



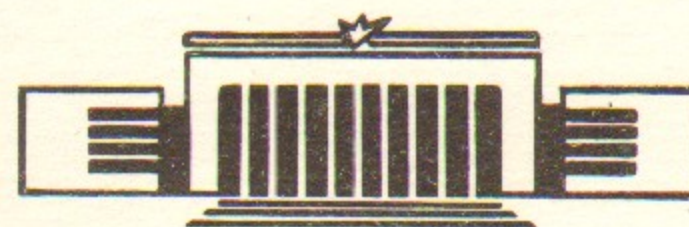
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

33

Б.В.Чириков

**ПЕРЕХОДНЫЙ ХАОС В КВАНТОВОЙ И
КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ**

ПРЕПРИНТ 85-55



НОВОСИБИРСК

ПЕРЕХОДНЫЙ ХАОС В КВАНТОВОЙ И КЛАССИЧЕСКОЙ
МЕХАНИКЕ

Б.В. Чириков

Институт ядерной физики, 630090, Новосибирск,
СССР

А Н Н О Т А Ц И Я

В статье анализируется классический пример Н.Н.Боголюбова о статистической релаксации многомерного линейного осциллятора и выясняется значение обнаруженного в этом примере механизма возникновения статистических законов для квантовой механики, а также для некоторых новых задач классической динамики.

І. Пролог

В 1945 г. Н.Н.Боголюбов опубликовал небольшую работу "Элементарный пример установления статистического равновесия в системе, связанной с термостатом" /1/. Пример этот описывается гамильтонианом

$$H = H_S + H_\Sigma + H_{S\Sigma} = \quad (I.1)$$

$$= \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (p_n^2 + \omega_n^2 q_n^2) + \varepsilon \sum_{n=1}^N \alpha_n q_n q$$

и представляет собой "пробный" гармонический осциллятор (H_S), слабо ($\varepsilon \rightarrow 0$) взаимодействующий ($H_{S\Sigma}$) с "термостатом" (H_Σ), составленным из N также гармонических осцилляторов с некоторым распределением по их частотам ω_n и энергиям $E_n = \frac{1}{2} (p_n^2 + \omega_n^2 q_n^2)$.

Предположив, что статистические свойства термостата описываются фазовой плотностью гиббсовского канонического ансамбля

$$\rho_\Sigma = \exp\left(\frac{\Psi - H_\Sigma}{T}\right) \quad (I.2)$$

а распределения α_n , ω_n имеют предел при $N \rightarrow \infty$

$$\sum_n \frac{\alpha_n^2}{\omega_n^2} \rightarrow \int d\omega \cdot \mathcal{J}(\omega) \quad (I.3)$$

где $\mathcal{J}(\omega)$ — некоторая непрерывная спектральная плотность возмущения, Н.Н.Боголюбов показал, что в этом пределе фазовая плотность ρ_S для пробного осциллятора также стремится при $t \rightarrow \infty$ к гиббсовскому распределению. Иначе говоря, в динамической системе (I.1) при $N \rightarrow \infty$ имеет место процесс статистической релаксации ее бесконечно малой подсистемы H_S . Если в начальный момент времени $t=0$ энергия этой подсистемы $E_S(0) = 0$, то согласно /1/ релаксация принимает особенно простой вид:

$$\rho_S = \frac{\omega}{2\pi T_S(t)} \cdot \exp\left[-\frac{E_S}{T_S(t)}\right]; T_S = T(1 - e^{-\gamma t}) \quad (I.4)$$

где скорость релаксации

$$\gamma = \frac{\pi}{2} \varepsilon^2 \mathcal{J}(\omega) \quad (I.5)$$

В этом примере Н.Н.Боголюбова был впервые ясно и строго продемонстрирован определенный механизм возникновения статистических законов, или, как сейчас говорят, хаоса, в динамической системе, механизм, который всегда неявно, интуитивно подразумевался на основе наглядных соображений об очень сложном, "запутанном" и нерегулярном характере движения динамической системы с огромным числом степеней свободы ($N \rightarrow \infty$). Следуя работе /2/, мы будем называть этот механизм временным, или переходным, хаосом. Смысл этого термина выяснится позже (§ 3). Такой подход, развитый далее и доведенный сейчас до совершенства самим Н.Н.Боголюбовым и его школой, Пригожиным и его школой, а также многими другими исследователями, является сегодня основой статистической физики макроскопических тел. Различные математические аспекты этой проблемы также исследованы к настоящему времени весьма подробно (см., например, /3/), начиная с классической работы Хинчина /4/.

Ключевым моментом механизма переходного хаоса, как это всегда подчеркивает Н.Н.Боголюбов /5/, является переход к пределу $N \rightarrow \infty$, который называется в статистической физике термодинамическим пределом. Существенным является также необходимость дополнительных статистических гипотез, которые в примере Н.Н.Боголюбова выражаются условиями (I.2) и (I.3). Первое из них означает, в частности, предположение о случайности и независимости начальных фаз осцилляторов термостата. Ясно поэтому, что релаксация к гиббсовскому распределению в примере Н.Н.Боголюбова есть некоторый специальный случай центральной предельной теоремы теории вероятностей.

Заметим, что условие (I.2) на самом деле несущественно (см. ниже, § 4), в том числе и гипотеза о случайных фазах, которая по теореме Каца /6/ может быть заменена требованием несоизмеримости (линейной независимости) частот ω_n . Необходимо, однако, предположить отсутствие корреляций между пробным осциллятором и термостатом в начальный момент времени. Это условие выполняется, в частности, если осциллятор находится вначале в определенном динамическом состоянии, например, $E_S(0) = 0$.

Интересно отметить, что недавно Н.Н.Боголюбов снова вернулся к своему классическому примеру в его квантовом варианте /5/.

Замечательная особенность этого примера с современной точ-

ки зрения связана с тем, что при любом конечном N это — простейший случай полностью интегрируемой системы. Такая система имеет полный набор N коммутирующих интегралов движения, все ее фазовые траектории лежат на N -мерных торах, а временная эволюция оказывается квазипериодической. Такое движение не является даже эргодическим, не говоря уже о каких-либо более сильных статистических свойствах (например, перемешивание). И тем не менее, в пределе $N \rightarrow \infty$, происходит статическая релаксация, для чего необходимо как минимум перемешивание. Более того, эта релаксация оказывается экспоненциальной по времени (I.4), что вообще является одним из наиболее сильных статистических свойств согласно современной эргодической теории. Возможность появления подобных статистических свойств у бесконечных систем, полностью интегрируемых при любом конечном N , сейчас действительно доказана /3/. В примере Н.Н.Боголюбова это связано с тем, что после-перехода к пределу $N \rightarrow \infty$, который производится вначале, спектр возмущения пробного осциллятора становится непрерывным (I.3), что является необходимым условием перемешивания. Важность предварительного перехода к непрерывному спектру возмущения особо подчеркивалась уже в первой работе этого цикла, опубликованной Н.Н.Боголюбовым и его учителем Н.М.Крыловым в 1939 г. (см. /7/), где таким способом было выведено диффузионное уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова как в классическом, так и в квантовом случаях.

Можно сказать поэтому, что полученная Н.Н.Боголюбовым релаксация (I.4) есть релаксация в непрерывном спектре, а термостат H_S представляет собой динамическую модель внешнего случайного шума. С точки зрения физики возникает, однако, важный вопрос — каковы статистические свойства модели Н.Н.Боголюбова (I.1) при произвольно большом, но конечном N ? Или иначе — можно ли получить релаксацию в дискретном спектре, т.е. переходя к пределам $N \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) не последовательно, а совместно? Мы обсудим эти вопросы ниже в § 4.

2. Динамический хаос

В 1939 г., т.е. в том же самом году, когда была опубликована статья Н.Н.Боголюбова и Н.М.Крылова /7/, появились работы Хедлунда и Хопфа /8/, которые положили начало современной эргодической теории (см., например, /9/), опирающейся на свойство

сильной (экспоненциальной) локальной неустойчивости динамического движения. Уже в конце 40-х годов эта новая теория была применена к проблеме обоснования статистической физики Н.С.Крыловым /10/.

В примере Н.Н.Боголюбова никакой неустойчивости, очевидно, нет, и поэтому в новой теории мы имеем дело с другим механизмом возникновения статистических законов в динамической системе. Наиболее разительное отличие его от переходного хаоса при $N \rightarrow \infty$ состоит как раз в том, что число степеней свободы системы N может быть не только конечным, но и очень малым. Например, для гамильтоновой системы достаточно $N > 1$, включая $N = 1, 5$ (одномерный нелинейный осциллятор под действием внешнего периодического возмущения). Если же не ограничиваться гамильтоновыми системами, то хаос возможен и в одномерном отображении, например, таком (см. /II/, §§ 5.2в, г):

$$\varphi_{n+1} = k\varphi_n \pmod{1} \quad (2.1)$$

где k - любое целое > 1 . Это отображение можно представить и в другом виде:

$$z_{n+1} = z_n^k; \quad z = e^{2\pi i\varphi} \quad (2.2)$$

Любопытно отметить, что решение этого разностного уравнения можно записать явно:

$$z_n = z_0^{(k^n)}; \quad \varphi_n = \varphi_0 k^n \pmod{1} \quad (2.3)$$

Это, однако, несколько не помогает избавиться от хаоса, который возникает при переходе от регулярно растущего, но нефизического угла (фазы) φ к физическому направлению вектора z , определяемого значением φ по модулю 1.

Другой простой пример (см. /II/, § ' .2в):

$$x_{n+1} = 4x_n(1-x_n) \quad (2.4)$$

также допускает явное решение

$$x_n = \text{Sin}^2(2^n \varphi_0) \quad (2.5)$$

которое показывает его связь с отображением (2.1).

Математическая теория такого хаоса была создана трудами Колмогорова и его школы, Аносова и его учеников и многих других исследователей (см. /9/). Среди физиков он получил название динамического хаоса (стохастичности).

Значение динамического хаоса состоит прежде всего в том, что он распространяет статистические законы на совершенно новую область простых (с небольшим N) динамических систем. Хотя в таких системах и нельзя ввести "макроскопические" переменные и, конечно, в них нет никакого "термодинамического предела", их эволюция также описывается некоторым кинетическим (в частности, диффузионным) уравнением, а возникающая при этом статистическая релаксация приводит (для замкнутой системы) к микроканоническому распределению. Если же N достаточно велико, то малая подсистема релаксирует к каноническому распределению Гиббса.

Источник динамического хаоса лежит в непрерывности фазового пространства классической механики. Фиксируя (абстрактно!) точные начальные условия движения, мы задаем бесконечное количество информации, которая "разворачивается" в процессе эволюции системы благодаря механизму локальной неустойчивости /12/.

Существует ли какая-то связь между двумя описанными выше и столь различными на первый взгляд механизмами хаоса? Ключ к решению этого вопроса лежит в следующем важном свойстве динамического хаоса: спектр хаотического движения является непрерывным (при конечном N !), т.е. как раз таким, ради которого и делается предельный переход $N \rightarrow \infty$ в теории переходного хаоса. Однако прежде чем ответить на поставленный вопрос посмотрим, что происходит с динамическим хаосом в квантовой механике.

3. Квантовый псевдохаос

Вопрос о возможности динамического хаоса в квантовой системе впервые рассматривался Н.С.Крыловым и был решен им отрицательно /10/. С тех пор этот ответ не изменился. Дело в том, что спектр энергий (и частот) любой квантовой системы, ограниченной в фазовом пространстве, является чисто дискретным, т.е. ее временная эволюция оказывается почти периодической. Это как раз случай, противоположный классическому динамическому хаосу.

Почти-периодичность волновой функции $\psi(t)$ является следствием фундаментальных принципов квантовой механики и может быть обоснована без ссылок на конкретные уравнения, например, уравнение Шредингера (см. /2/, § 3.1). Наглядно, невозможность непрерывного спектра прямо связана с дискретностью фазового пространства в квантовой механике (ср. § 5 ниже). Действительно, в классической механике аperiodический процесс, определяемый непрерывным спектром, связан с перемешиванием, т.е. с неограниченным дроблением в процессе движения любой начальной области фазового пространства на все более и более мелкие части. Однако в квантовой механике минимальная "ячейка" фазового пространства имеет конечный "размер" \hbar , и процесс перемешивания неминуемо останавливается, что и приводит к дискретному спектру вектора квантового состояния $\psi(t)$.

Мы видим, что имеется далеко идущая аналогия между квантовой динамикой и динамикой классической полностью интегрируемой системы, например, такой как модель Н.Н.Боголюбова (I.I). Ясно также, что в обоих случаях существенно не столько число степеней свободы, сколько число независимых частот N_ω , определяющих динамику. При $N \rightarrow \infty$ как в классической, так и в квантовой механике $N_\omega \rightarrow \infty$, и возникает переходный хаос, механизм которого остается, по существу, тем же самым в обоих случаях как это было выяснено уже в первой работе Н.Н.Боголюбова и Н.М.Крылова /7/.

В квантовой механике, однако, есть и другая возможность: при конечном $N > 1$ (в том числе и малом) $N_\omega \rightarrow \infty$, что соответствует квазиклассическому пределу.

При любом конечном N_ω настоящий хаос невозможен. Однако, по крайней мере в квантовой механике, существует фундаментальный принцип соответствия, требующий тем не менее перехода к классической механике, в том числе и к динамическому хаосу. Как разрешить это очевидное противоречие? Такой вопрос был поставлен и решен в работе /2/. Идея решения состоит во введении характерных временных масштабов квантовой эволюции. Наиболее важным из них представляется так называемый диффузионный (релаксационный) масштаб, который согласно /2/ определяется оценкой: $t_d \sim \hbar \eta$, где η — средняя плотность уровней энергии системы (или квазиэнергии при периодическом внешнем возмущении). Физический смысл

этой оценки очень простой и также связан с фундаментальной основой квантовой механики — принципом неопределенности. Действительно, пока $t \ll t_d$ неопределенность энергии $\Delta E \gg \hbar^{-1}$ много больше среднего расстояния между уровнями, и система еще "не чувствует" дискретности спектра. Следовательно, ее временная эволюция временно определяется как бы непрерывным спектром, а, значит, она может быть такой же как и в классическом пределе. Численные эксперименты /2, I3, I4/ показывают, что эволюция на этом масштабе действительно близка к классической, несмотря на отсутствие сильной локальной неустойчивости движения /I3/. Численное моделирование показывает также, что при $t \gg t_d$ диффузия в квантовой системе полностью останавливается /2, I3-I5/, что приводит к стационарным колебаниям $\psi(t)$ и локализации квантового состояния в импульсном пространстве (в частности, на энергетической поверхности).

В случае зависящего от времени возмущения это всегда приводит к прекращению классического процесса релаксации на некоторой конечной длине локализации. Однако для замкнутой системы с ограниченными энергетическими поверхностями ситуация существенно изменяется. Если длина локализации много больше размера энергетической поверхности, то система успевает релаксировать к микроканоническому распределению, что означает эргодичность ее собственных функций /I6/. Условие эргодичности определяется параметром дискретности квантового спектра

$$\mathcal{X} = \frac{t_d}{t_R} \sim \hbar \eta \cdot \eta \gtrsim 1 \quad (3.1)$$

где $t_R = \eta^{-1}$ — характерное время релаксации к микроканоническому распределению в классическом пределе.

Однако даже и при эргодических собственных функциях временная эволюция квантовой системы остается почти периодической. Квантовый хаос, следовательно, может быть, самое большее, лишь имитацией настоящей случайности, которая достигается только в классическом пределе (ср. § 5 ниже). Квантовая имитация хаоса распространяется максимум на время масштаба t_d , откуда и название временный, или переходный, псевдохаос /2/.

4. Релаксация в дискретном спектре

Теперь мы можем вернуться к классическому примеру Н.Н.Боголюбова и попытаться ответить на два вопроса, поставленные в конце § I.

Рассмотрим сначала случай фиксированного $N \gg 1$. Тогда спектр возмущения пробного осциллятора в модели (I.1) является дискретным с некоторой конечной средней плотностью частот $\bar{\omega} = N/\Delta$, где $\Delta \neq 0$ — полная ширина спектра осцилляторов термостата. Исследование квантовой динамики, описанное в предыдущем параграфе, подсказывает нам, что и в рассматриваемом классическом примере существует характерный масштаб времени $t_d \sim \tau$. Действительно, соотношение неопределенности классической теории колебаний ($\Delta\omega \cdot \Delta t \gtrsim 1$) показывает, что при $t \ll \tau$ дискретный спектр возмущения не разрешается системой и не отличается по своему действию от непрерывного спектра с плотностью

$$Y(\omega) = \frac{\alpha^2(\omega) \cdot \bar{\omega}(\omega)}{\omega^2} \quad (4.1)$$

Поэтому на масштабе τ пробный осциллятор будет релаксировать также, как и в пределе $N \rightarrow \infty$ (I.4), если только $\gamma \ll \Delta$ — условие, которое всегда удовлетворяется при $\varepsilon \rightarrow 0$. Однако результат релаксации существенно зависит от классического параметра дискретности:

$$\mathcal{X} = \tau \gamma \sim \left(\frac{\varepsilon \alpha \tau}{\omega} \right)^2 \lesssim N \quad (4.2)$$

который вполне аналогичен квантовому параметру (3.1). Последнее неравенство соответствует условию $\gamma \lesssim \Delta$ выше.

Если $\mathcal{X} \gg 1$, то релаксация успеет произойти, как и в квантовом случае, несмотря на дискретность спектра. Правда, поскольку зависимость $q(t)$ является почти периодической, любая релаксирующая ^{величина} выходит, как и в квантовом случае, на стационарные колебания. Однако характерная амплитуда колебаний убывает с ростом \mathcal{X} , и они могут быть устранены усреднением по времени. Действительно, пробный осциллятор эффективно взаимодействует с термостатом в интервале частот $\sim \gamma$, в котором число осцилляторов $\sim \tau \gamma = \mathcal{X}$. Отсюда флуктуации имеют порядок $\mathcal{X}^{-1/2}$.

В этом же состоит ответ и на второй вопрос § I. Можно переходить к обоим пределам $N \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty (\varepsilon \rightarrow 0)$ совместно при условии, что $\mathcal{X} \rightarrow \infty$ также, т.е. $\varepsilon^2 N \rightarrow \infty$, если $\gamma = \text{const} (\alpha^2 N = \text{const})$ или $\varepsilon N \rightarrow \infty$ при $\alpha = \text{const}$. Если же $\mathcal{X} = \text{const}$ при $N \rightarrow \infty$, то релаксация никогда не будет полной в смысле остаточных стационарных колебаний.

Рассмотрим теперь более интересный случай $\mathcal{X} \ll 1$. При законе релаксации (I.4) средняя энергия пробного осциллятора не успеет при этом за время τ подняться до $\langle E_S \rangle = T$. Прямой аналогия с квантовым хаосом (§ 3) приводит к оценке: $\langle E_S \rangle \sim \mathcal{X} T$, которая, однако, оказывается неверной. Чтобы понять, в чем дело, поступим следующим образом. Используя уравнения движения пробного осциллятора модели (I.1) и пренебрегая изменением энергии термостата, получим при достаточно малом ε и $E_S(0) = 0$ (ср. § I):

$$q(t) \approx \frac{\varepsilon}{\omega} \sum_{n=1}^N \frac{\alpha_n a_n}{\Delta \omega_n} \sin\left(\frac{\Delta \omega_n \cdot t}{2}\right) \cdot \sin\left(\omega t + \varphi_n - \frac{\Delta \omega_n \cdot t}{2}\right)$$

где $\Delta \omega_n = \omega - \omega_n$; a_n, φ_n — амплитуды и фазы осцилляторов термостата. Принимая фазы φ_n случайными и независимыми и усредняя по ним, найдем

$$\langle E_S(t) \rangle \approx \varepsilon^2 \sum_{n=1}^N \frac{\alpha_n^2}{\omega_n^2} E_n \frac{\sin^2\left(\frac{\Delta \omega_n \cdot t}{2}\right)}{(\Delta \omega_n)^2}$$

В процессе релаксации (I.4) пробный осциллятор взаимодействует с термостатом в полосе частот $\Delta \omega \sim \gamma \sim \mathcal{X}/\tau$, где число осцилляторов $\sim \tau \Delta \omega \sim \mathcal{X}$. Если $\mathcal{X} \gg 1$, то число таких осцилляторов велико и взаимодействие определяется их средней плотностью $\bar{\omega}$ по частоте. Если же $\mathcal{X} \ll 1$, то среднее по времени

$$\bar{E}_S \approx \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{n=1}^N \frac{\alpha_n^2 E_n}{\omega_n^2 (\Delta \omega_n)^2}$$

зависит от нескольких ближайших по частоте осцилляторов с наименьшей расстройкой $|\Delta \omega_n|$. Среднее по различным реализациям термостата (или по ансамблю пробных осцилляторов с разными ω) зависит от принятого закона распределения осцилляторов по частоте. Пусть, например, плотность этого распределения остается постоянной при $\Delta \omega_n \rightarrow 0$. Для грубой оценки предположим также,

что сумма (4.6) определяется единственным слагаемым с минимальным $|\Delta\omega_n| \equiv \Omega \ll 1/\tau$. Наименьшее значение Ω , при котором еще справедливо соотношение для \bar{E}_S , определяется из условия $\bar{E}_S \sim \langle E_n \rangle = T$ (при этом имеет место полный обмен энергией с осциллятором термостата), а наибольшее $\Omega \sim 1/\tau$ (при этом начинается обмен энергией с несколькими осцилляторами). В результате получаем следующую оценку для функции распределения пробного осциллятора

$$f(\lambda) d\lambda \sim \frac{\sqrt{\alpha}}{\lambda^{3/2}} d\lambda; \quad \lambda = \frac{\bar{E}_S}{T}$$

где согласно сказанному выше $\alpha \leq \lambda \leq 1$. Отсюда среднее

$$\langle \lambda \rangle \sim \sqrt{\alpha} \ll 1$$

Иначе говоря, при $\alpha \ll 1$ пробный осциллятор не успевает "нагреться" до температуры термостата T . Условие релаксации попрежнему определяется параметром дискретности (4.2): $\alpha \geq 1$.

Чтобы сделать аналогию с квантовой теорией еще более полной, мы несколько усложним пример Н.Н.Боголюбова, введя линейное взаимодействие между всеми осцилляторами ($\alpha_n \rightarrow \alpha_{mn}$), и рассмотрим их совместную релаксацию. Эта задача сводится к диагонализации матрицы

$$H_{mn} = \omega_n^2 \delta_{mn} + \varepsilon \alpha_{mn} \quad (4.3)$$

поворотом координатных осей: $q_n \rightarrow Q_m$, где $q_n = v_{nm} Q_m$; v_{mn} - ортогональная матрица, а Q_m - нормальные координаты. Но именно такая задача возникает в теории случайных матриц (см., например, /17/) - статистической теории сложных квантовых систем, в которой явным образом учитывается дискретность квантового спектра.

Возвращаясь к нашей механической задаче, заметим прежде всего, что в примере Н.Н.Боголюбова (I.I) предположение (I.2) о каноническом распределении осцилляторов термостата несущественно. В работе /1/ это предположение используется только для получения соотношения $\langle E_n \rangle = T$ (ср./7/). Поэтому релаксация (I.4) будет иметь место при любом (несингулярном) ρ_{Σ}

с тем лишь отличием, что температура пробного осциллятора будет определяться теперь средней энергией "термостата" на частоте $\omega_n \approx \omega$: $T \rightarrow \langle E_n \rangle_{\omega_n = \omega}$. Релаксация будет, таким образом, носить локальный (по частоте) характер.

Такая же релаксация будет происходить и для усложненной модели (4.9) при условии, что $1 \leq \alpha \leq N$ (4.2). Заметим, что для квантовой задачи условие $\alpha \geq 1$ означает возможность переходов между соседними уровнями энергии, т.е. неприменимость теории возмущения. Действительно, возмущение $\varepsilon \alpha$ превышает при этом среднее расстояние между невозмущенными собственными значениями $\delta\omega^2 \sim \omega \delta\omega \sim \omega \Delta / N$. Это есть необходимое условие квантового псевдохаоса, известное как критерий Шурыка /18/.

Локальная релаксация приводит к каноническому распределению осцилляторов с температурой $T(\omega)$, вообще говоря зависящей от частоты. Каковы условия выравнивания температуры во всей полосе частот Δ ? Иначе говоря, когда локальная релаксация становится глобальной? Очевидно, что для этого достаточно, чтобы в процессе релаксации эффективно взаимодействовали все осцилляторы, т.е. чтобы $\gamma \geq \Delta$, или

$$\varepsilon^2 N \frac{\alpha^2}{\omega^2 \Delta^2} \sim \frac{\alpha}{N} \geq 1 \quad (4.4)$$

В этом случае все осцилляторы релаксируют совместно. Такая глобальная релаксация протекает, конечно, совсем по-другому, нежели локальная (I.4), поскольку необходимое условие последней ($\gamma \ll \Delta$) как раз и нарушено (4.4).

Глобальная релаксация в линейном многомерном осцилляторе, повидимому, впервые наблюдалась Фордом и др. /19/ в численных экспериментах с вариантом модели (4.3) при $\Delta = 0$, т.е. в вырожденном (резонансном) случае, когда все невозмущенные частоты равны. Условие (4.4) при этом, конечно, выполняется, однако, локальная релаксация невозможна.

В квантовой задаче этот результат можно интерпретировать двумя способами. Оценим сначала смещение "невозмущенных" собственных значений $\delta\omega_n^2$ матрицы H_{mn} (4.3) под действием "возмущения" $\varepsilon \alpha_{mn}$. Принимая, что элементы матрицы α_{mn} являются случайными и независимыми, получим оценку: $\delta\omega_n^2 \sim \varepsilon \alpha_{mn} \sqrt{N}$.

Принимая, что элементы матрицы α_{mn} являются случайными и независимыми, получим оценку: $\delta\omega_n^2 \sim \varepsilon \alpha_{mn} \sqrt{N}$. Тогда условие (4.4) означает, что $\delta\omega_n \gtrsim \Delta$, т.е. возмущение смешивает все невозмущенные состояния. Иначе можно сказать, что собственные вектора полной системы (4.3) являются эргодическими в невозмущенном базисе. Условие этого для матриц вида (4.3) со слабым случайным возмущением, полученное в теории случайных матриц, действительно совпадает с (4.4) (см., например, /17/, гл. IV & , где $\alpha \sim \omega^2 \sim \Delta^2$). Этот результат был впервые получен численно в работе /20/ и затем объяснен аналитически /21/. Разумеется, такая же интерпретация возможна и в классическом случае, где "пересечение" частот нормальных осцилляторов с ростом возмущения означает, что последние становятся суперпозицией все большего и большего числа невозмущенных осцилляторов.

С этой точки зрения релаксация одного из невозмущенных осцилляторов q_n к каноническому распределению определяется следующим образом. Записав

$$Q_m = A_m e^{i\nu_m t}; \quad q_n = a_n(t) e^{i\omega_n t}$$

получим из соотношения $q_n = b_{nm} Q_m$ (см. выше)

$$a_n(t) = b_{nm} A_m e^{it(\nu_m - \nu)}$$

При выполнении условия (4.4) все b_{nm} одного порядка, точнее $\langle b_{nm}^2 \rangle = 1/N$ (эргодичность!), и обратное время глобальной релаксации $\gamma \sim |\nu - \omega| \sim \Delta$ ($\ll \omega$).

Наконец, еще одна квантовая интерпретация условия (4.4) связана с критерием Шурика для переходов между любыми невозмущенными уровнями системы (4.3). Матричный элемент перехода с любого уровня на все остальные (или наоборот) имеет порядок $\varepsilon \alpha \sqrt{N}$, а среднее расстояние между произвольными уровнями $\sim \omega \Delta$. Отсюда условие сильного смешивания $\varepsilon \alpha \sqrt{N} \gtrsim \omega \Delta$, что совпадает с (4.4).

5. Эпилог

Простой пример Н.Н.Боголюбова, раскрывающий механизм пере-

ходного хаоса в классической статистической механике, оказывается весьма полезным и для квантового хаоса, где подобный механизм является единственно возможным. В частности, теория случайных матриц в квантовой механике имеет далеко идущую аналогию со значительно менее разработанной (как это ни странно!) теорией классического многомерного линейного осциллятора.

Ну, а если классический осциллятор нелинейный? Квантовая механика может помочь и в этом случае, если осциллятор полностью интегрируем как, например, цепочка Тоды (см. /II/, § I.3в). Критическим здесь также является смешивание большого числа невозмущенных состояний. В этом смысле переходный хаос есть и в линейной цепочке для колебания отдельных масс. Здесь существенна нелинейная дисперсия волн в цепочке, что обеспечивает необходимую для переходного хаоса несоизмеримость частот колебаний. В случае нелинейной (но интегрируемой) цепочки возможно также смешивание линейных (невозмущенных) мод колебаний. В обоих случаях для получения переходного хаоса начальные условия движения должны обеспечивать возбуждение большого числа нормальных (собственных) колебаний. Для этого достаточно, например, локализации начального состояния по невозмущенным колебаниям: возбуждение одной массы в линейной цепочке или одной линейной моды в нелинейной цепочке. В последнем случае релаксация (равнораспределение энергии по линейным модам) наблюдалось Фордом и сотрудниками /22/ в численных экспериментах с цепочкой Тоды.

Есть и другая область приложений переходного хаоса в классической механике, которая оказывается еще ближе к квантовой динамике. Это - линейные волны в неоднородной среде с дисперсией, например, в плазме /23/ или в волноводах и резонаторах /24/. Поучительно отметить, что в последнем случае казавшаяся академической задача Синая о динамике классических бильярдов /25/ приобретает важное практическое значение. В приближении геометрической оптики (аналог квазиклассики в квантовой механике) в таких системах возможно возникновение хаоса /23, 24/. Существенно, однако, что этот хаос является только переходным, т.е. псевдохаосом.

Наконец, последнее по счету, но не по важности, приложение относится к глобальной проблеме численного моделирования

классического динамического хаоса. Принципиальным ограничением такого моделирования является дискретность любых величин на цифровом компьютере. Это вызывает наивные аналогии с дискретным фазовым пространством в квантовой механике. Фактически, компьютерная динамика оказывается даже более "квантовой", поскольку любая динамическая траектория на дискретной решетке становится в конце концов просто периодической, а не почти периодической как квантовая эволюция $\psi(t)$. Эта проблема обсуждалась недавно в работе /2/, но по существу давно известна из теории и практики генераторов псевдослучайных чисел на компьютере. Такие генераторы (алгоритмы) появились в начале 50-х г.г., задолго до развития теории динамического хаоса. Тогда термин "псевдо" отражал распространенное убеждение в принципиальной невозможности "настоящей" случайности в динамической системе. Сейчас мы знаем, что это не так (§ 2). Однако термин "псевдо" остается и отражает теперь тот факт, что на цифровом компьютере (как в квантовой механике!) возможна лишь временная имитация настоящей динамической случайности. Например, отображение (2.1) в действительных числах дает случайную последовательность $\varphi_n \pmod{1}$. Однако, то же самое отображение в целых числах (один из наиболее распространенных и хороших генераторов) дает псевдослучайную последовательность целых φ_n , которая на самом деле является периодической. Более того, в работе /2/ показано, что простая дискретизация переменной действия классической хаотической динамической системы $(\mathcal{Y} \rightarrow n \cdot \Delta \mathcal{Y})$ качественно моделирует квантовый псевдохаос с $\hbar = \Delta \mathcal{Y}$!

Таким образом, явление переходного псевдохаоса, послужившее когда-то основой классической статистической физики и вытесненное затем настоящим динамическим хаосом, обрело теперь второе рождение в квантовой механике и, возможно, поможет решить новые задачи и в классической динамике.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Н.Н.Боголюбов. О некоторых статистических методах в математической физике. Киев: АН УССР, 1945, с.115. Избранные труды. Киев: Наукова думка, 1970, т.2, с.77.
2. В.В.Чириков, Ф.М.Израилев, Д.Л.Шепельянский. Sov. Sci. Rev. 2C, 209 (1981).
3. М.Айзенман, С.Голдштейн, Ж.Л.Лебовиц. Comm. Math. Phys. 39, 289 (1975); С.Голдштейн, *ibid*, p. 303.
4. А.Я.Хинчин. Математические основания статистической механики. М.: Гостехиздат, 1943.
5. Н.Н.Боголюбов. О некоторых проблемах, связанных с обоснованием статистической механики. II Международный симпозиум по избранным проблемам статистической механики (Дубна, 1981). Дубна: ОИЯИ, 1981, с.9.
6. М.Кац. Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел. М.: ИИЛ, 1963, с.74.
7. Н.Н.Боголюбов, Н.М.Крылов. Об уравнениях Фоккера-Планка, получаемых в теории возмущений с помощью метода, основанного на спектральных свойствах гамильтониана возмущений. (Применение к классической и квантовой механике). В кн.: Н.Н.Боголюбов. Избранные труды. Киев: Наукова думка, 1970, т.2, с.5.
8. G.Hedlund. Bull. Amer. Math. Soc. 45 (1939) 241; E.Hopf. Ber. Verhandl. Sächs. Acad. Wiss. 91 (1939) 261.
9. V.I.Arnold, A.Avez. Ergodic Problems of Classical Mechanics. New York, Benjamin, 1968; И.П.Корнфельд, Я.Г.Синай, С.В.Фомин. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
10. Н.С.Крылов. Работы по обоснованию статистической физики. М.: АН СССР, 1950.
11. А.Лихтенберг, М.Либерман. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
12. В.В.Чириков. Lecture Notes in Physics, 179 (1983) 29.
13. Д.Л.Шепельянский. Physica 8D (1983) 208.
14. G.Casati et al. Lecture Notes in Physics, 93 (1979) 334.

15. T.Hogg, B.A.Huberman. Phys. Rev. Lett, 48 (1982) 711.
16. А.И.Шнирельман. УМН 29: 6 (1974) 181; M.V.Berry. J.Phys. A10 (1977) 2083; A.Voros. Lecture Notes in Physics, 93 (1979) 326.
17. T.A.Brody et al. Rev. Mod. Phys. 53 (1981) 385.
18. Э.В.Шуряк. ЖЭТФ 71 (1976) 2039.
19. J.Ford, J.Waters. J. Math. Phys. 4 (1963) 1293.
20. N.Rosenzweig, C.E.Porter. Phys. Rev. 120 (1960) 1698.
21. F.J.Dyson. J. Math. Phys. 3 (1962) 1191.
22. J.Ford, S.D.Stoddard, J.S.Turner. Prog. Theor. Phys. 50 (1973) 1547.
23. J.Wersinger, E.Ott, J.M.Finn. Phys. Fluids 21 (1978) 2263.
24. С.С.Абдуллаев, Г.М.Заславский. ЖЭТФ 85 (1983) 1573.
25. Я.Г.Синай. УМН 25: 2 (1970) 141.

Б.В.Чириков

ПЕРЕХОДНЫЙ ХАОС В КВАНТОВОЙ И КЛАССИЧЕСКОЙ
МЕХАНИКЕ

Препринт
№ 85- 55

Работа поступила - 15 апреля 1985 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати 29.04.85г. МН 06654
Формат бумаги 60x90 1/16 Усл. 1,4 печ.л., 1,1 учетно-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 55

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90