

48

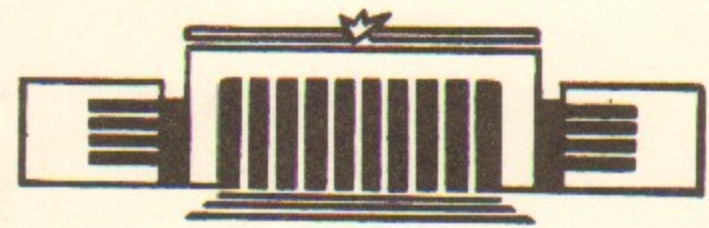


ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

**В. Н. Байер, В. М. Катков, В. М. Страховенко**

**РОЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННЫХ ПАР  
ФОТОНАМИ ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ  
В ОРИЕНТИРОВАННЫХ МОНОКРИСТАЛЛАХ**

**ПРЕПРИТ 85-79**



**НОВОСИБИРСК**



РОЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННЫХ ПАР  
ФОТОНАМИ ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ В ОРИЕНТИРОВАННЫХ  
МОНОКРИСТАЛЛАХ

В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко

А Н Н О Т А Ц И Я

Развита теория рождения пар фотоном в монокристаллах, применимая при любых энергиях и углах влета. Для малых углов влета теория описывает рождение пар в поле осей (плоскостей) монокристалла. В этом случае найдены поправки к приближению постоянного поля. Для относительно больших углов влета общие выражения переходят в стандартную теорию когерентного рождения пар. Получена модификация теории когерентного рождения пар, применимая в более широком интервале углов влета.



CREATION OF ELECTRON-POSITRON PAIRS BY HIGH ENERGY PHOTONS  
IN AN ALIGNED SINGLE CRYSTAL

V.N.Baier, V.M.Katkov and V.M.Strakhovenko

Institute of Nuclear Physics, 630090 Novosibirsk, USSR

A b s t r a c t

A theory has been developed of pair creation by a photon in a single crystal, which is valid at arbitrary energies and incident angles. For relatively small angles the theory describes pair creation in a field of axes (planes) of a single crystal. In this case, the corrections have been found to the constant field approximation. For relatively large incident angles the general expressions found are transformed into the standard theory of coherent pair creation. Modification of the theory of coherent pair creation has been found which is valid in a wider interval of incident angles.

I. В в е д е н и е

При взаимодействии фотона высокой энергии с монокристаллом механизм рождения электрон-позитронных пар существенно модифицируется по сравнению с аморфной средой. Еще в 50-е годы было выяснено, что когда импульс фотона  $\vec{k}$  лежит вблизи направления осей или плоскостей, имеет место интерференция вкладов в рождение пары на различных центрах. При определенных углах падения фотона и его энергии вероятность этого механизма (когерентное рождение пар, см. [1,2] и цитированную там литературу) существенно отличается от вероятности независимого рождения пар на отдельных центрах, имеющего место в аморфной среде (механизм Бете-Гайтлера).

Хорошо известен также механизм образования пары частиц фотоном высокой энергии в постоянном внешнем электромагнитном поле (см., напр., [3]). Совсем недавно было установлено, что для вполне достижимых в настоящее время энергий фотонов (десятки ГэВ) этот механизм может проявляться в монокристаллах, когда угол падения фотона  $\vartheta_0$  (угол между  $\vec{k}$  и осью или плоскостью) является малым. Приближение постоянного поля применимо, если  $\vartheta_0 \ll \sqrt{V_0}/m$  ( $V_0$  — характерный масштаб потенциала), ибо в этом случае поле оси (плоскости) можно считать постоянным на длине формирования пары [4]. Тогда дальнейшая задача сводится к выбору адекватного потенциала и проведению надлежащих усреднений [4,5]. Ранее этот механизм обсуждался также в работах [6,7]. В работе [6], где рассматривался плоскостной случай (для которого эффект проявляется при более высокой энергии) получено выражение для спектра одной из частиц рождающейся поляризованной  $e^+e^-$  пары в постоянном поле (заметим, что этот результат следует из формулы (10.100) в [3] с помощью правил подстановки). Дальнейший анализ свелся к оценкам, содержащим ряд грубых неточностей. В [7] задача для осевого случая решалась численно, без использования результатов для постоянного поля, для оси  $\langle 110 \rangle$  алмаза. Полученные нами в [4] вероятности (для тех же условий) оказались в несколько раз меньше, чем вычисленные в [7]. В работе [8] уже использовались результаты для постоянного поля, но расхождение с [4,5] осталось; после исправлений ошибок в вычислениях, найденные вероятности оказались в разумном согласии с [4,5]. (Д.Кимбал, частное сообщение).



Поведение вероятности рождения пары в постоянном поле определяется параметром  $\alpha$ \*)

$$\alpha = \frac{e}{m^3} \sqrt{|F_{\mu\nu} k^\nu|^2} \quad \vec{H}=0, \vec{E} \perp \vec{k} \quad \frac{\omega}{m} \frac{E}{E_0} \quad (I.1)$$

где  $k^\nu(\omega, \vec{k})$  - 4-импульс фотона,  $m$  - масса электрона,  $E$  - локальное значение электрического поля оси (плоскости),  $E_0 = m^2 c^3 / e \hbar = 1,32 \cdot 10^{16}$  В/см - критическое поле. При  $\alpha \ll 1$  вероятность рождения пар в постоянном поле экспоненциально мала ( $\propto \exp(-8/3\alpha)$ ) и в монокристаллах специфическим эффектом является только когерентное рождение пар. При  $\alpha \sim 1$  вероятность рождения пар в постоянном поле  $W_e^{CF}$  быстро нарастает и сравнивается с вероятностью механизма Бете-Гайтлера  $W_{BH}$  при энергии фотона  $\omega = \omega_e$ . Например, при комнатной температуре для оси <III> в вольфраме  $\omega_e \approx 22$  ГэВ и  $\omega_e \approx 90$  ГэВ в алмазе [4], см. Таблицу.

Многие особенности обсуждаемого процесса - рождение пар фотоном в монокристалле - схожи с рождением пар в поле плоской электромагнитной волны. Это связано с тем, что для фотонов (ультррелятивистских частиц), движущихся вблизи осей, плоскостей поле кристалла может быть сведено к потоку налетающих эквивалентных фотонов. Поскольку описание рождения пар в поле волны существенно проще, чем в монокристалле, то упомянутая аналогия оказывается весьма полезной. Потенциал кристалла представим в виде

$$U(\vec{z}) = \sum_{\vec{q}} G(\vec{q}) e^{-i\vec{q}\vec{z}} \quad (I.2)$$

явный вид  $G(\vec{q})$  зависит от типа решетки и пока нам не понадобится. В системе покоя кристалла имеется только электрическое поле  $\vec{E}$ . В системе отсчета, движущейся со скоростью  $\vec{v}$  вдоль направления влета фотона  $\vec{n}$  ( $\vec{v} = \vec{n}v$ ) возникает магнитное поле  $\vec{H} = \gamma v [\vec{E} \times \vec{n}]$  ( $\gamma = (1-v^2/c^2)^{-1/2} \gg 1$ ) и результирующее поле в этой системе, как известно, может быть представлено в виде потока эквивалентных фотонов с частотой  $\gamma v / q_{||} / v$  ( $q_{||} = (\vec{q} \cdot \vec{n})$ ), который с релятивистской точностью имеет вид

$$\vec{j}_q = -\vec{n} \frac{\gamma v}{4\pi e^2} \frac{|G(\vec{q})|^2}{q_{||}} \frac{1}{q_{\perp}^2} \quad (I.3)$$

\*) В работе используется система единиц  $\hbar = c = 1$ .

где  $\vec{q}_{\perp} = \vec{q} - \vec{n}(\vec{q} \cdot \vec{n})$ . В области взаимодействия, поперечный размер которой порядка  $\lambda_c = \frac{1}{m} = (\hbar/mc)$ , а продольный - длина формирования, в  $\zeta$ -системе падающего и эквивалентного фотона  $\sim 2\pi/q_{||} / v$ , находится  $N_q \approx 17q_{||} \frac{2\pi}{19q_{||} / v} \lambda_c^2$  фотонов. Эффективная сила взаимодействия характеризуется параметром

$$\alpha N_{ph} = \alpha \sum_{\vec{q}} N_q = \sum_{\vec{q}} \frac{|G(\vec{q})|^2 q_{\perp}^2}{m^2 q_{||}^2} \quad (1.4)$$

Этот параметр является чисто классическим (не содержит  $\hbar$ ) и всегда возникает в задачах с внешним электромагнитным полем: такой же смысл имеет параметр  $\xi^2$  в теории процессов в интенсивной плоской волне (см., напр. [9, 10]) и параметр  $\mathcal{S}$  в задаче излучения при квазипериодическом движении (см. [11]). При  $\alpha N_{ph} \ll 1$  внешнее поле можно учитывать по теории возмущений, а при  $\alpha N_{ph} \gg 1$  имеем предел постоянного поля. Для оценок можно считать, что  $|G(\vec{q})| \sim V_0$ ,  $q_{||} \sim q_{\perp} \vartheta_0$ , тогда

$$\alpha N_{ph} \sim \left( \frac{V_0}{m \vartheta_0} \right)^2 \quad (I.5)$$

Итак, при  $\vartheta_0 \ll V_0/m$  применимо приближение постоянного поля, а при  $\vartheta_0 \gg V_0/m$  справедлива теория возмущений, первое приближение которой и является теорией когерентного рождения пар. Эти критерии были ранее получены в работах авторов [4, 5], исходя из других соображений.

Вероятность когерентного рождения максимальна при углах влета фотона

$$\vartheta_0 \sim \vartheta_m = \frac{m^2 \Delta}{\hbar \omega} \quad (I.6)$$

где  $\Delta$  - типичное расстояние между осями, плоскостями. С ростом энергии фотона положение максимума смещается в сторону меньших углов и когда достигается угол  $\vartheta_m \sim V_0/m$ , теория когерентного рождения пар становится неприменимой в области своего максимума (и левее его). В этом смысле эта теория совершенно недостаточна в области высоких энергий.



Настоящая работа посвящена построению единого описания процесса рождения пар фотоном в монокристалле, применимого при любых углах влета фотона и при любых энергиях (раздел II). Для  $\vartheta_0 \ll V_0/m$  и  $\vartheta_0 \gg V_0/m$  полученные вероятности переходят в известные предельные случаи. В случае  $\vartheta_0 \ll V_0/m$  вычислена также поправка  $\sim (m\vartheta_0/V_0)^2$ . При  $\vartheta_0 \gg 1$  вероятность рождения пар частиц в постоянном поле  $W_e^{cr}$  может превышать  $W_{BH}$  в 10-100 раз [5], см. также Таблицу (раздел III).

В разделе IV для области  $\vartheta_0 \geq V_0/m$  из общих формул получено выражение для вероятности, представляющее собой модификацию теории когерентного рождения пар, имеющее более широкую (как функция  $\vartheta_0$ ) область применимости, чем стандартная теория. Расчет вероятности по общей формуле является достаточно сложной вычислительной задачей. С другой стороны, учет поправок  $\sim (m\vartheta_0/V_0)^2$  к приближению постоянного поля и модификация теории когерентного рождения позволяет оценивать вероятность процесса с помощью простых выражений для всех углов влета кроме  $\vartheta_0 \sim V_0/m$ . Если мы хотим ограничиться этим простым описанием, то возникает вопрос о "шивке" указанных приближений при  $\vartheta_0 \sim V_0/m$ . Здесь оказывается очень полезной отмечавшаяся выше аналогия с рождением пар в поле интенсивной плоской волны, использование которой дает сравнительно надежную процедуру интерполяции (приложение).

## II. Квазиклассическое описание рождения пар фотоном в монокристаллах

Общее выражение для вероятности рождения пары частиц во внешнем поле в квазиклассическом приближении получено в [3]. Здесь мы еще раз проанализируем процесс рождения пар, ориентируясь на рождение в электрическом поле  $\varphi(\vec{z})$  (в [3] поле для этого случая задавалось вектором-потенциалом  $\vec{A}(\vec{z})$ ) и покажем, что все окончательные результаты [3] остаются в силе. Одним из основных моментов операторного квазиклассического метода [3] является распутывание экспоненциальных операторных выражений. В нашем случае следует рассмотреть выражение

$$L_c(\tau) = e^{i\tau \mathcal{H}^-} e^{i\tau \tilde{\mathcal{H}}^+(t_1)} \quad (2.1)$$

Здесь  $\tau = t_2 - t_1$ ,  $\mathcal{H}^\pm = \mathcal{H}_0 \pm U(\vec{z})$  - гамильтониан для электрона (позитрона),  $U(\vec{z}) = e\varphi(\vec{z})$  - потенциальная энергия,  $\mathcal{H}_0(\vec{p}) = (\vec{p}^2 + m^2)^{1/2}$ . Выражение для  $\mathcal{H}^\pm$  выписано с квазиклассической точностью, в частности, опущены члены взаимодействия спин-поле. Заметим, что в задаче излучения будет входить комбинация  $L_c(\tau) = \exp(i\tau \mathcal{H}^-) \exp(-i\tau \tilde{\mathcal{H}}^+(t_1))$ . В формулу (2.1) входит оператор

$$\tilde{\mathcal{H}}^+(t_1) = \mathcal{H}_0(\vec{p}(t_1) - \vec{k}) + U(\vec{z}(t_1)) \quad (2.2)$$

где развитие во времени гейзенберговских операторов  $\vec{p}(t)$  и  $\vec{z}(t)$  определяется гамильтонианом  $\mathcal{H}^-$ , а осреднение всего операторного выражения для вероятности проводится по состояниям электрона, так что в окончательном ответе будут фигурировать классические траектории электрона в заданном поле. Если же мы изменим порядок суммирования по конечным состояниям и проведем сначала суммирование по состояниям электрона, то развитие операторов во времени будет определяться гамильтонианом  $\mathcal{H}^+$ , а в ответ будут входить классические траектории позитрона. Траектории электронов и позитронов в интересующей нас задаче существенно различаются. Совпадение результатов достигается после суммирования по всем возможным для данного типа частиц траекториям.

Перейдем к распутыванию выражения (2.1). Продифференцируем  $L_c(\tau)$  по  $\tau$  (см. [3]):

$$\begin{aligned} \frac{dL_c(\tau)}{d\tau} &= ie^{i\tau \mathcal{H}^-} [\mathcal{H}^- + \mathcal{H}_0(\vec{p}(t_1) - \vec{k}) + U(\vec{z}(t_1))] e^{i\tau \tilde{\mathcal{H}}^+(t_1)} \\ &= ie^{i\tau \mathcal{H}^-} [\mathcal{H}_0(\vec{p}(t_1)) + \mathcal{H}_0(\vec{p}(t_1) - \vec{k})] e^{i\tau \tilde{\mathcal{H}}^+(t_1)} = \quad (2.3) \\ &= i [\mathcal{H}_0(\vec{p}(t_1 + \tau)) + \mathcal{H}_0(\vec{p}(t_1 + \tau) - \vec{k})] L_c(\tau) \end{aligned}$$

где мы воспользовались тем, что оператор  $\mathcal{H}^-$  не меняется во времени и заменили  $\mathcal{H}^-$  на  $\mathcal{H}^-(t_1) = \mathcal{H}_0(\vec{p}(t_1)) - U(\vec{z}(t_1))$ . После этого явная зависимость от  $U(\vec{z})$  вышла и дальнейший расчет полностью совпадает с проведенным в [3]. Учитывая релятивистский характер движения частиц пар и включив фактор  $\exp(-i\omega\tau)$  из волновой функции фотона имеем для экспоненциального фактора в выражении для вероятности процесса



$$T \exp \left\{ \frac{i \varepsilon \omega}{2 \varepsilon'} \int_0^{\tau} dt_1 B(t_1 + \tau_1) \right\}, B(t) = \frac{1}{\gamma^2} + (\vec{n} - \vec{v}(t))^2, \quad (2.4)$$

где  $\gamma = \varepsilon/m$ ,  $\varepsilon$  - энергия частицы (среднее значение  $\mathcal{H}_0$ ),  $\vec{n} = \vec{k}/\omega$ ,  $\varepsilon' = \omega - \varepsilon$ .  $\vec{v}(t)$  - скорость частицы родившейся пары. В фазе (2.4) при  $\varepsilon' > 0$  уже произошла компенсация в  $\gamma^2$  раз. При  $\varepsilon > \omega$  фаза скачком становится большой, что приводит к экспоненциальному подавлению вероятности; так в этом подходе реализуется закон сохранения энергии. Заметим, что результат (2.4) справедлив также и в задаче излучения (но для  $\varepsilon' < 0$ ).

Входящую в (2.4) T-экспоненту можно представить в виде разложения по коммутаторам  $B(t)$  в разные моменты времени

$$T \exp \{ \dots \} = \exp \left\{ \frac{i \varepsilon \omega}{2 \varepsilon'} \int_0^{\tau} dt_1 B(t_1 + \tau_1) + \left( \frac{i \varepsilon \omega}{2 \varepsilon'} \right)^2 \frac{1}{2} \int_0^{\tau} dt_1 \int_0^{\tau_1} dt_2 [B(t_1 + \tau_1), B(t_2 + \tau_2)] + \dots \right\} \quad (2.5)$$

Ниже мы будем считать выполненным условие

$$\varrho_c \equiv \frac{V_0 \omega}{m^2} \gg 1 \quad (2.6)$$

Фактически, только при выполнении этого условия эффект рождения электрон-позитронных пар в поле оси или плоскости становится наблюдаемым (см. [4]). При  $\varrho_c \gg 1$  вклад члена, содержащего коммутатор в (2.5), оказывается всегда малым и его можно опустить. Величина этого вклада зависит от конкретных условий задачи, в частности от угла влета  $\vartheta_0$ , значений параметра  $\alpha$ . Оценки показывают, что обычно относительная малость его  $\sim 1/m\alpha \ll 1$ , где  $\alpha$  - размер области действия потенциала. Отбрасывая член с коммутатором имеем следующее выражение для вероятности рождения пар (за все время взаимодействия), ср. (2) в [5]:

$$w_e = \frac{\alpha m^2}{(2\pi)^2 \omega} \int \frac{d^3 z_0}{V} \int \frac{d^3 p_0}{\varepsilon \varepsilon'} \int dt_1 \int dt_2 \left\{ 1 - \frac{\varepsilon^2 \varepsilon'^2}{4 \varepsilon \varepsilon'} \gamma^2 [\vec{v}(t_1) - \vec{v}(t_2)]^2 \right\} e^{i \mathcal{A}^{(2.7)}},$$

$$\mathcal{A} = \frac{\varepsilon \omega}{2 \varepsilon'} \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{1}{\gamma^2} + (\vec{n} - \vec{v}(t))^2 \right]$$

Здесь  $V$  - объем кристалла,  $\vec{p}_0$  - импульс частицы родившейся пары в точке рождения  $\vec{z}_0$ . Аналогичные выражения для излучения см. в разделе 2 в [II].

Представим скорость  $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \Delta \vec{v}(t, \vec{v}_0)$ , тогда подынтегральное выражение в фазе  $\mathcal{A}$  в (2.7) можно записать в виде

$$\frac{1}{\gamma^2} + \vec{u}^2 + 2 \vec{u} \Delta \vec{v} + (\Delta \vec{v})^2 \quad (2.8)$$

где

$$\vec{u} \equiv \vec{n} - \vec{v}_0 = \vec{n} (1 - \vec{n} \vec{v}_0) - \vec{v}_0 \approx -\vec{v}_0$$

так что можно считать, что вектор  $\vec{u}$  лежит в плоскости, перпендикулярной  $\vec{n}$ . Основной вклад в вероятность (2.7) будут давать участки траектории, на которых направление вектора  $\vec{v}_0$  близко к  $\vec{n}$ :  $|\vec{u}| \sim 1/\gamma$  и  $|\Delta \vec{v}(t, \vec{v}_0)| \sim 1/\gamma$ . Но тогда можно заменить  $\Delta \vec{v}(t, \vec{v}_0) \rightarrow \Delta \vec{v}(t, \vec{n}) \equiv \Delta \vec{v}(t)$ . При этой замене отбрасываются члены того же порядка, что и коммутатор, опущенный в (2.5). Соответственно, в предэкспоненциальном выражении в (2.7) заменим  $(\vec{v}(t_1) - \vec{v}(t_2)) \rightarrow (\Delta \vec{v}(t_1) - \Delta \vec{v}(t_2))$ . С релятивистской точностью можно переписать элемент фазового объема  $d^3 p_0 \approx \varepsilon^2 d\varepsilon d^2 \vec{u}$ . После этих преобразований можно выполнить интегрирование по  $\vec{u}$ . В результате имеем:

$$w_e = \frac{\alpha m^2}{2\pi \omega^2} \int \frac{d^3 z_0}{V} \int d\varepsilon \int_{\tau+i0}^{\omega} \frac{dt d\tau}{\tau} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon^2 \varepsilon'^2}{4 \varepsilon \varepsilon'} \gamma^2 [\Delta \vec{v}(t - \frac{\tau}{2}) - \Delta \vec{v}(t + \frac{\tau}{2})]^2 \right\} e^{i \mathcal{A}_1}$$

где

$$\mathcal{A}_1 = \frac{\varepsilon \omega \tau}{2 \varepsilon'} \left[ \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dx (\Delta \vec{v}(t+x))^2 - \left( \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dx \Delta \vec{v}(t+x) \right)^2 \right] \quad (2.9)$$

где мы перешли к переменным  $t, \tau$ :  $t_1 = t - \tau/2$ ,  $t_2 = t + \tau/2$ ; направление обхода точки  $\tau = 0$  (знак мнимой добавки) следует из условия сходимости интеграла по  $\vec{u}$ .



Все интересные эффекты имеют место при малых углах фотонов  $\vartheta_0 \ll 1$ . Рассмотрим случай, когда  $\vartheta_0 \gg \vartheta_c$ , где  $\vartheta_c = \sqrt{\frac{2U_0}{\omega}}$  - критический угол для данной оси (плоскости),  $U_0$  - глубина соответствующей потенциальной ямы. Поскольку  $\vartheta_c \gg 1$ , то  $\vartheta_c \gg 1/\gamma$ . Выше было показано, что частицы родившейся пары вылетают в узкий конус с углом раствора  $\sim 1/\gamma$  вокруг направления  $\vec{n}$ . Тогда если  $\vartheta_0 \gg \vartheta_c$ , то частицы родившейся пары будут двигаться высоко над барьером (с точки зрения режима их движения в каналах, образованных осями или плоскостями) и для нахождения  $\Delta \vec{U}(t)$  для них можно воспользоваться приближением прямолинейной траектории. В потенциале кристалла (1.2) используя уравнение движения и приближение прямолинейной траектории, находим

$$\Delta \vec{U}(t) = -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{\vec{q}} G(\vec{q}) e^{-i\vec{q}\vec{z}} (e^{-i q_{||} t} - 1) \frac{\vec{q}_{\perp}}{q_{||}} \quad (2.10)$$

где  $q_{||} = (\vec{q}\vec{n})$ ,  $\vec{q}_{\perp} = \vec{q} - \vec{n}(\vec{q}\vec{n})$ . Отметим, что поскольку в (2.9) величина  $\Delta U$  входит квадратично, то результат в приближении прямолинейной траектории перестает зависеть от знака потенциала и пропадает различие между электронами и позитронами в конечном состоянии. Подставляя (2.10) в (2.9) и вычислив входящие интегралы, найдем для вероятности рождения пар:

$$W_e = \frac{i\alpha m^2}{2\pi\omega^2} \int \frac{d^3 z_0}{V} \int d\varepsilon \int dt \int \frac{d\tau}{\tau+i0} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon'^2}{\varepsilon\varepsilon'} \left( \sum_{\vec{q}} \frac{G(\vec{q})}{m q_{||}} \cdot e^{-i(\vec{q}\vec{z}_0 + q_{||}t)} \sin \frac{q_{||}\tau}{2} \right)^2 \right\} e^{iA_2}, \quad (2.11)$$

$$A_2 = \frac{m^2\omega\tau}{2\varepsilon\varepsilon'} \left\{ 1 + \sum_{\vec{q}, \vec{q}'} \frac{G(\vec{q})G(\vec{q}')}{m^2} e^{-i[(\vec{q}+\vec{q}')\vec{z}_0 + (q_{||}+q'_{||})t]} \frac{\vec{q}_{\perp}\vec{q}'_{\perp}}{q_{||}q'_{||}} \cdot \left[ 2 \frac{\sin((q_{||}+q'_{||})\tau)}{(q_{||}+q'_{||})\tau} - 4 \frac{\sin \frac{q_{||}\tau}{2}}{q_{||}\tau} \frac{\sin \frac{q'_{||}\tau}{2}}{q'_{||}\tau} \right] \right\} \quad (2.12)$$

В это выражение время  $t$  входит только в виде комбинации  $z_{0||} + t$  и после замены  $z_{0||} + t \rightarrow z_{0||}$  зависимость от време-

ни остается только в пределах интегрирования по  $z_{0||}$ . Этой зависимостью можно пренебречь, если длина кристалла (в продольном направлении) значительно превышает длину (время) формирования в процессе образования электрон-позитронной пары  $\ell_f$ . При энергии  $\omega \approx 100$  ГэВ в германии  $\ell_f \sim 10^{-5}$  см и медленно растет с ростом  $\omega$  (асимптотически  $\propto \omega^{1/3}$ ), так что практически это условие всегда выполняется. В этом случае можно опустить интегрирование по  $t$ , а область интегрирования по  $\tau$  ввиду быстрой сходимости интегралов распространить до бесконечности. В результате получаем для вероятности рождения электрон-позитронной пары в единицу времени:

$$\frac{dW_e}{dt} = W_e = \frac{i\alpha m^2}{2\pi\omega^2} \int \frac{d^3 z_0}{V} \int d\varepsilon \int \frac{d\tau}{\tau+i0} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon'^2}{\varepsilon\varepsilon'} \left( \sum_{\vec{q}} \frac{G(\vec{q})}{m q_{||}} e^{-i\vec{q}\vec{z}_0} \sin q_{||}\tau \right)^2 \right\} e^{iA_3},$$

$$A_3 = \frac{m^2\omega\tau}{\varepsilon\varepsilon'} \left\{ 1 + \sum_{\vec{q}, \vec{q}'} \frac{G(\vec{q})G(\vec{q}')}{m^2} \frac{\vec{q}_{\perp}\vec{q}'_{\perp}}{q_{||}q'_{||}} e^{-i(\vec{q}+\vec{q}')\vec{z}_0} \left[ \frac{\sin(q_{||}+q'_{||})\tau}{(q_{||}+q'_{||})\tau} - \frac{\sin q_{||}\tau}{q_{||}\tau} \frac{\sin q'_{||}\tau}{q'_{||}\tau} \right] \right\} \quad (2.13)$$

Хотя выражение для вероятности  $W_e$  получено для угла влета  $\vartheta_0 \gg \vartheta_c$ , ниже будет показано, что фактически формула (2.13) справедлива вплоть до  $\vartheta_0 = 0$  и является общим выражением для вероятности рождения пар фотоном высокой энергии, влетающим в монокристалл под малым углом к кристаллографической оси (плоскости). В области больших углов  $W_e$  (2.13) переходит в известную вероятность когерентного рождения пар, а при малых углах - в вероятность рождения пар в постоянном поле. Эти переходы будут детально прослежены ниже. В промежуточной области необходимо непосредственно использовать (2.13).

### III. Вероятность процесса при $\vartheta_0 \ll \sqrt{V_0/m}$ . Поправки к приближению постоянного поля

Приступим к анализу общего выражения (2.13). Для оценок мы будем полагать  $G(\vec{q}) \sim \sqrt{V_0} \cdot 1/q_{\perp} \sim 1/a$ ,  $q_{||} \sim \vartheta_0/a$ , где  $a$  - характерный линейный масштаб действия потенциала. Тогда порядок величины двойной суммы в  $A_3$  (2.13) есть  $(V_0/m\vartheta_0)^2$ . Рассмотрим сначала случай относительно малых углов, когда  $\vartheta_0 \ll \sqrt{V_0/m}$  (пока попрежнему будем полагать, что  $\vartheta_0 \gg \vartheta_c$ , что



возможно благодаря условию  $g_c \gg 1$ ). Выберем ось  $z$  вдоль кристаллической оси, относительно которой <sup>\*</sup> отсчитывается угол  $\vartheta_0$ . Тогда для векторов  $\vec{q}$ , лежащих в плоскости  $(x, y)$  имеем  $q_{zt} \sim \vartheta_0 m / V_0 \ll 1$ , а для любых других  $\vec{q}$  будет  $q_{zt} \sim m / V_0 \gg 1$ , и в двойной сумме в  $A_3$  следует сохранить только члены с  $q_z = q'_z = 0$ , вклад же остальных членов с  $q_z \neq 0$  подавлен степенным образом по параметру  $(V_0/m)$ . Разлагая функции  $q_{zt}$  по степеням аргумента получаем:

$$A_3 = \frac{m^2 \omega \tau}{\varepsilon \varepsilon'} \left\{ 1 - \frac{\tau^2}{3} \sum_{\vec{q}_t, \vec{q}'_t} \frac{G(\vec{q}_t) G(\vec{q}'_t)}{m^2} (\vec{q}_t \vec{q}'_t) \cdot e^{-i(\vec{q}_t + \vec{q}'_t) \vec{\rho}_0} \left[ 1 - \frac{\tau^2}{10} \left( (\vec{q}_t \vec{n})^2 + (\vec{q}'_t \vec{n})^2 + \frac{2}{3} (\vec{q}_t \vec{n})(\vec{q}'_t \vec{n}) \right) \right] \right\} \quad (3.1)$$

где индекс  $t$  означает компоненту вектора, лежащую в плоскости  $(x, y)$ ,  $\vec{\rho}_0 = z_0 \vec{e}_z$ . Можно переписать формулу (3.1) в терминах зависящего только от поперечной координаты потенциала осей (ср. (1.2))

$$U(\vec{\rho}_0) = \sum_{\vec{q}_t} G(\vec{q}_t) e^{-i\vec{q}_t \vec{\rho}_0} \quad (3.2)$$

а именно:

$$A_3 = \frac{m^2 \omega \tau}{\varepsilon \varepsilon'} \left\{ 1 + \frac{\tau^2}{3} \vec{b}^2 + \frac{\tau^4}{15} \left( (\vec{b} \cdot (\vec{n} \vec{\nabla})^2 \vec{b}) + \frac{1}{3} ((\vec{n} \vec{\nabla}) \vec{b})^2 \right) \right\} \quad (3.3)$$

где  $\vec{b} = \frac{\nabla U(\vec{\rho}_0)}{m}$ ,  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \vec{\rho}_0}$ . После аналогичной процедуры предэкспоненциальный фактор в подынтегральном выражении (2.13) принимает вид

$$\left\{ \dots \right\} = 1 - \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon \varepsilon'} \tau^2 \left[ \vec{b}^2 + \frac{\tau^2}{3} (\vec{b} \cdot (\vec{n} \vec{\nabla})^2 \vec{b}) \right] \quad (3.4)$$

\* Для простоты в дальнейшем мы будем предполагать в этой работе, что вектор  $\vec{n}$  не лежит вблизи кристаллических плоскостей. Вопрос о рождении пар в плоскостном режиме будет рассмотрен отдельно.

Отметим, что  $\vec{b}$  выражается через ускорение частицы  $\vec{b} = -\gamma \ddot{\vec{r}}(\vec{r})$ , так что все выражение оказывается зависящим от локальных характеристик движения, что характерно для рождения пар фотоном в постоянном поле. Члены, содержащие  $\vec{n}$  в (3.3) имеют относительный порядок малости  $\sim (m \vartheta_0 / V_0)^2$  и по ним можно провести разложение в  $e^{iA_3}$ . После подстановки (3.3) и (3.4) в (2.13) и проведения этого разложения интегралы по  $\tau$  берутся с помощью известных соотношений:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{-i\lambda(\tau + \frac{\tau^3}{3})} = \frac{2}{\sqrt{3}} K_{1/3} \left( \frac{2\lambda}{3} \right), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \tau e^{-i\lambda(\tau + \frac{\tau^3}{3})} = -\frac{2i\lambda}{\sqrt{3}} K_{2/3} \left( \frac{2\lambda}{3} \right) \quad (3.5)$$

и рекуррентных соотношений для функций Макдональда  $K_\nu(z)$ . Проведя это вычисление получим для вероятности рождения пар  $W_e^F$  в пределе  $\vartheta_0 \ll V_0/m$ :

$$W_e^F = \frac{\alpha m^2}{\sqrt{3} \pi \omega^2} \int d\varepsilon \int \frac{d^2 \rho_0}{S} \left\{ \varphi(\varepsilon) K_{2/3}(\lambda) + \int dy K_{1/3}(y) - \frac{1}{3} \frac{(\vec{b} \cdot (\vec{n} \vec{\nabla})^2 \vec{b})}{|\vec{b}|^4} \varphi(\varepsilon) \left[ K_{2/3}(\lambda) - \frac{2}{3\lambda} K_{1/3}(\lambda) \right] - \frac{\lambda}{30 |\vec{b}|^4} \left[ ((\vec{n} \vec{\nabla}) \vec{b})^2 + 3(\vec{b} \cdot (\vec{n} \vec{\nabla})^2 \vec{b}) \right] \left[ K_{1/3}(\lambda) - \frac{4}{3\lambda} K_{2/3}(\lambda) - \varphi(\varepsilon) \left( \frac{4}{\lambda} K_{2/3}(\lambda) - K_{1/3}(\lambda) - \frac{16}{9\lambda^2} K_{1/3}(\lambda) \right) \right] \right\} \quad (3.6)$$

где  $\varphi(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ ,  $\lambda = \frac{2m^2 \omega}{3\varepsilon \varepsilon' |\vec{b}|}$ . Поскольку выражение для  $W_e^F$  не зависит от  $z_0$ , то  $\int d^3 z_0 / V \rightarrow \int d^2 \rho_0 / S$ , где  $S$  площадь поперечного сечения кристалла, перпендикулярная выбранной оси; ввиду периодичности кристалла, усреднение по  $\vec{\rho}_0$  можно проводить по области поперечного сечения, приходящегося на одну ось, тогда  $S = S_0$  — площадь этой области. Первые два члена в (3.6), не зависящие от  $\vec{n}$  представляют собой вероятность рождения пар в приближении постоянного (на длине формирования пары) поля, найденные ранее [4,5], остальные являются поправкой  $\sim \vartheta_0^2$ .

Дальнейшие упрощения выражения (3.6) возможны, если потенциал оси можно считать аксиально-симметричным. В некоторых случаях, например, для оси  $\langle III \rangle$  в кристаллических структурах типа  $fcc$  ( $\alpha$ ),  $bcc$ , потенциал с хорошей точностью



является аксиально-симметричным относительно выделенной оси во всей области  $S_0$ , приходящейся на эту ось. Но даже если потенциал не является аксиально-симметричным во всей области  $S_0$ , он во всяком случае обладает этим свойством при  $|\vec{\rho}_0| \leq a_s$ , где  $a_s$  - эффективный радиус экранирования потенциала цепочки,  $\rho_0$  отсчитывается от оси. Напряженность электрического поля, в котором происходит рождение пары максимальна как раз в области  $|\vec{\rho}_0| \leq a_s$ . Считая, что  $U = U(\vec{\rho}_0^2)$ , можно провести в (3.6) интегрирование по углам вектора  $\vec{\rho}_0$ :

$$W_e^F = \frac{\alpha m^2}{\pi \omega^2 \sqrt{3}} \int_0^{\omega} \frac{dx}{x_0} \int d\varepsilon \left\{ \varphi(\varepsilon) K_{2/3}(\lambda) + \int_{\lambda}^{\infty} dy K_{4/3}(y) - \right. \\ \left. - \frac{4(m \mathcal{D}_0)^2}{6(V_0)} \left[ \varphi(\varepsilon) \frac{xg'' + 2g'}{xg^3} (K_{2/3}(\lambda) - \frac{2}{3\lambda} K_{4/3}(\lambda)) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{20g^4 x^2} (2x^2 g'^2 + g^e + 4gg'x + 6x^2 g g'') (\lambda K_{4/3}(\lambda) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{4}{3} K_{2/3}(\lambda) - \varphi(\varepsilon) (4K_{2/3}(\lambda) - (1 + \frac{16}{9\lambda}) K_{4/3}(\lambda)) \right) \right] \right\}, \quad (3.7)$$

где мы перешли к переменной  $x = \rho_0^2/a_s^2$ ;  $x_0^{-1} = \sqrt{3} a_s n d$ ;  $d$  - среднее расстояние между атомами цепочки, образующей ось,  $n$  - плотность атомов в кристалле, введено обозначение  $U'(x) = V_0 g(x)$ , тогда

$$\lambda = \frac{m^3 \omega a_s}{3 \varepsilon \varepsilon' V_0 |\sqrt{x} g|} = \frac{1}{3} \frac{\omega^2}{\varepsilon \varepsilon'} \frac{1}{\alpha(a_s)} \frac{1}{|\sqrt{x} g|}$$

Полученное выражение (3.7) применимо для произвольной формы аксиально-симметричного потенциала решетки. Для получения конкретных предсказаний мы будем использовать явный вид потенциала оси, который оказался вполне адекватным в задаче излучения [12] и использовался в [4,5,13]:

$$U(x) = V_0 \left[ \ln \left( 1 + \frac{1}{x+\eta} \right) - \ln \left( 1 + \frac{1}{x_0+\eta} \right) \right] \quad (3.8)$$

Для оценок можно считать, что  $V_0 \approx Ze^2/d$ ,  $\eta \approx 2u_1^2/a_s^2$ , где  $u_1$  - амплитуда тепловых колебаний. Фактически же параметры потенциала находились с помощью подгоночной процедуры

(см. детали в [12]), исходя из модели потенциала решетки, основанного на потенциале Мольера для изолированного атома (параметры приведены в Таблице). Для потенциала (3.8) величина электрического поля и параметра  $\alpha$  есть

$$eE = -\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{2V_0 \sqrt{x} g(x)}{a_s}, \quad g(x) = \frac{1}{x+\eta} - \frac{1}{x+\eta+\zeta}, \\ \alpha(x) = \frac{2V_0 \omega}{a_s m^3} \sqrt{x} g(x). \quad (3.9)$$

Электрическое поле (3.9) обращается в 0 при  $x=0$  (из-за тепловых колебаний), достигает максимума при  $x = x_m = \frac{1}{\varepsilon} [\sqrt{1+16\eta(\eta+1)} - 1 - 2\eta]$ , а затем спадает. В дальнейшем мы будем использовать  $\alpha_m \equiv \alpha(x_m)$  и  $\alpha_s = V_0 \omega / a_s m^3$ .

Отметим, что спектр  $dW_e^F/d\varepsilon$  одной из частиц, родившейся пары следует из (3.7), если опустить интегрирование по  $\varepsilon$ .

Формулы (3.6), (3.7) получены из вероятности (2.13) в области применимости последней ( $\mathcal{D}_0 \gg \mathcal{D}_c$ ), однако при дальнейшем уменьшении угла  $\mathcal{D}_0$  вероятность меняется незначительно, что очевидно следует из (3.7), так что формулы (3.6), (3.7), а тем самым и формула (2.13) справедливы вплоть до  $\mathcal{D}_0=0$ .

Поведение вероятности в постоянном поле иллюстрируется рис.1,2. На рис.1 приведена вероятность рождения пары как функция энергии фотона для некоторых веществ. На рис.2 изображен спектр родившихся электронов (позитронов) при разных энергиях фотона для оси <111> в вольфраме. Видно, что пик при  $\varepsilon \approx \omega/2$  при сравнительных малых энергиях с ростом энергии постепенно переходит в широкое плато, в середине которого затем возникает провал, так что форма спектра становится довольно схожей с бете-гайтлеровской.

Имеется аналогия между формулой (3.7), которую мы представим в виде

$$W_e^F = F_1 + \left( \frac{m \mathcal{D}_0}{V_0} \right)^2 F_2, \quad (3.10)$$

и вероятности излучения при квазипериодическом движении  $W_{\omega}$ , когда основной параметр, определяющий свойства излучения,  $\rho \gg 1$  ( $\rho = 2\gamma^2 [\langle \vec{v}^2 \rangle - \langle \vec{v} \rangle^2]$ ,  $\langle \dots \rangle$  означает усредне-



ние по времени, при  $\varrho \ll 1$  излучение является дипольным, при  $\varrho \gg 1$  имеет место магнитотормозной предел); тогда величина  $W_e$  может быть представлена в виде  $W_e = f_1 + \frac{1}{\varrho} f_2$  (ср. формулу (4.16) в [II]). Итак, величина  $(V_0/m\varrho_0)^2$  играет роль параметра  $\varrho$ . Отношение функций  $F_2/F_1$  в (3.10) в зависимости от энергии для различных веществ приведено на Рис.3. При тех значениях  $\omega$ , когда  $F_2 > 0$  вероятность (3.10) имеет минимум при  $\varrho_0 = 0$ . При  $\alpha_s \approx (5,1 + 5,3)\sqrt{\eta}$  функция  $F_2$  меняет знак и при больших значениях  $\alpha_s$   $W_e$  имеет максимум при  $\varrho_0 = 0$ . При дальнейшем увеличении  $\omega(\alpha_s)$  высота этого максимума растет, а ширина начинает сужаться, т.к. при  $\alpha_s \gg 1$  величина  $F_2$  растет быстрее, чем  $F_1$ .

Максимальное значение  $W_e^F$  (3.7), (3.10) при  $\varrho_0 = 0$  достигается при  $\alpha_s \gg 1$ . В этом случае можно получить явное асимптотическое выражение  $W_e$  для  $W_e$ , что очень удобно для проведения анализа. Область интегрирования в (3.7) можно разбить на три: 1)  $0 \leq x \leq x_1 \ll 1$ , 2)  $x_1 \leq x \leq x_2 \gg 1$ , 3)  $x_2 \leq x \leq x_0$ , считая  $x_0 \gg 1$ , причем  $\lambda(x_1) \ll 1$ ,  $\lambda(x_2) \ll 1$ . Следует учесть также, что в интеграл по энергии основной вклад дает область, где  $\omega^2/4\epsilon\epsilon' \sim 1$ . Тогда в областях 1) и 3) можно  $\sqrt{x} g(x)$  заменить на приближенные выражения при малых и больших  $x$  и перейти к интегрированию по  $\lambda$ , а в области 2) использовать разложение функций  $K_\nu(\lambda)$  при  $\lambda \ll 1$ , распространяя интегрирование до бесконечности. Получаем в результате довольно громоздких вычислений:

$$W_e^F(\alpha_s \gg 1) \approx \frac{\alpha}{3^{1/3} \pi m \alpha_0 \alpha_s} \left\{ C_1 \alpha_s^{-1/3} [\ln \alpha_s + B_1(\eta)] - \right. \quad (3.11)$$

$$\left. - \left( \frac{m \varrho_0}{V_0} \right)^2 (1+2\eta) C_2 \alpha_s^{1/3} [\ln \alpha_s + B_2(\eta)] \right\},$$

где  $C_1 = \frac{45}{\pi} \frac{\Gamma^3(2/3) (4)^{1/3}}{\Gamma(1/3) (3)} \approx 6,558$ ,  $C_2 = \frac{7}{15,495} \frac{\Gamma^3(1/3) (3)^{4/3}}{\Gamma(2/3) (4)} \approx 0,097$ ;

$$B_1(\eta) = B_1(0) - \frac{3}{2} \int_0^\infty \frac{dx}{x} \left[ (1+x)^{-1/3} - (1+\eta x)^{-1/3} (1+(1+\eta)x)^{-1/3} \right] \quad (3.12)$$

\*) Простые явные формулы для вероятности  $W_e^{CF}$  при  $\alpha_m \lesssim 1$  содержатся в [4].

$$B_2(\eta) = B_2(0) - \frac{3}{2} \int_0^\infty \frac{dx}{x} \left[ (1+x)^{-1/3} - (1+\eta x)^{-1/3} (1+(1+\eta)x)^{-1/3} \right] - \frac{3}{16(1+2\eta)} \int_0^\infty \frac{dx}{(1+\eta x)^{4/3} (1+(1+\eta)x)^{4/3}} + \frac{9}{16},$$

$$B_1(0) = \frac{\pi\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2} \ln 3 + \ln 2 - C + \frac{3}{20} - 6 \approx -0,374,$$

$$B_2(0) = -\frac{\pi\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2} \ln 3 + \ln 2 - C + 4 + \frac{3}{7} - \frac{6}{11} - \frac{13}{40} \approx 3,70.$$

Здесь  $C = 0,577\dots$  - постоянная Эйлера. Интегралы в  $B_1, B_2$  выражаются через гипергеометрические функции. Учитывая, что обычно  $\eta \ll 1$ , приведем приближенные выражения:

$$B_1(\eta) = -0,374 - 3,975 \beta^{2/3} \left( 1 + \frac{\eta}{15} \beta + \frac{7}{18} \beta^2 \right) + \beta \left( \frac{3}{2} + \frac{9}{8} \beta + \frac{13}{14} \beta^2 \right),$$

$$B_2(\eta) = 3,70 - 2,31 \beta^{1/3} \left( 1 + \frac{2}{3} \beta - \frac{19}{63} \beta^2 \right) - \frac{\beta}{160} (30 + 144\beta - 29\beta^2), \quad (3.13)$$

где  $\beta = \eta/(1+\eta)$ .

При выводе формулы (3.11) интегрирование по  $\alpha$  проводилось в бесконечных пределах. Поскольку основной (логарифмический) вклад в (3.11) дает область  $x \sim \alpha_s^{2/3}$  (область 3), то ясно, что асимптотика (3.11) справедлива только при  $\alpha_s^{2/3} \ll x_0$ , т.е. для энергии фотона, не превышающей несколько ТэВ. При таких энергиях, когда  $\alpha_s^{2/3} \sim x_0$ , основной вклад дают большие расстояния от оси, где может нарушаться цилиндрическая симметрия потенциала и необходимо учитывать влияние нескольких осей. Тогда вероятность рождения пары при малых углах влета дается формулой (3.6), куда следует подставить потенциал (3.2).

Функция  $F_2(\alpha_s \gg 1) \equiv F_2^{\alpha_s}$  в (3.10), (3.11) имеет максимум в точке  $\alpha_s^0 = \exp(3 - B_1(\eta))$ , вблизи которого функция  $F_1^{\alpha_s}$  меняется очень плавно. Поэтому значение энергии  $\omega^0$ , получающееся из  $\alpha_s^0$  является лишь оценкой по порядку величины. Зна-



чение же  $W_e^{F_{max}} = F_z^{as}(\alpha_s^0)$  дается формулой (3.11) вполне удовлетворительно и находится в хорошем согласии с результатами численного расчета по полной формуле (3.7):

$$W_e^{F_{max}} \approx K \frac{\alpha}{\sqrt{3\pi}} \frac{V_0}{m a_s x_0} \quad (3.14)$$

здесь коэффициент  $K = C_z \exp\left(\frac{B_z(\eta)}{3} - 1\right)$  зависит от вещества и меняется (для обычно используемых веществ) в интервале 1,93-1,59 при изменении  $\eta$  от 0,025 (алмаз) до 0,15 (кремний). В работе [5] (формула (6)) использовалось округленное значение  $K = 2$ .

Значительный интерес представляет максимальное значение превышения вероятности рождения пары в поле оси над вероятностью рождения пары в соответствующей аморфной среде (механизм Бете-Гайтлера). Взяв (3.14) и  $W_{BH}$  (см., напр., [3,9]) получим

$$z_{max} \equiv \frac{W_e^{F_{max}}}{W_{BH}} \approx \frac{3\sqrt{3} K V_0 m a_s d}{28 Z^2 \alpha^2 \ln(183 Z^{-1/3})} \sim \frac{1}{3} \frac{a_s m}{Z \alpha \ln(183 Z^{-1/3})} \quad (3.15)$$

где вторая (упрощенная) оценка является относительно грубой. Отсюда видно, что  $z_{max}$  тем больше, чем меньше  $Z$  и чем больше  $a_s$ . Наибольший выигрыш (среди используемых веществ) достигается в алмазе ( $z_{max} \sim 160$ ), величины  $z_{max}$  приведены в таблице. Здесь уместно отметить, что эффект рождения пары в поле оси становится заметным при  $\alpha_m \sim 1$  (см. (3.9)), грубая оценка соответствующей энергии есть [4]

$$\omega \sim \frac{m^3 u_d}{Z \alpha} \quad (3.16)$$

откуда видно, что эффект проявляется прежде всего для тех веществ, для которого выигрыш  $z_{max}$  минимален.

#### IV. Вероятность процесса при $\vartheta_0 > V_0/m$ .

##### Модификация теории когерентного рождения пар

Рассмотрим теперь область больших углов падения фотона. Покажем, вначале, в этой области из (2.13) следуют результаты стандартной теории когерентного рождения пар. Из оценок, сделанных в начале раздела III, вытекает, что порядок величины двойной суммы в  $A_3$  (2.13) есть  $(V_0/m\vartheta_0)^2$ . Поэтому при  $\vartheta_0 \gg V_0/m$  член с двойной суммой в  $A_3$  является малым и  $e^{iA_3}$  можно соответственно разложить. В результате вероятность (2.13) приобретает вид:

$$W_e^{coh} = \frac{i \alpha m^2}{28 \omega^2} \int_{-\infty}^{\omega} d\varepsilon \int_{\tau+i0}^{+\infty} \frac{d\tau}{\tau+i0} e^{i \frac{m^2 \omega \tau}{\varepsilon \varepsilon'}} \sum_{\vec{q}, \vec{q}'} \frac{G(\vec{q}) G(\vec{q}')}{m^2 q_{||} q_{||}'} (\vec{q}_\perp \vec{q}'_\perp) \cdot \left\{ \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon'^2}{\varepsilon \varepsilon'} \sin q_{||} \tau \sin q'_{||} \tau + i \frac{m^2 \omega \tau}{\varepsilon \varepsilon'} \left[ \frac{\sin(q_{||} + q'_{||}) \tau}{(q_{||} + q'_{||}) \tau} - \frac{\sin q_{||} \tau \sin q'_{||} \tau}{q_{||} \tau q'_{||} \tau} \right] \right\} \cdot \int \frac{d^3 z_0}{V} e^{-i(\vec{q} + \vec{q}') \cdot \vec{z}_0} \quad (4.1)$$

Интегрирование по  $\vec{z}_0$  в (4.1) элементарно и дает  $\delta_{\vec{q} + \vec{q}', 0}$  ( $\vec{q}$  - дискретная переменная), после этого вычисляется сумма по  $\vec{q}'$ , а интегралы по  $\tau$  легко берутся с помощью теории вычетов. В итоге имеем

$$W_e^{coh} = \frac{\alpha}{2 \omega^2} \int_{\vec{q}} d\varepsilon \sum_{\vec{q}} \frac{|G(\vec{q})|^2}{q_{||}^2 q_{\perp}^2} \left\{ \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon'^2}{\varepsilon \varepsilon'} + \frac{2 \omega m^2}{q_{||}^2 \varepsilon \varepsilon'} \left( q_{||} - \frac{\omega m^2}{2 \varepsilon \varepsilon'} \right) \right\} \mathcal{V} \left( q_{||} - \frac{\omega m^2}{2 \varepsilon \varepsilon'} \right) \quad (4.2)$$

Проводя в (4.2) интегрирование по  $\varepsilon$  получим:

$$W_e^{coh} = \frac{\alpha}{\omega} \sum_{\vec{q}} \frac{|G(\vec{q})|^2}{q_{||}^2} \mathcal{V} \left( q_{||} - \frac{2m^2}{\omega} \right) f \left( \frac{2m^2}{\omega q_{||}} \right), \quad (4.3)$$

где

$$f(x) = \left( 1 + x - \frac{x^2}{2} \right) \ln \frac{1 + \sqrt{1-x}}{1 - \sqrt{1-x}} - (1+x) \sqrt{1-x} \quad (4.4)$$



Вероятности (4.2), (4.3) совпадают с результатами стандартной теории когерентного рождения пар (см., напр., [1, 2]). Напомним (см. [1]), что формула (4.3) легко получается из известного выражения для сечения образования пары частиц двумя фотонами с помощью метода эквивалентных фотонов (см., напр., [9], стр. 414):  $\sigma_{\gamma\gamma} = \pi \frac{\alpha^2}{m^2} y f(y)$ , где  $y = 2m^2/kq$ ; плотность фотонов -  $1/|\vec{q}|$  (1.3),  $W_e = \sum_{\vec{q}} \sigma_{\gamma\gamma} |\vec{q}| \mathcal{V}(1-y)$ , где  $\mathcal{V}$  - функция отвечает порогу реакции  $\gamma + \gamma \rightarrow e^+ + e^-$ .

При  $\alpha_s \gg 1$  из общего выражения (2.13) могут быть получены приближенные выражения для вероятностей, область применимости которых существенно шире, чем стандартной теории когерентного рождения. Для этого следует учесть, что второй член в двойной сумме в функции  $\mathcal{A}_3$  (2.13) имеет порядок  $(V_0/m\vartheta_0)^4 (\alpha_s^2)$ , а первый содержит вклады двух типов: при  $q_{||} + q'_{||} = 0$  порядка  $(V_0/m\vartheta_0)^2$  и при  $q_{||} + q'_{||} \neq 0$  порядка  $(V_0/m\vartheta_0)^3 (\alpha_s)$ . Вклады порядка  $(V_0/m\vartheta_0)^3 (\alpha_s)$  (и тем более  $(V_0/m\vartheta_0)^4 (\alpha_s^2)$ ) могут оказаться малыми даже для углов  $\vartheta_0 \lesssim V_0/m$ . Поэтому будем считать эти вклады малыми и проведем в  $e^{i\mathcal{A}_3}$  соответствующие разложения, а члены с  $q_{||} + q'_{||} = 0$  в первом члене в двойной сумме в  $\mathcal{A}_3$  сохраним в экспоненте. В результате получим выражение, совпадающее по форме с (4.1), только в нем надо заменить

$$e^{i \frac{m^2 \omega \tau}{\varepsilon \varepsilon'}} \rightarrow e^{i \frac{m_*^2 \omega \tau}{\varepsilon \varepsilon'}}, \quad m_*^2 = m^2 \left(1 + \frac{\vartheta}{2}\right) \quad (4.5)$$

и в члене  $\frac{\sinh(q_{||} + q'_{||})\tau}{(q_{||} + q'_{||})\tau}$  считать  $q_{||} + q'_{||} \neq 0$ . Здесь

$$\frac{\vartheta}{2} = \gamma^2 [\langle \vec{v}^2 \rangle - \langle \vec{v} \rangle^2] = \frac{1}{m^2} \sum_{\vec{q}, \vec{q}'} \frac{G(\vec{q})G(\vec{q}')}{q_{||}q'_{||}} (\vec{q}_\perp \vec{q}'_\perp) \quad (4.6)$$

$$\left[ \delta_{q_{||}+q'_{||},0} - \delta_{q_{||},0} \delta_{q'_{||},0} \right] = \sum_{\vec{q}, q_{||} \neq 0} \frac{|G(\vec{q})|^2 q_\perp^2}{m^2 q_{||}^2}$$

Переход  $m \rightarrow m_*$  соответствует переходу к эффективной массе в поле волны (см. Приложение), на другом языке учтен параметр  $\vartheta \neq 0$  (см. обсуждение после формулы (3.10)).

Дальнейшие вычисления проводятся также, как при переходе от (4.1) к (4.2). В итоге имеем

$$W_e^{mcoh} = \frac{\alpha}{2\omega^2} \int d\varepsilon \sum_{\vec{q}} \frac{|G(\vec{q})|^2 q_\perp^2}{q_{||}^2} \left[ \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon'^2}{\varepsilon \varepsilon'} + \frac{2\omega m^2}{q_{||}^2 \varepsilon \varepsilon'} \left( q_{||} - \frac{\omega m^2}{2\varepsilon \varepsilon'} \right) \right] \mathcal{V} \left( q_{||} - \frac{\omega m^2}{2\varepsilon \varepsilon'} \right), \quad (4.7)$$

и после интегрирования по  $\varepsilon$ , получим

$$W_e^{mcoh} = \frac{\alpha}{\omega} \sum_{\vec{q}} \frac{|G(\vec{q})|^2 q_\perp^2}{q_{||}^2} \mathcal{V} \left( q_{||} - \frac{2m_*^2}{\omega} \right) \tilde{f}(\tilde{x}) \quad (4.8)$$

где

$$\tilde{f}(z) = \left( 1 + \frac{z - z/2}{1 + \vartheta/2} \right) e^{\frac{1 + \sqrt{1-z}}{1 - \sqrt{1-z}}} - \left( 1 + \frac{z}{1 + \vartheta/2} \right) \sqrt{1-z},$$

$\tilde{x} = 2m_*^2/\omega q_{||}$ . Формулы (4.7), (4.8) не сложнее (4.2), (4.3), но имеют значительно более широкую область применимости. При  $\vartheta_0 \gg V_0/m$  ( $\vartheta \ll 1$ ) формулы (4.7), (4.8) переходят соответственно в (4.2), (4.3). Параметр  $(V_0/m\vartheta_0)^3 (\alpha_s)$ , по которому велось разложение, аналогичен параметру  $\mu_1$ , полученному в модели, обсуждающейся в Приложении, при модификации борновского приближения (см. формулу (П.7)).

#### У. Ориентационная зависимость вероятности рождения пар. Обсуждение результатов

Как следует из проведенного анализа, ориентационная зависимость вероятности  $W^e(\vartheta_0)$  может служить хорошим пробником механизма рождения пар. При  $\vartheta_0 \ll V_0/m$  доминирует механизм рождения в постоянном поле, при  $\vartheta_0 \gg V_0/m$  - стандартный механизм когерентного рождения, в промежуточной области необходимо основываться на общем подходе. В качестве иллюстрации мы приведем здесь вероятность  $W^e(\vartheta_0)$  для охлажденного германия (ось  $\langle 110 \rangle$ ,  $T = 100\text{K}$ , что соответствует условиям эксперимента [14], см. рис. 4) и вольфрама (ось  $\langle 111 \rangle$ , рис. 5). На рис. 4 ориентационная зависимость  $W^e$  приведена для энергий:



$\omega = 30$  ГэВ ( $\alpha_m \approx 0,6$ ), кривая 1;  $\omega = 100$  ГэВ ( $\alpha_m \approx 2$ ), кривая 2;  $\omega = 1000$  ГэВ ( $\alpha_m \approx 20$ ), кривая 3. На рис.5 кривые 1,2,3 даны соответственно для энергий  $\omega = 5$  ГэВ ( $\alpha_m \approx 0,35$ ),  $\omega = 35$  ГэВ ( $\alpha_m \approx 2,4$ ),  $\omega = 300$  ГэВ ( $\alpha_m \approx 21$ ). Уход от оси  $\langle III \rangle$  проводился в плоскости, содержащей эту ось, и образующей угол  $\varphi_0$  с плоскостью  $(\bar{1}, 1, 0)$ . Чтобы избежать попадания вектора  $\vec{n}$  в главные плоскости кристалла было выбрано значение  $\tan \varphi_0 = \sqrt{3}/6 \approx 0,092$ .

Входящие в формулы для  $W^e(\vartheta_0)$  величины  $G(\vec{q})$  (см. (1.2)), запишем в виде

$$G(\vec{q}) = \frac{1}{\rho^3} \varphi(\vec{q}) S_{mnk} \quad (5.1)$$

где  $\rho$  - постоянная решетки,  $\vec{q} = \frac{2\pi}{\rho} (m, n, k)$ ,  $m, n, k$  - целые числа, по которым идет суммирование в  $\sum_{\vec{q}}$ ,  $S_{mnk}$  - структурный фактор. Для решетки типа алмазной  $f_{cc}(d)$ , которую имеют кристаллы Ge

$$S_{mnk}(d) = [1 + e^{i\frac{\pi}{2}(m+n+k)}] (\cos \pi k + \cos \pi m) (\cos \pi m + \cos \pi n) \quad (5.2)$$

а для решетки bcc (W, Fe)

$$S_{mnk}(b) = 1 + \cos \pi (m+n+k) \quad (5.3)$$

Величина  $\varphi(\vec{q})$  в (5.1) - фурье-компонента потенциала отдельного атома, усредненного с учетом тепловых колебаний. Мы использовали для атома потенциал Мольера, тогда

$$\varphi(\vec{q}) = 4\pi Z e^2 e^{-\frac{u_i^2 \vec{q}^2}{2}} \sum_i \frac{\alpha_i}{\vec{q}^2 + \beta_i^2} \quad (5.4)$$

где  $u_i$  - амплитуда тепловых колебаний,  $\alpha_i, \beta_i$  параметры потенциала (см., напр., [3]). Использование усредненного по тепловым колебаниям потенциала фактически исключает из рассмотрения механизм Бете-Гайтлера. Последний также изменяется в кристалле по сравнению с аморфным веществом (см., напр., [1] в теории когерентного рождения). Входящий в формулы (4.7), (4.8) параметр  $\vartheta/2$  вычислялся согласно (4.6). При этом следует обращать особое внимание на адекватный учет вкладов плоскостей

высокого порядка. В указанных выше условиях расчет дал  $\vartheta/2 \approx 1,87 (V_0/m\vartheta_0)^2$  для Ge и  $\vartheta/2 \approx 1,04 (V_0/m\vartheta_0)^2$  для W.

Кривые 1 на рис.4,5 изображают ситуацию, когда  $\alpha_m < 1$ , при этом эффекты постоянного поля малы и специфика кристалла проявляется в действии механизма когерентного рождения пар. Эффект отличен от 0 при таких  $\vartheta_0$ , когда  $\vartheta/2 \ll 1$ , так что вероятности описываются стандартными формулами (4.2), (4.3). Кривые 2 на рис.4,5 отвечают случаю, когда с ростом энергии механизм рождения пар в постоянном поле уже включился. В соответствии с результатами раздела III вероятность  $W_e(\vartheta_0)$  имеет минимум при  $\vartheta_0 = 0$  ( $\alpha_m < 4$ ). При дальнейшем увеличении энергии минимум в вероятности при  $\vartheta_0 = 0$  переходит в максимум, а затем, по мере роста энергии, ширина этого максимума сужается. Этому случаю отвечают кривые 3 на рис.4,5. Отметим, что величина  $W_e(0) = W_e^{CF}$  продолжает расти пока  $\alpha_m < 25$ , причем максимальное значение  $W_e^{CF}/max$  с хорошей точностью дается формулой (3.14).

Следует иметь в виду, что расчет вероятности с использованием формул для постоянного поля с поправками (3.7) и модифицированной формулы для когерентного рождения пар (4.8) сравнительно прост, тогда как расчет по полной формуле (2.13) является довольно сложной вычислительной задачей. Поэтому в настоящей работе мы не проводили вычислений с использованием формулы (2.13), а ограничились расчетом по формулам (3.7), (4.8) и использовали интерполяцию. Мы исходили из того, что при  $\alpha \gg 1$  интервал, разделяющий области применимости формул (3.7) и (4.8) сравнительно узок, а характер интерполяции мы изучили на модели рождения пар в поле плоской волны, где удалось выполнить и точные вычисления (см. Приложение). При  $\alpha \sim 1$  указанный интервал расширяется, но зато все зависимости становятся более плавными. На рис.4 и 5 штриховая часть кривых 2,3 получена с помощью интерполяции. Расчет по полной формуле (2.13) мы предполагаем опубликовать в другом месте.

В недавнем эксперименте [14] наблюдалось усиление рождения пар фотонами с энергией  $\omega = 50-110$  ГэВ падающими вдоль оси  $\langle 110 \rangle$  монокристалла германия, охлажденного до температуры  $T = 100$  К. Однако наблюдаемая вероятность оказалась приблизительно втрое меньше, чем теоретические предсказания (см. [13], а ориентационная зависимость изучалась совершенно недостаточно.



Для прояснения ситуации необходимы дальнейшие эксперименты, в частности, детальное исследование ориентационной зависимости.

Описанная выше ситуация, когда в зависимости от угла влета фотона рождения пар определяется различными механизмами, имеет место и в задаче излучения. При малых углах влета частицы высокой энергии излучают двигаясь в полях осей или плоскостей (в режиме каналирования или надбарьерного движения), а при сравнительно больших углах  $\vartheta_0 \gg V_0/m$  имеет место когерентное тормозное излучение. На примере движения в поле плоскостей, этот вопрос, проанализирован в [15].

Настоящая работа посвящена рождению пар фотоном. Очевидно, что аналогичным образом могут быть рассмотрены любые процессы, идущие во внешнем поле. Сюда относятся, например, рождение пар заряженной частицей, процесс рождения пар нейтрино ( $e \rightarrow e\nu\bar{\nu}$ ), расщепление фотонов.

### Приложение

Основные черты процесса рождения пар фотоном в ориентированном монокристалле можно проследить на примере рождения электрон-позитронной пары в поле плоской монохроматической волны циркулярной поляризации, для которой анализ существенно упрощается. Вероятность процесса в поле волны (см. [16], формула (2.38), в этой формуле пропущен фактор 2) зависит от её интенсивности  $\xi^2$  и параметра  $\lambda = \frac{\kappa q}{2m^2}$  ( $\kappa, q$  - волновые 4 вектора фотона и волны, эквивалентного фотона в случае кристалла). Для изучения зависимости от  $\omega$  и угла влета (от  $\vartheta$ ) следует использовать соответствие  $\xi^2 \rightarrow \vartheta, \lambda \rightarrow \frac{\alpha}{2\sqrt{\vartheta}}$  (мы заменили обозначение  $\chi_p$  в [16] на  $\alpha$ , эта величина имеет тот же смысл, что в основном тексте). Тогда указанная вероятность принимает вид

$$W = \frac{\alpha m^2 \alpha}{2\pi\omega} F(\alpha, \vartheta) \quad (\text{П.1})$$

где

$$F(\alpha, \vartheta) = \frac{i}{\alpha} \int_0^1 d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t} \left\{ \exp \left[ i\mu t + i\mu\sigma \left( t - \frac{\sin^2 t}{t} \right) \right] \cdot \left( 1 - 2 \frac{1+\sigma^2}{1-\sigma^2} \vartheta \sin^2 t \right) - e^{i\mu t} \right\}, \quad \mu = \frac{4\sqrt{\vartheta}}{(1-\sigma^2)\alpha} \quad (\text{П.2})$$

При малых значениях  $\alpha \ll 1$  функция  $F(\alpha, \vartheta)$  экспоненциально мала в области  $\vartheta \gg 1$ . Только для  $\vartheta \lesssim \alpha^2$  вероятность рождения пары заметно отлична от нуля. Это позволяет провести разложение экспоненты в (П.2) по степеням  $\vartheta \ll 1$ , что соответствует переходу к борновскому приближению. В первом порядке по  $\vartheta$  (аналог когерентной теории в кристалле) имеем

$$F(\alpha, \vartheta) = \frac{\vartheta}{\alpha} \int_0^1 d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t} e^{i\mu t} \left( \mu \frac{\sin^2 t}{t} - 2i \frac{1+\sigma^2}{1-\sigma^2} \sin^2 t \right) = \frac{\pi\vartheta}{\alpha} f(\mu_0) \quad (\text{П.3})$$

где  $\mu_0 = 2\sqrt{\vartheta}/\alpha$ , а функция  $f(x)$  дается формулой (4.4).

С ростом энергии фотона параметр  $\alpha$  становится сравнимым с единицей. Для таких значений  $\alpha$  область  $\vartheta \ll 1$  по-прежнему описывается формулой (П.3), а в области  $\vartheta \gg 1$  вероятность процесса уже не мала. При  $\vartheta \gg 1$  становится применимым приближение постоянного поля; для таких  $\vartheta$  вклад в интеграл (П.2) дают малые значения  $t \sim 1/\sqrt{\vartheta}$ . Проводя соответствующее разложение после интегрирования (см. (3.5)) получаем

$$F(\alpha, \vartheta) = F_1(\alpha) + \frac{1}{\vartheta} F_2(\alpha), \quad (\text{П.4})$$

где

$$F_1(\alpha) = \frac{1}{4\sqrt{3}} \int_0^1 d\sigma (1-\sigma^2) s K_{2/3}(s) \quad (\text{П.5})$$

$$F_2(\alpha) = \frac{1}{60\sqrt{3}} \int_0^1 d\sigma \left[ 2(1+\sigma^2) s K_{2/3}(s) + [3(3+\sigma^2)s^2 - \frac{28}{3}(1+\sigma^2)] K_{1/3}(s) \right], \quad s = \frac{\sigma}{3\alpha(1-\sigma^2)}$$

Формула (П.4) содержит поправку  $\propto \frac{1}{\vartheta}$  к пределу постоянного поля. С увеличением  $\alpha$  функция  $F_1(\alpha)$  растёт, достигает максимума при  $\alpha \approx 11,5$ , а затем падает. Функция  $F_2(\alpha)$  с ростом  $\alpha$  монотонно падает, она меняет знак в точке  $\alpha = \alpha_0 \approx 4,3$  и отрицательна при  $\alpha > \alpha_0$ . Отметим, что отношение  $F_2/F_1 < 1/10$  для  $2 < \alpha < 20$ . Это обстоятельство позволяет для таких  $\alpha$  ис-



пользовать формулу (П.4) вплоть до значений  $g \sim 1$ .

При дальнейшем росте энергии фотона, когда выполняется условие  $ae \gg 1$ , для больших значений параметра  $g$  можно, по-прежнему пользоваться выражениями (П.4, П.5), для которых в этой области справедливо асимптотическое разложение

$$F_1(x) \approx \frac{5\sqrt{3}\Gamma^3(2/3)}{7\Gamma(4/3)}(3x)^{-1/3} - \frac{4\sqrt{3}}{x} \approx 3,44(3x)^{-1/3} - \frac{12,5\sqrt{3}}{3x},$$

$$F_2(x) \approx -\frac{98\Gamma^3(4/3)(3x)^{4/3}}{3900\sqrt{3}\Gamma(2/3)} + \frac{46\Gamma^3(2/3)(3x)^{-1/3}}{35\sqrt{3}\Gamma(1/3)} - \frac{\sqrt{3}}{5x} \approx$$

$$\approx -0,081(3x)^{1/3} + 0,703(3x)^{-1/3} - 1,885(3x)^{-1} \quad (\text{П.6})$$

Отношение ведущих членов в (П.6) дает для  $F_2/F_1$  величину  $\sim x^{2/3}$  откуда ясно, что приближение (П.4) справедливо для значений  $g \gg x^{2/3}$ ; это можно непосредственно установить и из исходного выражения (П.2).

При больших значениях  $ae$  в области  $g \leq 1$  величина  $\mu g \ll 1$  и в силу ограниченности функции  $\frac{\sin^2 t}{t}$  можно опустить член  $-i\mu g \frac{\sin^2 t}{t}$  в (П.2) в предэкспоненту. После интегрирования находим

$$F(x, g) = \frac{\sqrt{3}g}{x} \left[ \left( 1 + \frac{\mu L}{1+g} - \frac{\mu L^2}{2(1+g)} \right) e^{\mu \frac{1+\sqrt{1-\mu L}}{1-\sqrt{1-\mu L}}} - \right.$$

$$\left. - \left( 1 + \frac{\mu L}{1+g} \right) \sqrt{1-\mu L} \right] \mathcal{J}(1-\mu L), \quad \mu L = \frac{2\sqrt{3}(1+g)}{x}$$

Выражение (П.7) не сложнее формулы первого борновского приближения (П.3), но отличается от него более широкой областью применимости по  $g$ . Это связано с тем, что при получении (П.7) мы удержали член  $i\mu g t$  в экспоненте в (П.2). Проведенная оценка вклада узкой области по  $\sqrt{t}$  в интеграле в (П.2) ( $\Delta \sqrt{t} \sim \frac{g^{3/2}}{x} \ll 1$ ,  $\mu g \sim 1$ ) и членов содержащих более высокие степени  $g$  в предэкспоненте показала, что относительная точность формулы (П.7) определяется величиной  $\sim g^{3/2}/x$ .

Отмеченная выше аналогия между процессом рождения пар фотоном в кристалле и поле волны позволяет, ввиду относительной простоты формулы (П.2), количественно исследовать вопрос о воз-

можности описания ориентационной зависимости (в модели зависимости от  $g$ ) на основании приближенных формул типа (П.4), (П.7). Сравнение результатов, полученных по этим формулам, с расчетом по формуле (П.2) позволило оценить точность приближенных формул в области их применимости и показать, что процедура интерполяции в промежуточной области не является произвольной, как это видно из рисунков 6-8. На этих рисунках кривые 1 - расчет по ф. (П.7), кривые 2 - по ф. (П.4), соединяющие их интерполяционные кривые проведены штрихом, а кривые 3 рассчитаны по формуле (П.2).

Интерполяционную кривую следует начинать вблизи точки, в которой  $\mu L(g) = 1$ , и соединять её с кривой 2 на правом склоне последней недалеко от её максимума. Из рисунков 6-8 видно, что в соответствии с общим анализом область интерполяции сужается с ростом  $x$ .

Наблюдающаяся в точном расчете структура в окрестности точки  $\mu L(g) = 1$  связана с особенностью производной  $dF/dg$  в этой точке. Характер этой особенности может быть установлен из формулы (П.7) или непосредственно из (П.2). Отметим, что для процесса в кристалле указанная структура будет замазываться из-за "многочастотности" (см. Введение) задачи.



ЛИТЕРАТУРА

1. М.А.Тер-Микаелян. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях. Изд. АН Арм ССР, Ереван, 1969.
2. G.Diambrini Palazzi Rev.Mod.Phys. 40, 611, 1969.
3. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.С.Фадин. Излучение релятивистских электронов. Атомиздат. Москва, 1973.
4. V.N.Baier, V.M.Katkov, V.M.Strakhovenko Phys.Lett. 104A, 231, 1984.
5. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко. Препринт ИЯФ 84-104 (1984), ДАН СССР 282, № 4, 1985.
6. В.Г.Барышевский, В.В.Тихомиров. ЖЭТФ 85, 232, 1983.
7. J.C.Kimball, N.Cue, L.M.Roth and V.V.Marsh Phys.Rev.Lett. 50, 950, 1983.
8. J.C.Kimball, N.Cue, Nucl.Instr.and Meth. B2, 25, 1984.
9. В.Б.Берестецкий, Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский. Квантовая электродинамика, Наука, Москва, 1981.
10. В.Н.Байер, В.М.Катков, А.И.Мильштейн, В.М.Страховенко. ЖЭТФ, 69, 783, 1975.
11. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко. ЖЭТФ 80, 1348, 1981.
12. V.N.Baier, V.M.Katkov, V.M.Strakhovenko Nucl.Instr.and Meth. B4, 346, 1984.
13. V.N.Baier, V.M.Katkov, V.M.Strakhovenko. Preprint INP -84-153, Novosibirsk, 1984, Phys.Lett. 109A, 179, 1985.
14. A.Belkasem, G.Bologna, M.Chevallier et al. Phys.Rev.Lett. 53, 2371, 1984; Erratum 54, 852, 1985.
15. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко. Излучение релятивистских частиц при плоскостном каналировании. Препринт ИЯФ 80-03, Новосибирск, 1980.
16. В.Н.Байер, А.И.Мильштейн, В.М.Страховенко ЖЭТФ, 69, 1893, 1975.

Таблица

Кристаллы	$u_{\perp}$	$V_0$	$\rho$	$a_s(\text{Å})$	$x_0$	$\omega_c$ (ГэВ)	$\frac{\gamma^{max}}{W_{eCF,max}} = \frac{\gamma_m}{\gamma_s}$	$\frac{\gamma_m}{\gamma_s}$
$C_{(d)}$	0,040	29	0,025	0,326	5,5	90	156	6,03
$Si_{(d)}$	0,075	54	0,150	0,299	15,1	150	66	2,02
Fe	0,068	180	0,145	0,276	19,8	50	33	2,07
$Ge_{(d)}$	0,085	91	0,130	0,300	16,3	60	25	2,24
$Ge_{(d)}(100)$	0,054	114,5	0,063	0,302	19,8	50	27	3,54
W	0,050	417	0,115	0,215	39,7	22	10	2,43
W (77)	0,030	348	0,027	0,228	35,3	13	10	5,78

Параметры потенциала и некоторые величины, характеризующие эффект рождения пар фотоном в поле осей кристалла для оси  $\langle 110 \rangle$  в охлажденном германии  $Ge(100)$  и для оси  $\langle 111 \rangle$  в остальных случаях. Цифры в скобках после названия кристалла - значение температуры; там где их нет -  $T = 293$  К. Величины  $V_0, a_s, \rho, x_0$  - параметры потенциала (3.8),  $u_{\perp}$  - амплитуда тепловых колебаний;  $\omega_c$  - энергия фотона, при которой вероятность процесса в поле осей сравнивается с аморфным значением;  $\gamma^{max}$  - оценка по формуле (3.15) максимальной величины эффекта.



Подписи к рисункам:

- Рис.1. Вероятность рождения пары фотоном при угле влета  $\vartheta_0 = 0$  относительно оси  $\langle III \rangle$  (для Ge ось  $\langle IIO \rangle$ ). Цифры в скобках означают температуру кристалла, там где они отсутствуют  $T = 293$  К.
- Рис.2. Распределение по энергии  $\epsilon$  одной из частиц родившейся пары ( $x = \epsilon/\omega$ ) для оси  $\langle III \rangle$  в вольфраме,  $T = 293$  К,  $\vartheta_0 = 0$ ; для  $\omega = 25$  ГэВ (1), 50 ГэВ (2), 100 ГэВ (3), 500 ГэВ (4).
- Рис.3. Отношение  $F_2/F_1$  формула (3.10), характеризующее величину поправки к пределу постоянного воля. Обозначения такие же как на рис.1.
- Рис.4. Ориентационная зависимость вероятности рождения пары фотоном в Ge при  $T = 100$  К, для  $\omega = 30$  ГэВ (1), 100 ГэВ (2), 1000 ГэВ (3). Угол влета фотона  $\vartheta_0$  отсчитывается от оси  $\langle IIO \rangle$ .
- Рис.5. То же, что на рис.4 для вольфрама  $T = 293$  К, ось  $\langle III \rangle$ ,  $\omega = 5$  ГэВ (1), 35 ГэВ (2), 300 ГэВ (3).
- Рис.6. Зависимость функции  $F(x, \vartheta)$ , определяющей вероятность рождения пар в модели (Приложение) от  $1/\sqrt{\vartheta}$ , что соответствует зависимости от  $\vartheta_0$  в кристалле. Кривая 1 расчет по ф. (П.7), кривая 2 - по ф. (П.4), кривая 3 - по ф. (П.2),  $\vartheta = 3$ .
- Рис.7. То же, что на рис.6 для  $\vartheta = 11$ .
- Рис.8. То же, что на рис.6 для  $\vartheta = 27$ .

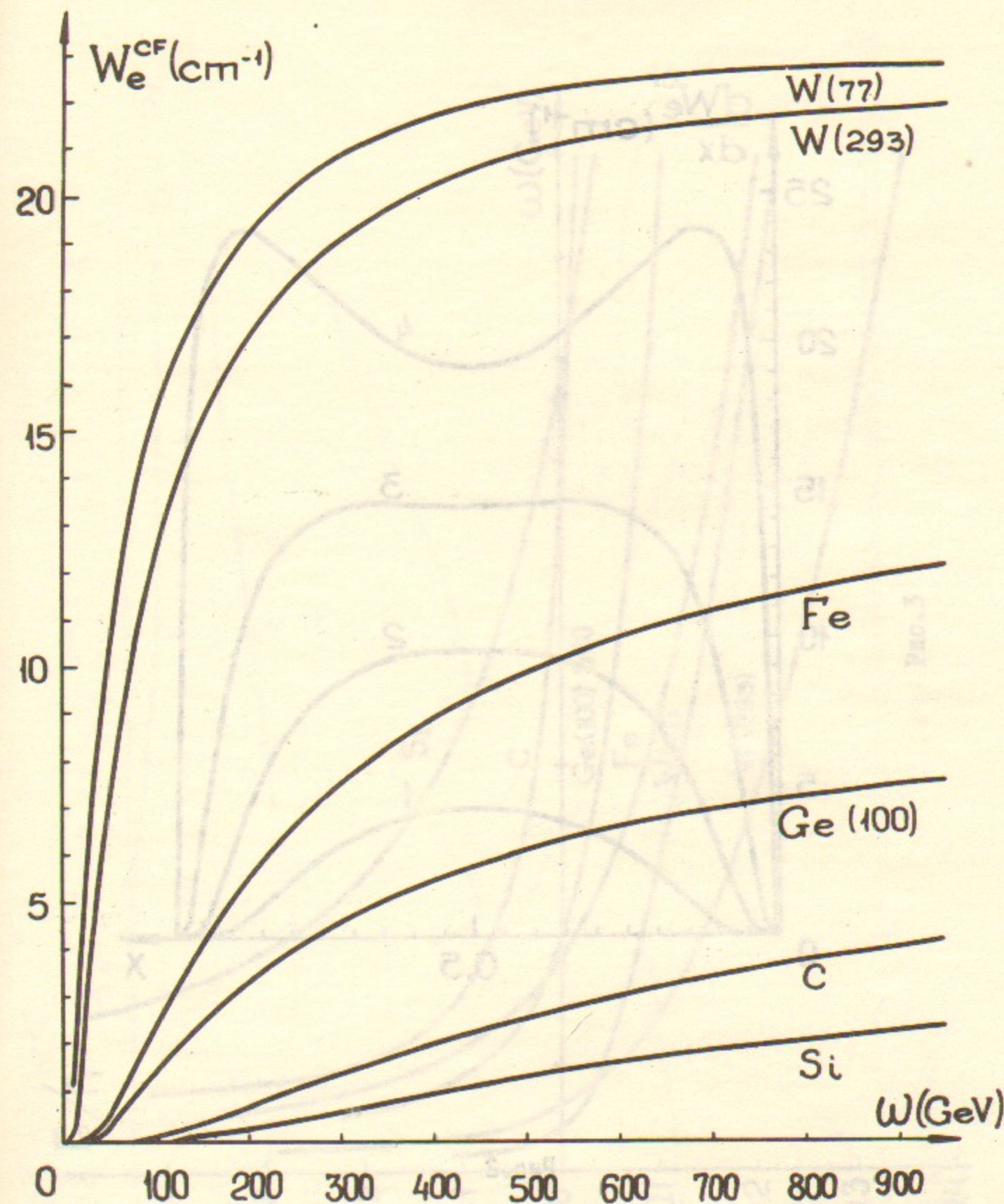


Рис.1



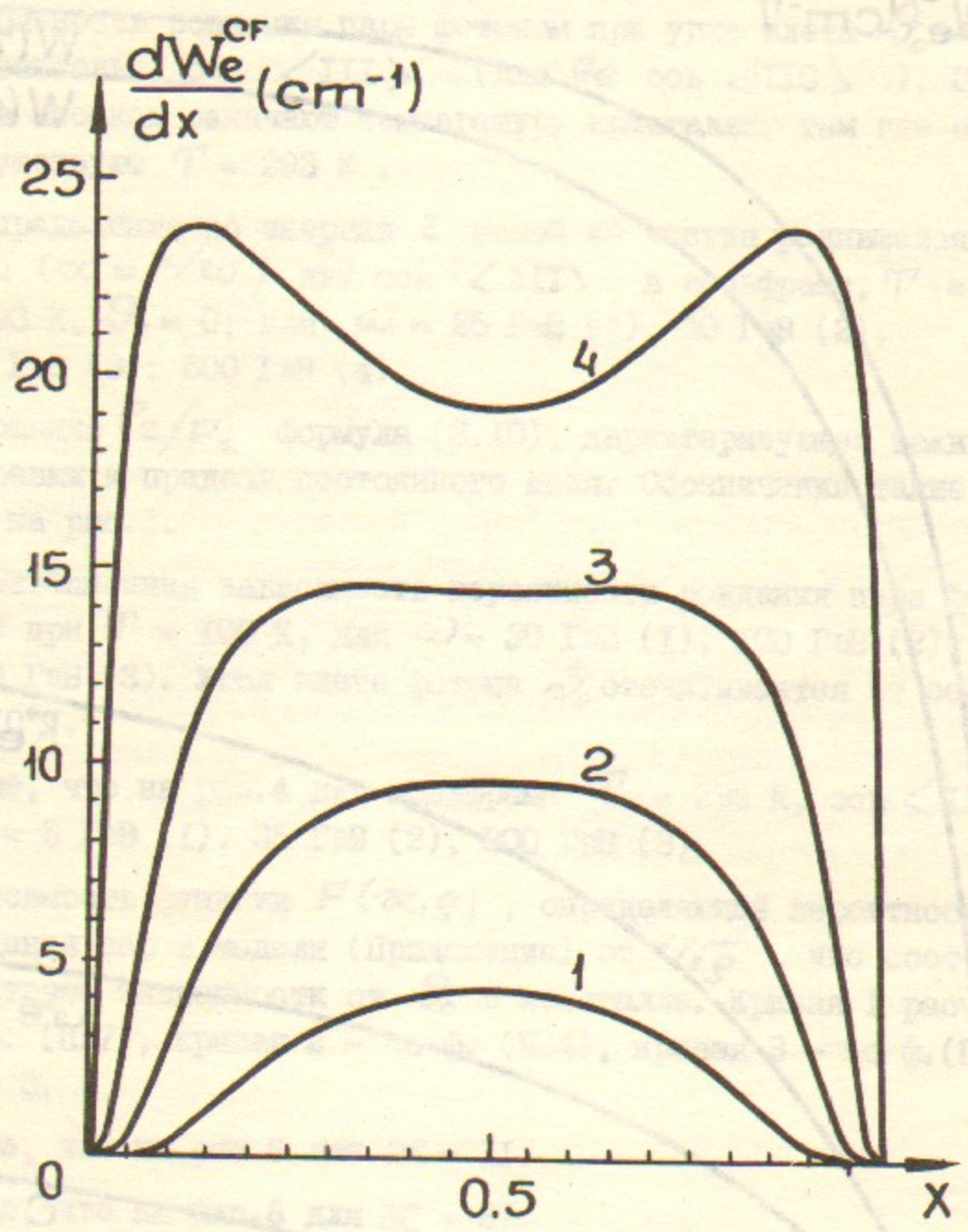


Рис.2

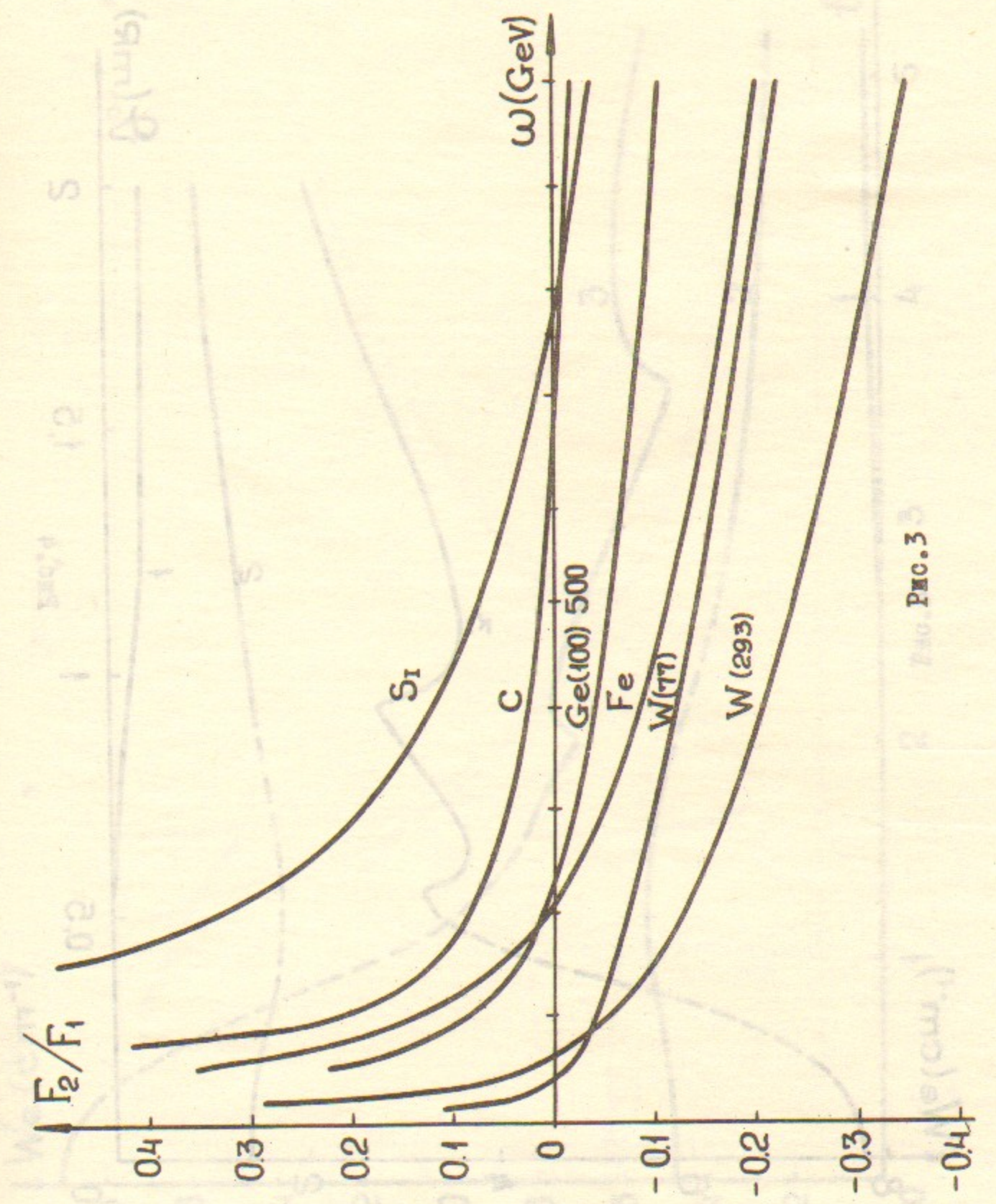
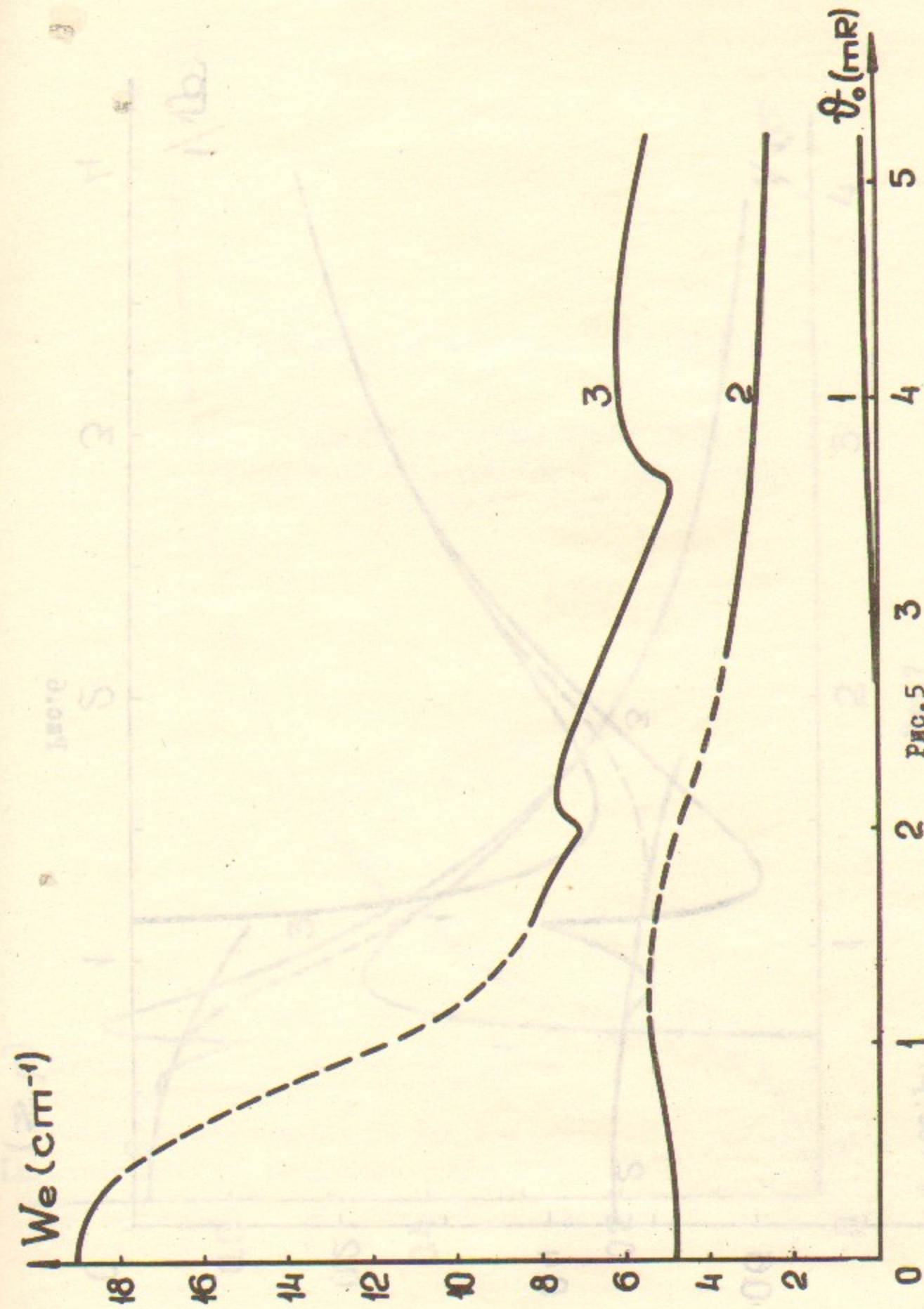
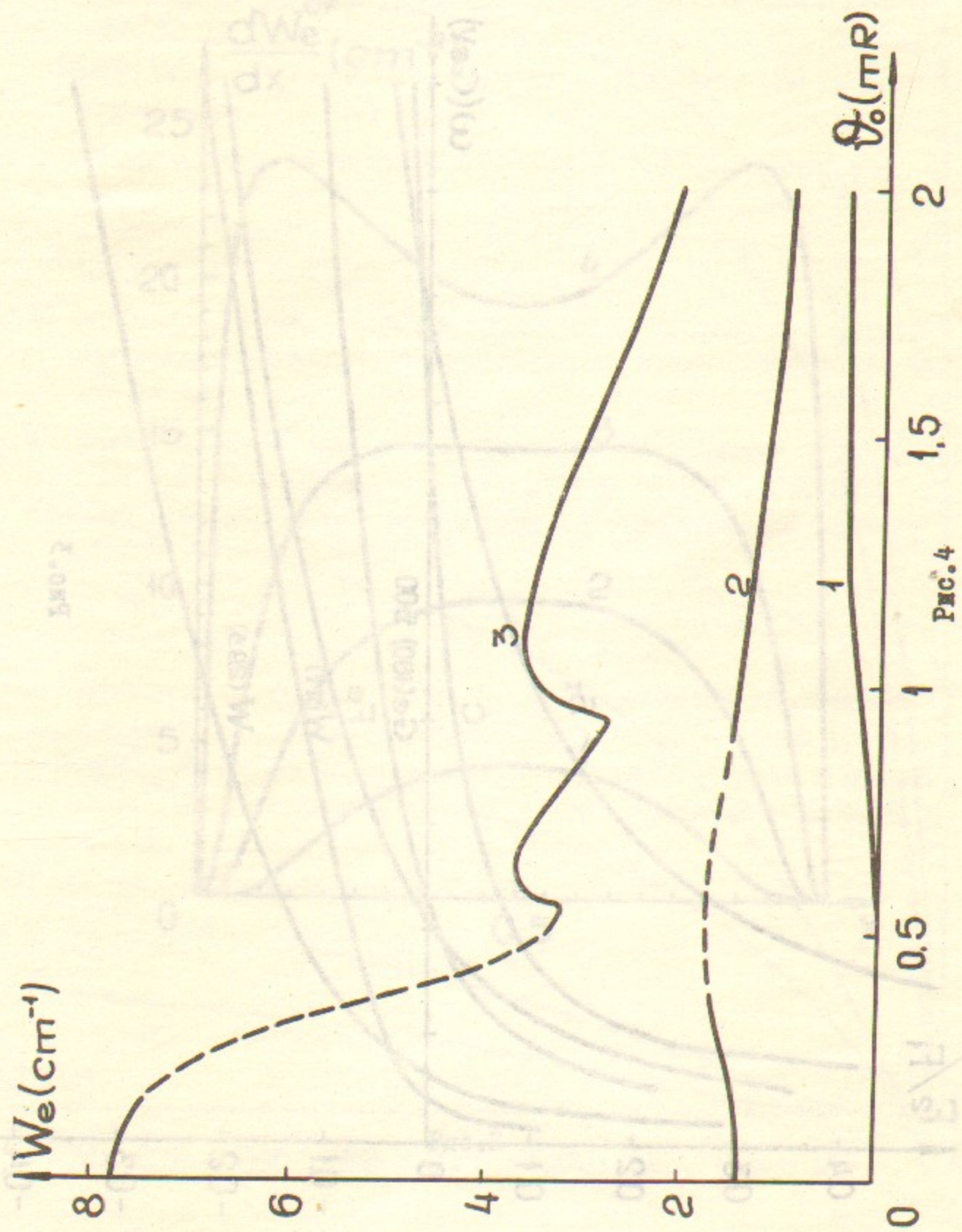


Рис.3







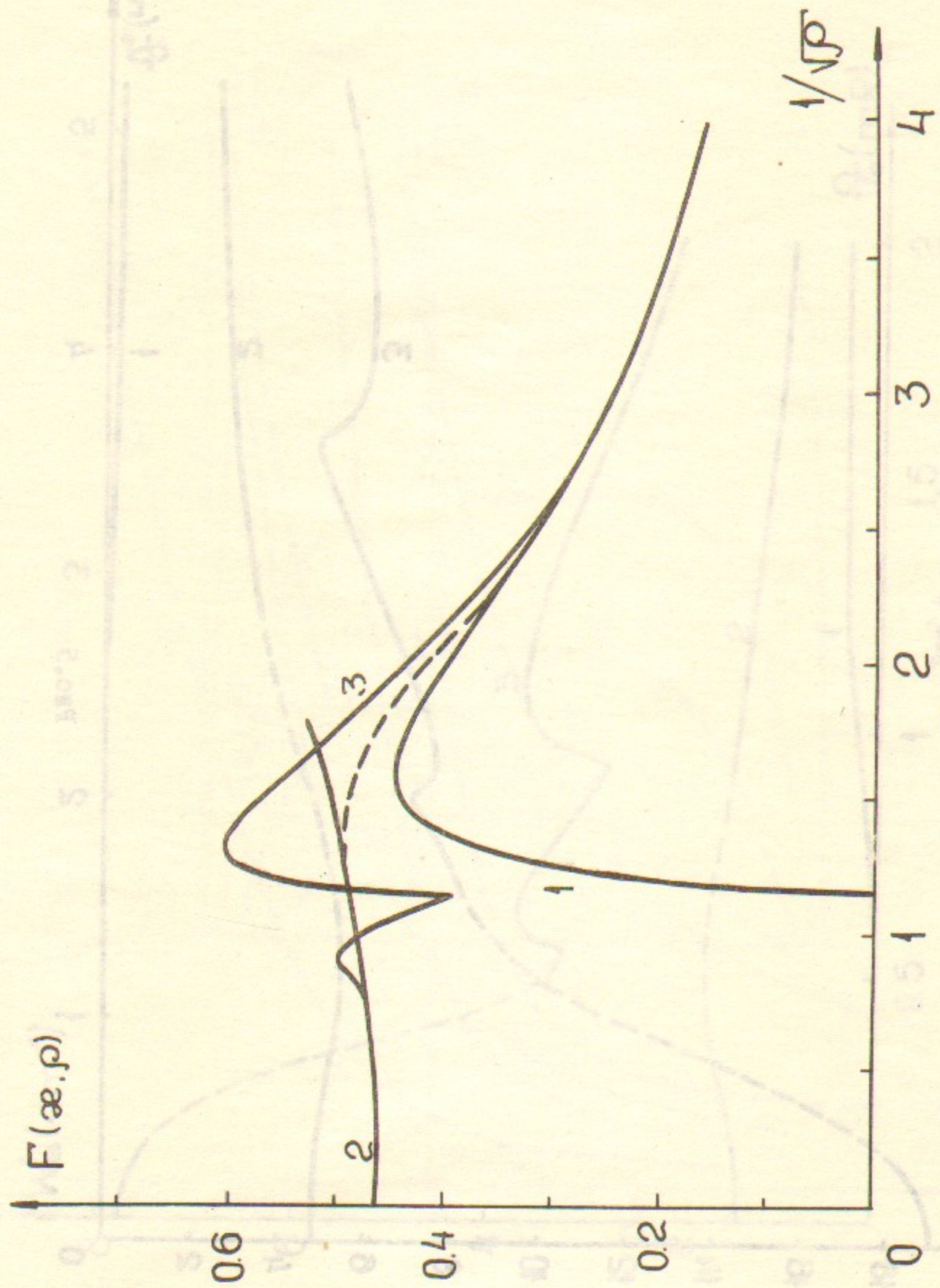


Рис.6

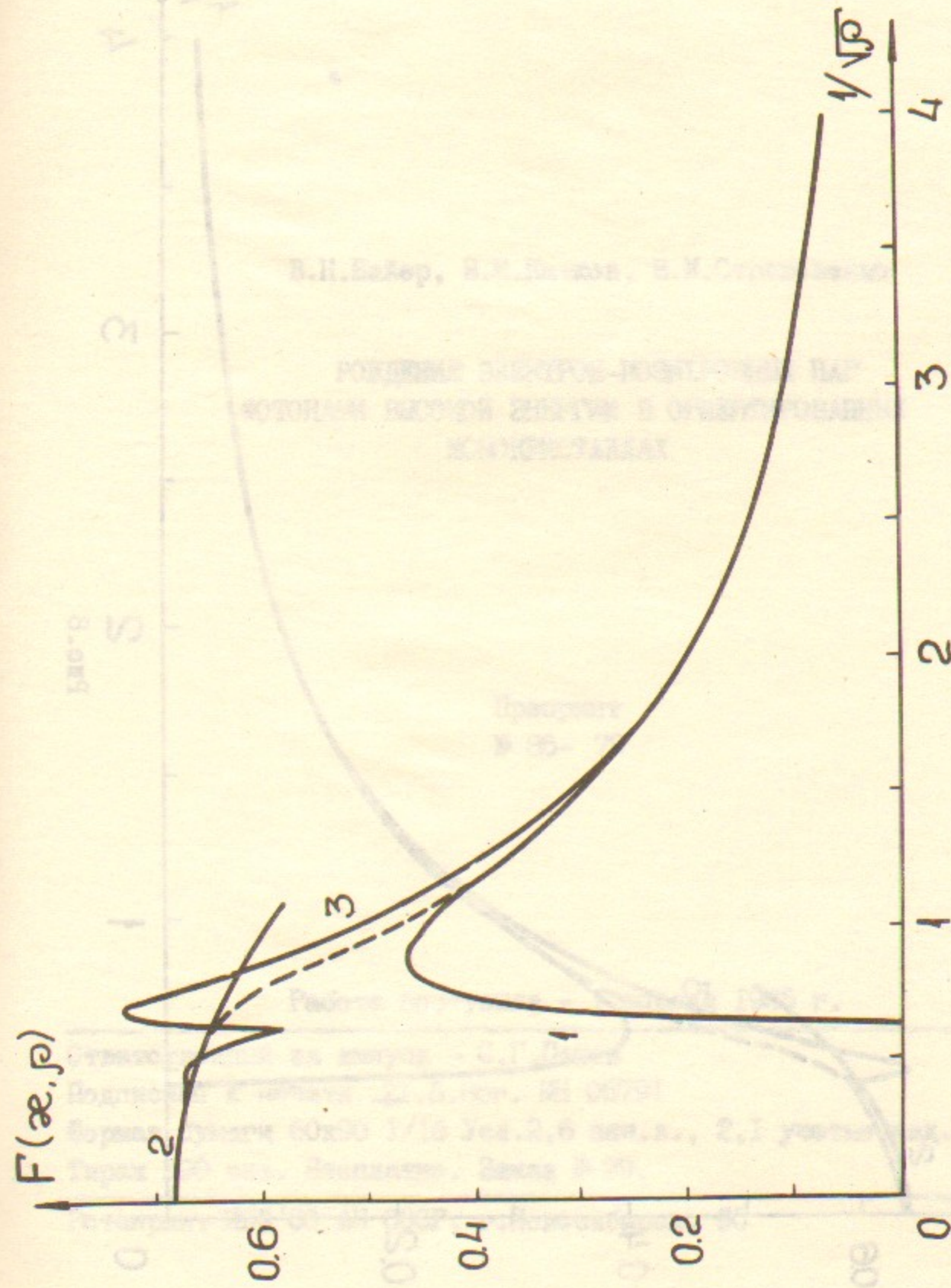


Рис.7



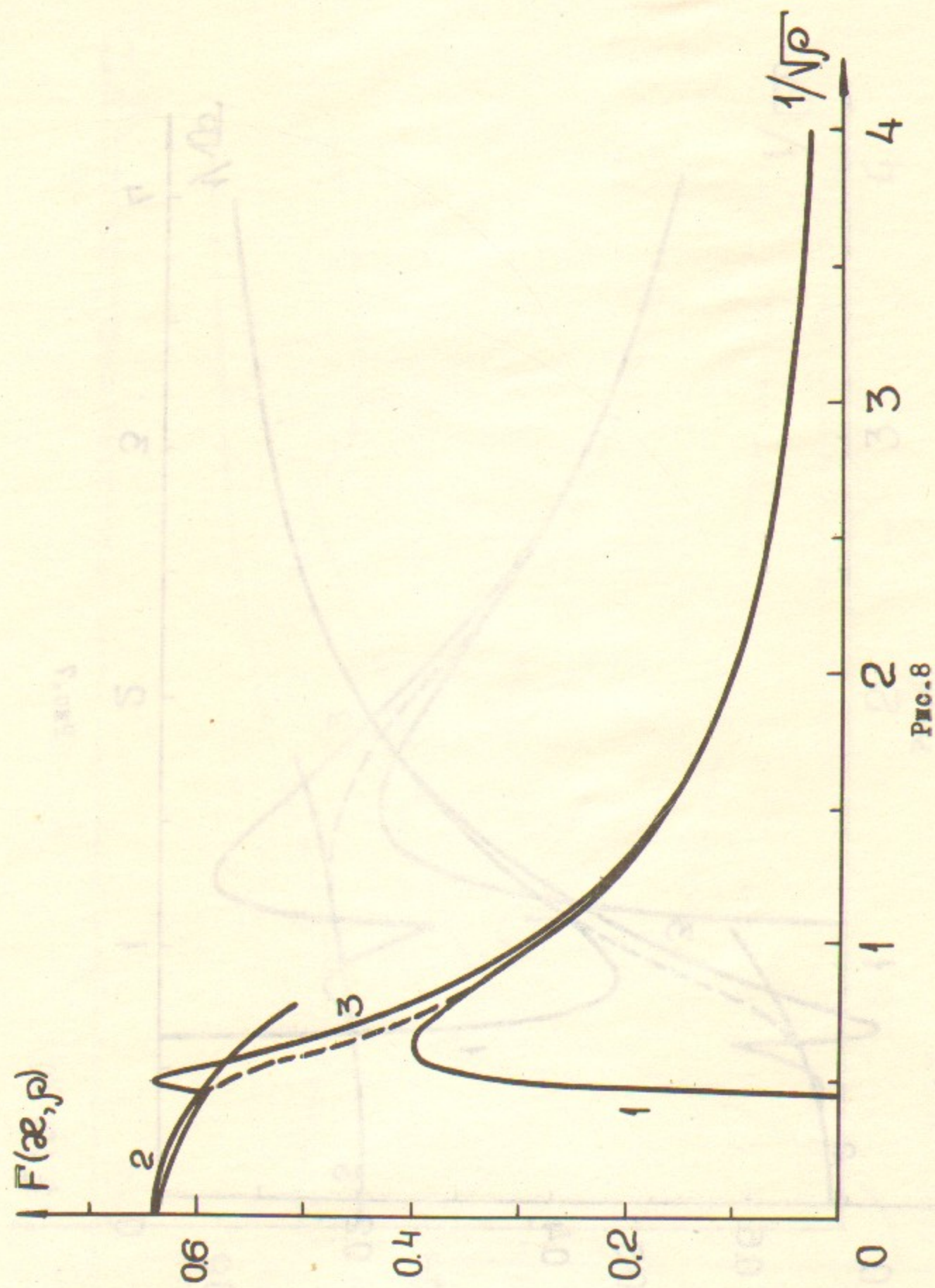


Рис. 8

В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко

РОЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННЫХ ПАР  
ФОТОНАМИ ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ В ОРИЕНТИРОВАННЫХ  
МОНОКРИСТАЛЛАХ

Препринт  
№ 85- 79

Работа поступила - 1 апреля 1985 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов  
Подписано к печати 21.6.85г. МН 05791  
Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.2,6 печ.л., 2,1 учетно-изд.л.  
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 79.

Ретипинг ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90