



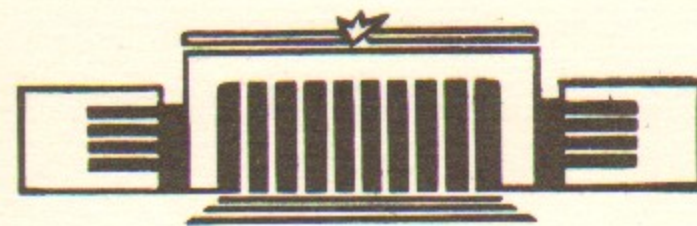
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

42

Э.А.Кураев, А.Н.Перышкин

ПРОЦЕССЫ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ  
ТИПА  $2 \rightarrow 4$ ,  
ИДУЩИЕ В  $e^+e^-$ -СТОЛКНОВЕНИЯХ  
ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

ПРЕПРИНТ 85-69



НОВОСИБИРСК

тиснади

И.А.Кураев, А.Н.Перышкин

ПРОЦЕССЫ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ТИПА 2 → 4 ИДУЩИЕ  
В e<sup>+</sup>e<sup>-</sup>-СТОЛКНОВЕНИЯХ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

Новосибирск  
1981

Важность вопроса описания квантовой электродинамики в процессах рождения и аннигиляции частиц в столкновениях электронов и позитронов при высоких энергиях исследована. Эти процессы описаны в рамках квантовой электродинамики, в которой учтены все возможные каналы взаимодействия. Представлены результаты расчетов для процессов рождения и аннигиляции частиц в столкновениях электронов и позитронов. Для этого использованы методы квантовой электродинамики. Результаты расчетов приведены для процессов рождения и аннигиляции частиц в столкновениях электронов и позитронов.

ПРОЦЕССЫ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ТИПА 2 → 4 ИДУЩИЕ  
В e<sup>+</sup>e<sup>-</sup>-СТОЛКНОВЕНИЯХ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

Э.А.Кураев, А.Н.Перышкин

Вычислены дифференциальные сечения процессов e<sup>+</sup>e<sup>-</sup> → γγγγ, e<sup>+</sup>e<sup>-</sup> → γγ, μ<sup>+</sup>μ<sup>-</sup>γγ, π<sup>+</sup>π<sup>-</sup>γγ, q<sup>+</sup>q<sup>-</sup>μ<sup>+</sup>μ<sup>-</sup> для случая, когда энергии E<sub>i</sub> конечных частиц велики по сравнению с массами частиц, а углы между любой парой импульсов велики по сравнению с M<sub>m</sub>/E. Сечения выражены через некоторые универсальные комбинации поперечных и продольных импульсов и энергий. Сформулированы проверочные тесты. Для полноты приведены также сечения процессов e<sup>+</sup>e<sup>-</sup> → γγγ, μ<sup>+</sup>μ<sup>-</sup>γγ, e<sup>+</sup>e<sup>-</sup>γ, π<sup>+</sup>π<sup>-</sup>γ.

В работе описаны результаты расчетов дифференциальных сечений процессов рождения и аннигиляции частиц в столкновениях электронов и позитронов при высоких энергиях. Рассмотрены процессы рождения и аннигиляции фотонов, мюонов и пионов. Для этого использованы методы квантовой электродинамики. Результаты расчетов приведены для процессов рождения и аннигиляции частиц в столкновениях электронов и позитронов. Для этого использованы методы квантовой электродинамики. Результаты расчетов приведены для процессов рождения и аннигиляции частиц в столкновениях электронов и позитронов.

Иллюстрации отсутствуют. Включены в текст.

Важность знания сечений неупругих процессов квантовой электродинамики идущих при  $e^+e^-$  столкновениях высоких энергиях несомненна. Они являются существенным фоном, который необходимо учитывать при изучении свойств тяжелых адронных систем, а также проявлений слабых взаимодействий. Представляет также интерес проверка предсказаний квантовой электродинамики для многочастичных процессов. Для этой цели установки с полной энергией  $2\varepsilon$  порядка одного или нескольких ГэВ имеют преимущество перед ускорителями с полной энергией в несколько десятков ГэВ, поскольку сечения падают как  $\varepsilon^{-2}$ . Вычисление сечений процессов  $2 \rightarrow 3$ , а особенно  $2 \rightarrow 4$  традиционными методами (введение матриц плотности и суммирование по спиновым состояниям посредством вычисления следов) представляет очень трудоемкую задачу. Сечение при этом имеет весьма громоздкий вид. Недавно в серии работ 1-2 был развит метод расчета спиральных амплитуд, вычислены сечения процессов  $2 \rightarrow 3$  и некоторых процессов  $2 \rightarrow 4$ :  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$  [3],  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma\gamma$  [4],  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma\gamma$  [5], сформулирован рецепт расчета сечения процесса образования двух фермионных пар [6]. Изучались процессы образования 3-х струй, а также 4-х струй в рамках квантовой хромодинамики [7].

Здесь мы получим сечения процессов  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma(n2), \mu^+\mu^-\gamma\gamma(n5), e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma\gamma(n4), \pi^+\pi^-\gamma\gamma(n5)$  и получим аналитическое выражение для сечения процесса образования двух различных пар фермионов (n6). В этом пункте приводим для полноты сечение процессов  $2 \rightarrow 3$ . В приложениях А, Б и в начале пунктов 3, 4 мы подробно описываем свойства состояний фотона и фермиона с определенной спиральностью, вычисляем средние по спиновым состояниям начальных частиц различных комбинаций матриц Дирака, в терминах которых выражены сечения. Сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma\gamma$ , полученным нами [5], (см. п. 3), совпадает с результатом, полученным в [4] (в [4] принято обратное направление осей).

Полученные нами результаты в случае, когда один из фотонов мягкий или летит под малым углом к одной из заряженных частиц, согласуются с результатом прямого вычисления с применением методов классических токов и квазиреальных электронов. Эти тесты сформулированы в конце пункта 3.

Характерной особенностью спиральных амплитуд двойного тормозного излучения при образовании двух заряженных частиц в слу-

чае, когда спиральности фотонов одинаковы, является их факторизованный вид как и в случае процессов  $2 \rightarrow 3$ . Аналогичное упрощение имеется и для спиральных амплитуд 4-х квантовой аннигиляции в случае, когда спиральности трех фотонов совпадают. При этом два из множителей есть множители сопровождающего излучения. Остальные амплитуды имеют более громоздкий вид, численно для общей кинематики они одного порядка.

Ниже будет рассмотрен случай, когда энергии конечных частиц одного порядка, а углы между направлениями их движения в сци также, как и к оси пучков  $\vec{P}_-$  не малы. В этом случае все частицы могут рассматриваться как безмассовые:

$$E_i \sim \varepsilon, \theta_i \sim 1, m_i = 0. \quad (I.1)$$

Сечение процесса трехквантовой аннигиляции

$$e^+(P_+) + e^-(P_-) \rightarrow \gamma(k_1) + \gamma(k_2) + \gamma(k_3)$$

имеет вид

$$d\sigma^{e^+e^- \rightarrow 3\gamma} = \frac{1}{3!} \frac{\alpha^3}{8\pi^2 s} \frac{(\chi_1^2 + \chi_1'^2)\chi_1\chi_1' + (\chi_2^2 + \chi_2'^2)\chi_2\chi_2' + (\chi_3^2 + \chi_3'^2)\chi_3\chi_3'}{\chi_1\chi_1'\chi_2\chi_2'\chi_3\chi_3'}. \quad (I.2)$$

$$\cdot \frac{d^3k_1}{\omega_1} \frac{d^3k_2}{\omega_2} \frac{d^3k_3}{\omega_3} \delta^{(4)}(P_+ + P_- - k_1 - k_2 - k_3),$$

где

$$s = (P_+ + P_-)^2, \chi_i = k_i P_-, \chi_i' = k_i P_+, \sum \chi_i = \sum \chi_i'$$

Сечение процесса тормозного излучения при аннигиляции  $e^+e^-$  в пару мюонов

$$e^+(P_+) + e^-(P_-) \rightarrow \mu^+(q_+) + \mu^-(q_-) + \gamma(k)$$

имеет вид

$$d\sigma^{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma} = \frac{\alpha^3}{8\pi^2 s} W \cdot \frac{t^2 + t_1^2 + u + u_1^2}{ss_1} \frac{d^3q_+}{q_{+0}} \frac{d^3q_-}{q_{-0}} \frac{d^3k}{k_0} \delta^{(4)}(P_+ + P_- - q_+ - q_- - k), \quad (I.3)$$

$$W \equiv -(v_p - v_q)^2 = -\left(-\frac{P_-}{P_+ k} + \frac{P_+}{P_+ k} + \frac{q_-}{q_- k} - \frac{q_+}{q_+ k}\right)^2 = \frac{1}{4} [v_{P_+} \cdot v_{P_-} \cdot q_+ \cdot q_- \cdot k]^{-1} [2ss_1(t+t_1) + 2t_1(s_1 s_1) + u_1(s_1 s_1) + u(s_1 s_1)] \quad (I.4)$$

а инварианты здесь и всюду ниже (кроме пункта 6) определены следующим образом

$$s = (P_+ + P_-)^2, t = (P_- - q_-)^2, u = (P_- - q_+)^2, \quad (I.5)$$

$$s_1 = (q_+ + q_-)^2, t_1 = (P_+ - q_+)^2, u_1 = (P_+ - q_-)^2.$$

Сечение процесса тормозного излучения при  $e^+e^-$  аннигиляции в пару заряженных точечных (бесструктурных) пионов

$$e^+(P_+) + e^-(P_-) \rightarrow \pi^+(q_+) + \pi^-(q_-) + \gamma(k)$$

имеет вид

$$d\sigma^{e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma} = \frac{\alpha^3}{8\pi^2 s} W \cdot \frac{t + t_1 u_1}{ss_1} \frac{d^3q_+}{q_{+0}} \frac{d^3q_-}{q_{-0}} \frac{d^3k}{k_0} \delta^{(4)}(P_+ + P_- - q_+ - q_- - k), \quad (I.6)$$

Сечение процесса тормозного излучения при  $e^+e^-$ -рассеянии

$$e^+(P_+) + e^-(P_-) \rightarrow e^+(q_+) + e^-(q_-) + \gamma(k)$$

имеет вид

$$d\sigma^{e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma} = \frac{\alpha^3}{8\pi^2 s} W \cdot \frac{ss_1(s^2 + s_1^2) + tt_1(t^2 + t_1^2) + uu_1(u^2 + u_1^2)}{ss_1 t t_1} \frac{d^3q_+}{q_{+0}} \frac{d^3q_-}{q_{-0}} \frac{d^3k}{k_0} \quad (I.7)$$

$$\cdot \delta^{(4)}(P_+ + P_- - q_+ - q_- - k).$$

Приведенные выражения для сечений справедливы в области больших энергий и конечных углов между любой парой импульсов в с.ц.и. Все частицы при этом можно считать безмассовыми (см. (I.1)). Характерной особенностью неупругих процессов (I.3), (I.6), (I.7) является факторизованный вид их сечений. При этом один из множителей,  $W$ , (I.4) представляет собой множитель сопровождающего излучения, который обычно появляется при учете излучения мягкого дополнительного фотона в процессах с участием заряженных частиц. В данном же случае фотон не предполагается мягким.

2. Процесс  $e^+e^- \rightarrow 4\gamma$ .

Процесс четырехквантовой аннигиляции  $e^+(p_+) + e^-(p_-) \rightarrow \gamma(k_1) + \gamma(k_2) + \gamma(k_3) + \gamma(k_4)$  [3], описывается 24 диаграммами Фейнмана, которые мы будем маркировать порядком излучения фотонов вдоль электронной линии. Спиральные состояния начальных электрона и позитрона выберем в виде (см. А5)

$$U_\lambda(p) \equiv u_\lambda = \omega_\lambda U(p), \quad V_\lambda(p) \equiv v_\lambda = \omega_\lambda V(p),$$

$$\omega_\lambda = \frac{1}{2}(1 + \lambda\gamma_5), \quad \lambda = \pm. \quad (2.1)$$

Спиральные состояния фотонов:

$$\hat{e}_\lambda^+(k) = 2N(k) [\hat{p}_+ \hat{p}_- \hat{k} \omega_\lambda - \hat{k} \hat{p}_+ \hat{p}_- \omega_\lambda]^{-1/2}, \quad N(k) = \frac{1}{4} [p_+ p_- p_+ k \cdot p_- k]^{-1/2}. \quad (2.2)$$

Спиральные амплитуды  $M_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}^{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}$  определим следующим образом

$$M_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}^{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} = (4\pi d)^{-2} M_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}^{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} = \bar{V}_{\lambda_2^+} O_{M_1 M_2 M_3 M_4} U_{\lambda_1^-} e^{+M_1}(k_1) e^{+M_2}(k_2) e^{+M_3}(k_3) e^{+M_4}(k_4), \quad (2.3)$$

$$O_{M_1 M_2 M_3 M_4} = \gamma_{M_4} \frac{-p_+ + k_4}{-2p_+ k_4} \gamma_{M_2} \frac{p_- - k_1 - k_3}{(p_- - k_1 - k_3)^2} \gamma_{M_1} \frac{p_- - k_3}{-2p_- k_3} \gamma_{M_3} + (23 \text{ аналогичных слагаемых получаемых перестановкой фотонов}) = O_{3124} + (\text{перестановка}).$$

$M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4}$  - матричный элемент процесса.

Вследствие инвариантности относительно отражений спиральные амплитуды отличающиеся заменой всех спиральностей на обратные, совпадают

$$M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} = M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4}$$

Поскольку спиральности электрона и позитрона строго скоррелированы - должны быть противоположны,  $\lambda e^- = -\lambda e^+$ , достаточно вычислить 16 спиральных амплитуд  $M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} = M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4}$ . В результате квадрат модуля матричного элемента просуммированный по спиновым состояниям частиц примет вид

$$\sum_{\lambda = \pm} |M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4}|^2 = 2(4\pi d)^4 \sum_{\lambda_i = \pm} |M_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}|^2 = 8(4\pi d)^4 M \quad (2.4)$$

а сечение:

$$d\sigma^{e^+e^- \rightarrow 4\gamma} = \frac{2^4 \cdot 2^{-6}}{4! \pi^4 \epsilon^2} M \left( \prod_{i=1}^4 \frac{d^3 k_i}{k_{i0}} \right) \delta^{(4)}(p_+ + p_- - k_1 - k_2 - k_3 - k_4). \quad (2.5)$$

Здесь  $2\Sigma$  - полная энергия электрона и позитрона в с.ц.и., множитель  $(4!)^{-1}$  учитывает тождественность фотонов,

$$M = \frac{1}{4} \sum_{\lambda_i = \pm} |M^{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}|^2. \quad (2.6)$$

Как легко видеть из (2.1-3) спиральные амплитуды в случае, когда спиральности всех фотонов одинаковы обращаются в нуль

$$M^{++++} = M^{----} = 0. \quad (2.7)$$

Оставшиеся 14 амплитуд удобно разбить на три класса:

$$(M^{+++ -} + \text{перест}), (M^{--- +} + \text{перест}), (M^{+- - -} + \text{перест}). \quad (2.8)$$

Достаточно вычислить по одной спиральной амплитуде каждого класса, поскольку остальные могут быть получены из них перестановкой импульсов фотонов.

Рассмотрим амплитуду  $M^{+++ -}$ . Вклад в неё дают диаграммы 3124, 1324, 1234, 2134, 2314, 3214. Вклад первой пары диаграмм содержит слагаемые пропорциональные  $(p_- - k_1 - k_3)^{-2}$ :

$$2^4 \left( \prod_{i=1}^4 N(k_i) \right) \bar{V}(p_+) k_4 p_+ \frac{-p_+ + k_4}{-2p_+ k_4} p_+ p_- k_2 \frac{p_- - k_1 - k_3}{(p_- - k_1 - k_3)^2} \left[ p_+ p_- k_1 \frac{p_- - k_3}{-2p_- k_3} p_+ \overrightarrow{p_- k_3} + p_+ p_- k_3 \frac{p_- - k_1}{-2p_- k_1} p_+ \overrightarrow{p_- k_1} \right] \omega_- U(p_+).$$

Переставляя матрицы как показано стрелочками и пользуясь уравнением Дирака  $\hat{p}_- U(p_-) = \bar{V}(p_+) \hat{p}_+ = 0$  это выражение можно преобразовать к виду:

$$\bar{V}(p_+) (-p_-) (-p_+ + k_4) p_+ p_- k_2 (p_- - k_1 - k_3) p_+ p_- [k_1 (p_- - k_3) + k_3 (p_- - k_1)] p_+ \omega_- U(p_-) * * (p_- - k_1 - k_3)^{-2} = S \bar{V} p_- k_4 p_+ p_- k_2 k_4 p_+ \omega_- U.$$

Таким образом в суммарном вкладе диаграмм 3124 и 1324 полюс  $(p_- - k_1 - k_3)^{-2}$

отсутствует. Аналогичный результат будет и для двух других пар диаграмм. В результате (см. приложение (В.4))

$$M^{+++} = 2^4 \left( \prod_{i=1}^4 N(k_i) \right) S^4 \bar{V}(p_+) p_{-k_4} p_{-(k_2+k_1+k_3)} k_4 p_{-1} u(p_-) =$$

$$= 2^4 \left( \prod_{i=1}^4 N(k_i) \right) S^4 k_{4+} \cdot k_{4-} \quad (2.9)$$

Аналогичное вычисление для амплитуды 2-го класса дает

$$M^{--} = 2^4 \left( \prod_{i=1}^4 N(k_i) \right) S^4 (-k_{4-}) k_{4-} \quad (2.10)$$

Рассмотрим амплитуду третьего класса  $M^{+-}$ . Вклад в неё происходит от 8 диаграмм Фейнмана: 1234, 1324, 1243, 1423, 2134, 2314, 2143, 2413. Четыре из них содержат полюс  $(p-k_1-k_2)^{-2}$ , в сумме их вкладов он сокращается

$$\sim -S^3 (p-k_1-k_2)^2 \bar{V}(k_1+k_2) \omega = U = 2\varepsilon S^3 (k_1+k_3)_1 (p-k_1-k_2)^2$$

Во вкладах остальных содержатся нескомпенсированные полюса  $\Delta_{13}^{-2}$ ,  $\Delta_{23}^{-2}$ ,  $\Delta_{14}^{-2}$ ,  $\Delta_{24}^{-2}$ ,  $\Delta_{ij} = p-k_i-k_j$ . Вклад от диаграммы 1324 имеет вид

$$2^4 \left( \prod_{i=1}^4 N(k_i) \right) \Delta_{13}^{-2} I_{13},$$

$$I_{13} = \bar{V}(p_+) p_{-(p_+ + k_4)} p_{+k_2} (p-k_1-k_3) p_{+k_1} p_{-(p-k_1)} p_{+} \omega = U(p_-)$$

Величину  $I_{13}$ , опуская члены  $\sim m^2$  можно преобразовать пользуясь условием полноты (I.3) для спиноров следующим образом

$$-\bar{V}(p_+) p_{+k_4} p_{-k_2} \Delta_{13} k_3 p_{+k_1} \omega = -S^2 \bar{V}(p_+) k_4 \omega = p_{-k_2} \Delta_{13} k_3$$

$$\cdot \omega = p_{+k_1} \omega = -S^2 \bar{V}(p_+) k_4 \omega = U(p_-) \cdot U(p_-) k_2 \Delta_{13} k_3 \omega = V(p_+) \cdot \bar{V}(p_+) k_1 \omega = U(p_-) = -2\varepsilon S^3 k_{1-} k_{4-} Z^+(k_2, \Delta_{13}, k_3)$$

В результате выражение для  $M$  (2.6) принимает вид (обозначения в приложении (В.9)):

$$M = 4 \sum_{i=1}^4 k_{i+} k_{i-} (k_{i+}^2 + k_{i-}^2) + \varepsilon^2 \left[ |F_{1234}|^2 + |F_{1324}|^2 + |F_{1432}|^2 + \right.$$

$$\left. + |F_{3214}|^2 + |F_{3412}|^2 + |F_{4231}|^2 \right], \quad (2.11)$$

$$F_{1234} = \Delta_{12}^2 (k_1+k_2)_1 - \frac{k_{1-} k_{4-}}{\Delta_{13}^2} Z^+(k_2, \Delta_{13}, k_3) - \frac{k_{2-} k_{4-}}{\Delta_{23}^2} Z^+(k_1, \Delta_{23}, k_3) -$$

$$- \frac{k_{1-} k_{3-}}{\Delta_{14}^2} Z^+(k_2, \Delta_{14}, k_4) - \frac{k_{2-} k_{3-}}{\Delta_{24}^2} Z^+(k_1, \Delta_{24}, k_4), \quad \Delta_{ij} = p-k_i-k_j \quad (2.12)$$

Остальные величины  $F$  получатся из (2.12) перестановкой индексов. Результат (2.11) совпадает с полученным в [3], что очевидно, если учесть соотношение

$$-k_{4-} k_{1-} Z^+(k_2, \Delta_{13}, k_3) = k_{4-} [2\varepsilon k_2 \cdot k_3 k_{1-} + Z(k_2, k_1) Z^+(k_1, k_3)] \quad (2.13)$$

В пределе, когда один из фотонов мягкий (скажем  $k_4 \rightarrow 0$ ) слагаемое в правой части (2.11) совпадает с первым:

$$(M)_{\text{soft}} = 8 \sum_{i=1}^3 k_{i+} k_{i-} (k_{i+}^2 + k_{i-}^2) \quad (2.14)$$

В этом случае множитель  $1/4!$  в сечении (2.5) должен быть заменен множителем  $1/3!$ . Этот результат может быть также получен используя приближение классических токов.

$$3. \text{ Процесс } e^+(p_+) + e^-(p_-) \rightarrow \mu^+(q_+) + \mu^-(q_-) + \gamma(k_1) + \gamma(k_2).$$

В качестве векторов поляризации фотонов будем везде использовать величины

$$\hat{e}_{q\lambda}^* = 2N_q [\hat{q} \cdot \hat{q} + \hat{k} \omega_\lambda - \hat{k} \hat{q} \cdot \hat{q} \omega_\lambda], \quad N_q = \frac{1}{q} [q_+ q_- \cdot q_+ k \cdot q_- k]^{-1/2} \quad (3.1)$$

Этот выбор удобен в случае, когда фотон излучается мюонами. В случае, когда он излучается электроном или позитроном удобно его представить в следующем виде

$$\hat{e}_{q\lambda}^* = B_{\lambda} \cdot 2N_p [\hat{p}_+ \hat{p}_- \cdot \hat{k} \omega_\lambda - \hat{k} \hat{p}_+ \hat{p}_- \omega_\lambda] \equiv B_{\lambda} \cdot \hat{e}_{p\lambda}^*, \quad N_p = \frac{1}{q} [p_+ p_- \cdot p_+ k \cdot p_- k]^{-1/2}$$

$$B_{p+} = B_{p-}^* = -2S N_p N_q Z(k, q_-, q_+, k) = -(e_{q+}^+ e_{p+}^+). \quad (3.2)$$

Спиральные амплитуды определим следующим образом

$$M_{\alpha}^{\lambda_1 \lambda_2} = (4\pi\alpha)^{-2} M^{\lambda_1 \lambda_2} = e^{+\lambda_1}(k_1) e^{+\lambda_2}(k_2) \bar{V}(p_+)_{\lambda_1} u_{\lambda_2}^-(p_-)$$

$$\cdot \bar{U}_{\lambda_1}^{\lambda_2}(q_-) V_{\lambda_1}^{\lambda_2}(q_+) O_{\alpha}^{\lambda_1 \lambda_2} \quad (3.3)$$

При вычислении квадрата модуля матричного элемента просуммированного по спиновым состояниям

$$\sum_{\{\lambda, \lambda'\}} |M_a|^2 = 2(4\pi\alpha)^4 \sum_{\lambda_1, \lambda_2} |M_{a+-}^{z-z, \lambda_1, \lambda_2}|^2 = 2(4\pi\alpha)^4 \sum_{\lambda_1, \lambda_2} |M_a^{z-z, \lambda_1, \lambda_2}|^2 \quad (3.4)$$

необходимо рассмотреть амплитуды  $M_a^{+-++}$ ,  $M_a^{+---}$ ,  $M_a^{+--+}$ . Замечательное упрощение имеет место при вычислении амплитуды в случае, когда спиральности фотонов совпадают. Рассмотрим  $M_a^{+-++}$ . Вклад в нее происходит от шести диаграмм Фейнмана и имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} M_a^{+-++} = & \bar{V}_+ \delta_\mu \frac{\Delta_-}{\Delta_-^2} P_+ P_- (-k_2(P-k_1) - k_1(P-k_2)) P_+ U_- \cdot \bar{U}_-(q) \gamma_\mu V_+(q_+) \frac{N_1 P_1 N_2 P_2 B_{1+} B_{2+}}{s_1} \\ & - \frac{N_1 P_1 N_2 P_2 B_{1+}}{q_2^2} \bar{V}_+ \delta_\mu (P-k_1) P_+ U_- \cdot \bar{U}_-(q) \gamma_\mu (-q+k_2) q_- V_+(q_+) - \frac{N_1 q_1 N_2 P_2 B_{2+}}{q_1^2} \bar{V}_+ \delta_\mu (P-k_2) P_+ U_- \cdot \\ & \bar{U}_-(q) \gamma_\mu (-q+k_1) q_- V_+(q_+) + \frac{N_1 q_1 N_2 P_2 B_{2+}}{s} \bar{V}_+ \delta_\mu U_- \cdot \bar{U}_-(q) \gamma_\mu \frac{\Delta'_+}{\Delta'_+{}^2} q_- q_+ (k_1(-q+k_2) + k_2(-q+k_1)) P_+ V_+(q_+) \quad (3.5) \end{aligned}$$

Где введены обозначения

$$\begin{aligned} s_1 = (q_+ + q_-)^2, \quad \tilde{q}_1 = q_+ + q_- + k_1, \quad \Delta_- = P - k_1 - k_2, \\ s = (P + P_1)^2, \quad \tilde{q}_2 = q_+ + q_- + k_2, \quad \Delta'_+ = -q_+ - k_1 - k_2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Чтобы провести суммирование по векторному индексу  $\mu$  в первом слагаемом (3.5) воспользуемся следующим приемом. Вставим между билинейными комбинациями спиноров величину, равную единице:

$$\frac{\bar{U}_-(P) P_+ U_-(q) \cdot \bar{U}_-(q) P_+ U_-(P)}{\delta_\mu P_- P_+ q_- P_+ \omega_-} = 1. \quad (3.7)$$

Пользуясь свойствами полноты спиноров  $U_-(q) \bar{U}_-(q) = \omega_- q$ ,  $V_+(q) \bar{V}_+(q) = \omega_+ q$  представим его, выполнив свертку по  $\mu$ , в виде

$$-\frac{2s}{s_1} N_1 P_1 N_2 P_2 B_{1+} B_{2+} H, \quad H = \bar{V}_+(P) q_- \omega_- V_+(q_+) \cdot \bar{U}_-(q) P_+ \omega_- U_-(P). \quad (3.8)$$

Аналогичное вычисление для остальных трех слагаемых в (3.5) приводит к результату

$$\frac{1}{4} M_a^{+-++} = \frac{-2}{ss_1} H [S N_1 P_1 B_{1+} + S_1 N_1 q] [S N_2 P_2 B_{2+} + S_1 N_2 q]. \quad (3.9)$$

Пользуясь найденным в [2] соотношением

$$|S N_1 P_1 B_{1+} + S_1 N_1 q|^2 = -\frac{1}{8} (v_p - v_q)^2 = -\frac{1}{8} \left( \frac{P_-}{P_+ k} - \frac{P_-}{P_+ k} + \frac{q_-}{q_+ k} - \frac{q_-}{q_+ k} \right), \quad (3.10)$$

получим для квадрата его модуля:

$$|M_a^{+-++}|^2 = \frac{(2P_+ q_-)^2}{ss_1} (v_{p_1} - v_{q_1})^2 (v_{p_2} - v_{q_2})^2.$$

Такой же факторизованный вид имеют и остальные три амплитуды с одинаковыми спиральностями фотонов. Суммарный вклад этих амплитуд

$$|M_a^{+-++}|^2 + |M_a^{+---}|^2 + |M_a^{+--+}|^2 + |M_a^{-+--}|^2 = \frac{1}{ss_1} [t^2 + t_1^2 + u^2 + u_1^2] (v_{p_1} - v_{q_1})^2 (v_{p_2} - v_{q_2})^2, \quad (3.11)$$

где

$$\begin{aligned} t = (P - q_+)^2, \quad u = (P - q_-)^2, \quad s = (P + P_1)^2, \\ t_1 = (P + q_+)^2, \quad u_1 = (P + q_-)^2, \quad s_1 = (q_+ + q_-)^2. \end{aligned}$$

Множитель  $(v_p - v_q)^2$  есть известный множитель сопровождающего излучения, описывающий излучение дополнительного мягкого фотона в процессе взаимодействия двух пар заряженных частиц. Нетривиальность результата (3.11) в том, что оба фотона не предполагаются мягкими.

Более сложный вид имеют амплитуды с разными спиральностями фотонов, поскольку в них не происходит сокращения полюсов  $\Delta^2$ ,  $\tilde{q}^2$ . Рассмотрим амплитуду  $M_a^{+--+}$ . Вклад в нее происходит от восьми диаграмм Фейнмана. Пользуясь выражениями (3.1-3.2) ее можно записать в виде

$$M_a^{+--+} = 4A \cdot \bar{V}_+ \delta_\mu \frac{P_- - k_1 k_2}{\Delta_2^2} (-k_2 P_+ P_-) \frac{P_- - k_1}{-2P_+ k_1} P_+ P_- k_1 + (-k_2 P_+ k_1) \frac{P_+ + k_2}{-2P_+ k_2} \delta_\mu \frac{P_- - k_1}{-2P_+ k_1} P_+ P_- k_1 +$$

$$\begin{aligned}
& + (-k_2 p_+ p_-) \frac{p_+ + k_2}{-2p_+ k_2} p_+ p_- k_1 \frac{-p_+ + k_1 + k_2}{\Delta_{12}^2} \gamma_{\mu} \left\{ \omega_- u \cdot \bar{u}(q_-) \gamma_{\mu} \omega_- v(q_+) + 4B \bar{V}(p_+) \delta_{\mu}^{\nu} \frac{p_- - k_1}{-2p_- k_1} \right. \\
& \cdot p_+ p_- k_1 \omega_- u \cdot \bar{u}(q_-) (-k_2 q_- q_+) \frac{q_- + k_2}{2q_- k_2} \gamma_{\mu} \omega_- v(q_+) + 4C \bar{V}(-k_2 p_+ p_-) \frac{-p_+ + k_2}{-2p_+ k_2} \gamma_{\mu} u_- \cdot \bar{u}(q_-) \delta_{\mu}^{\nu} \\
& \cdot \frac{-q_+ - k_1}{2q_+ k_1} q_- q_+ k_1 \omega_- v(q_+) + 4D \bar{V} \gamma_{\mu} \omega_- u \cdot \bar{u}(q_-) \left. \right\} - k_2 q_- q_+ \frac{q_- + k_2}{2q_- k_2} q_- q_+ k_1 \frac{q_- + k_1 + k_2}{\Delta_{12}^2} \gamma_{\mu}^{\nu} \\
& + (-k_2 q_- q_+) \frac{q_- + k_2}{2q_- k_2} \gamma_{\mu}^{\nu} \frac{-q_+ - k_1}{2q_+ k_1} q_- q_+ k_1 \delta_{\mu}^{\nu} \frac{-q_+ - k_1 - k_2}{\Delta_{12}^2} (-k_2 q_- q_+) \frac{-q_+ - k_1}{2q_+ k_1} q_- q_+ k_1 \left\{ \omega_- v(q_+) \right. \\
& \left. \right\} \quad (3.12)
\end{aligned}$$

где

$$A = \frac{1}{s_1} N_{1p} N_{2p} B_{1+} B_{2-}, \quad B = \frac{N_{1p} N_{2q} B_{1+}}{(p_+ + p_- - k_1)^2}, \quad C = \frac{N_{1q} N_{2p} B_{2-}}{(p_+ + p_- - k_2)^2}, \quad D = \frac{1}{s} N_{1q} N_{2q}. \quad (3.13)$$

Чтобы провести суммирование по векторному индексу  $\mu$  удобно воспользоваться следующим тождеством

$$\bar{V} A \omega_- u \cdot \bar{u}(q_-) B \omega_- v(q_+) = \frac{L}{s^2 u u_1} \delta_{p_+ A p_- q_- B q_+ p_- \omega_-}, \quad (3.14)$$

$$L = \bar{V} p_- \omega_- v(q_+) \cdot \bar{u}(q_-) p_+ \omega_- u, \quad |L| = s \sqrt{u u_1}$$

Проводя свертку по индексу  $\mu$ , выражение для следов (3.14) с помощью соотношений полноты (A.7), можно выразить в терминах билинейных комбинаций спиноров  $u(p_-) \equiv u$ ,  $v(p_+) \equiv v$ ;  $z$ ,  $z_u$ ,  $z_v$  (приложение (B9, 10)). Для примера преобразуем, след возникающий для слагаемого в (3.12) пропорционального  $A \Delta_{12}^{-2}$ :

$$\begin{aligned}
& \delta_{p_+ \gamma_{\mu} \Delta_{12} K_2 p_+ p_- (p_- - k_1) p_+ p_- p_+ q_- \gamma_{\mu} q_+ p_- \omega_-} = 4s(p_+ q_-) \cdot \delta_{p_+ \omega_- p_+ k_1 \omega_- p_-} \\
& \cdot \omega_+ p_+ k_2 \Delta_{12} q_+ \omega_+ p_- = -2s u u_1 \cdot \bar{u}_+ v_+ \cdot \bar{v}_+ k_1 u_- \cdot \bar{u}_- v_- \cdot \bar{v}_- k_2 \Delta_{12} q_+ u_+ = \\
& = -2s^3 u_1 k_{1\perp} z^*(q_+, \Delta_{12}, k_2).
\end{aligned}$$

Аналогичные вычисления позволяют записать (3.12) в виде:

$$\begin{aligned}
M_a^{+-+-} &= \frac{4L}{s^2 u u_1} \left\{ A \left[ \frac{-2s^3 u_1}{\Delta_{12}^2} k_{1\perp} z^*(q_+, \Delta_{12}, k_2) + \frac{2s^3 u}{\Delta_{12}^2} k_{2\perp} z^*(k_1, \tilde{\Delta}_{12}, q_-) + \right. \right. \\
& + 2s^3 z^*(-p_+ + k_2, q_-) z(q_+, p_- - k_1) \left. \right] + B (-2s^2) \cdot 2\varepsilon \cdot z(q_+, p_- - k_1) z_v(q_+ + k_2, q_+, q_-) \\
& + C (-2s^2) 2\varepsilon z^*(-p_+ + k_2, q_-) z_u(-q_+ - k_1, q_-, q_+) + D \left[ \frac{2s s_1 u}{(\Delta'_{12})^2} 2\varepsilon \cdot z_v(\Delta'_{12}, \right. \\
& \left. k_1, q_+ + k_2, q_-) + \frac{2s s_1 u_1}{(\tilde{\Delta}'_{12})^2} 2\varepsilon z_u(\tilde{\Delta}'_{12}, k_2, q_-, k_1, q_+) + 2s^2 z_v(q_+ + k_2, q_+, q_-) z_u(q_+ + k_1, q_-, q_+) \right] \left. \right\} \quad (3.15)
\end{aligned}$$

где

$$\Delta_{12} = p_- - k_1 - k_2, \quad \tilde{\Delta}_{12} = -p_+ + k_1 + k_2, \quad \Delta'_{12} = q_- + k_1 + k_2, \quad \tilde{\Delta}'_{12} = q_+ + k_1 + k_2. \quad (3.15a)$$

Рассмотрим амплитуду  $M^{+-+-}$ . Используя те же самые величины  $A - D$  (3.13), которые были приняты в (3.12) запишем её в виде

$$\begin{aligned}
M_a^{+-+-} &= 4A \bar{V} \left\{ \gamma_{\mu} \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{12}^2} k_2 p_+ p_- (p_- - k_1) p_+ - p_- (-p_+ + k_2) \gamma_{\mu} (p_- - k_1) p_+ + p_- (-p_+ + k_2) p_+ p_- k_1 \frac{\tilde{\Delta}_{12}}{\Delta_{12}^2} \gamma_{\mu} \right\} \\
& \cdot \omega_- u \cdot \bar{u}(q_-) \gamma_{\mu} \omega_+ v(q_+) + 4B \bar{V} \gamma_{\mu} (p_- - k_1) p_+ \omega_- u \cdot \bar{u}(q_-) \gamma_{\mu} (q_+ + k_2) q_- \omega_+ v(q_+) + \\
& + 4C \bar{V} p_- (p_+ - k_2) \gamma_{\mu} \omega_- u \cdot \bar{u}(q_-) q_+ (q_+ + k_1) \gamma_{\mu} \omega_+ v(q_+) + 4D \bar{V} \gamma_{\mu} \omega_- u \cdot \bar{u}(q_-) \left. \right\} \frac{1}{\Delta_{12}^2} \\
& \cdot q_+ (q_+ + k_1) q_- q_+ k_2 \Delta'_{12} \gamma_{\mu} + q_+ (q_+ + k_1) \gamma_{\mu} (q_+ + k_2) q_- - \frac{1}{\tilde{\Delta}'_{12}^2} \gamma_{\mu} \tilde{\Delta}'_{12} k_1 q_- q_+ (q_+ + k_2) q_- \omega_+ v(q_+). \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Для проведения свертки по индексу  $\mu$  можно воспользоваться тождеством

$$\bar{V} A \omega_- u \cdot \bar{u}(q_-) B \omega_+ v(q_+) = \frac{\bar{v} \omega_+ v(q_+) \cdot \bar{u}(q_-) \omega_- u}{t t_1} \delta_{p_+ A p_- q_- B q_+ \omega_-} \quad (3.17)$$

и провести вычисление в полной аналогии с  $M^{+-+-}$ . Ответ проще получить применив операцию "разворота" мюонной линии. Пользуясь явным видом спиноров (приложение (A.10), (A.12)) можно убедиться-



ся в справедливости тождества

$$\bar{U}(q-)\gamma_{m_1} \dots \gamma_{m_{2n+1}} \omega + V(q+) = -\bar{V}(q+)\gamma_{m_{2n+1}} \dots \gamma_{m_1} \omega - U(q-). \quad (3.18)$$

Применяя (3.18) к билинейным комбинациям мюонных спиноров в выражении (3.16), можно переписать его в виде аналогичном (3.12).

При этом надо заменить лишь  $V(q+) \leftrightarrow U(q-)$  и изменить общий знак. В результате:

$$M_a^{-++-} = -\frac{4\tilde{L}}{s^2 t t_1} \left\{ A \left[ -\frac{2s^3 t_1}{\Delta_{12}^2} K_{1\perp} Z^*(q-, \Delta_{12}, k_2) - \frac{2s^3 t}{\Delta_{12}^2} K_{2\perp} Z^*(k_1, \tilde{\Delta}_{12}, q_+) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2s^3 Z^*(-p_+ + k_2, q_+) Z(q-, p_-, k_1) \right] + B(-2s^2) 2\varepsilon Z(q-, p_-, k_1) Z_V(q_+ + k_2, q_-, q_+) + \right. \\ \left. + C(-2s^2) 2\varepsilon \cdot Z^*(-p_+ + k_2, q_+) Z_U(q_-, k_1, q_+, q_-) + D \left[ \frac{2s s_1 t}{(\tilde{\Delta}'_{12})^2} \cdot 2\varepsilon \cdot Z_V(\tilde{\Delta}'_{12}, k_1, q_-, k_2, q_+) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2s s_1 t_1}{(\Delta'_{12})^2} \cdot 2\varepsilon \cdot Z_U(\Delta'_{12}, k_2, q_+, k_1, q_-) + 2s^2 Z_V(q_+ + k_2, q_-, q_+) Z_U(q_-, k_1, q_+, q_-) \right] \right\} \quad (3.19)$$

где

$$\tilde{L} = \bar{V} p_- \omega - U(q-) \cdot \bar{V}(q+) p_+ \omega - U, \quad |\tilde{L}| = s \sqrt{t t_1}. \quad (3.20)$$

Величины  $A-D$  приведены выше (см. (3.13), (3.2)).

Выражения для амплитуд  $M^{+--+}$  и  $M^{-++-}$  получаются из (3.15), (3.19) переобозначением  $k_1 \leftrightarrow k_2$ :

$$M_a^{+--+}(k_1, k_2) = M_a^{+--+}(k_2, k_1), \quad M_a^{-++-}(k_1, k_2) = M_a^{-++-}(k_2, k_1). \quad (3.21)$$

Сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \gamma \gamma$  дается выражением:

$$d\sigma^{e^+e^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \gamma \gamma} = \frac{1}{2!} \frac{(4\pi\alpha)^4}{64s(2\pi)^8} M \frac{d^3 k_1}{k_{10}} \frac{d^3 k_2}{k_{20}} \frac{d^3 q_+}{q_{+0}} \frac{d^3 q_-}{q_{-0}} \delta^{(4)}(p_+ + p_- - q_+ - q_- - k_1 - k_2), \quad (3.22)$$

где

$$M = \frac{1}{s s_1} (t^2 + t_1^2 + u^2 + u_1^2) (v_{p_1}^2 - v_{q_1}^2) (v_{p_2}^2 - v_{q_2}^2) + [ |M_a^{+--+}|^2 + |M_a^{-++-}|^2 + (k_1 \leftrightarrow k_2) ]. \quad (3.33)$$

Здесь множитель  $1/2!$  учитывает тождественность фотонов, т.к. в (3.22) подразумевается интегрирование по полному фазовому объему для каждого из фотонов. Выражения для спиральных амплитуд  $M^{+--+}$  (3.15, 3.19) несколько громоздки. Для контроля этих выражений мы сформулируем два проверочных теста, т.е. выбора специальной кинематики конечных частиц. В качестве первого рассмотрим "мягкий предел". Будем считать энергию одного из фотонов малой:  $k_2 \rightarrow 0$ . При этом второе слагаемое в правой части (3.33) совпадает с первым. Фотоны в этом пределе не эквивалентны, поэтому надо опустить  $1/2!$  В результате

$$d\sigma_{soft}^{e^+e^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \gamma \gamma} = \frac{(4\pi\alpha)^4}{32s(2\pi)^8} \frac{t^2 + t_1^2 + u^2 + u_1^2}{s s_1} (v_{p_1}^2 - v_{q_1}^2) (v_{p_2}^2 - v_{q_2}^2) \times \\ \times \frac{d^3 q_+}{q_{+0}} \frac{d^3 q_-}{q_{-0}} \frac{d^3 k_1}{k_{10}} \frac{d^3 k_2}{k_{20}} \delta^{(4)}(p_+ + p_- - q_+ - q_- - k_1). \quad (3.34)$$

Это выражение можно представить в виде произведения сечения процесса  $e^+e^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \gamma$  и вероятности излучения мягкого фотона:

$$d\sigma_{soft}^{e^+e^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \gamma \gamma} = d\sigma^{e^+e^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \gamma(k_1)} \cdot dW(k_2), \quad (3.35)$$

где сечение  $d\sigma^{e^+e^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \gamma}$  приведено в (1.3), а вероятность излучения мягкого фотона:

$$dW(k_2) = \frac{4\pi\alpha}{2(2\pi)^3} (-1) (v_{p_2}^2 - v_{q_2}^2)^2 \frac{d^3 k_2}{k_{20}}. \quad (3.36)$$

Убедимся, наконец, в справедливости (3.34). Как легко видеть из (3.15) в пределе  $k_2 \rightarrow 0$  выражение для амплитуды  $M_a^{+--+}$  будет:

$$M_a^{+--+}|_{k_2 \rightarrow 0} = \frac{8L}{u u_1} \left\{ \tilde{A} S Z^*(-p_+, q_-) Z(q_+, p_-, k_1) - \tilde{B} \cdot 2\varepsilon \cdot Z(q_+, p_-, k_1) Z_V(q_-, q_+, q_-) \right. \\ \left. - \tilde{C} \cdot 2\varepsilon \cdot Z^*(p_+, q_-) Z_U(q_+ + k_1, q_-, q_+) - \tilde{D} Z_V(q_-, q_+, q_-) \cdot Z_U(q_+ + k_1, q_-, q_+) \right\},$$

где  $\tilde{A} = \frac{1}{s_1} N_{1p} N_{2p} v_{1+} v_{2-}$ ,  $\tilde{B} = \frac{1}{s_1} N_{1p} N_{2q} v_{1+}$ ,  $\tilde{C} = \frac{1}{s} N_{1q} N_{2p} v_{2-}$ ,  $\tilde{D} = \frac{1}{s} N_{1q} N_{2q}$ .

Пользуясь законом сохранения  $p_+ + p_- = q_+ + q_- + k_1$  и свойствами величин  $Z$  (см. приложение Б) это выражение можно переписать в

виде

$$M_a^{+-+} |_{k_2 \rightarrow 0} = \frac{8L}{u u_1} Z(q_+, p-k_1) \frac{1}{s s_1} Z(-p+k_2, q_-) [S N_{1p} B_{1+} + S_1 N_{1q}] * \quad (3.37a)$$

$$* [S N_{2p} B_{2-} + S_1 N_{2q}] \quad (3.37a)$$

Аналогичное вычисление дает для амплитуды  $M_a^{-++}$ :

$$M_a^{-++} |_{k_2 \rightarrow 0} = \frac{-8\tilde{L}}{t t_1 s s_1} Z(q_-, p-k_1) Z(-p+k_2, q_+) [S N_{1p} B_{1+} + S_1 N_{1q}] * \quad (3.37b)$$

$$* [S N_{2p} B_{2-} + S_1 N_{2q}] ; \quad (3.37b)$$

амплитуда  $M_a^{+-+}$  получится из (3.37a) заменой  $k_1 \leftrightarrow k_2$ , а  $M_a^{-++}$  из (3.37b) такой же заменой.

Принимая во внимание

$$\left| \frac{L Z(q_+, q_-)}{u u_1} \right| = \sqrt{s s_1} = \left| \frac{\tilde{L} Z(q_-, q_+)}{t t_1} \right|,$$

а также соотношение

$$|S N_{1p} B_{1+} + S_1 N_{1q}|^2 = -\frac{1}{8} (v_{p_1}^2 - v_{q_1}^2)^2$$

получим

$$\begin{aligned} & |M_a^{+-+}|^2 + |M_a^{-++}|^2 + |M_a^{+--}|^2 + |M_a^{-+-}|^2 = \\ & = \frac{t^2 + t_1^2 + u^2 + u_1^2}{s s_1} (v_{p_1}^2 - v_{q_1}^2)^2 (v_{p_2}^2 - v_{q_2}^2)^2 \end{aligned} \quad (3.38)$$

В качестве независимого теста можно рассмотреть ситуацию, когда один из фотонов, оставаясь жестким летит в направлении близком к направлению движения одной из заряженных частиц. Сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow \alpha \bar{\alpha} \gamma$  можно выразить через сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow \alpha \bar{\alpha} \gamma$  воспользовавшись методом квазиреальных электронов [8]. Пусть для определенности фотон с импульсом  $k_2$  движется в направлении близком к направлению движения  $\mu^+$  мезона, инвариант  $k_2 q_+$  при этом должен быть велик по сравнению с квадратом массы мюона (см. (I.1)). Фотоны в этом случае не эквивалентны. Сечение име-

ет вид

$$d\sigma^{e^+e^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \gamma \gamma} |_{k_2 \parallel q_+} = d\sigma^{e^+e^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \gamma} (q_+ + k_2, q_-, k_1) dW_{q_+ + k_2}(k_2), \quad (3.39)$$

где сечение  $d\sigma^{e^+e^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \gamma}$  получится из приведенного в (I.3) заменой  $q_+ \rightarrow q_+ + k_2$ ,

$$dW_{q_+ + k_2}(k_2) = \frac{\alpha}{4\pi^2} \frac{[(q_+ + k_{20})^2 + q_{+0}^2] d^3 k_2}{k_{20}^2 (q_+ + k_{20})(k_2 q_+)} \quad (3.40)$$

4. Процесс  $e^+(p_+) + e^-(p_-) \rightarrow e^+(q_+) + e^-(q_-) + \gamma(k_1) + \gamma(k_2)$ .

По сравнению с каналом  $e^+e^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \gamma \gamma$  имеется 20 дополнительных диаграмм Фейнмана рассеивательного типа [5]. Они дадут дополнительный вклад  $M_p$  в спиральные амплитуды  $M^{+\lambda_1 \lambda_2}$ , а также в амплитуды для которых спиральности начальных частиц одинаковы  $M^{\pm \lambda_1 \lambda_2}$ . Вклад рассеивательных диаграмм в амплитуду  $M_{4-}^{-+\lambda_1 \lambda_2} = M^{-+\lambda_1 \lambda_2}$  есть нуль, т.к. спиральности начального и конечного позитрона (электрона) совпадают, т.о.:

$$M_a^{-+\lambda_1 \lambda_2} = M^{-+\lambda_1 \lambda_2} \quad (4.1)$$

Для вычисления вклада рассеивательных диаграмм в спиральную амплитуду  $M^{+\lambda_1 \lambda_2}$  удобно выразить вектора поляризаций фотонов (3.1) в виде

$$\hat{e}_{q\lambda}^* = C_\lambda^3 \hat{e}_{\lambda}^*, \quad C_\lambda^3 = -(e_{q\lambda}^* e_{\lambda}^*), \quad C_+^3 = C_-^3 = -8\varepsilon \cdot (q \cdot k) N_3 N_q Z_u^*(q, q, k), \quad (4.2)$$

$$\hat{e}_{\lambda}^* = 2N_3 [\hat{q} \cdot \hat{p} \cdot \hat{k} \omega_\lambda - \hat{k} \hat{q} \cdot \hat{p} \cdot \omega_\lambda], \quad N_3 = \frac{1}{4} [p \cdot q \cdot p \cdot k \cdot q \cdot k]^{-\frac{1}{2}}$$

в случае, когда излучает электрон и в виде

$$\begin{aligned} \hat{e}_{q\lambda}^* &= D_\lambda^\pi \hat{e}_{\pi\lambda}^*, \quad D_\lambda^\pi = -(e_{q\lambda}^* e_{\pi\lambda}), \quad D_+^\pi = D_-^\pi = -8\varepsilon (q, k) N_q N_\pi Z_v(q, q, k), \\ \hat{e}_{\pi\lambda}^* &= 2N_\pi [\hat{p} \cdot \hat{q} \cdot \hat{k} \omega_\lambda - \hat{k} \hat{p} \cdot \hat{q} \cdot \omega_\lambda], \quad N_\pi = \frac{1}{4} [p \cdot q \cdot p \cdot k \cdot q \cdot k]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

когда излучает позитрон.

Вклад в матричный элемент от рассеивательных диаграмм имеет вид (определения инвариантов даны в (3.11)).

$$M_{P_{\lambda_1 \lambda_2} \lambda_1 \lambda_2} = \bar{U}_{\lambda_1}(q_+) O_{\mu} U_{\lambda_2}(p) \bar{V}_{\lambda_1}(p_+) \tilde{O}_{\nu} V_{\lambda_2}(q_+) e_{\lambda_1}^*(k_1) e_{\lambda_2}^*(k_2)^{\rho},$$

$$O_{\mu} * \tilde{O}_{\nu} = -\frac{1}{t_1} \left\{ \gamma_{\mu} \frac{\Delta_{-}}{\Delta_{-}^2} \left[ \gamma_{\nu} \frac{p-k_1}{-2pk_1} \gamma_{\sigma} + \gamma_{\sigma} \frac{p-k_2}{-2pk_2} \gamma_{\nu} \right] + \gamma_{\nu} \frac{q+k_2}{2q-k_2} \gamma_{\mu} \frac{p-k_1}{-2pk_1} \gamma_{\sigma} + \gamma_{\sigma} \frac{q+k_1}{2q-k_1} \gamma_{\nu} \frac{p-k_2}{-2pk_2} \gamma_{\mu} \right\}$$

$$+ \gamma_{\mu} \frac{p-k_2}{-2pk_2} \gamma_{\nu} + \left\{ \gamma_{\nu} \frac{q+k_2}{2q-k_2} \gamma_{\sigma} + \gamma_{\sigma} \frac{q+k_1}{2q-k_1} \gamma_{\nu} \right\} \frac{\Delta'_{-}}{\Delta_{-}^2} \gamma_{\mu} \left\{ \gamma_{\sigma} \frac{p+k_1}{-2pk_1} \gamma_{\nu} + \gamma_{\nu} \frac{p+k_2}{-2pk_2} \gamma_{\sigma} \right\} * \gamma_{\mu} - \frac{1}{t_1} \gamma_{\mu} * \left\{ \gamma_{\nu} \frac{p+k_1}{-2pk_1} \gamma_{\sigma} + \gamma_{\nu} \frac{p+k_2}{-2pk_2} \gamma_{\sigma} \right\}$$

$$+ \gamma_{\sigma} \frac{p+k_1}{-2pk_1} \gamma_{\mu} \frac{q+k_2}{2q-k_2} \gamma_{\nu} + \gamma_{\nu} \frac{p+k_2}{-2pk_2} \gamma_{\mu} \frac{q+k_1}{2q-k_1} \gamma_{\sigma} + \gamma_{\mu} \frac{\Delta'_{+}}{\Delta_{+}^2} \left[ \gamma_{\nu} \frac{q+k_2}{2q-k_2} \gamma_{\sigma} + \gamma_{\sigma} \frac{q+k_1}{2q-k_1} \gamma_{\nu} \right]$$

$$- \frac{1}{(p-q-k_1)^2} \left\{ \gamma_{\mu} \frac{p-k_1}{-2pk_1} \gamma_{\sigma} * \gamma_{\nu} \frac{p+k_2}{-2pk_2} \gamma_{\rho} + \gamma_{\sigma} \frac{q+k_1}{2q-k_1} \gamma_{\mu} * \gamma_{\rho} \frac{p+k_2}{-2pk_2} \gamma_{\nu} + \gamma_{\mu} \frac{p-k_1}{-2pk_1} \gamma_{\sigma} * \gamma_{\rho} \frac{q+k_2}{2q-k_2} \gamma_{\nu} \right\}$$

$$+ \gamma_{\sigma} \frac{q+k_1}{2q-k_1} \gamma_{\mu} * \gamma_{\rho} \frac{q+k_2}{2q-k_2} \gamma_{\nu} \left\} - \frac{1}{(p-q-k_2)^2} \left\{ \gamma_{\mu} \frac{p-k_2}{-2pk_2} \gamma_{\sigma} * \gamma_{\nu} \frac{p+k_1}{-2pk_1} \gamma_{\rho} + \gamma_{\sigma} \frac{q+k_2}{2q-k_2} \gamma_{\mu} * \gamma_{\rho} \frac{p+k_1}{-2pk_1} \gamma_{\nu} \right\}$$

$$* \left\{ \gamma_{\sigma} \frac{p+k_1}{-2pk_1} \gamma_{\mu} + \gamma_{\mu} \frac{p-k_2}{-2pk_2} \gamma_{\rho} * \gamma_{\nu} \frac{q+k_1}{2q-k_1} \gamma_{\sigma} + \gamma_{\sigma} \frac{q+k_2}{2q-k_2} \gamma_{\mu} * \gamma_{\rho} \frac{q+k_1}{2q-k_1} \gamma_{\nu} \right\},$$

$$\Delta_{\pm} = \mp(p_{\pm} - k_1 - k_2), \Delta'_{\pm} = \mp(q_{\pm} + k_1 + k_2), q_{1,2} = p - q - k_{1,2}. \quad (4.4)$$

Рассмотрим вначале амплитуды с совпадающими спиральностями фотонов. При выполнении суммирования по состояниям виртуального фотона можно воспользоваться тождеством (см. (3.8))

$$\bar{U}(q_+) A_{\omega} U \cdot \bar{V} B_{\omega} V(q_+) = -H \frac{z^*(q_+, q_-)}{s_1 t_1 u_1^2} \gamma_{\rho} q_{-} A_{\rho} q_{-} B_{\rho} q_{+} \omega. \quad (4.5)$$

Найдем вклад рассеивательных диаграмм в амплитуду  $M^{+-+-}$ . Он происходит от подчеркнутых членов в правой части (4.4). Применяя тождество (4.5) для вычисления следов и явное выражение для векторов поляризаций фотонов (4.2), (4.3) можно убедиться, что знаменатели  $\Delta_{\pm}^{-2}$ ,  $\Delta'_{\pm}^{-2}$  в полной сумме сокращаются. Результат имеет вид

$$M_P^{+-+-} = -\frac{8H}{ss_1 tt_1 uu_1} \gamma_{\rho} q_{-} A_{\rho} q_{-} \omega \cdot \gamma_{\rho} p_{+} B_{\rho} q_{+} \omega \cdot [t_1 N_{13} C_{1+}^3 + t_1 N_{17} D_{1+}^{\Pi}] * [t_1 N_{23} C_{2+}^3 + t_1 N_{27} D_{2+}^{\Pi}]. \quad (4.6)$$

Пользуясь найденным в [2] соотношением

$$t_1 N_{23} C_{2+}^3 + t_1 N_{27} D_{2+}^{\Pi} = -s_1 N_{p} B_{\pm} - s_1 N_q \quad (4.7)$$

и принимая во внимание вклад (3.9) аннигиляционных диаграмм, полный результат запишем в виде

$$M^{+-+-} = \frac{-8H}{ss_1} [s_1 N_{1p} B_{1+} + s_1 N_q] [s_1 N_{2p} B_{2+} + s_1 N_q] \left( 1 + \frac{s^2}{tt_1 uu_1} q_{+1}^* q_{-1} z^*(q_+, q_-) \right). \quad (4.8)$$

Выражение в круглых скобках в правой части (4.8) можно преобразовать к виду

$$1 + \frac{s^2 q_{+1}^* q_{-1} z^*(q_+, q_-)}{tt_1 uu_1} = \frac{q_{+1}^* q_{-1}}{q_- q_{++}}.$$

Пользуясь (3.10) квадрат модуля этой спиральной амплитуды запишем в виде

$$|M^{+-+-}|^2 = \frac{u_1^3 u}{ss_1 tt_1} (v_{p_1} - v_{q_1})^2 (v_{p_2} - v_{q_2})^2. \quad (4.9)$$

Аналогичное выражение можно провести и для амплитуды  $M^{----}$ . Для суммы квадратов их модулей имеем:

$$|M^{----}|^2 + |M^{+-+-}|^2 = \frac{u u_1 (u^2 + u_1^2)}{ss_1 tt_1} (v_{p_1} - v_{q_1})^2 (v_{p_2} - v_{q_2})^2. \quad (4.10)$$

Спиральные амплитуды  $M^{-+ \pm \pm}$  совпадают согласно (4.1) с соответствующими выражениями для процесса  $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \gamma \gamma$ , поскольку рассеивательные диаграммы не дают в этом случае вклад. Из (3.11) имеем:

$$|M^{-+++}|^2 + |M^{-+--}|^2 = \frac{t t_1 (t^2 + t_1^2)}{s s_1 t t_1} (v_{p_1} - v_{q_1})^2 (v_{p_2} - v_{q_2})^2 \quad (4.11)$$

Рассмотрим вклад в амплитуду  $M^{+-+}$  происходящий от рассеивательных диаграмм. Для проведения свертки по индексу  $\mu$  можно снова воспользоваться тождеством (4.5), переписав его в виде (см. 3.14)

$$\bar{u}(q_-) A \omega_- u \cdot \bar{v} B \omega_- v(q_+) = \frac{L}{s t u u_1} \sum_{\rho} q_- A_{\rho} p_- q_- p_+ B q_+ p_- \omega_- \quad (4.12)$$

Дальнейшее вычисление следов и их выражение в терминах величин  $Z$  (см. приложение Б) не представляет трудностей, хотя и несколько громоздко. Полная амплитуда  $M^{+-+}$  имеет вид

$$M^{+-+} = M_a^{+-+} + M_p^{+-+} \quad (4.13)$$

где  $M_a^{+-+}$  приведено в формуле (3.15), а величина  $M_p^{+-+}$  имеет вид

$$M_p^{+-+} = \frac{8L}{s u u_1} A_p^{+-+}, \quad (4.14)$$

$$A_p^{+-+} = \frac{N_{13} N_{23} C_1^2 C_2^3}{t_1} \left[ -t s (q+k_2)_\perp Z^*(q_+, p-k_1, q_-) - \frac{2s t u_1}{(p-k_1-k_2)^2} Z_u(k_1, q_-, k_2, p-k_1+k_2, q_+) - \frac{s t u}{(q+k_1+k_2)^2} Z(k_1, q+k_2) Z^*(k_2, q_-) \right] + \frac{N_{11} N_{21} D_1 D_2}{t} \left[ \frac{s^2}{t} q_{-1}^* q_{+1}^* (q+k_1)_\perp Z(q_-, p+k_2, q_+) + \frac{2s t u_1}{(p+k_1+k_2)^2} Z_v(k_2, q_+, k_1, -p+k_1+k_2, q_-) - \frac{s t u_1}{(q+k_1+k_2)^2} Z(q_+, k_1) Z^*(q_+, k_1, k_2) \right] + \frac{s N_{11} N_{23} C_1^2 D_2}{(p-q-k_1)^2} Z^*(q_+, p-k_1, q_-) Z(q_-, p+k_2, q_+) - \frac{s^2 N_{11} N_{23} C_2^2 D_1}{(p-q-k_2)^2} q_{-1}^* q_{+1}^* (q+k_1)_\perp (q+k_2)_\perp$$

Величины  $N_3, N_{11}, C, D$  определены в (4.2) и (4.3), а остальные - в приложении. Спиральная амплитуда  $M^{+-+}$  получится из (4.14) переобозначением 4 - импульсов фотонов

$$M^{+--+}(k_1, k_2) = M^{+-+}(k_2, k_1). \quad (4.15)$$

Рассмотрим, наконец, специфические для канала рассеяния спиральные амплитуды. Достаточно рассмотреть  $M^{++\lambda_1 \lambda_2}$ . Поскольку нас интересуют квадраты модулей амплитуд  $M^{++\lambda_1 \lambda_2}$  можно фазовый множитель для вектора поляризации одного из фотонов выбрать единицей:

$$\hat{e}_{p\lambda}^* = E_\lambda e_{\rightarrow\lambda}^*, \quad E_\lambda^* = -(e_{\rightarrow\lambda}^* e_{p\lambda}), \quad E_- = E_+^* = 2s k_\perp^* Z(q_-, k_1, q_+) N_3 N_{11}, \quad (4.16)$$

величины  $\hat{e}_{p\lambda}^*$ ,  $\hat{e}_{\rightarrow\lambda}^*$  приведены в (4.2), (4.3). Вычислим сначала амплитуды с совпадающими спиральностями фотонов. При выполнении свертки по  $\mu$  оказывается полезным тождество, аналогичное (3.17):

$$\bar{u}(q_-) A \omega_+ u \cdot \bar{v} B \omega_- v(q_+) = \frac{\tilde{H}}{s s_1} \sum_{\rho} q_- A_{\rho} p_- p_+ B q_+ \omega_-, \quad (4.17)$$

$$\tilde{H} = \bar{v} \omega_+ u \cdot \bar{u}(q_-) \omega_- v(q_+).$$

Для амплитуды  $M^{++++}$  из (4.4) и пользуясь (4.17) получаем

$$M^{++++} = 4 \bar{u}_\alpha(q_-) u_\beta \cdot \bar{v}_\gamma v_\delta(q_+) O^{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad O = -\frac{1}{t_1} N_{13} N_{23} E_{1+} E_{2+} [p_-(q_+ + k_2) k_1 + p_-(q_+ + k_2) k_2] q_- p_- \frac{\Delta'_-}{\Delta_-^2} \gamma_\mu \omega_+ * \gamma_\mu \omega_- - \frac{1}{t} N_{11} N_{21} \gamma_\mu \omega_+ * \gamma_\mu \frac{\Delta'_+}{\Delta_+^2} p_+ q_+ [k_1 \cdot (-q_+ - k_2) + k_2 \cdot (-q_+ - k_1)] p_+ \omega_- - \frac{N_{13} N_{21} E_{1+}}{(p-q-k_1)^2} p_-(q_+ + k_1) \gamma_\mu \omega_+ * \gamma_\mu (q_+ + k_2) p_+ \omega_- - \frac{N_{11} N_{23} E_{2+}}{(p-q-k_2)^2} p_-(q_+ + k_2) \gamma_\mu \omega_+ * \gamma_\mu (q_+ + k_1) p_+ \omega_- \quad (4.18)$$

Пользуясь (4.17) её можно преобразовать к виду

$$M^{++++} = \frac{8s^2 Z^*(q_-, q_+)}{t t_1} [t N_{13} E_{1+} + t_1 N_{11}] [t N_{23} E_{2+} + t_1 N_{21}] \cdot \frac{\tilde{H}}{s s_1} \quad (4.19)$$

Аналогичный вид имеет амплитуда  $M^{+--+}$ . Для суммы квадратов

их модулей, пользуясь (4.7) получается т.о. выражение:

$$|M^{++++}|^2 + |M^{++--}|^2 = \frac{ss_1(s^2+s_1^2)}{ss_1 t t_1} (v_{p_1} - v_{q_1})^2 (v_{p_2} - v_{q_2})^2. \quad (4.20)$$

Рассмотрим амплитуду  $M^{++--}$ . Для проведения свертки по индексу виртуального фотона  $\mu$ , применим снова операцию "разворота" электронной линии (ср. (3.18)): пользуясь формулами (A.13), (A.8) и (A.3) приложения имеем:

$$\bar{u}(q_-) O_\mu \omega_+ u(p_-) = \bar{u}(p_-) \tilde{O}_\mu \omega_- u(q_-) \quad (4.21)$$

где  $\tilde{O}_\mu$  отличается от  $O_\mu$  обратным порядком матриц Дирака (их в  $O_\mu$  нечетное число). Применяя к (4.4) с векторами поляризаций (4.16) преобразование (4.21) и тождество

$$\bar{u} A \omega_- u(q_-) * \bar{v}(p_+) B \omega_- v(q_+) = \frac{1}{s^2 t t_1} \bar{v} p_- \omega_- u(q_-) \cdot \bar{u} p_+ \omega_- v(q_+) *$$

$$* \int p_- A q_- p_- p_+ v q_+ p_+ \omega_-. \quad (4.22)$$

перепишем эту спиральную амплитуду в виде (см. (4.4)):

$$M^{++--} = \frac{\bar{v} p_- \omega_- u(q_-) \cdot \bar{u} p_+ \omega_- v(q_+)}{s^2 t t_1} \int p Q,$$

$$Q = -\frac{1}{t_1} N_{13} N_{23} E_{1+} E_{2-} \left\{ \frac{1}{\Delta_-^2} p_- q_- (p_- - k_2) p_- q_- k_1 \Delta_- \delta_{\mu\nu} q_- p_- p_+ \delta_{\mu\nu} q_+ p_+ \omega_- - \frac{1}{\Delta_-^2} p_- \delta_{\mu\nu} \Delta'_+ k_2 \right.$$

$$\cdot p_- q_- (q_+ + k_1) p_- q_- p_+ \delta_{\mu\nu} q_+ p_+ \omega_- + p_- q_- (p_- - k_2) \delta_{\mu\nu} (q_+ + k_1) p_- q_- p_- p_+ \delta_{\mu\nu} q_+ p_+ \omega_- \left. \right\} - \frac{1}{t} N_{11} N_{21} \pi$$

$$\cdot \left\{ \frac{1}{\Delta_+^2} p_- \delta_{\mu\nu} q_- p_- p_+ q_+ (-p_+ + k_2) p_+ q_+ k_1 \Delta_+ \delta_{\mu\nu} q_+ p_+ \omega_- - \frac{1}{\Delta_+^2} p_- \delta_{\mu\nu} q_- p_- p_+ \delta_{\mu\nu} \Delta'_+ k_2 p_+ q_+ (p_+ + k_1) p_+ q_+ \omega_- \right.$$

$$\left. + p_- \delta_{\mu\nu} q_- p_- p_+ q_+ (-p_+ + k_2) \delta_{\mu\nu} (q_+ + k_1) p_+ q_+ p_+ \omega_- \right\} - \frac{N_{13} N_{21} E_{1+}}{(p_- - q_- - k_1)^2} p_- \delta_{\mu\nu} (q_+ + k_1) p_- q_- p_- p_+ q_+ (-p_+ + k_2) \cdot$$

$$\delta_{\mu\nu} q_+ p_+ \omega_- - \frac{N_{11} N_{23} E_{2-}}{(p_- - q_- - k_2)^2} p_- q_- (p_- - k_2) \delta_{\mu\nu} q_- p_- p_+ \delta_{\mu\nu} (q_+ + k_1) p_+ q_+ p_+ \omega_- \quad (4.23)$$

Несмотря на громоздкость следы в (4.23) легко выражаются через стандартные комбинации поперечных и продольных компонент импульсов частиц, приведенных в приложении Б. Результат имеет вид

(определения даны в (4.4)):

$$|M^{++--}| = \frac{8}{s \sqrt{t t_1}} |A^{++--}|,$$

$$A^{++--} = \frac{A_1}{t_1} \left[ -\frac{t s^2}{\Delta_-^2} z(q_-, q_+) z^*(k_2, q_-, k_1, \Delta_-) - \frac{t s^2}{\Delta_-^2} 2\varepsilon z(k_2, \Delta'_+, q_+) Y^*(k_1, q_-) \right.$$

$$\left. + t s^2 z(q_-, p_- - k_2) z(q_+ + k_1, q_+) \right] + \frac{\mathcal{D}_1}{t} \left[ \frac{t s^2}{\Delta_+^2} z(q_-, q_+) z^*(-p_+ + k_2, k_1, q_+, k_2) + \frac{t_1 s^2}{\Delta_+^2} X(k_1, q_+) \right.$$

$$\left. - 2\varepsilon z^*(q_-, \Delta'_+, k_2) - t_1 s^2 z(-p_+ + k_2, q_+) z(q_-, -q_+ - k_2) \right] - \frac{t s^2}{q_+^2} B_1 z(p_+ + k_2, q_+) \cdot z(q_+ + k_1,$$

$$q_+) - \frac{t_1 s^2}{q_+^2} C_1 z(q_-, p_- - k_2) z(q_-, -q_+ - k_1), \quad (4.24)$$

где

$$A_1 = N_{13} N_{23} E_{1+} E_{2-}, B_1 = N_{13} N_{21} E_{1+}, C_1 = N_{11} N_{23} E_{2-}, \mathcal{D}_1 = N_{11} N_{21} \pi.$$

Выражение для модуля амплитуды  $M^{++--}$  получится из (4.24) переобозначением 4-импульсов фотонов

$$|M^{++--}(k_1, k_2)| = |M^{++--}(k_2, k_1)|. \quad (4.25)$$

Полностью дифференциальное сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow e^+e^- \gamma\gamma$  имеет вид:

$$d\sigma_{e^+e^- \rightarrow e^+e^- \gamma\gamma} = \frac{1}{2!} \frac{(4\pi\alpha)^4}{64s(2\pi)^8} M \delta^{(4)}(p_+ + p_- - q_+ - q_- - k_1 - k_2) \frac{d^3q_+}{q_+^0} \frac{d^3q_-}{q_-^0} \frac{d^3k_1}{k_1^0} \frac{d^3k_2}{k_2^0} \quad (4.26)$$

$$M = \frac{1}{ss_1 t t_1} [ss_1(s^2+s_1^2) + t t_1(t^2+t_1^2) + u u_1(u^2+u_1^2)] (v_{p_1} - v_{q_1})^2 (v_{p_2} - v_{q_2})^2 +$$

$$+ [ |M^{++--}|^2 + |M^{--++}|^2 + |M^{++--}|^2 + (k_1 \leftrightarrow k_2) ]. \quad (4.27)$$

где

$$v_p - v_q = + \frac{p_+}{p_+ k} - \frac{p_-}{p_- k} + \frac{q_-}{q_- k} - \frac{q_+}{q_+ k},$$

величины  $M^{+-+}$ ,  $M^{-+-}$ ,  $M^{+++}$  приведены в формулах (4.13), (4.14), (4.1) и (4.24) соответственно.

В пределе, когда один из фотонов ( $k_2$ ) мягкий  $\omega_2 \ll \varepsilon$  сечение (4.26) имеет вид (при этом второе слагаемое в правой части (4.30) совпадает с первым):

$$d\sigma_{k_2 \rightarrow 0}^{e^+e^- \rightarrow e^+e^- \gamma(k_1) \gamma(k_2)} = d\sigma^{e^+e^- \rightarrow e^+e^- \gamma(k_1)} dW(k_2) \quad (4.28)$$

где сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow e^+e^- \gamma$  приведено в (1.7), а  $dW(k_2)$  дается (3.36). В кинематической области, когда один из фотонов имеет импульс "почти" параллельный импульсу одной из заряженных частиц  $k_2 \parallel q_+$  имеет место формула для сечения, аналогичная (3.39) для процесса  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^- \gamma$  с заменой  $d\sigma^{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^- \gamma}$  на  $d\sigma^{e^+e^- \rightarrow e^+e^- \gamma}$  а величина  $dW_{q_+, k_2}(k_2)$  совпадает с (3.40).

5. Процесс  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^- \gamma$  и  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^- \gamma \gamma$ .

Рассмотрим вначале процесс

$$e^+(p_+) + e^-(p_-) \rightarrow \pi^+(q_+) + \pi^-(q_-) + \gamma(k) \quad (5.1)$$

В этом пункте мы будем считать пионы бесструктурными, т.е. их формфакторы считаем равными единице

$$F_\pi(q^2) = 1 \quad (5.2)$$

Спиральные амплитуды определим следующим образом

$$M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda \gamma} = \bar{V}(p_+)_{\lambda_1} \mu_{\lambda_2}^{\lambda} U_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda} O_{\alpha \beta}^{\lambda \gamma} e^{\alpha \beta} e^{\lambda \gamma}(k) = M_e + M_\pi, \quad (5.3)$$

$$O = \frac{1}{s_1} \left[ \gamma_\mu \frac{p_- - k}{-2pk} \gamma_\nu + \gamma_\nu \frac{p_+ + k}{-2pk} \gamma_\mu \right] (q_- - q_+)_{\mu} + \frac{1}{s} \gamma_\mu \left[ (q_- - q_+ + k)_{\mu} \frac{(2q_- + k)_{\nu}}{2q_- k} + (q_- - q_+ - k)_{\mu} \frac{(-2q_+ - k)_{\nu}}{2q_+ k} - 2g_{\mu\nu} \right] = O_e + O_\pi. \quad (5.4)$$

Легко убедиться, что величина  $O$  (5.4) удовлетворяет калибровочному условию  $\bar{V}(p_+) O^{\lambda \gamma} U(p_-) \gamma_\lambda = 0$ . Вектор поляризации фотона выберем в виде:

$$e_{\lambda_1}^{+\lambda} = 2N_e \left[ (q_- - k)_{\lambda_1} (q_+ - k)_{\lambda_2} - i \varepsilon_{\lambda_1 \lambda_2 \mu \nu} q_-^{\mu} q_+^{\nu} \right], \quad N_e = \frac{1}{4} [q_+ \cdot q_- \cdot q_+ \cdot q_-]^{-1/2} \quad (5.5)$$

В случае, когда фотон излучается электроном или позитроном, удобно  $e_{\lambda_1}^{+\lambda}$  выразить через  $e_e^{+\lambda}$ :

$$e_{\lambda_1}^{+\lambda} = 2N_e \left[ k_{\lambda_1} p_- \cdot \omega_{-\lambda} - p_{\lambda_1} k \cdot \omega_{\lambda} \right], \quad N_e = \frac{1}{4} [p_+ p_- \cdot p_+ k \cdot p_- k]^{-1/2} \quad (5.6)$$

$$e_{\lambda_1}^{+\lambda} = \Phi_{\lambda} e_e^{+\lambda}, \quad \Phi_+ = \Phi_- = -(e_{\lambda_1}^{+\lambda} e_e^{+\lambda}) = 2N_e N_e \delta_{\lambda_1 \lambda_2} q_+ \cdot q_- \cdot k_{\lambda_1} p_- \cdot \omega_{\lambda_2} = 2s N_e N_e Z(k_+, q_+, k).$$

Необходимо вычислить две спиральные амплитуды  $M_{+-}^+ = M^+$ ,  $M_{+-}^- = M^-$ . Из (5.4), пользуясь (5.6) и формулами приложения Б, имеем:

$$M^+ = \frac{4}{s_1} (s N_e \Phi_+ + s_1 N_\pi) X(q_-, q_+) \quad (5.7)$$

$$M^- = \frac{4}{s_1} (s N_e \Phi_- + s_1 N_\pi) Y(q_-, q_+)$$

Откуда, принимая во внимание  $|X(q_-, q_+)|^2 = \frac{s_1}{s} t u_1$ ,  $|Y(q_-, q_+)|^2 = \frac{s_1}{s} t u$  для квадрата модуля матричного элемента процесса (5.1), просуммированного по спиновым состояниям частиц, а также соотношение (3.10), имеем

$$\sum_{\text{сп}} |M^{e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^- \gamma}|^2 = 2(4\pi\alpha)^3 (|M^+|^2 + |M^-|^2) = - \frac{4(4\pi\alpha)^3}{s s_1} (t u + t_1 u_1) (v_p - v_q)^2 \quad (5.8)$$

Сечение процесса (5.1) имеет вид (см. (1.5)):

$$d\sigma^{e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^- \gamma} = \frac{\alpha^3}{32\pi^2 s} \cdot \frac{4(t u + t_1 u_1)}{s s_1} (-1) (v_p - v_q)^2 \frac{d^3 q_+ d^3 q_- d^3 k}{q_+ \cdot q_- \cdot k} \delta^{(4)}(p_+ + p_- - q_+ - q_- - k), \quad (5.9)$$

$$-(v_p - v_q)^2 = - \left( \frac{p_+}{p_+ k} - \frac{p_-}{p_- k} + \frac{q_-}{q_- k} - \frac{q_+}{q_+ k} \right)^2 = \frac{2s s_1 (t + t_1) + 2t t_1 (s + s_1) + u_1 (s t_1 + s_1 t) + u (s t + s_1 t_1)}{4 k p_+ \cdot k p_- \cdot k q_+ \cdot k q_-} \quad (5.10)$$

Рассмотрим процесс  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^- \gamma \gamma$

$$e^+(p_+) + e^-(p_-) \rightarrow \pi^+(q_+) + \pi^-(q_-) + \gamma(k_1) + \gamma(k_2). \quad (5.11)$$

Спиральные амплитуды определим следующим образом

$$M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_1 \lambda_2} = \bar{V}_{\lambda_1}^{\lambda_1} (p_+) O^{\lambda_1 \lambda_2} U_{\lambda_2}^{\lambda_2} (p_-) e_{\lambda_1}^{+\lambda_1}(k_1) e_{\lambda_2}^{+\lambda_2}(k_2), \quad (5.12)$$

где

$$\begin{aligned}
 0 = & \frac{1}{S_1} \left[ \gamma_\mu \frac{P-k_1+k_2}{\Delta_-^2} \left( \gamma_\sigma \frac{P-k_1}{-2P-k_1} \gamma_\rho + \gamma_\rho \frac{P-k_2}{-2P-k_2} \gamma_\sigma \right) + \gamma_\sigma \frac{P+k_2}{-2P+k_2} \gamma_\mu \frac{P-k_1}{-2P-k_1} \gamma_\rho + \gamma_\rho \frac{P+k_1}{-2P+k_1} \right. \\
 & \cdot \gamma_\mu \frac{P-k_2}{-2P-k_2} \gamma_\sigma + \left. \left( \gamma_\sigma \frac{P+k_2}{-2P+k_2} \gamma_\rho + \gamma_\rho \frac{P+k_1}{-2P+k_1} \gamma_\sigma \right) \frac{P+k_1+k_2}{\Delta_+^2} \gamma_\mu \right] (q-q_+)_\mu + \frac{1}{(q_+q_+k_2)^2} \left( \gamma_\mu \frac{P-k_1}{-2P-k_1} \gamma_\rho \right. \\
 & \left. + \gamma_\rho \frac{P+k_1}{-2P+k_1} \gamma_\mu \right) \left( (q-q_+k_2)_\mu \frac{q-s}{q-k_2} + (q-q_+k_2)_\mu \frac{(q+s)}{q+k_2} - 2g_{\mu\sigma} \right) + \frac{1}{(q_+q_+k_2)^2} \left( \gamma_\mu \frac{P-k_2}{-2P-k_2} \right. \\
 & \cdot \gamma_\sigma + \gamma_\sigma \frac{P+k_2}{-2P+k_2} \gamma_\mu \left. \right) \left( (q-q_+k_1)_\mu \frac{q-s}{q-k_1} + (q-q_+k_1)_\mu \frac{(q+s)}{q+k_1} - 2g_{\mu\rho} \right) + \frac{1}{(q_+k_1+k_2)^2} \left[ 2 \frac{(q+k_2)_\rho q-s}{q-k_2} + 2 \frac{(q+k_1)_\rho q-s}{q-k_1} - 2g_{\rho\sigma} \right] + \frac{(q-q_+k_1+k_2)_\mu}{q-k_1 \cdot q+k_2} \cdot \\
 & \left. q-s q+s - \frac{(q-q_+k_2-k_1)_\mu}{q-k_2 \cdot q+k_1} q-s q+s - 2 \frac{q-s g_{\mu\rho}}{q+k_2} - 2 \frac{q-s g_{\mu\sigma}}{q-k_1} + 2 \frac{q+s g_{\mu\rho}}{q+k_2} + 2 \frac{q+s g_{\mu\sigma}}{q+k_1} \right] \quad (5.13)
 \end{aligned}$$

Можно убедиться непосредственной подстановкой в (5.12)  $e_1 \rightarrow k_1$  (или  $e_2 \rightarrow k_2$ ), что калибровочное условие (сохранение тока) удовлетворяется: правая часть (5.13) при этом обращается в нуль.

Для вычисления суммы квадратов модулей спиральных амплитуд достаточно рассмотреть только 4 из них  $m_{+-}^{++} = m^{++}$ ,  $m^{--}$ ,  $m^{+-}$ ,  $m^{-+}$ . Оказывается, что, как и в случае процессов с образованием фермионов, спиральные амплитуды в случае совпадающих спиральностей фотонов имеют простой факторизованный вид.

Рассмотрим  $m^{++}$ , вклады в нее естественно разбиваются на 4 типа. В случае, когда оба фотона излучаются электроном (Работает I-е слагаемое в правой части (5.13)) вклад имеет вид

$$\begin{aligned}
 & 4 N_1 e N_2 e \frac{\Phi_1 \Phi_2}{\Delta_-^2 S_1} \bar{V}(P) \gamma_\mu (P-k_1-k_2) \left[ P_+ P_- k_2 \frac{P-k_1}{-2P-k_1} P_+ P_- k_1 + P_+ P_- k_1 \frac{P-k_2}{-2P-k_2} P_+ P_- k_2 \right] \omega - U(P) \cdot (q-q_+)_\mu = \\
 & = \frac{8S}{S_1} \Phi_1 \Phi_2 + N_1 e N_2 e \bar{V}(P) q-q_+ P_+ \omega - U(P) \quad (5.14a)
 \end{aligned}$$

В случае, когда первый фотон (с импульсом  $\chi_1$ ) излучается фермионами, а второй пионами имеем

$$\begin{aligned}
 & \frac{4 N_1 e N_2 \pi Q_{1+}}{(q_+q_+k_2)^2} \bar{V}(P) \gamma_\mu \frac{P-k_1}{-2P-k_1} (-P_+ P_- k_1) \omega - U(P) \left\{ q_+ \cdot 2q_+(q_+k_2) - q_+ \cdot 2q_-(q_+k_2) + \right. \\
 & \left. + 2i \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} q_+^\alpha q_+^\beta k_2^\gamma \right\}.
 \end{aligned}$$

Это выражение, пользуясь тождеством

$$2\gamma^\mu \left[ (q+k) q_\mu - (q-k) q_\mu + i\lambda \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} q_+^\alpha q_+^\beta k_2^\gamma \right] = \hat{k} \hat{q} + \hat{q} - (1+\lambda)\gamma_5 - \hat{q} + \hat{q} - \hat{k} (1-\lambda)\gamma_5 - 2\lambda \hat{k} \gamma_5 (q_+q_+),$$

можно переписать в виде

$$8 N_1 e N_2 \pi \Phi_{1+} \bar{V}(P) \hat{q} - \hat{q} + \hat{P}_+ \omega - U(P) \quad (5.14б)$$

аналогичное соотношение

$$8 N_1 \pi N_2 e \Phi_{2+} \bar{V}(P) \hat{q} - \hat{q} + \hat{P}_+ \omega - U(P) \quad (5.14в)$$

получится в случае, когда 2-й фотон излучается фермионами, а первый - пионами. Наконец, в случае, когда оба фотона излучаются пионами, 4-е слагаемое в правой части (5.13) с выражениями для векторов поляризации (5.5) надо подставить в (5.12), которое примет после некоторых преобразований вид:

$$\begin{aligned}
 & \frac{4S_1}{S} \bar{V} \gamma_\mu \omega - U N_1 \pi N_2 \pi \left\{ -2q_+ \cdot q_-(q_+k_1+k_2) + 2q_+ \cdot q_-(q_+k_1+k_2) - i \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} q_+^\alpha q_+^\beta (q_+q_+k_2)^\gamma \right\} \\
 & = \frac{8S_1}{S} N_1 \pi N_2 \pi \bar{V} \left[ (P_+ P_-) q_+ q_+ \omega - q_+ q_+ (P_+ P_-) \omega - \right] \omega - U = \frac{8S_1}{S} N_1 \pi N_2 \pi \bar{V} q_+ q_+ P_+ \omega - U. \quad (5.14г)
 \end{aligned}$$

Суммируя вклады (5.14а-г) и принимая во внимание, что  $\bar{V} q_+ q_+ P_+ \omega - U = S \chi(q_-, q_+)$ , получим выражение для амплитуды  $m^{++}$ :

$$m^{++} = \frac{8}{SS_1} (N_1 e S \Phi_{1+} + N_1 \pi S_1) (N_2 e S \Phi_{2+} + N_2 \pi S_1) \cdot S \chi(q_-, q_+). \quad (5.14)$$

Аналогичное вычисление для амплитуды  $m^{--}$  дает:

$$m^{--} = \frac{8S}{SS_1} \chi(q_-, q_+) (N_1 e S \Phi_{1-} + N_1 \pi S_1) (N_2 e S \Phi_{2-} + N_2 \pi S_1). \quad (5.15)$$

Рассмотрим спиральную амплитуду  $m^{+-}$ . Ее можно представить в виде

$$M^{+-} = \frac{4N_1 e N_2 e}{s_1} \phi_{1+} \phi_{2-} A_{ee} + \frac{4N_1 e N_2 \phi_{1+}}{(q_+ + q_- + k_2)^2} A_{e\pi_2} + \frac{4N_1 N_2 e \phi_{2-}}{(q_+ + q_- + k_1)^2} A_{e\pi_1} + \frac{4}{s} N_{1\pi} N_{2\pi} A_{\pi\pi} \quad (5.16)$$

Величины  $A_i$  пользуясь (5.13), (5.5), (5.6) и формулами приложения Б можно представить в виде:

$$A_{ee} = -\frac{s^2}{\Delta_-^2} k_{2\perp} Z_V(q, \Delta_-, k_1) + \frac{s^2}{\Delta_+^2} k_{1\perp} Z_U(q, \Delta_+, k_2) + 2\varepsilon \cdot s \cdot Z(\Delta_+, q, \Delta_-);$$

$$A_{e\pi_2} = 2s Z_U(-P_+ + k_1, q_+, q_-, \Delta_1), \quad A_{e\pi_1} = -2s Z_V(\Delta_2, q_+, q_-, P_- - k_2);$$

$$A_{\pi\pi} = 4s_1 \varepsilon \left\{ -\frac{\Delta_-}{\Delta_-'^2} (Z^*(k_2, q_-, k_1, q_+) + Z^*(q_+, k_1, q_-, k_2)) + \frac{\Delta_+}{\Delta_+'^2} (Z^*(k_2, q_+, k_1, q_-) + Z^*(q_-, k_1, q_+, k_2)) + Z(k_2, q_+, q_-) - Z(q_+, q_-, k_1) + \frac{1}{2} s_1 \cdot (q_+ + k_2 - q_- - k_1)_\perp \right\}, \quad (5.17)$$

где

$$\Delta'_\pm = q_\pm + k_1 + k_2, \quad \Delta_\pm = \mp(P_\pm - k_1 - k_2), \quad q = q_- - q_+, \quad \Delta_{1,2} = P_+ + P_- - k_{1,2}. \quad (5.18)$$

Выражение для амплитуды  $M^{+-}$  получится из (5.16) переобозначением 4-импульсов фотонов:

$$M^{+-}(k_1, k_2) = M^{+-}(k_2, k_1). \quad (5.19)$$

Сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma\gamma$  имеет вид:

$$d\sigma^{e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma\gamma} = \frac{1}{2!} \frac{\alpha^3}{64\pi^4 s} \cdot M \frac{d^3q_+}{q_{+0}} \frac{d^3q_-}{q_{-0}} \frac{d^3k_1}{k_{10}} \frac{d^3k_2}{k_{20}} \delta^{(4)}(P_+ + P_- - q_+ - q_- - k_1 - k_2), \quad (5.20)$$

$$M = \frac{t u + t_1 u_1}{s s_1} (v_{P_1} - v_{q_1})^2 (v_{P_2} - v_{q_2})^2 + (|M^{+-}|^2 + (k_1 \leftrightarrow k_2)), \quad (5.21)$$

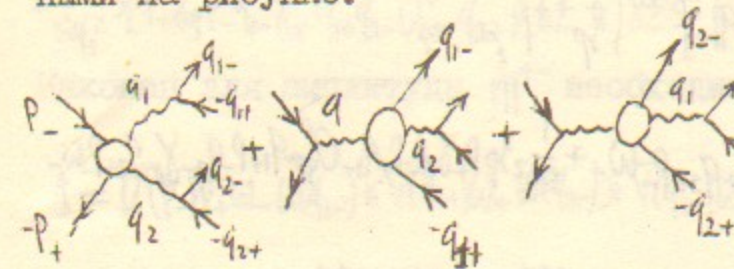
где величина  $1/2!$  учитывает тождественность фотонов, интегрирование по всем углам вылета каждого из них при этом подразумевается, величина  $M^{+-}$  дается выражениями (5.16-5.18). В пределе, когда один из фотонов мягкий (скажем  $k_2 \rightarrow 0$ )  $|M^{+-}|$  совпадает с модулем выражения (5.15), а  $|M^{-+}|$  (с 5.14), и, т.о., 2- слагаемое в правой части (5.21) совпадает с первым.

## 6. Процесс $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-q\bar{q}$ .

Рассмотрим процесс образования двух разных фермионных пар при  $e^+e^-$  столкновениях.

$$e_+(P_+) + e_-(P_-) \rightarrow \mu_+(q_{1+}) + \mu_-(q_{1-}) + q_+(q_{2+}) + q_-(q_{2-}). \quad (6.1)$$

Этот процесс описывается шестью диаграммами Фейнмана, изображенными на рисунке.



$$q_1 = q_{1-} + q_{1+},$$

$$q_2 = q_{2-} + q_{2+},$$

$$q = P_+ + P_-. \quad (6.2)$$

Для вычисления квадрата модуля матричного элемента, просуммированного по спиновым состояниям достаточно вычислить 4 спиральные амплитуды:

$$\sum_{\text{сп}} |M|^2 = 2(4\pi\alpha)^4 \cdot Q^2 [ |M^{++}|^2 + |M^{+-}|^2 + |M^{-+}|^2 + |M^{--}|^2 ], \quad (6.3)$$

где предполагается, что заряд частицы  $q$  в (6.1) есть  $eQ$ ,  $e^2 = 4\pi\alpha$ , а спиральные амплитуды определены следующим образом (см. (6.2)):

$$M^{\lambda_1 \lambda_2} = \bar{V}(P_{1\alpha}) (\omega - U(P))_\beta \bar{U}(q_{1-}) \gamma (\omega_{\lambda_1} V(q_{1+}))_\delta \bar{U}(q_{2-}) \varepsilon (\omega_{\lambda_2} V(q_{2+}))_\sigma O_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\sigma}$$

$$O = \frac{1}{q_1^2 q_2^2} \left( \gamma_\sigma \frac{P_- - q_1}{(P_- - q_1)^2} \gamma_\beta + \gamma_\beta \frac{P_- - q_2}{(P_- - q_2)^2} \gamma_\sigma \right) * \gamma_\beta * \gamma_\sigma + \frac{1}{s q_2^2} \gamma_\beta * \left( \frac{\gamma_\sigma (q_{1-} + q_2) \gamma_\beta}{(q_{1-} + q_2)^2} + \frac{\gamma_\beta (q_{1-} + q_2) \gamma_\sigma}{(q_{1-} + q_2)^2} \right) * \gamma_\sigma + \frac{1}{s q_1^2} \gamma_\beta * \gamma_\sigma * \left( \frac{\gamma_\sigma (q_{2-} + q_1) \gamma_\beta}{(q_{2-} + q_1)^2} + \frac{\gamma_\beta (q_{2-} + q_1) \gamma_\sigma}{(q_{2-} + q_1)^2} \right) = \frac{O_{\beta\sigma}^a * \gamma_\beta * \gamma_\sigma}{q_1^2 q_2^2} + \frac{\gamma_\beta * O_{\beta\sigma}^b * \gamma_\sigma}{s q_2^2} + (s q_1^2)^{-1} \gamma_\beta * \gamma_\sigma * O_{\beta\sigma}^c. \quad (6.4)$$

Для проведения свертки по индексам виртуальных фотонов при вычислении амплитуды  $M^{++}$  домножим правую часть (6.4) на величину (равную единице):



$$I = \bar{U}(P_-)P_+W-U(q_{1-})\bar{V}(q_{1+})P_-W-U(q_{2-})\bar{V}(q_{2+})P_-W-V(P_+) \cdot \frac{\bar{U}(q_{1-})P_+W-U(P_-)\bar{U}(q_{2-})P_-W-V(q_{1+})}{S^2(2P_+q_{1-})(2P_-q_{2-})} * \frac{\bar{V}(P_+)P_-W-V(q_{2+})}{(2P_-q_{1+})(2P_+q_{2+})} \quad (6.6)$$

Модуль спиральной амплитуды  $M^{++}$  при этом примет вид:

$$|M^{++}| = S^{-1} [2P_+q_{1-} \cdot 2P_-q_{2+} \cdot 2P_-q_{2-} \cdot 2P_+q_{1+}]^{-1/2} |R_p^{++}|,$$

$$R_p^{++} = \frac{1}{q_1^2 q_2^2} \delta p P_+ O_{\rho\sigma}^a P_- P_+ q_{1-} \delta_{\rho} q_{1+} P_- q_{2-} \delta_{\sigma} q_{2+} P_- W_- + \frac{1}{s q_2^2} \delta p P_+ \delta_{\rho} P_- P_+ q_{1-} O_{\rho\sigma}^b q_{1+} P_- q_{2-} \delta_{\sigma} q_{2+} P_- W_- + \frac{1}{s q_1^2} \delta p P_+ \delta_{\rho} P_- P_+ q_{1-} \delta_{\sigma} q_{1+} P_- q_{2-} O_{\rho\sigma}^b q_{2+} P_- W_- = 8\varepsilon S^2 \left[ \frac{A^{++}}{q_1^2 q_2^2} + \frac{B^{++}}{s q_2^2} + \frac{B^{++}}{s q_1^2} \right] \quad (6.7)$$

Для вычисления амплитуды  $M^{--}$  вместо (6.6) можно использовать следующее соотношение

$$I = \bar{U}(P_-)W_+U(q_{1-})\bar{V}(q_{1+})P_-W_+U(q_{2-})\bar{V}(q_{2+})W_-V(P_+) * \frac{\bar{U}(q_{1-})W_-U(P_-)\bar{U}(q_{2-})P_-W_+V(q_{1+})}{2P_-q_{1-} \cdot 2P_+q_{1+}} * \frac{\bar{V}(P_+)W_+V(q_{2+})}{2P_-q_{2-} \cdot 2P_+q_{2+}} \quad (6.8)$$

Для модуля амплитуды  $M^{--}$  имеем

$$|M^{--}| = [2P_-q_{1-} \cdot 2P_+q_{1+} \cdot 2P_-q_{2-} \cdot 2P_+q_{2+}]^{-1/2} |S_p^{--}|,$$

$$S_p^{--} = \frac{1}{q_1^2 q_2^2} \delta p P_+ O_{\rho\sigma}^a P_- P_+ q_{1-} \delta_{\rho} q_{1+} P_- q_{2-} \delta_{\sigma} q_{2+} W_- + \frac{1}{s q_2^2} \delta p P_+ \delta_{\rho} P_- P_+ q_{1-} O_{\rho\sigma}^b q_{1+} P_- q_{2-} \delta_{\sigma} q_{2+} W_- + \frac{1}{s q_1^2} \delta p P_+ \delta_{\rho} P_- P_+ q_{1-} \delta_{\sigma} q_{1+} P_- q_{2-} O_{\rho\sigma}^b q_{2+} W_- = 8\varepsilon S \left( \frac{A^{--}}{q_1^2 q_2^2} + \frac{B^{--}}{s q_2^2} + \frac{B^{--}}{s q_1^2} \right) \quad (6.9)$$

$$+ \frac{1}{s q_2^2} \delta p P_+ \delta_{\rho} P_- P_+ q_{1-} \delta_{\sigma} q_{1+} P_- q_{2-} O_{\rho\sigma}^b q_{2+} W_- = 8\varepsilon S \left( \frac{A^{--}}{q_1^2 q_2^2} + \frac{B^{--}}{s q_2^2} + \frac{B^{--}}{s q_1^2} \right).$$

Для вычисления амплитуды  $M^{+-}$  пользуемся тождеством

$$I = \bar{U}(P_-)W_+U(q_{1-})\bar{V}(q_{1+})W_-U(q_{2-})\bar{V}(q_{2+})P_-W_-V(P_+) \cdot \frac{\bar{U}(q_{1-})W_-U(P_-)\bar{U}(q_{2-})W_+V(q_{1+})}{S \cdot 2P_-q_{1-}} * \frac{\bar{V}(P_+)P_-W_-V(q_{2+})}{2P_-q_{2+} \cdot 2P_+q_{2-}} \quad (6.10)$$

Для модуля этой амплитуды имеем

$$|M^{+-}| = [S \cdot 2P_-q_{1-} \cdot 2P_+q_{2+} \cdot 2P_+q_{2-}]^{-1/2} |S_p^{+-}|,$$

$$S_p^{+-} = \frac{1}{q_1^2 q_2^2} \delta p P_+ O_{\rho\sigma}^a P_- P_+ q_{1-} \delta_{\rho} q_{1+} q_{2-} \delta_{\sigma} q_{2+} P_- W_- + \frac{1}{s q_2^2} \delta p P_+ \delta_{\rho} P_- P_+ q_{1-} O_{\rho\sigma}^b q_{1+} q_{2-} \delta_{\sigma} q_{2+} P_- W_- + \frac{1}{s q_1^2} \delta p P_+ \delta_{\rho} P_- P_+ q_{1-} \delta_{\sigma} q_{1+} q_{2-} O_{\rho\sigma}^b q_{2+} P_- W_- = 8\varepsilon S \cdot \left( \frac{A^{+-}}{q_1^2 q_2^2} + \frac{B^{+-}}{s q_2^2} + \frac{B^{+-}}{s q_1^2} \right) \quad (6.11)$$

Наконец для амплитуды  $M^{+-}$  необходимым тождеством является:

$$I = \bar{U}(P_-)P_+W_-U(q_{1-})\bar{V}(q_{1+})W_+U(q_{2-})\bar{V}(q_{2+})W_-V(P_+) \cdot \frac{\bar{U}(q_{1-})P_+W_-U(P_-)\bar{U}(q_{2-})W_+V(q_{1+})}{S \cdot 2P_+q_{1-}} * \frac{\bar{V}(P_+)W_+V(q_{2+})}{2P_+q_{2-} \cdot 2P_+q_{2+}} \quad (6.12)$$

а модуль этой амплитуды имеет вид

$$|M^{+-}| = [S \cdot 2P_+q_{1-} \cdot 2P_+q_{2-} \cdot 2P_+q_{2+}]^{-1/2} |S_p^{+-}|,$$

$$S_p^{+-} = \frac{1}{q_1^2 q_2^2} \delta p P_+ O_{\rho\sigma}^a P_- P_+ q_{1-} \delta_{\rho} q_{1+} q_{2-} \delta_{\sigma} q_{2+} W_- + \frac{1}{s q_2^2} \delta p P_+ \delta_{\rho} P_- P_+ q_{1-} O_{\rho\sigma}^b q_{1+} q_{2-} \delta_{\sigma} q_{2+} W_- + \frac{1}{s q_1^2} \delta p P_+ \delta_{\rho} P_- P_+ q_{1-} \delta_{\sigma} q_{1+} q_{2-} O_{\rho\sigma}^b q_{2+} W_- = 8\varepsilon S \left\{ \frac{A^{+-}}{q_1^2 q_2^2} + \frac{B^{+-}}{s q_2^2} + \frac{B^{+-}}{s q_1^2} \right\} \quad (6.13)$$

Дальнейшее вычисление не представляет труда. Ниже приводим результат

$$A^{++} = \frac{q_{1+} - q_{2-}}{(P_- q_1)^2} Z^*(q_{2+}, P_- q_{1+}, q_{1-}) - \frac{q_{1-} + q_{2+}}{(P_- q_2)^2} Z_u(q_{2-}, P_- q_{2+}, q_{1+}),$$

$$B^{++} = \frac{q_{1+}}{(q_{1+} + q_2)^2} [-Z(q_2, q_{1-}, q_2) Z_{2+}^* - (2\varepsilon - q_{1+}) Z_u(q_{2-}, q_{1-}, q_{2+})] + \frac{q_{1-} + Y^*(q_{1+}, q_{2+})}{(q_{1+} + q_2)^2} Y(q_{1+}, q_2, q_{2-}),$$

$$B^{+-} = \frac{q_{2+}}{(q_{2+} + q_1)^2} Z(q_{1+}, q_{2+}, q_1) Z^*(q_{2-}, q_{1-}) + \frac{q_{2-}}{(q_{2+} + q_1)^2} [Z_{2+}^* Z_u(-q_{2+}, q_{1-}, q_{1+}) -$$

$$- q_{1+} Z_u(-q_{2+}, q_{1-}, q_{2+})]$$

$$A^{--} = \frac{q_{1-} q_{2++}}{(p-q_1)^2} Z_u(q_{1+}, p-q_1, q_{2-}) + \frac{q_{2--}}{(p-q_2)^2} [q_{2++} Z_u(q_{1+}, p-q_2, q_{1-}) - Z^*(q_{1+}, q_{2+}) Z(q_{1-}, p-q_2)],$$

$$\bar{B}^{--} = \frac{q_{1+}}{(q_{1+}+q_2)^2} Y^*(q_{1-}, q_{2-}) Z^*(q_{1+}, q_2, q_{2+}) + \frac{q_{1--}}{(q_{1+}+q_2)^2} Z(q_{2-}, q_{1+}, q_2) Z^*(q_{1+}, q_{2+}),$$

$$B^{--} = \frac{q_{2++}}{(q_{2+}+q_1)^2} Y^*(q_{2-}, q_{1-}) Y(q_{2+}, q_{1+}, q_{1+}) + \frac{q_{2--}}{(q_{2+}+q_1)^2} Z(q_{1-}, q_{2+}, q_1) Z^*(q_{1+}, q_{2+}), \quad (6.15)$$

$$A^{+-} = \frac{-q_{2++}}{(p-q_1)^2} Z(q_{1+}, q_{2-}, p-q_1, q_{1-}) + \frac{q_{1-+}}{(p-q_2)^2} Z(q_{2-}, q_{1+}, p-q_2, q_{2+}),$$

$$\bar{B}^{+-} = \frac{X^*(q_{2+}, q_{1-})}{(q_{1+}+q_2)^2} Z(q_{1+}, q_{2-}, q_{1+}, q_2) + \frac{q_{1-+} \cdot 2(q_{1+} q_{2-}) \cdot Z^*(q_{1+}, q_2, q_{2+})}{(q_{1+}+q_2)^2},$$

$$B^{+-} = \frac{2(q_{1+} q_{2-}) q_{2+} + Z^*(q_{2+}, q_{1-})}{(q_{2+}+q_1)^2} + \frac{1}{(q_{2+}+q_1)^2} X^*(q_{1-}, q_{2+}) Z(q_{2-}, q_{1+}, q_{2+}, q_{1+}), \quad (6.16)$$

$$A^{-+} = \frac{-q_{1--}}{(p-q_1)^2} Z^*(q_{2+}, p-q_1, q_{1+}, q_{2-}) + \frac{q_{2+-}}{(p-q_2)^2} Z^*(q_{1-}, p-q_2, q_{2-}, q_{1+}),$$

$$\bar{B}^{-+} = \frac{q_{1--} \cdot 2q_{1+} q_{2-}}{(q_{1+}+q_2)^2} Z(q_{2+}, q_{1+}, q_{2-}) + \frac{1}{(q_{1-}+q_2)^2} [q_{1-} Z^*(q_{2+}, q_{1-}, q_{2-}, q_{1+}) - q_{2+} Z^*(q_{1-}, q_{2-}, q_{2-}, q_{1+})],$$

$$B^{-+} = \frac{-2q_{1+} q_{2-}}{(q_{2+}+q_1)^2} q_{2+} Z(q_{1-}, q_{2+}, q_1) + \frac{1}{(q_{2+}+q_1)^2} Y^*(q_{2+}, q_{1-}) Z(q_{2+}, q_{1+}, q_{1+}, q_{2-}). \quad (6.17)$$

Сечение процесса (6.1) имеет вид

$$d\sigma^{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^- \bar{q}q} = \frac{2^4 Q^2}{64\pi^4 s} [ |M^{++}|^2 + |M^{--}|^2 + |M^{+-}|^2 + |M^{-+}|^2 ] *$$

$$* \frac{d^3q_{1+}}{q_{1+0}} \frac{d^3q_{1-}}{q_{1-0}} \frac{d^3q_{2+}}{q_{2+0}} \frac{d^3q_{2-}}{q_{2-0}} \delta^{(4)}(p_+ + p_- - q_{1+} - q_{1-} - q_{2+} - q_{2-}), \quad (6.18)$$

величины  $Q, M^{ij}$  определены в (6.3), (6.7), (6.9), (6.11), (6.13) - 6.17).

Заметим, что в области (I.1) главный вклад происходит от диаграммы Фейнмана, в которой оба тяжелых фотона испускаются начальными частицами, поскольку она содержит малый знаменатель электронного пропагатора  $[(p-q_{1,2})^2 - m_e^2]$ . Поэтому для событий (6.1) должно выполняться следующее кинематическое ограничение:

$$\vec{q}_{1-} + \vec{q}_{1+} = \vec{q}_{2-} + \vec{q}_{2+}. \quad (6.19)$$

Авторы благодарны С.И.Середникову, В.Б.Голубеву и В.С.Фадину за полезные обсуждения

ЛИТЕРАТУРА:

1. P. De Causmaecker, R. Gastmans, W. Troost and T. T. Wu, Nucl. Phys. B206 (1982), 53-60.
2. F. A. Berends, R. Kleiss et al., Nucl. Phys. B206 (1982) 61-89.
3. F. A. Berends, P. De Causmaecker et al., Nucl. Phys. B239(1984) 382-394; 239 (1984) 395-409.
4. F. A. Berends, P. De Causmaecker et al., Preprint KUL-TP-84/7, April 1984.
5. Э. А. Кураев, А. Н. Перышкин. ЯФ, в печати.
6. R. Kleiss Nucl. Phys. B241 (1984), 61-74.
7. D. Danckaert, P. De Causmaecker, R. Gastmans, W. Troost, Phys. Lett. 114 (1982), 203-207.
8. V. N. Baier, V. S. Fadin, V. A. Khoze, Nucl. Phys. B65 (1973) 381; V. N. Baier et al., Phys. Reports 78 N° 3, (1981) Section B.2.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Здесь мы дадим основные обозначения, а также некоторые детали вычислений, проводя которые можно воспроизвести приведенные выше результаты.

Метрика и выбор системы отсчета:

$$ab = a_0 v_0 - a_2 v_2 - a_x v_x - a_y v_y, \quad p_- = (\varepsilon, \varepsilon, 0, 0), \quad p_+ = (\varepsilon, -\varepsilon, 0, 0). \quad (A.1)$$

В дальнейшем будет также использоваться следующая параметризация 4-импульсов:

$$a_{\pm} = a_0 \pm a_2, \quad a_{\perp} = a_x + i a_y, \quad 2ab = a_+ v_+ + a_- v_- + a_{\perp} b_{\perp}^* + a_{\perp}^* b_{\perp} \quad (A.2)$$

$$p_{-+} = p_{+-} = 2\varepsilon, \quad p_{--} = p_{++} = p_{+1} = p_{-1} = 0.$$

Система матриц Дирака (стандартное представление):

$$\gamma_{\mu} \gamma_{\nu} + \gamma_{\nu} \gamma_{\mu} = 2g_{\mu\nu}, \quad \gamma_{\rho} \gamma_{\sigma_1} \dots \gamma_{\sigma_{2n+1}} \gamma^{\rho} = -2\gamma_{\sigma_{2n+1}} \dots \gamma_{\sigma_1}, \quad \gamma_{\rho} \gamma_{\alpha} \gamma_{\rho} \gamma^{\beta} = 4g_{\alpha\beta} I, \quad (A.3)$$

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{\mu} \gamma_{\alpha} \gamma_{\rho} \gamma_{\rho} \gamma_{\sigma} \gamma^{\mu} = 2\gamma_{\alpha} \gamma_{\sigma} \gamma_{\rho} \gamma^{\rho} + 2\gamma_{\rho} \gamma_{\sigma} \gamma_{\rho} \gamma_{\alpha}.$$

С их помощью можно получить также матрицу  $\gamma_5$ , необходимую для построения спиральных состояний, матрицу зарядового сопряжения:

$$\gamma_5 = -i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \gamma_2 \gamma_0 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = C^{-1}, \quad \gamma_5^2 = 1.$$

$$\frac{1}{4} \gamma_{\rho} \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \gamma_{\sigma} \gamma_5 = i \varepsilon_{\rho\mu\nu\sigma}, \quad \varepsilon_{0123} = +1, \quad \gamma^{\mu} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -i \gamma_{\nu} \gamma_{\rho} \gamma_{\sigma}, \quad \mu \neq \nu \neq \rho \neq \sigma, \quad (A.4)$$

$$\frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5) = W_{\pm}, \quad W_{\pm}^2 = W_{\pm}, \quad W_+ W_- = 0, \quad \gamma_5 \gamma_{\mu} = -\gamma_{\mu} \gamma_5, \quad C \gamma_{\mu} C = -\gamma_{\mu}^T, \quad \gamma_0 \gamma_{\mu}^+ \gamma_0 = \gamma_{\mu}^-.$$

а также построить полезные в дальнейшем тождество

$$\gamma^{\mu} [a_{\sigma} \cdot b_{\mu} - b_{\sigma} \cdot a_{\mu} + i \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}] = \hat{C} (\hat{a} \hat{b} - a b) \omega_{\lambda} - (\hat{a} \hat{b} - a b) \hat{C} \omega_{\lambda}.$$

Спиральные состояния фермионов определим следующим образом:

$$U_{\pm}(p) = W_{\pm} U(p), \quad V_{\pm}(p) = W_{\mp} V(p), \quad \bar{V}_{\pm}(p) = \bar{V}(p) W_{\pm}, \quad \bar{U}_{\pm}(p) = \bar{U}(p) W_{\mp}. \quad (A.5)$$

Спиральные состояния начальных электрона и позитрона описываются спинорами (далее везде опускаем аргументы у этих спиноров:  $U(p_-) \equiv u$ ,  $V(p_+) \equiv v$ ):

$$\begin{aligned} u_+ &= \sqrt{\varepsilon} \begin{pmatrix} W \\ -W \end{pmatrix}, \quad u_- = \sqrt{\varepsilon} \begin{pmatrix} W' \\ W' \end{pmatrix}, \quad \bar{u}_+ = \sqrt{\varepsilon} (W^T, W^T), \quad \bar{u}_- = \sqrt{\varepsilon} (W'^T, -W'^T), \\ v_+ &= \sqrt{\varepsilon} \begin{pmatrix} W \\ W \end{pmatrix}, \quad v_- = \sqrt{\varepsilon} \begin{pmatrix} -W' \\ W' \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_+ = \sqrt{\varepsilon} (W^T, -W^T), \quad \bar{v}_- = \sqrt{\varepsilon} (-W'^T, -W'^T), \\ W &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad W^T = (0, 1), \quad W' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W'^T = (1, 0), \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

удовлетворяющими уравнению Дирака

$$\hat{p}_+ v_{\pm} = \bar{v}_{\pm} \hat{p}_+ = \hat{p}_- u_{\pm} = \bar{u}_{\pm} \hat{p}_- = 0 \quad (\text{A.7})$$

условию полноты:

$$u_{\pm} \bar{u}_{\pm} = w_{\pm} \hat{p}_{\pm}, \quad v_{\pm} \bar{v}_{\pm} = w'_{\mp} \hat{p}_{\mp}, \quad (\text{A.8})$$

$$\bar{u}_{\pm} u_{\pm} = \bar{v}_{\pm} v_{\pm} = 0,$$

а также соотношениям:

$$v_{\pm}^T c = i \bar{v}_{\mp}, \quad u_{\pm}^T c = i \bar{u}_{\mp}, \quad v_{\pm}^T \gamma_0 = \bar{v}_{\pm}, \quad u_{\pm}^T \gamma_0 = \bar{u}_{\pm}, \quad (\text{A.9})$$

$$c \bar{v}_{\pm}^T = i v_{\mp}, \quad c \bar{u}_{\pm}^T = i u_{\mp}, \quad \gamma_0 \bar{u}_{\pm}^T = u_{\pm}, \quad \gamma_0 \bar{v}_{\pm}^T = v_{\pm}.$$

Состояния конечных фермионов с определенной спиральностью также удовлетворяют (A.5), а также уравнению Дирака

$$\hat{q}_+ v_{\pm}(q_+) = \bar{v}_{\pm}(q_+) \hat{q}_+ = \hat{q}_- u_{\pm}(q_-) = \bar{u}_{\pm}(q_-) \hat{q}_- = 0. \quad (\text{A.10})$$

Мы выберем их в следующем виде:

$$u_+(q_-) = \sqrt{\varepsilon_-} \begin{pmatrix} W_+ \\ -W_+ \end{pmatrix}, \quad \bar{u}_+(q_-) = \sqrt{\varepsilon_-} (W_+^T, W_+^T), \quad W_+ = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta_-}{2} \\ e^{i\varphi} \cos \frac{\theta_-}{2} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

$$u_-(q_-) = \sqrt{\varepsilon_-} \begin{pmatrix} W_- \\ W_- \end{pmatrix}, \quad \bar{u}_-(q_-) = \sqrt{\varepsilon_-} (W_-^T, -W_-^T), \quad W_- = \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi} \cos \frac{\theta_-}{2} \\ \sin \frac{\theta_-}{2} \end{pmatrix},$$

причем полярные углы  $\theta_{\pm}$  отсчитываются от направления начального электрона в с.ц.и.:

$$\theta_- = \hat{q}_- \hat{p}_-, \quad \theta_+ = \hat{q}_+ \hat{p}_+ \quad (\text{A.12})$$

а азимутальные,  $\varphi_{\pm}$ , есть углы между некоторой плоскостью, проходящей через ось пучков и плоскостями, содержащими эту ось и 3-импульс конечного фермиона.

$$v_+(q_+) = \sqrt{\varepsilon_+} \begin{pmatrix} W'_+ \\ W'_+ \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_+(q_+) = \sqrt{\varepsilon_+} (W'^+_{+}, -W'^+_{+}), \quad W'_+ = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi_+} \cos \frac{\theta_+}{2} \\ \sin \frac{\theta_+}{2} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.13})$$

$$v_-(q_+) = \sqrt{\varepsilon_+} \begin{pmatrix} -W'_- \\ W'_- \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_-(q_+) = \sqrt{\varepsilon_+} (-W'^+_{-}, -W'^+_{-}), \quad W'_- = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta_+}{2} \\ e^{i\varphi_+} \cos \frac{\theta_+}{2} \end{pmatrix}.$$

Спиноры (A.11), (A.13) удовлетворяют соотношениям, аналогичным (A.9):

$$v_{\pm}^T(q_+) c = -i \bar{v}_{\mp}(q_+), \quad u_{\pm}^T(q_-) c = i \bar{u}_{\mp}(q_-), \quad (\text{A.14})$$

$$c \bar{v}_{\pm}^T(q_+) = -i v_{\mp}(q_+), \quad c \bar{u}_{\pm}^T(q_-) = i u_{\mp}(q_-).$$

Спиральные амплитуды процессов  $2 \rightarrow 4$  выражены выше в терминах билинейных комбинаций начальных спиноров. Будем их называть средними по состояниям. Эти комбинации (средние) мы разобьем на несколько классов по числу матриц Дирака стоящих между спинорами. Отметим полезные соотношения между средними данного класса, следующие из свойств спиноров (А.9) и матриц Дирака (А.3):

$$\bar{u}_{\lambda_1} a_1 \dots a_n v_{\lambda_2} = (-1)^{n+1} \bar{v}_{\lambda_2} a_n \dots a_1 u_{\lambda_1}, \quad \bar{u}_{\lambda_1} a_1 \dots a_n u_{\lambda_2} = (-1)^{n+1} \bar{u}_{\lambda_2} a_n \dots a_1 u_{\lambda_1} \quad (\text{Б.1})$$

$$(\bar{u}_{\lambda_1} a_1 \dots a_n v_{\lambda_2})^* = \bar{v}_{\lambda_2} a_n \dots a_1 u_{\lambda_1}, \quad (\bar{u}_{\lambda_1} a_1 \dots a_n u_{\lambda_2})^* = \bar{u}_{\lambda_2} a_n \dots a_1 u_{\lambda_1}, \quad (\text{Б.2})$$

Из определений (А.6) следуют средние "0" - класса:

$$\bar{u}_+ v_+ = \bar{v}_+ u_+ = -\bar{u}_- v_- = -\bar{v}_- u_- = 2\varepsilon. \quad (\text{Б.3})$$

Вычисляя среднее от свертки 4-вектора, а с матрицами Дирака:

$\hat{a} = \begin{pmatrix} a_0 & -\bar{a}^0 \\ \bar{a}^0 & -a_0 \end{pmatrix}$  с темным видом спиноров (А.5) получим для средних I-го класса выражения (см. (А.2)):

$$\bar{v}_+ a u_- = \bar{u}_+ a v_- = (\bar{u}_- a v_+)^* = (\bar{v}_- a u_+)^* = -2\varepsilon a_1, \quad (\text{Б.4})$$

$$\bar{u}_+ a u_+ = \bar{u}_- a u_- = 2\varepsilon a_-, \quad \bar{v}_+ a v_+ = \bar{v}_- a v_- = 2\varepsilon a_+. \quad (\text{Б.5})$$

Средние от произведения свертки двух 4-векторов с матрицами Дирака,  $\hat{a}\hat{b}$ , таковы

$$\bar{u}_+ a b v_+ = (\bar{v}_+ b a u_+)^* = -(\bar{u}_- a b v_-)^* = -\bar{v}_- b a u_- = 2\varepsilon z^*(a,b), \quad (\text{Б.6})$$

$$\bar{u}_- a b u_+ = -(\bar{u}_+ a b u_-)^* = 2\varepsilon \gamma^*(a,b); \quad \bar{v}_+ a b v_- = -(\bar{v}_- a b v_+)^* = -2\varepsilon \chi(a,b), \quad (\text{Б.7})$$

где мы использовали обозначения:

$$z(a,b) = a_+ b_- - a_- b_+, \quad \gamma(a,b) = a_- b_+ - b_- a_+; \quad \chi(a,b) = a_+ b_- - b_+ a_-. \quad (\text{Б.8})$$

Средние от произведения трех свертки 4-векторов  $a, b, c$  с матрицами Дирака  $\hat{a}\hat{b}\hat{c}$ , имеют вид

$$\bar{u}_+ a b c v_- = (\bar{u}_- a b c v_+)^* = v_+ c b a u_- = (\bar{v}_- c b a u_+)^* = 2\varepsilon z(a,b,c), \quad (\text{Б.9})$$

$$\bar{u}_+ a b c u_+ = (\bar{u}_- a b c u_-)^* = 2\varepsilon z_u(a,b,c); \quad \bar{v}_+ a b c v_- = (\bar{v}_- a b c v_+)^* = 2\varepsilon z_v(a,b,c), \quad (\text{Б.10})$$

где

$$z(a,b,c) = c_+ \gamma(a,b) - c_- z^*(a,b); \quad z_u = c_- z^*(a,b) - c_+ \gamma(a,b); \quad (\text{Б.11})$$

$$z_v(a,b,c) = c_+ z(b,a) - c_- \chi(a,b).$$

Среднее от произведения 4-х свертки  $\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}$ :

$$\bar{u}_+ a b c d v_+ = -\bar{v}_- d c b a u_- = -(\bar{u}_- a b c d v_-)^* = (\bar{v}_+ d c b a u_+)^* = 2\varepsilon z(abcd), \quad (\text{Б.12})$$

$$\bar{u}_+ a b c d u_- = (\bar{u}_- d c b a u_+)^* = 2\varepsilon z_u(abcd), \quad (\text{Б.13})$$

$$\bar{v}_+ a b c d v_- = (\bar{v}_- d c b a v_+)^* = 2\varepsilon z_v(abcd),$$

где

$$z(abcd) = \gamma(a,b)\chi^*(c,d) + z^*(a,b)z^*(c,d), \quad (\text{Б.14})$$

$$z_u(abcd) = \gamma(b,a)z^*(d,c) + \gamma(d,c)z^*(a,b),$$

$$z_v(abcd) = \chi(b,a)z(c,d) + \chi(d,c)z(b,a).$$

Наконец необходимые средние от произведения пяти свертки  $\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}\hat{e}$ :

$$\bar{v}_+ a b c d e v_+ = (\bar{v}_- a b c d e v_-)^* = 2\varepsilon z_v(a,b,c,d,e), \quad (\text{Б.15})$$

$$\bar{u}_+ a b c d e u_+ = (\bar{u}_- a b c d e u_-)^* = 2\varepsilon z_u(a,b,c,d,e), \quad (\text{Б.16})$$

где

$$z_v(a,b,c,d,e) = c_+ z(b,a)z^*(d,e) + c_- \chi(b,a)\chi^*(d,e) + c_+^* \chi(b,a)z^*(d,e) + c_-^* z(b,a)\chi^*(d,e),$$

$$z_u(a,b,c,d,e) = c_- z^*(a,b)z(e,d) + c_+ \gamma(b,a)\gamma^*(d,e) + c_-^* \gamma(b,a)z(e,d) + c_+^* z(b,a)\gamma^*(d,e). \quad (\text{Б.17})$$

Отметим соотношения, следующие из (Б.1), (Б.2) и определений

(Б.10), (Б.13), (Б.14), (Б.17):

$$Z_{\nu, \mu}(a, b, c) = Z_{\nu, \mu}^*(c, b, a); \quad Z_{\mu, \nu}(abcd) = -Z_{\mu, \nu}(dcba); \quad (\text{Б.18})$$

$$Z_{\nu, \mu}(abcde) = Z_{\nu, \mu}^*(edcba);$$

а также полезные частные случаи

$$Z(p_-, a) = Z(b, p_+) = Y(p_-, \beta) = X(a, p_+) = 0; \quad X(a, b) + X(b, a) = 0; \quad (\text{Б.19})$$

$$Y(a, b) + Y(b, a) = 0; \quad Z(a, b) + Z(b, a) = 2ab; \quad |Z(a, b)|^2 = \frac{1}{5} \text{tr} p_+ a b p_+ b a p_+;$$

В случае, когда один из 4-векторов  $a, \dots, e$  совпадает с  $p_+$  или  $p_-$ , соответствующая билинейная комбинация разбивается, благодаря соотношению полноты (А.8) на произведение двух средних.

Например:

$$Z_{\mu}(a, b, p_+, c, d) = \frac{1}{2\varepsilon} \bar{u}_+ a b p_+ c d u_+ = \frac{1}{2\varepsilon} \bar{u}_+ a b \omega_{-p_+} c d u_+ =$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon} \bar{u}_+ a b v_+ \cdot \bar{v}_+ c d u_+ = 2\varepsilon Z^*(a, b) \cdot Z(d, c).$$

Э.А.Кураев, А.Н.Перышкин

ПРОЦЕССЫ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ТИПА  $2 \rightarrow 4$ ,  
ИДУЩИЕ В  $e^+e^-$ -СТОЛКНОВЕНИЯХ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

Препринт  
№ 85-69

Работа поступила 20 мая 1985г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов

Подписано к печати 19.06.1985 г. МН 06685

Формат бумаги 60x90 I/16 Усл.2,6 печ.л., 2,1 учетно-изд.л.

Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ №69.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90