frac{d}{dg} (g\tilde{V}) \exp(-i\zeta \hat{I}_H) = \hat{I}_V$$

Оператор $\exp(i\zeta \hat{I}_H)$ описывает эволюцию во времени ζ динамических переменных консервативной системы с функцией Гамильтона $\hat{H}(I, \theta; g)$. Поэтому для любой функции канонических переменных $G(I, \theta)$

$$\exp(i\zeta \hat{I}_H) \hat{I} G(I) \exp(-i\zeta \hat{I}_H) = \hat{I} G(\zeta),$$

где $G(\zeta) \equiv G[I(\zeta), \theta(\zeta)]$, а $I(\zeta), \theta(\zeta)$ — значения этих переменных в момент ζ , если $I(0) = I, \theta(0) = \theta$. С помощью этого соотношения (I5) преобразуется в уравнение для функции $V(I, \theta; g)$

$$(I6) \quad \int_0^1 d\zeta \exp(i\zeta \hat{I}_H) \frac{d}{dg} [g\tilde{V}(I, \theta; g)] = V(I, \theta).$$

Разложение левой части (I6) в ряд по g приводит к равенствам:

$$\hat{\Lambda} \tilde{V}_0(I, \theta) = V(I, \theta)$$

$$(I7) \quad \hat{\Lambda} \tilde{V}_1(I, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^1 d\zeta \int_0^1 d\zeta' \{ \tilde{V}_0(I, \theta + \zeta\omega_0(I)), \tilde{V}_0(I, \theta + \zeta'\omega_0(I)) \} \text{ и т.д.}$$

и т.д., которые позволяют совместно с требованием периодичности \tilde{V} по θ последовательно определить все $\tilde{V}_n(I, \theta)$. Здесь

$$\hat{\Lambda} = \int_0^1 d\zeta \exp[i\zeta\omega_0(I)\hat{m}],$$

так что

$$\hat{\Lambda}^{-1} = \frac{i\omega_0(I)\hat{m}}{\exp[i\omega_0(I)\hat{m}] - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B_n \omega_0^n(I) \frac{\partial^n}{\partial \theta^n}.$$

В частности, первое из равенств (I7) вновь дает (I2).

В дальнейшем в качестве иллюстрации будет рассматриваться система с $H_0(I) = \frac{1}{2}I^2$, $V(I, \theta) = -\cos\theta$, эквивалентная стандартному отображению Чирикова-Тейлора /3,4/. С помощью (I7) получаем тогда

$$(I8) \quad \tilde{V}_0(I, \theta) = -\frac{\frac{1}{2}I}{\sin \frac{1}{2}I} \cos(\theta - \frac{1}{2}I)$$

$$\tilde{V}_1(I, \theta) = -\frac{1}{8} \frac{\frac{1}{2}I \cos \frac{1}{2}I - \sin \frac{1}{2}I}{\sin^3 \frac{1}{2}I} - \frac{1}{16} \frac{I - \sin I}{\sin I \sin^2 \frac{1}{2}I} \cos(2\theta - I) \text{ и т.д.}$$

Найденные выражения справедливы вблизи резонанса с $I = 0$, но имеют особенности при $I = 2\pi\ell$ ($\ell \neq 0$), где лежат другие целые резонансы. В предыдущем разделе показано, как устраняется особенность в точке любого целого резонанса. В случае стандартного отображения это сводится к периодическому по I /с периода 2π / повторению выражений (I8) около каждого из них.

Можно поэтому ограничиться рассмотрением основного квадрата $-\pi \leq I \leq \pi$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$ фазовой плоскости. Внутри этого квадрата $\tilde{V}_0(I, \theta)$, например, непрерывно, но $\tilde{V}_0(-\pi, \theta) = -\tilde{V}_0(\pi, \theta)$, так что при периодическом повторении, устраняющем особенности около всех целых резонансов, образуются разрывы на линиях $(2l+1)\pi$.

Амплитуда второй гармоники в $\tilde{V}_1(I, \theta)$ имеет на этих линиях простые полюсы, отвечающие полужелым резонансам. Точно так же можно показать что в $\tilde{V}_2(I, \theta)$ появляется гармоника $\cos 3(\theta - \frac{1}{2}I)$, амплитуда которой имеет простые полюсы в точках $I = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi l$ и т.д.

С помощью (5) и (14) нетрудно установить, что в случае стандартного отображения

$$\tilde{V}(-I, -\theta; g) = \tilde{V}(-I, \theta - I; g) = \tilde{V}(I, -\theta + I; g) = \tilde{V}(I, \theta; g),$$

откуда следует, что

$$\tilde{V}(I, \theta; g) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{v}_m(I) \cos m(\theta - \frac{1}{2}I),$$

причем $\tilde{v}_m(I)$ четны по I . Гармоника с номером $m = n$ появляется впервые в n -ном порядке по g , а ее амплитуда сингулярна при значениях действия $I = \pm 2\pi \frac{k}{n} + 2\pi l$ / k - целое число, меньшее $n/2$ и не имеющее общих с n множителей/, где находятся соответствующие резонансы.

Высшие поправки к амплитудам заданной гармоники содержат кратные полюсы в точках резонансов. Их появление обусловлено смещением резонансных частот за счет возмущения. В разделе IV будет показано, что после суммирования таких членов остаются простые полюсы, положение которых определяется уже смещенными за счет взаимодействия частотами.

Подобно тому, как это имело место для целого резонанса, можно устранить сингулярность и в точке любого заданного дробного резонанса. Проиллюстрируем сказанное на примере полужелого резонанса $I = \pi$. Положим $I = \pi - \gamma$ и $\hat{p} = -i\gamma/\delta$; тогда

$$\hat{U}(g) = e^{-i\pi \hat{m}} \exp(i\gamma \hat{m}) \exp(-ig \sin \theta \hat{p}) = \exp(i\gamma \hat{m}) \exp(ig \sin \theta \hat{p}) e^{-i\pi \hat{m}}$$

и

$$\hat{U}^2(g) = \exp(i\gamma \hat{m}) \exp(ig \sin \theta \hat{p}) \exp(i\gamma \hat{m}) \exp(-ig \sin \theta \hat{p})$$

т.к. оператор $\exp(-2\pi i \hat{m}) \equiv 1$. Далее,

$\exp(ig \sin \theta \hat{p}) \gamma \hat{m} \exp(-ig \sin \theta \hat{p}) = -\hat{L}_k$,
где $K(\gamma, \theta) = \frac{1}{2} \gamma^2 + g \gamma \sin \theta - \frac{1}{4} g^2 \cos 2\theta$. Наконец, в соответствии с определением \hat{H} потребуем, чтобы

$$\hat{U}^2(g) = \exp(i\gamma \hat{m}) \exp(-i\hat{L}_k) = \exp(-2i\hat{L}_H).$$

Повторяя теперь выкладки, сделанные в начале этого раздела, и удерживая члены $\sim g$ и $\sim g^2$, получаем

$$(19) \quad \tilde{V}_0(\gamma, \theta) = \frac{\frac{1}{2} \gamma}{\cos \frac{1}{2} \gamma} \sin(\theta + \frac{1}{2} \gamma)$$

$$\tilde{V}_1(\gamma, \theta) = \frac{1}{8} \frac{\frac{1}{2} \gamma \sin \frac{1}{2} \gamma + \cos \frac{1}{2} \gamma}{\cos^2 \frac{1}{2} \gamma} - \frac{1}{16} \frac{\gamma + \sin \gamma}{\sin \gamma \cos^2 \frac{1}{2} \gamma} \cos(2\theta + \gamma).$$

Сингулярность при $\gamma = 0$ ($I = \pi$) исчезла и полученные выражения определяют с точностью до g^2 включительно интеграл квазиэнергии вблизи полужелого резонанса. С другой стороны, выражения (19) сингулярны при $\gamma = \pi$ ($I = 0$), где (18) регулярны. Поэтому (18) и (19) справедливы каждое в окрестности своего резонанса и на достаточном удалении от соседнего. При малом g области применимости обоих выражений перекрываются между собой. Интегральная кривая, вдоль которой проходит оптимальная линия разрыва, позволяющего совместить описание обоих резонансов, лежит при $I \approx \frac{2\pi}{3}$, где находятся центры следующего дробного резонанса порядка $1/3$. Этот резонанс проявляется в третьем порядке по g .

Описанная ситуация носит в случае неинтегрируемых систем общий характер. Устранение сингулярности возможно вблизи любой резонансной точки в произвольном фиксированном порядке по g /что находится в соответствии с общей теорией Биркгофа /I/, стр. 353/. Однако, соответствующие выражения содержат особенности в точках, где расположены другие, проявляющиеся в выбранном приближении резонансы. Для совмещенного описания всех этих резонансов функция $\hat{H}(I, \theta)$ должна иметь разрывы на проходящих между ними линиях, причем на этих линиях лежат центры резонансов, возникающих в следующем порядке по g .

Пример иного рода дает интегрируемая система с линейной невозмущенной частью, когда ω_0 не зависит от I . Выражение (13) справедливо тогда во всей фазовой плоскости. Одновременно

с этим обращаются, как нетрудно проверить, в нуль все последующие члены разложения по g , так что полученный результат оказывается точным. Существование интеграла движения

$$\tilde{H}(I, \theta) = \omega_0 I - g \frac{\frac{1}{2}\omega_0}{\sin \frac{1}{2}\omega_0} \cos(\theta - \frac{1}{2}\omega_0)$$

у соответствующего линейного отображения отмечено в /10/.

Для получения точной функции $\tilde{V}(I, \theta; g)$ вблизи заданного резонанса необходимо просуммировать вклады всех порядков по g . Каждый последующий порядок вносит новые сингулярности, отвечающие резонансам все более высокого порядка. Поэтому вопрос о сходимости рядов теории возмущений является очень сложным. Тем не менее, известно, что при достаточно малых g эта сходимость должна иметь место /теорема КАМ, /1/, стр.378/.

IV. МЕТОД УСКОРЕННОЙ СХОДИМОСТИ

Существенным элементом теории КАМ является использование такого метода разложения по возмущению, когда на каждом шаге разложение ведется вблизи новой траектории, вычисленной по функции Гамильтона предыдущего приближения. Развиваемый в этой статье подход очень удобен для построения ускоренно сходящегося разложения интеграла квазиэнергии около фиксированного резонанса.

Рассмотрим, например, движение вблизи целого резонанса. Интеграл квазиэнергии определяется тогда уравнением (16). Выше при решении этого уравнения на каждом шаге производилось разложение по константе g как функции $\tilde{H}(I, \theta; g)$, так и оператора эволюции $\exp(i\int \tilde{L} \tilde{H})$ и, следовательно, соответствующей траектории движения. Результатом такой процедуры является обычный ряд теории возмущений. Чтобы получить ускоренно сходящийся ряд, необходимо отказаться от разложения оператора эволюции и на каждом шаге вычислять его действие точно. Поскольку после любого конечного числа шагов возникает задача об одномерном консервативном и, следовательно, интегрируемом движении, такое вычисление может быть, в принципе, выполнено точно, после чего с помощью решения уравнения (16) находится новое, более точное выражение для $\tilde{H}(I, \theta; g)$.

Предположим, что в результате первых n шагов получена функция $\tilde{H}_n(I, \theta; g)$. Частота движения $\Omega_n(\varepsilon; g)$, отвечаю-

щего такой функции Гамильтона, зависит при заданном g только от значения квазиэнергии ε . Чтобы сделать $(n+1)$ -ый шаг, следует подставить в (16) оператор эволюции, построенный по функции \tilde{H}_n . Удобно при этом вместо I и θ выбрать в качестве канонических переменных $\varepsilon = \tilde{H}_n(I, \theta; g)$ и сопряженную ей временную переменную τ . В этих переменных оператор Лиувилля есть просто $\hat{L}\tilde{H}_n = -i\partial/\partial\tau \equiv \hat{\Omega}$. Обозначим

$$\frac{d}{dg} \{ g \tilde{V}[I(\varepsilon, \tau; g), \theta(\varepsilon, \tau; g)] \} = W(\varepsilon, \tau; g)$$

и, аналогично,

$$V[I(\varepsilon, \tau; g), \theta(\varepsilon, \tau; g)] = B(\varepsilon, \tau; g).$$

Обе эти функции периодичны по τ с периодом движения Ω_n и могут быть поэтому разложены в ряды Фурье

$$W(\varepsilon, \tau; g) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w_m(\varepsilon; g) \exp[i m \Omega_n(\varepsilon; g) \tau]$$

$$B(\varepsilon, \tau; g) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} v_m(\varepsilon; g) \exp[i m \Omega_n(\varepsilon; g) \tau].$$

После подстановки в (16) и решения получившегося уравнения находим

$$(20) \quad W_{n+1}(\varepsilon, \tau; g) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{m \Omega_n(\varepsilon; g)}{\sin \frac{m}{2} \Omega_n(\varepsilon; g)} v_m(\varepsilon; g) \exp[-i m \Omega_n(\varepsilon; g) \tau].$$

Теперь следует вернуться к старым переменным, подставив в правой части $\varepsilon = \tilde{H}_n(I, \theta; g)$ и $\tau(I, \theta; g)$. Первообразная по g правой части (20) при фиксированных значениях I и θ дает выражение для $\tilde{V}_{n+1}(I, \theta; g)$ и, следовательно, более точное выражение для $\tilde{H}(I, \theta; g)$. Из (20) видно, что на каждом шаге происходит уточнение частот Ω и коэффициентов Фурье v_m .

Ряд по m в (20) расходится в областях фазовой плоскости, близких к резонансам $\Omega_n = 2\pi \frac{k}{m}$. Поскольку частота Ω_n зависит только от $\varepsilon = \tilde{H}_n$, резонансное условие означает одновременно и условие $\tilde{H}_n(I, \theta; g) = \text{const}$. Поэтому центры резонансов лежат на соответствующих интегральных кривых - факт, хорошо известный из результатов численных исследований отображений /4/.

В соответствии с теоремой КАМ можно ожидать, что при достаточно малых g ряд (20) вне резонансных областей должен сходиться. Сходимость обеспечивается в этом случае экспоненциальным падением коэффициентов V_m при $m \rightarrow \infty$, что, в свою очередь, связано с аналитическим характером зависимости от времени τ переменных I и θ при интегрируемом движении с функцией Гамильтона $\tilde{H}_n(I, \theta; g)$.

Все сказанное можно представить в несколько иной форме, переписав (16) в "разрешенном" относительно \tilde{V} виде:

$$(21) \tilde{V}(I, \theta; g) = \int d\alpha \{ \exp[i \tilde{L}_{\tilde{H}(\alpha g)}] - 1 \}^{-1} i \tilde{L}_{\tilde{H}(\alpha g)} V(I, \theta),$$

где $\tilde{H}(\alpha g) \equiv \tilde{H}(I, \theta; \alpha g)$, а интеграл по α следует понимать как разность первообразных. Для получения $\tilde{H}_{n+1}(I, \theta; g)$ в правую часть (21) следует подставить \tilde{H}_n , а чтобы интеграл по α сходил на верхнем пределе, необходимо потребовать, чтобы не выполнялось ни одно из резонансных условий.

В случае стандартного отображения подстановка на первом шаге в правую часть (21) вместо \tilde{H} функции $H_0(I) = \frac{1}{2} I^2$ приводит к $\tilde{V}_0(I, \theta)$ из (18). Для вычисления $\tilde{V}_1(I, \theta; g)$ нужно теперь решить задачу о движении системы с функцией Гамильтона

$$\tilde{H}_0(I, \theta; g) = \frac{1}{2} I^2 - g \frac{\frac{1}{2} I}{\sin \frac{1}{2} I} \cos(\theta - \frac{1}{2} I).$$

К сожалению, уже эта задача не решается точно. Ограничимся поэтому малыми I и заменим функцию $x/\sin x$ единицей. Введя новую каноническую переменную $\varphi = \theta - \frac{1}{2} I$, получаем в качестве $\tilde{H}_0(I, \varphi; g)$ функцию Гамильтона физического маятника. Решение уравнений движения такого маятника хорошо известно /см., например, /4// и выражается через эллиптические функции Якоби. В зависимости от величины энергии движения маятника $\tilde{H}_0 = \varepsilon$ оно представляет собой либо вращение, либо колебания вблизи положения равновесия $\varphi = 0$, а соответствующие этим двум типам движения области фазовой плоскости разделены сепаратрисой. Частоты движения равны соответственно:

$$\Omega_0^{(2)} = \sqrt{g} \frac{\pi}{9K(g)}, \quad \Omega_0^{(1)} = \sqrt{g} \frac{\pi}{2K(k)}$$

где $q = 1/k = \frac{2g}{\varepsilon + g}$, а K - полный эллиптический интеграл первого рода.

На достаточном удалении от сепаратрисы, на которой $q = k = 1$, $\Omega_0^{(2)} = I + \frac{g}{I} \cos \varphi$, где первый член разложения есть частота вращения в отсутствие возмущения, а остальные возникают в результате действия возмущения. Разложение по g правой части (20) или (21) приводит в этом случае к формулам теории возмущений предыдущего раздела.

Вблизи резонансных значений ε ряд (20) становится асимптотическим. Оценка далеких членов ряда производится в этом случае подобно тому, как это было сделано в работе Е.Б.Богомольного /II/ и приводит к аналогичным результатам. Следует, кроме того, отметить, что в этой работе также использовалось "вложение" дискретного отображения в непрерывное гамильтоновское преобразование.

В области фазовых колебаний фазовые траектории \tilde{H}_0 качественно отличаются от невозмущенных и являются замкнутыми кривыми, охватывающими точку резонанса. На тех из них, для которых выполняются условия $\Omega_0^{(1)} = 2\pi k / g m$ /в рассматриваемом случае нечетные гармоники в (20) выпадают, см. ниже/, лежат центры резонансов фазовых колебаний - вторичных резонансов.

Для получения ряда (20) необходимо еще найти коэффициенты Фурье функции

$$B(\varepsilon, \tau; g) = -\cos[\varphi(\varepsilon, \tau; g) + \frac{1}{2} I(\varepsilon, \tau; g)],$$

где при движении внутри сепаратрисы

$$\begin{cases} \varphi(\varepsilon, \tau; g) = 2 \arcsin[k \operatorname{sn}(\frac{2K}{\pi} \zeta)] \\ I(\varepsilon, \tau; g) = 2\sqrt{g} \operatorname{cn}(\frac{2K}{\pi} \zeta) \end{cases}$$

$\operatorname{sn} \zeta, \operatorname{cn} \zeta$ - эллиптические функции Якоби, $\zeta = \Omega_0^{(1)} \tau$. При сдвиге ζ на π φ и I меняют знак в то время как B остается неизменным и, следовательно, периодически по ζ с периодом π . Поэтому в (20) остаются лишь четные гармоники. Не слишком близко к сепаратрисе в известных разложениях Фурье эллиптических функций Якоби можно оставить только первые члены.

$$\begin{cases} \Psi(\varepsilon, \tau; g) \approx 2\chi(k) \sin z \\ I(\varepsilon, \tau; g) \approx 2\Omega_0^{(v)} \chi(k) \cos z, \end{cases}$$

где $\chi(k) = \exp\left[-\frac{\pi}{2} \frac{K'(k)}{K(k)}\right]$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{2m}(\varepsilon; g) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dz e^{2imz} \cos[2\chi(k) \sin z + \Omega_0^{(v)} \chi(k) \cos z] = \\ &= -\exp\left[-im\left(\pi - \arctan \frac{4\Omega_0^{(v)}}{4 - \Omega_0^{(v)2}}\right)\right] Y_{2m}\left[\chi(k) \sqrt{4 + \Omega_0^{(v)2}}\right] \end{aligned}$$

/ Y_{2m} - функция Бесселя /.

В соответствии со сделанным ранее замечанием полученные коэффициенты \mathcal{V}_{2m} при больших m экспоненциально малы. С другой стороны, вблизи центра основного резонанса $I = 0$ частота $\Omega_0^{(v)} = \sqrt{g}$, так что условие вторичного резонанса выполняется впервые при $2|m| = \pi/\sqrt{g}$. Поэтому влияние вторичных резонансов оказывается слабым вплоть до значений $g \sim 1$.

Иная ситуация возникает вблизи сепаратрисы. При приближении к ней $\Omega_0^{(v)}$ /логарифмически/ стремится к нулю, в то время как коэффициенты \mathcal{V}_{2m} перестают падать экспоненциально. В результате начинают играть роль далекие члены ряда (20), отвечающие вторичным резонансам высокого порядка. Расходимость ряда (20) в этой области соответствует образованию вблизи сепаратрисы стохастического слоя /3/.

У. СРАВНЕНИЕ С ДРУГИМИ МЕТОДАМИ

В случае стандартного отображения (2) можно представить в виде

$$(22) \quad H(I, \theta; t) = \frac{1}{2} I^2 - g \Delta(t) \cos \theta = \frac{1}{2} I^2 - g \sum_{l=-\infty}^{\infty} \cos(\theta - 2\pi l t)$$

При движении вблизи некоторого целого резонанса l_0 в сумме по l слагаемое с $l = l_0$ меняется медленно, в то время как остальные быстро осциллируют. Усреднение (22) по быстрым колебаниям приводит к стационарной задаче о фазовых колебаниях около резонансного значения фазы /метод усреднения/. Благодаря уже отмечавшейся выше периодичности стандартного отображения

по I /3/*) достаточно рассмотреть резонанс с $l_0 = 0$. Опустив в (22) все слагаемые с $l \neq 0$, получим приближенный интеграл движения

$$\tilde{H}_{\text{уср.}}(I, \theta) = \frac{1}{2} I^2 - g \cos \theta,$$

так что $\tilde{V}_{\text{уср.}}(I, \theta) = V(I, \theta) = -\cos \theta$. Вблизи малых значений I наиболее существенное отличие от члена первого порядка из (18) состоит в отсутствии пропорционального действию I смещения фазы, возникающего уже в линейном приближении по I. Это смещение приводит к перекошу фазовых кривых относительно линии $\theta = 0$ хорошо заметному при точном численном интегрировании стандартного отображения /3,4/. При больших I начинает играть роль и зависимость амплитуды \tilde{V}_0 от действия.

Значительно более мощным, чем метод усреднения, является метод последовательных канонических преобразований /4/. На первом шаге этого метода совершается каноническое преобразование $I, \theta \rightarrow I_1, \theta_1$ с производящей функцией $S(I, \theta; t) = I_1 \theta_1 + g \Phi_1(I, \theta; t)$, причем функция Φ_1 подбирается так, чтобы в новой функции Гамильтона $H_1(I_1, \theta_1; t)$ отсутствовал член $\sim g$. Это условие приводит к уравнению

$$\left(I_1 \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial t}\right) \Phi_1(I, \theta; t) = \Delta(t) \cos \theta,$$

точное решение которого имеет вид

$$(23) \quad \Phi_1(I, \theta; t) = \frac{1}{2} \frac{\sin\left[\theta - \frac{1}{2} I_1 - (t - T) I_1\right]}{\sin \frac{1}{2} I_1}$$

где T - число толчков за время t. В самом деле,

$$\begin{aligned} \Phi_1(I, \theta; t) &= \left(I_1 \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1} \Delta(t) \cos \theta = \int_0^{\infty} d\lambda \exp\left[-\lambda \left(I_1 \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\right] \Delta(t) \cos \theta = \\ &= \int_0^{\infty} d\lambda \Delta(t - \lambda) \cos(\theta - \lambda I_1) = \sum_{\tau=-\infty}^{T-1} \cos[\theta - (t - \tau) I_1] = \end{aligned}$$

$$= \sum_{\tau=0}^{\infty} \cos\{\theta - [t - (T-1) + \tau] I_1\},$$

* В этом легко убедиться, совершив в (22) каноническое преобразование $I, \theta \rightarrow I', \theta'$ с производящей функцией $S(I', \theta'; t) = (I' + 2\pi l_0)(\theta' - 2\pi l_0 t)$.

что и приводит после суммирования по τ к (23). В результате

$$(24) \quad H_1(I_1, \theta; t) = \frac{1}{2} I_1^2 + \frac{1}{2} g^2 \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \right)^2,$$

так что новое действие I_1 , с точностью до членов $\sim g^2$ сохраняется. Полагая $t = T$, заключаем, что с этой точностью квазиэнергия

$$(25) \quad \tilde{H}(I, \theta) = \frac{1}{2} I^2(I, \theta),$$

где в силу (23) $I_1(I, \theta)$ определяется из уравнения

$$I_1 + g \frac{\partial \Phi_1(I_1, \theta; T)}{\partial \theta} = I_1 + \frac{1}{2} g \frac{\cos(\theta - \frac{1}{2} I)}{\sin \frac{1}{2} I} = I.$$

С той же точностью отсюда следует, что

$$I_1(I, \theta) = I - \frac{1}{2} g \frac{\cos(\theta - \frac{1}{2} I)}{\sin \frac{1}{2} I}$$

Новое действие сингулярно в точке резонанса $I = 0$, что обусловлено изменением за счет возмущения топологии фазовых кривых вблизи резонанса. Положение можно исправить, если вместо самого действия рассматривать некоторую его функцию $f(I_1)$, подобрав последнюю так, чтобы в точке резонанса производная f'_{I_1} обращалась в ноль. Поправка первого порядка по возмущению к такой функции будет тогда конечной и малой при малых g . Метод ДЛТ, /13//. Такой функцией является, например, квазиэнергия (25). Действительно, подставив (26) в (25), получим для $\tilde{V}_0(I, \theta)$ выражение, совпадающее с (18) и не имеющее особенности при $I = 0$.

Другой возможный выбор функции $f(I_1)$ был использован В.В. Вечеславовым /частное сообщение. Им были также рассмотрены методом ДЛТ и последующие приближения теории возмущений/:

$$f(I_1) = \cos \frac{1}{2} I_1 \approx \cos \frac{1}{2} I + \frac{1}{4} g \cos(\theta - \frac{1}{2} I).$$

В силу периодичности по I , чтобы получить соответствующий интеграл вблизи целого резонанса с номером $l \neq 0$, достаточно умножить это выражение на $(-1)^l$.

Следующий шаг метода канонических преобразований заключается в повторном преобразовании $I_1, \theta_1 \rightarrow I_2, \theta_2$, устраняющем из (24) член $\sim g^2$. Новую производящую функцию можно выбрать так, чтобы

$$H_2(I_2, \theta_2; t) = \frac{1}{2} I_2^2 + \frac{1}{4} g^4 \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta_2} \right)^2$$

Последовательное повторение такой процедуры приводит к ускоренно сходящемуся ряду теории КАМ. К сожалению, уже уравнение для функции Φ_2 не удастся решить точно. Если же ограничиться точностью $\sim g^2$ включительно, то после возвращения к исходным переменным I, θ для $\tilde{V}_1(I, \theta)$ получается выражение, совпадающее с (18). Важно подчеркнуть при этом, что сингулярность в точке резонанса $I = 0$, возникающая в квадратичном по g члене при подстановке (26) в (25), после учета других членов этого порядка сокращается и результат конечен.

Метод последовательных канонических преобразований приводит, таким образом, к тем же выражениям для \tilde{H} , что и метод, предлагаемый в настоящей работе. Однако последний является более прямым, позволяя, в частности, получать выражения для членов ряда теории возмущений непосредственно в исходных переменных I, θ . Отпадает также необходимость решать на каждом шаге новое уравнение в частных производных для производящей функции очередного канонического преобразования.

VI. КВАНТОВЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

В этом разделе производится обобщение предлагаемого подхода на квантовые отображения, которые начали изучаться в /9,14/ в связи с вопросом о влиянии квантовых эффектов на свойства систем, классическое движение которых содержит стохастическую компоненту. В частности, в /9/ был обнаружен новый качественный эффект: замедление на больших временах диффузии по энергии в квантовом аналоге классического стандартного отображения. Исследование квантовых отображений привлекает в последнее время все возрастающий интерес.

Гамильтониан квантового стандартного отображения имеет вид

$$\hat{H} = \frac{1}{2} x^2 \hat{m}^2 - g \Delta(t) \cos \theta,$$

причем, как и ранее, время t безразмерно а \mathcal{E} — безразмерная постоянная Планка. Подобно (4) решение временного уравнения Шредингера представляется в виде /9/

$$\Psi_T(\theta) = \hat{U}(g) \Psi_0(\theta)$$

где

$$\hat{U}(g) = \exp\left(-\frac{i}{2} \mathcal{X} \hat{m}^2\right) \exp\left(i \frac{g}{\mathcal{X}} \cos \theta\right) = \exp\left(-\frac{i}{\mathcal{X}} \hat{H}\right).$$

Второе из этих равенств вводит оператор квазиэнергии

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \mathcal{X}^2 \hat{m}^2 + g \hat{V}(g),$$

собственные значения которого образуют квазиэнергетический спектр системы.

Аналогом (16) является уравнение

$$\int_0^1 dz \exp\left(\frac{i}{2} z \hat{H}\right) \frac{d}{dz} [g \hat{V}(g)] \exp\left(-\frac{i}{2} z \hat{H}\right) = -\cos \theta,$$

которое можно решать по теории возмущений $\hat{V}(g) = \hat{V}_0 + g \hat{V}_1 + \dots$. Нетрудно, например, убедиться, что

$$(27) \hat{V}_0 = \frac{1}{2} \frac{i \mathcal{X} (\hat{m} + \frac{1}{2})}{\exp[-i \mathcal{X} (\hat{m} + \frac{1}{2})] - 1} e^{-i\theta} - e^{i\theta} \frac{1}{2} \frac{i \mathcal{X} (\hat{m} + \frac{1}{2})}{\exp[i \mathcal{X} (\hat{m} + \frac{1}{2})] - 1}$$

В классическом пределе $\mathcal{X} \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$, $\mathcal{X}m = 1$ оператор \hat{V}_0 превращается в \hat{V}_0 из (18). Однако при конечном \mathcal{X} , если только не выполнено ни одно из условий "квантового резонанса" /15/ $\mathcal{X} = 4\pi k / (2m+1)$ / k, n - целые/*), все матричные элементы \hat{V} остаются конечными. Поскольку в условии резонанса входит теперь только параметр \mathcal{X} , фиксированный для каждой конкретной системы, вне квантового резонанса в любом конечном порядке по g в задаче о спектре квазиэнергии не возникает никаких сингулярностей. В этом пункте имеется важное отличие от классической теории, где они появляются из-за влияния резонансов. С другой стороны, из (27) видно, что матричные элементы \hat{V}_0 меняются весьма нерегулярным образом. То же самое имеет, конечно, место и для последующих членов разложения. Поэтому влияние опущенных старших членов в разных участках спектра будет различным, так что проблема сходимости ряда для \hat{V} представляется очень сложной.

В заключение хочу выразить искреннюю признательность Ф.М.Израйлеву за многочисленные обсуждения и детальную численную проверку полученных в этой статье результатов. Я благодарен также В.Ф.Дмитриеву и В.Б.Телицину за обсуждения, советы и руководство при общении с ЭМ, П.Н.Исаеву и В.В.Мазепусу за полезные советы, В.В.Вечеславу, Б.В.Чирикову и Д.Л.Шепелянскому - за

* С учетом последующих членов разложения \hat{V} условие отсутствия квантового резонанса приобретает вид $\mathcal{X} = 4\pi k/n$.

обсуждение результатов. Я очень признателен, кроме того, В.В.Вечеславу, ознакомившему меня со своими результатами до их опубликования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. "Наука", 1979.
2. Заславский Г.М., Чириков Б.В. УФН, 1971, № 1,3.
3. Chirikov B.V. Phys. Rep. 1979, v.52, 265.
4. Лихтенберг А., Либман М. Регулярная и стохастическая динамика. "Мир", 1984.
5. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. "Наука", 1984.
6. Мелехин В.Н. ЖЭТФ, 1975, т.68, 1601.
7. Чириков Б.В. Физика плазмы. 1978, т.4, 521.
8. Izrailev F.M. Physika, 1980, v.1D, 243.
9. Casati G., Chirikov B.V., Izrailev F.M., Ford J. in: Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian System. NY Springer Verlag Lectures Notes in Physics, 1979, v.93, 334.
10. Соколов В.В. ТМФ, 1984, т.59, 117.
10. Berry M.V. Physica, 1984, v.10D, 369.
11. Богомольный Е.Б. ЯФ, 1983, т.37, 444.
12. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов. ФМ, 1962, стр.925.
13. Dunnett D.A., Laing E.W., Taylor J.B. Journ. Math. Physics, 1968, v.9, 1819.
14. Шуряк Э.В. ЖЭТФ, 1976, т.71, 2039; Берман Г.П., Заславский Г.М. ДАН, 1978, т.240, 1081.
15. Израйлев Ф.М., Шепелянский Д.Л. ДАН, 1979, т.249, 1103.

В.В.Соколов

ИНТЕГРАЛ КВАЗИЭНЕРГИЙ КАНОНИЧЕСКИХ
ОТОБРАЖЕНИЙ

Препринт
№ 85- 31

Работа поступила - 13 марта 1985 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати 18.03-1985 г. МН 06583
Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.1,7 печ.л., 1,4 учетно-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 31.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90