ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР 29

Ф.М.Израйлев

ПРЕДЕЛЬНАЯ СТАТИСТИКА СПЕКТРА КВАЗИЭНЕРГИЙ ПРОСТЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

ПРЕПРИНТ 85-46

НОВОСИБИРСК

ПРЕДЕЛЬНАЯ СТАТИСТИКА СПЕКТРА КВАЗИЭНЕРГИЙ ПРОСТЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

Ф.М.Израйлев

Институт ядерной физики, 630090,Новосибирск, СССР

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассматривается вопрос о предельном распределении $P(s)$ расстояний между уровнями квазиэнергий для квантовых систем, стохастических в классическом пределе. Для конкретной модели с конечным числом уровней квазиэнергии численные эксперименты показывают, что в случае сильного периодического возмущения распределение $P(s)$ с большой степенью точности совпадает с распределением Вигнера-Дайсона. Исследуется связь предельного распределения $P(s)$ с симметрией невозмущенного движения и возмущения.

LIMITING QUASIENERGY STATISTICS FOR SIMPLE QUANTUM SYSTEMS.

F.M.Izrailev

Institute of Nuclear Physics, 630090, Novosibirsk, USSR.

ABSTRACT

The question of the limiting distribution $P(S)$ for the quasienergy level spacing is investigated for quantum systems, which are stochastic in the classical limit. As an example a model with a finite number of the quasienergy level is considered. The numerical results show that in the case of a strong perturbation, this distribution $P(S)$ corresponds with a great accuracy to the Wigner-Dyson distribution. The relation of the limiting distribution $P(S)$ to the symmetry of both the unperturbed and perturbed motion are independently investigated.

I. В работах /I-2/ было показано, что стохастическому движению классической системы можно сопоставить нерегулярность спектра соответствующей квантовой системы. В настоящее время для количественного описания используются разные статистические тесты (см., например, /3/), однако наиболее распространенной характеристикой является так называемое распределение $P(s)$ расстояний между соседними уровнями энергий в спектре системы. Зависимость $P(s)$ является основной характеристикой в теории Вигнера-Дайсона /4-5/ при статистическом описании сложных квантовых систем, таких, например, как тяжелые ядра и атомы. В простейшей форме зависимость $P(s)$ имеет вид /5/:

$$P(s) = A s^{\beta} e^{-Bs^2} \qquad (I)$$

где A и B - нормировочные константы, а β - параметр, определяющий степень расталкивания ($s \to 0$) близких уровней. Эффект расталкивания уровней, в частности, обсуждавшийся еще в работе /6/, является довольно типичным для квантовых систем, стохастических в классическом пределе (см., например, /7-8/). Значение параметра β = I;2;4, как показано в /5/, связано с симметрией унитарных матриц, соответствующих исходной системе. Зависимость (I) с β = I хорошо подтверждается экспериментально в тяжелых ядрах /9/ и хуже воспроизводится в сложных атомах /I0/, где, по-видимому, статистические свойства не являются максимальными. Имеются также численные эксперименты с простыми квантовыми системами (см., например, обзоры /7-8,II/. Однако, подтверждая факт расталкивания, из-за малой статистики результаты не дают однозначного ответа о форме зависимости $P(s)$. Исключение составляет лишь работа /I2/ с достаточно хорошей статистикой, в которой совпадение с $P(s)$ для β = I удовлетворяет критерию согласия χ^2 .

В настоящей работе показывается, что распределение Вигнера-Дайсона может иметь место в неавтономных системах с периодически зависящим от времени возмущением с той разницей, что вместо распределения расстояний между уровнями энергии нужно рассматривать распределение расстояний между уровнями квазиэнергии, сведенными в один интервал $2\pi/T$, где T - период возмущения. Такое распределение возникает в тех предельных случаях, когда возмущение является настолько сильным, что собственные функции квазиэнергии становятся делокализованными и эргодическими во всем доступном импульсном пространстве. При этом статистические свойства спектра квазиэнергии также становятся предельными и зависят лишь от симметрий, имеющихся в исходной системе.

2. Запишем в качестве примера гамильтониан (в безразмерных единицах), описывающий поведение квантового плоского ротатора в периодическом импульсном поле:

$$H = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + V(\theta)\delta_T(t); \qquad V(\theta) = k\cos\theta \tag{2}$$

Здесь $\delta_T(t)$ – периодическая по времени t дельта-функция с периодом T, а $V(\theta)$ – периодический по фазе потенциал внешнего возмущения с параметром k. Численные эксперименты /I3-I5/ с моделью (2) обнаружили квантовое подавление стохастичности, наблюдающейся в соответствующей классической системе, которая известна под названием "стандартного отображения" /I6/. Причина подавления стохастических эффектов в системе (2) связана с локализацией собственных функций квазиэнергии в импульсном пространстве /I4,I7/[ж)]. В работах /I9-20/ была обнаружена связь системы (2) с некоторой одномерной моделью, возникающей в теории твердого тела при описании неупорядоченных систем /2I/. Численное исследование /I9-20/ показало наличие экспоненциальной локализации собственных решений для малых значений $k \lesssim 1$. Такая локализация аналогична известной локализации Андерсона /22/ в случайном потенциале, приводящей к тому, что любое локализованное (в координатном пространстве) вначале состояние хотя и "расплывается" со временем, однако остается локализованным. В исходной модели ротатора локализация приводит к ограниченности диффузии в импульсном пространстве. Для автономных систем максимальное соответствие в проведении квантовой системы при сравнении со стохастическим поведением классической системы следует ожидать тогда, когда все собственные функции эргодичны /23/, т.е. фактически, являются полностью делокализованными. Именно такая (или почти такая) ситуация возникает для систем типа биллиарда (см. /24-25/), в которых наблюдается линейное (β = I) расталкивание близких уровней энергии в соответствии с законом Вигнера-Дайсона (I).

[ж)] Мы не рассматриваем здесь особый случай квантового резонанса $T = 4\pi r/q$, где r, q – целые (см. /I8/).

По аналогии с автономными квантовыми системами естественно поставить вопрос о статистических свойствах спектра квазиэнергий. В первую очередь это относится к распределению $P(s)$ расстояний между соседними уровнями квазиэнергий. Простые физические соображения показывают, что для исходной модели ротатора(2) локализация всех собственных функций в импульсном пространстве должна приводить к отсутствию расталкивания. Этот вывод связан с тем фактом, что расталкивание близких уровней определяется интегралом перекрытия собственных функций, который в случае локализации пренебрежимо мал из-за их удаленности в бесконечном импульсном пространстве (см.также /26/).

Для выяснения вопроса о предельных статистических свойствах спектра квазиэнергий удобно модифицировать исходную модель ротатора, рассматривая ее в ограниченном импульсном пространстве. Для этого, в дополнение к естественной периодичности по фазе θ, введем периодичность по импульсу J. Тогда фазовый объем соответствующей классической системы будет представлять собой поверхность двумерного тора, что не изменяет статистических свойств /I6/. Существенным отличием такой квантовой модели является конечное число уровней квазиэнергии. По аналогии с автономными системами можно ожидать возникновения максимальных статистических свойств в случае, когда собственные функции квазиэнергии будут покрывать все доступное пространство (θ, J), т.е. будут полностью делокализованными.

Запишем сначала точное решение уравнения Шредингера для ротатора (2) через период возмущения T:

$$\Psi(\theta, t+T) = e^{-iV(\theta)}\, e^{-iH_0 T}\, \Psi(\theta, t) \tag{3}$$

где $H_0 = -\frac{1}{2}\partial^2/\partial\theta^2$. Действуя стандартным образом /I8/ получим уравнение для собственной функции квазиэнергии:

$$e^{i\varepsilon T}\varphi_\varepsilon(\theta) = \left\{ e^{-ik\cos\theta}\, e^{-i\frac{T}{2}\partial^2/\partial\theta^2} \right\} \varphi_\varepsilon(\theta) \tag{4}$$

из которого видно, что в общем случае квазиэнергия ε определяется (по модулю $2\pi/T$) через собственные значения $\lambda_j = \exp(i\varepsilon_j T)$ некоторой бесконечномерной унитарной матрицы S.

Матричные элементы $S_{\alpha\beta}$ оператора $\hat{S} = \hat{B}\cdot\hat{G}$, (здесь $\hat{B} = \exp(-ik\cos\theta)$ и $\hat{G} = \exp(-i\frac{T}{2}\partial^2/\partial\theta^2)$ в базисе, в котором оператор B – диагонален, имеют вид:

$$S_{\alpha\beta}=e^{-ik\cos\theta_\alpha}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}e^{i\frac{T}{2}\ell^2}e^{-i\ell(\theta_\alpha-\theta_\beta)} \qquad (5)$$

Нахождение собственных значений и собственных функций этой матрицы (с непрерывными параметрами θ_α, θ_β из интервала $(0,2\pi)$) дает точное решение задачи для системы (2) с бесконечным импульсным пространством. Аналогично этому, можно показать, что для дискретной модели, с конечным числом N уровней квазиэнергии, матрица S примет вид:

$$S_{mn}=B_m G_{mn}=\frac{1}{(2N_1+1)}e^{-ik\cos\left(\frac{2\pi}{N}m+\theta_0\right)}\sum_{\ell=-N_1}^{N_1}e^{i\frac{T}{2}\ell^2}e^{-i\frac{2\pi}{N}\ell(m-n)}, \qquad (6)$$

$m,n=1,\ldots,N$

Здесь θ_0 – произвольный параметр из интервала $(0, \frac{2\pi}{N})$. Можно показать, что для сохранения симметрии $V(\theta)=V(-\theta)$, имеющейся в исходной модели (2), параметр θ_0 должен быть равен либо 0 либо π/N. Далее, значение N_1 следует выбрать в виде $N_1=(N-1)/2$, где N – нечетное. Тогда выражение (6) при $N\to\infty$ переходит в (5), а в случае $T = 4\pi r/q$ (r, q – целые) совпадает с точным аналитическим выражением для квантового резонанса /I8/.

4. В работе /27/ была численно исследована зависимость $P(s)$ для различных значений k, T. В частности, было показано, что с увеличением k при постоянном $\mathcal{K}=kT=5$ распределение $P(s)$ изменяется от близкого к пуассоновскому (малые k) к распределению Вигнера-Дайсона, (I) с $\beta = 2$. При этом предельное (при $k\gg N\gg I$) распределение $P(s)$ совпадает с аналитическим выражением (I) с хорошей статистической достоверностью. Квадратичный вид расталкивания ($\beta = 2$) связан с тем, что в /27/ рассматривался общий случай с отсутствием каких-либо дополнительных симметрий в матрице S (конкретно, система (6) с $\theta_0\neq 0$ или π/N и несимметричные пределы суммирования от 1 до N). Это соответствует тому, что, как невозмущенное движение, так и возмущение неинвариантно относительно замены $\theta\to-\theta$ и система не обладает четностью по отношению к изменению знака времени $t\to-t$.

В настоящей работе, оставляя в стороне интересный вопрос

о промежуточной статистике в зависимости от параметров k, T, мы концентрируем внимание на связи предельной статистики $P(s)$ с симметрией рассматриваемой системы. Заметим сначала, что для исходной модели ротатора (2) одновременно выполняется условие $H_0(\theta)=H_0(-\theta)$ и $V(\theta)=V(-\theta)$. Это означает, что имеется дополнительный интеграл – пространственная четность и значит, собственные функции квазиэнергии $\varphi_\varepsilon(\theta)$ удовлетворяют условию $\varphi_\varepsilon(\theta)=\pm\varphi_\varepsilon(-\theta)$. Поэтому статистическая обработка спектра квазиэнергий должна производиться отдельно для четных и нечетных состояний. На рис. Iа представлено суммарное распределение $P(s)$ для этого случая. Полное число уровней квазиэнергии составляет $M = 990$ для десяти независимых серий с разными значениями $k\approx 20000$ при размере матрицы $N = 99$. Значение k выбрано с большим запасом, чтобы получить распределение $P(s)$ для случая, когда все собственные функции $\varphi_\varepsilon(\theta)$ полностью делокализованы и эргодичны. Обработка по критерию согласия χ^2 для теоретической зависимости (I) с $\beta = I$ дает значение $\chi^2_{23}\approx I4.8$ для 23 степеней свободы, что соответствует примерно $\mathcal{S}\approx 90\%$ уровню значимости. Хорошее соответствие с зависимостью (I) при $\beta = I$ получается также в случае нарушения симметрии только в возмущении: $V(\theta)\neq V(-\theta)$ (или, $\theta_0\neq 0;\pi/N$ в (6)). При этом собственные функции $\varphi_\varepsilon(\theta)$ не обладают четностью, но в исходной системе сохраняется инвариантность по отношению к обращению времени, $t\to-t$ (временная четность). Это приводит к тому, что матрица S имеет дополнительную симметрию, уменьшающую число независимых элементов вдвое. Обработка по критерию согласия χ^2 (для $N = I99$, $M = I990$, $k\approx 20000$, $T = 1/\sqrt{3}$, $\theta_0=\pi/20N$) дает $\chi^2_{27}\approx 35.2$ с $\mathcal{S}\approx I4\%$ уровнем значимости.

К аналогичному результату приводит нарушение симметрии при $\theta\to-\theta$ в свободном движении (т.е. $H_0(\theta)\neq H_0(-\theta)$) с сохранением симметрии в возмущении: $V(\theta) = V(-\theta)$. На рис.Iб приведено распределение $P(s)$ для комплексного гамильтониана $H_0=-\frac{1}{2}\partial^2/\partial\theta^2+i\gamma\,\partial/\partial\theta$ имитирующего влияние магнитного поля. Оказывается, что в этом случае в системе нарушается как пространственная так и временная четность (матрица $G_{mn}=\sum_{-N_1}^{N_1}\exp(i\frac{T}{2}\ell^2-i\gamma\ell)\exp(i2\pi\ell(m-n)/N)$ – несимметрична), но снова имеется дополнительная симметрия в полной матрице S. Можно показать, что эта симметрия связана с сохранением в системе комбинированной четности (TP – инвариантность при одновременной замене $\theta\to-\theta$ и $t\to-t$)

И, наконец, в случае одновременного нарушения симметрии ($V(\theta)\neq V(-\theta)$ и $H_0=-\frac{1}{2}\partial^2/\partial\theta^2+i\chi\,\partial/\partial\theta$ возникает распределение Вигнера-Дайсона (I) с квадратичным ($\beta = 2$) законом расталкивания (рис.2). В последнем случае в системе (2) нарушается также и ТР-инвариантность и матрица S уже не содержит дополнительных симметрий.

В заключение отметим, что матрица S , описывающая поведение нашей системы, в отличие от теории Вигнера-Дайсона зависит от параметров модели k, T и в общем случае не является случайной. И лишь в предельном случае больших k при $(T \simeq I)$ распределение $P(s)$ совпадает с распределением для случайных матриц. В другом предельном случае малых $k \lesssim I$ можно ожидать пуассоновского распределения (см. /26/), однако этот вопрос требует особого рассмотрения, поскольку численные эксперименты показывают /29/, что для простых автономных интегрируемых систем точного соответствия с пуассоновским распределением нет.

Автор искренне признателен В.В.Соколову, Б.В.Чирикову и Д.Л.Шепелянскому за плодотворные дискуссии, а также Л.Ф.Хайло за помощь в проведении вычислений.

Литература

I.Percival I.C., J. Phys. B: Atom. Mol. Phys. 1973, 6, L229.

2.Percival I.C., Advan. Chem. Phys. 1977, 36, 1.

3.Brody T.A., Flores J., French J.B., Mello P.A., Pandey A., Wong S.S.M., Rev. of Mod. Phys. 1981, 53, 385.

4.Wigner E.P., Ann. Math. 1951, 53, 36; 1955, 62, 548; 1957, 65, 203; 1958, 67, 325.

5.Dyson F.J., J. Math. Phys. 1962, 3, 140; 157; 166. (перевод: Ф.Дайсон. Статистическая теория энергетических уровней сложных систем. ИЛ.Москва, I963).

6.Ландау Л.Д., Смородинский Я.А. Лекции по теории атомного ядра, М.-Л., I955.

7.Berry M.V., "Semiclassical Mechanics of Regular and Irregular Motion", in "Chaotic Behavior of Deterministic Systems".(Les Houches Summer School Lectures, 1981) by North-Holland Publ., 1983, p. 171.

8.Berry M.V., Structures in Semiclassical Spectra: A Question of Scale, in "The Wave-Particle Dualism", by D.Reidel Publ. Comp. p. 231, 1984.

9.Hag R.U., Pandey A., Bohigas O., Phys. Rev. Lett., 1982, 48, 1086.

10.Camarda H.S., Georgopules P.D.,Phys. Rev. Lett., 1983,50,492.

11.Zaslavsky G.M.,Phys. Rept., 1981, 80, 157.

12.Bohigas O., Giannoni M.-J., Schmit C., Phys. Rev. Lett., 1984, 52, 1.

13.Casati G., Chirikov B.V., Ford J., Izrailev F.M. Lecture Notes in Physics, v. 93, ed, G.Casati and J.Ford, Springer, New York, 1979, p. 334.

14.Chirikov B.V., Izrailev F.M., Shepelyansky D.L., Soviet Sci. Rev. v. 2C, p. 209. Препринты ИЯФ СО АН СССР: 80-209, 80-2I0, Новосибирск, I980.

15.Schepelyansky D.L., Physica 1983, 8D,208.

16.Chirikov B.V., Phys. Rept. 1979, 52, 263.

17. Чириков Б.В., УФН, I983, 139, 360.

18. Израйлев Ф.М., Шепелянский Д.Л. ДАН СССР, I979, 249, II03; ТМФ, I980, 43, 4I7.

19. Fishman S., Grempel D.R., Prange R.E., Phys. Rev. Lett., 1982, 49, 509.

20. Prange R.E., Grempel D.R., Fishman S., Proc. of the Conf. on Quantum Chaos (Como, June 1983), Springer New York, 1984.

21. Лифшиц И.М., Гредескул С.А., Пастур Л.А. Введение в теорию неупорядоченных систем. - М.: Наука, I982.

22. Anderson P.W., Phys. Rev. 1958, 109, 1492.

23. Шнирельман А.И., УМН, I974, 29, I8I.

24. McDonald S.W., Kaufman A.N., Phys. Rev. Lett. 1979, 42,1189.

25. Taylor R.D., Brumer P., Farady Discuss, Chem. Soc. 1983, 75, 170.

26. Feingold M., Fishman S., Grempel D.R., Prange R.E. Statistics of Quasienergy Separations in Chaotic Systems, 1985, to be published.

27. Израйлев Ф.М. Распределение расстояний между уровнями квазиэнергий для квантовых систем, стохастических в классическом пределе",Препринт ИЯФ СО АН СССР,№ 84-63,Новосибирск,I984.

28. Berry M.V., Tabor M., Proc. Roy. Soc. 1977, A356, 375.

29. Казати Дж., Чириков Б.В., Гварнери И. Статистика уровней энергии интегрируемых квантовых систем, Препринт ИЯФ СО АН СССР, 84-I45, Новосибирск, I984.

ПОДПИСИ К РИСУНКАМ:

Рис.I. Распределение $P(s)$ расстояний по дуге единичной окружности между соседними собственными значениями матрицы S для $k \approx 20000$, $T = 1/\sqrt{3}$, $\theta_0 = \pi/N$, $\Delta = 2\pi/N$. Плавные кривые - аналитическая зависимость (I) с $\beta = I$, ломаные - численные данные: а) $H_0 = -\frac{1}{2}\partial^2/\partial\theta^2$, I0 серий с различными k (с шагом $\Delta k = I$), $N = 99$, $M = 990$, $\chi^2_{23} \approx$ I4,8; $w \approx 90\%$; б) $H_0 = -\frac{1}{2}\partial^2/\partial\theta^2 + i\frac{1}{\sqrt{2}}\partial/\partial\theta$ I0 серий для $N = I99$, $M = I990$, $\chi^2_{27} \approx 34{,}7$; $w \approx I5\%$.

Рис.2. То же, что на рис.I для $k \approx 20000$, $T = 1/\sqrt{3}$, $\theta_0 = \frac{1}{20}\frac{\pi}{N} \approx 8\cdot I0^{-4}$, $H_0 = -\frac{1}{2}\partial^2/\partial\theta^2 + i\frac{1}{\sqrt{2}}\partial/\partial\theta$, I0 серий для $N = I99$, $M = I990$, $\chi^2_{27} \approx I8{,}9$; $w \approx 65\%$. Плавная кривая - аналитическая зависимость (I) с $\beta = 2$.

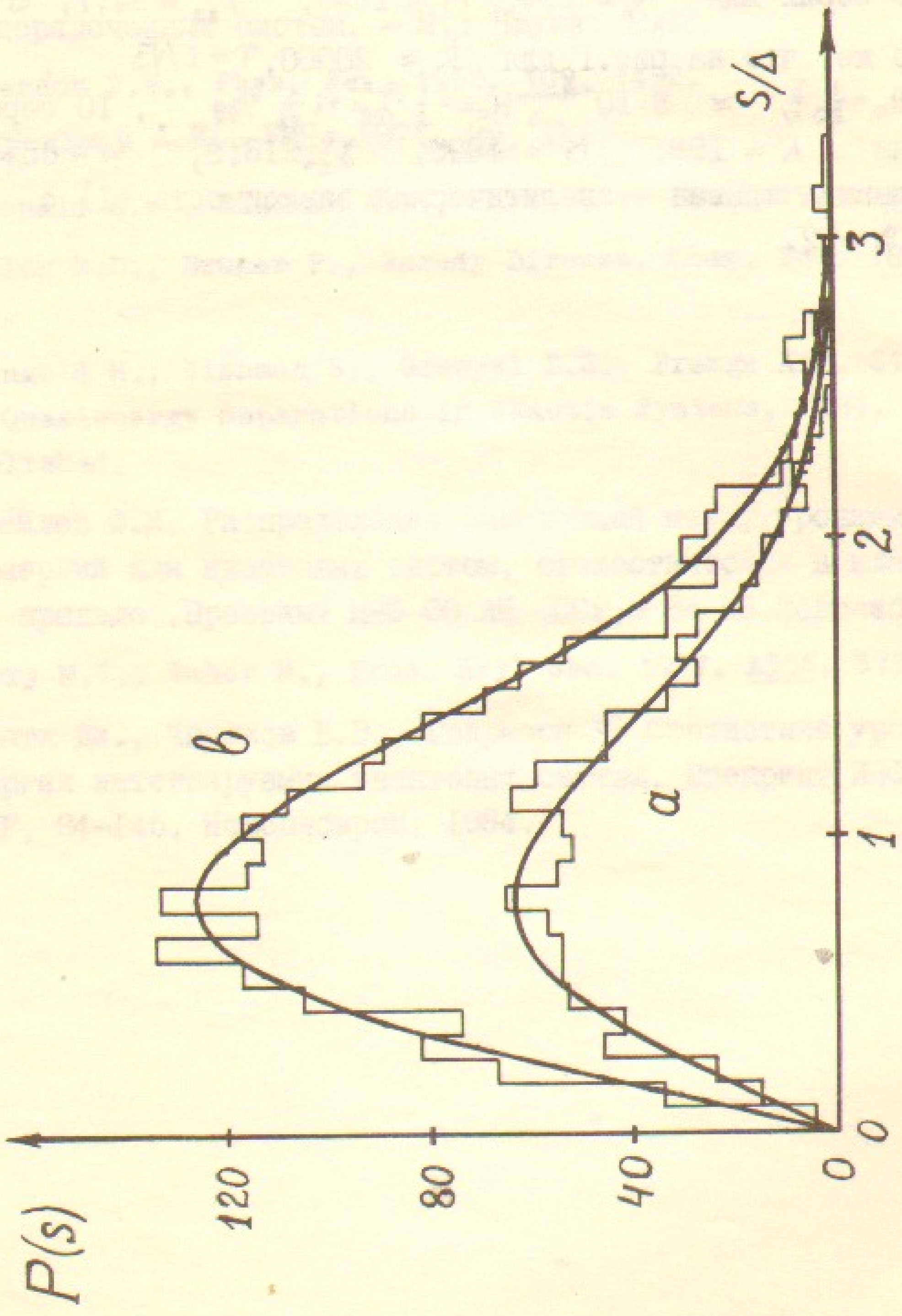

Рис.I

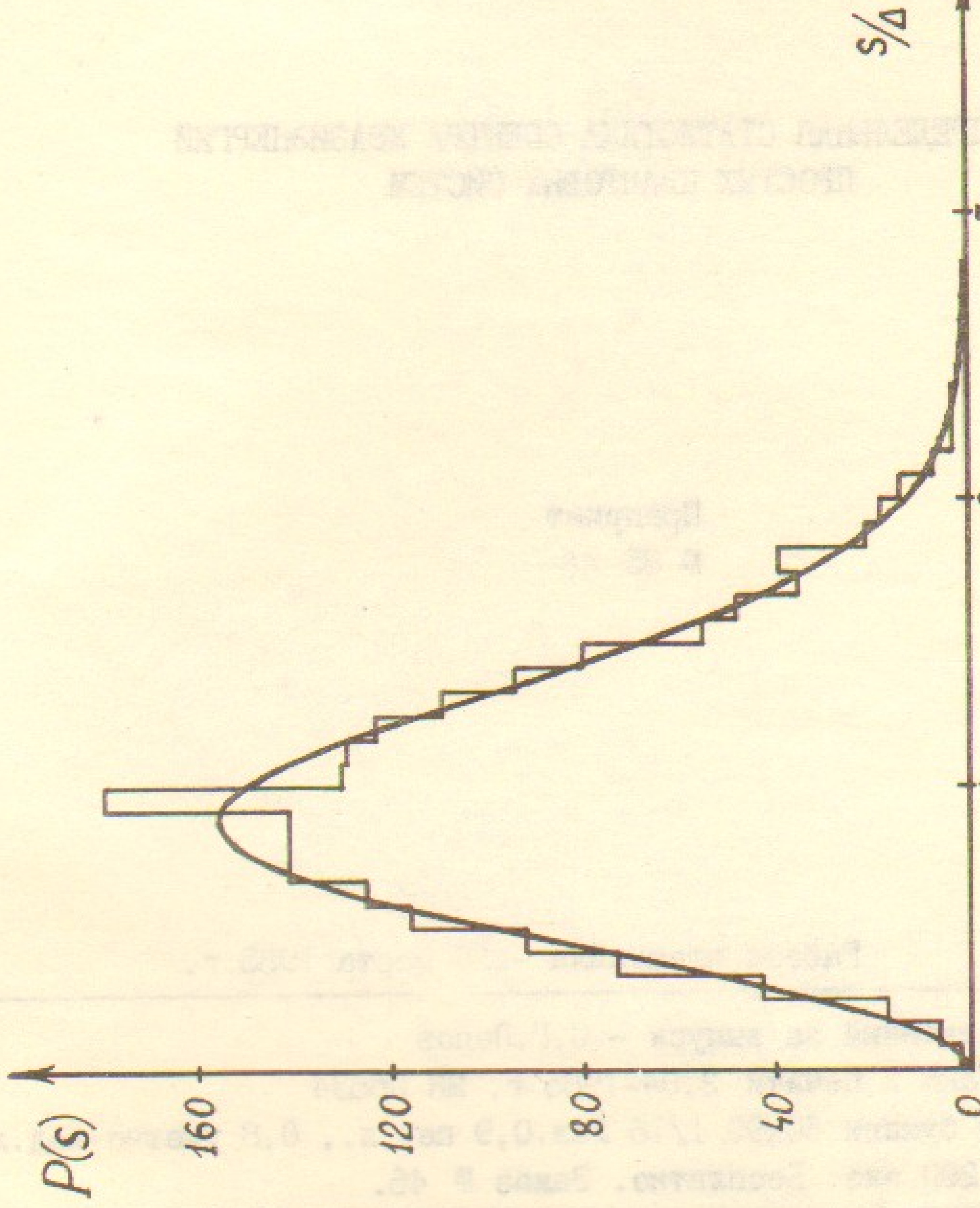

Рис.2

Ф.М.Израйлев

ПРЕДЕЛЬНАЯ СТАТИСТИКА СПЕКТРА КВАЗИЭНЕРГИЙ ПРОСТЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

Препринт
№ 85-46

Работа поступила - 28 марта 1985 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати 3.04-1985 г. МН 06634
Формат бумаги 60x90 I/16 Усл.0,9 печ.л., 0,8 учетно-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 46.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90