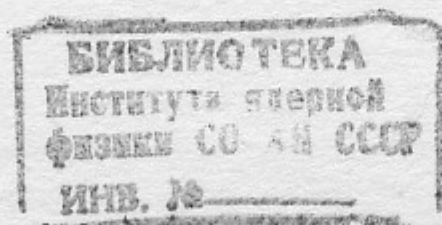
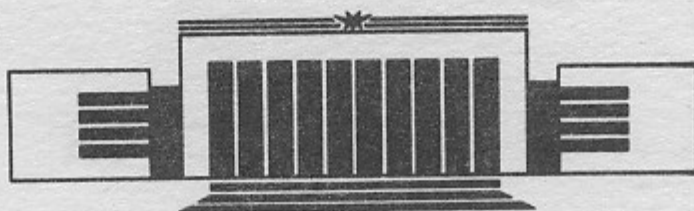


Г.П. Берман, О.Ф. Власова, Ф.М. Израйлев

КВАЗИЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ
И СПЕКТР КВАЗИЭНЕРГИЙ
ДВУХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ
НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗОНАНСОВ
В ОБЛАСТИ КЛАССИЧЕСКОГО ХАОСА



ПРЕПРИНТ 86-181



НОВОСИБИРСК

Г.П. Берман*, О.Ф. Власова*, Ф.М. Израйлев

Институт ядерной физики СО АН СССР
630090, Новосибирск

АННОТАЦИЯ

Исследуется структура квазиэнергетических функций и спектра квазиэнергий двух взаимодействующих нелинейных резонансов. Основное внимание уделяется свойствам квантовой системы в случае, когда в классическом пределе вследствие перекрытия нелинейных резонансов возникает стохастическое движение. Обсуждается роль квантовых эффектов в условиях классического хаоса.

* Институт физики СО АН СССР, Красноярск, 660036.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время значительное внимание уделяется изучению взаимодействия высоковозбужденных атомов и молекул (ридберговские состояния) с внешним монохроматическим излучением (см., например, [1, 2]). Поскольку речь идет о квазиклассической области заселения уровней системы, где константа ангармонизма мала, то достаточно интенсивное возбуждение вовлекает в динамику большое число уровней. При этом может возникнуть особый вид возбуждения, аналогичный классической стохастической диффузии. Механизм такой диффузии в классической механике хорошо изучен и основан на явлении перекрытия нелинейных резонансов [3—5]. Динамика квантовой системы при взаимодействии большого числа нелинейных резонансов была рассмотрена как на простых моделях (см., например, [4, 6, 7]), так и на моделях, близких к реальным системам [8—10]. В этих примерах стохастичность возникает в большой области фазового пространства и может приводить к глобальной неустойчивости. В то же время имеются системы, в которых стохастичность ограничена сравнительно малой областью фазового пространства. Типичным примером является взаимодействие двух нелинейных резонансов, которое описывает, например, движение электрона в поле двух плазменных волн [11].

В квантовом случае динамика взаимодействия двух нелинейных резонансов изучалась в работах [12, 13], где в частности, было показано, что при перекрытии нелинейных резонансов и доста-

точно большом параметре квазиклассичности поведение квантовой системы на конечных временах аналогично стохастическому поведению соответствующей классической системы. С течением времени, однако, начинают проявляться квантовые эффекты, приводящие к подавлению динамического хаоса [4, 6, 12, 13].

Отметим, что при изучении поведения неавтономной квантовой системы могут быть использованы два подхода — изучение динамики системы (диффузия, временные корреляции и т. д.), и анализ спектральных характеристик (спектр квазиэнергий и структура собственных квазиэнергетических функций [14, 15]). В то время, как первый подход относительно хорошо развит, свойства квазиэнергетического спектра, и, в особенности, структура собственных функций для квантовых систем, стохастических в классическом пределе, мало изучена. Однако в реальных экспериментах по возбуждению атомов и молекул в переменных полях, спектральный подход является в некоторых случаях более естественным. С этой точки зрения теоретическое изучение характеристик квазиэнергетического спектра квантовых систем с хаотическим поведением представляется нам весьма важным.

В настоящей работе приводятся результаты исследования спектральных свойств квантовой системы двух взаимодействующих нелинейных резонансов. В разделе 2 дано описание модели и метода численного исследования спектра квазиэнергий и собственных квазиэнергетических функций. В разделе 3 рассмотрена критическая область по параметру возмущения, соответствующая в классическом пределе касанию первичных резонансов. Приводятся данные по перестройке структуры собственных функций при изменении параметра возмущения. В следующем разделе 4 исследуются статистические свойства собственных квазиэнергетических функций в области квантового хаоса. В разделе 5 изучается статистика расстояний между соседними уровнями квазиэнергий в зависимости от выборки собственных функций по параметру их локализации. В заключении кратко суммируются основные результаты работы.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

В качестве модели, удобной для изучения взаимодействия двух нелинейных резонансов, выберем квантовый ротатор в поле двух волн [12, 13]:

$$\hat{H} = -\gamma \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + V_1 \cos(\theta + \nu t) + V_2 \cos(\theta - \nu t). \quad (2.1)$$

Гамильтониан (2.1) возникает, например, при анализе дипольного взаимодействия внешнего поля (содержащего две частоты, резонансных различным уровням невозмущенного спектра) с нелинейной квантовой системой в области квазиклассического заселения. В таком примере γ — параметр нелинейности невозмущенного спектра, ν — разность резонансных частот внешнего поля, $V_{1,2}$ — амплитуды внешних полей [12, 13].

В классическом пределе гамильтониан (2.1) принимает вид:

$$H = \gamma I^2 + V_1 \cos(\theta + \nu t) + V_2 \cos(\theta - \nu t), \quad (2.2)$$

где I — классическое действие системы. Гамильтониан (2.2) описывает взаимодействие двух нелинейных резонансов, положение которых определяется соотношениями:

$$\omega(I_1) = 2\gamma I_1 = -\nu; \quad \omega(I_2) = 2\gamma I_2 = \nu, \quad (2.3)$$

где $I_{1,2}$ — резонансные значения действия. Если в (2.2) положить $V_1 = 0$ (или $V_2 = 0$), то система сводится к изолированному нелинейному резонансу, который точно интегрируется и характеризуется следующими параметрами: ΔI — шириной по действию и частотой Ω фазовых колебаний в окрестности резонанса:

$$(\Delta I)_{1,2} = 2 \sqrt{\frac{2V_{1,2}}{\gamma}}; \quad \Omega_{1,2} = \sqrt{2\gamma V_{1,2}}. \quad (2.4)$$

Для описания взаимодействия двух нелинейных резонансов вводится параметр их перекрытия [3]:

$$K = \frac{(\Delta I)_1 + (\Delta I)_2}{2(I_2 - I_1)} = \frac{2\sqrt{2\gamma V}}{\nu}, \quad (2.5)$$

где $V_1 = V_2 = V$. Легко показать, что параметр K (2.5) является единственным безразмерным параметром, полностью определяющим динамику классической системы.

При $K \ll 1$ каждый из нелинейных резонансов является в достаточной степени изолированным, и частица из области одного не может перейти в область другого резонанса. В этом случае движение в большей части фазового пространства является регулярным (за исключением узких областей в окрестности сепаратрис резонансов).

нансов). Качественно новый эффект наступает при $K \gtrsim 1$, когда взаимодействие резонансов становится существенным. В последнем случае хаотическое движение становится глобальным в том смысле, что стохастическая траектория перестает принадлежать лишь окрестности одного из резонансов и охватывает значительную область фазового пространства, занятую резонансами.

Анализ динамики системы (2.2) и структуры фазового пространства содержится в [3, 16, 17]. Для иллюстрации приведем структуру фазовой плоскости системы (2.2) при различных значе-

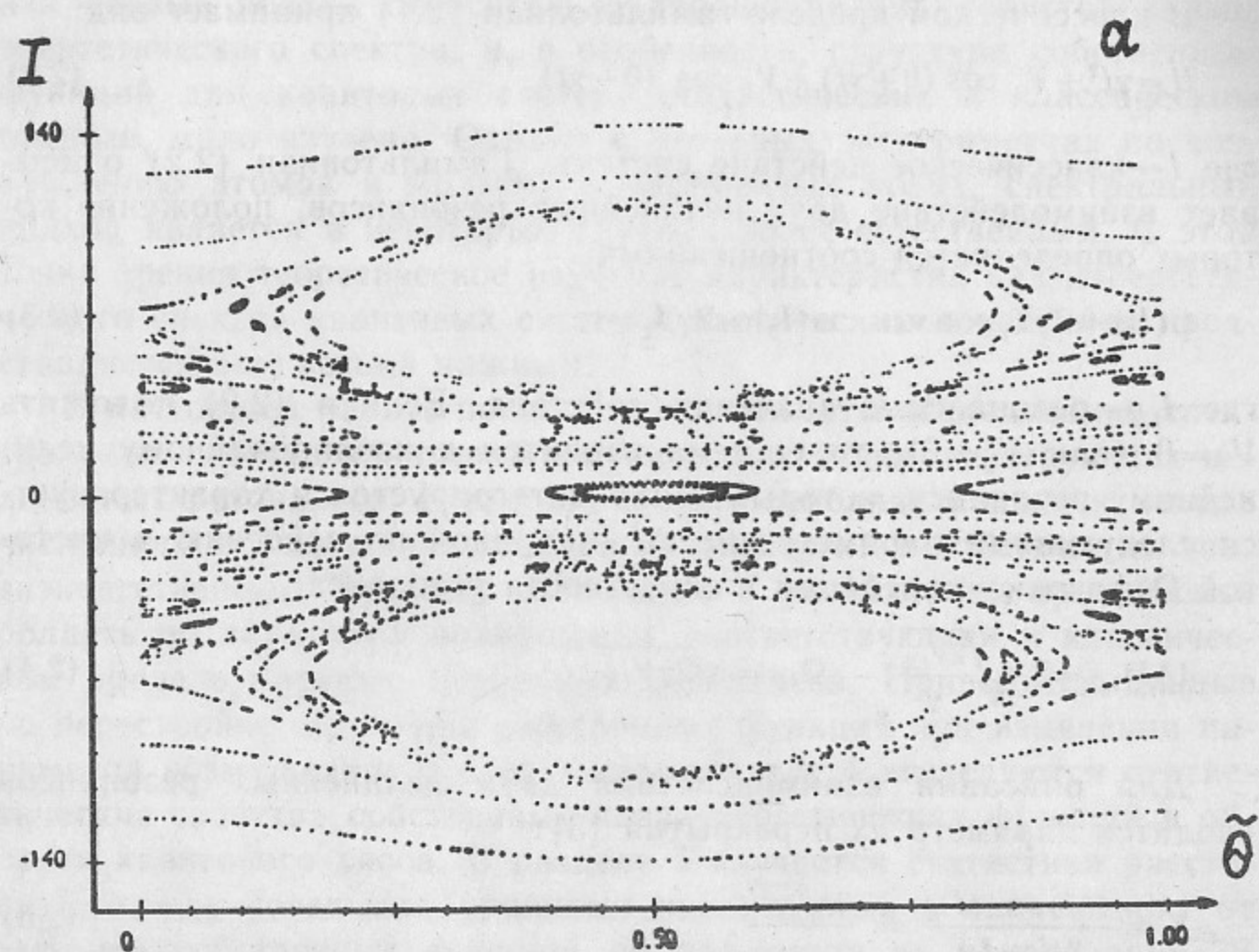
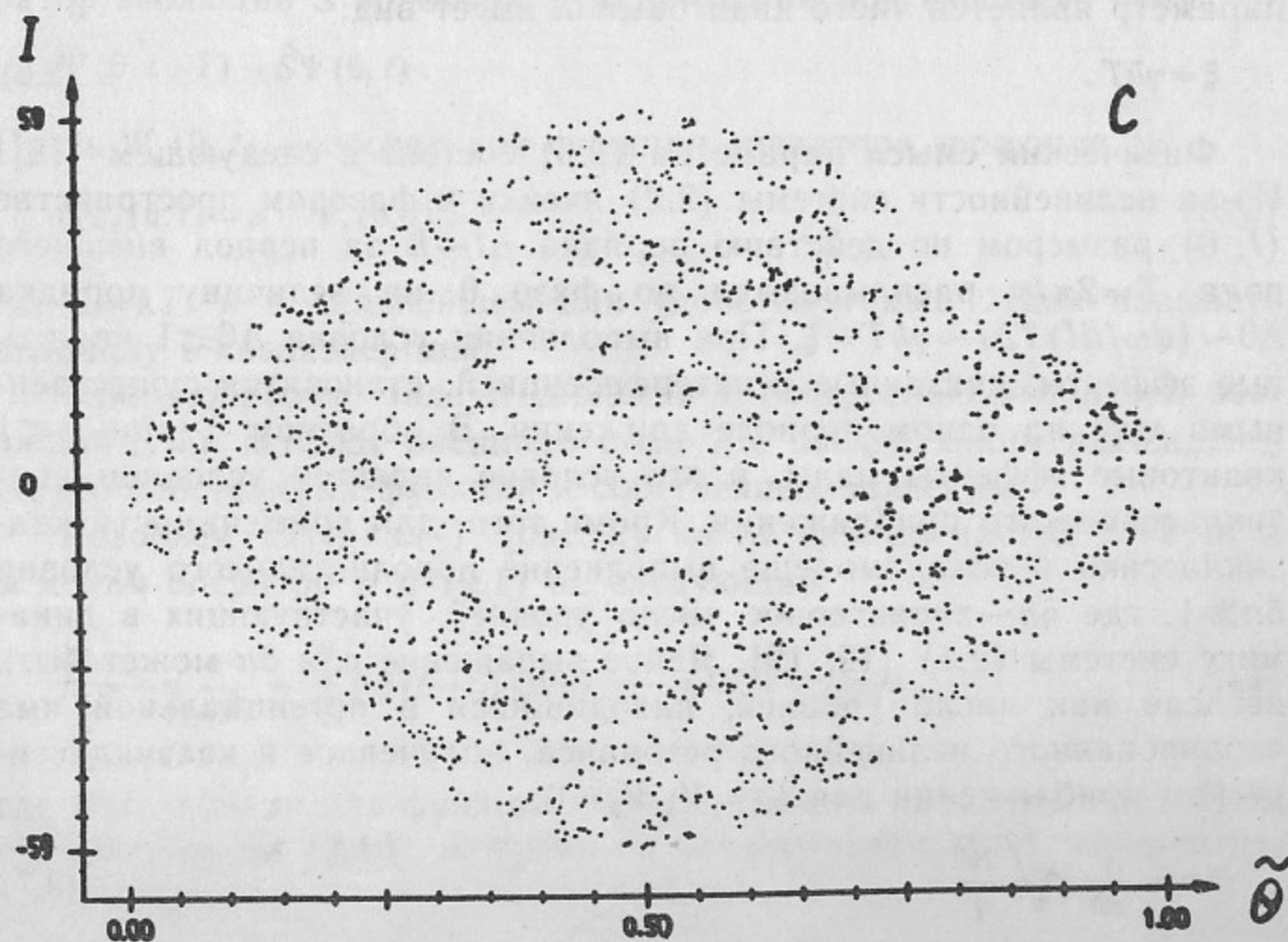
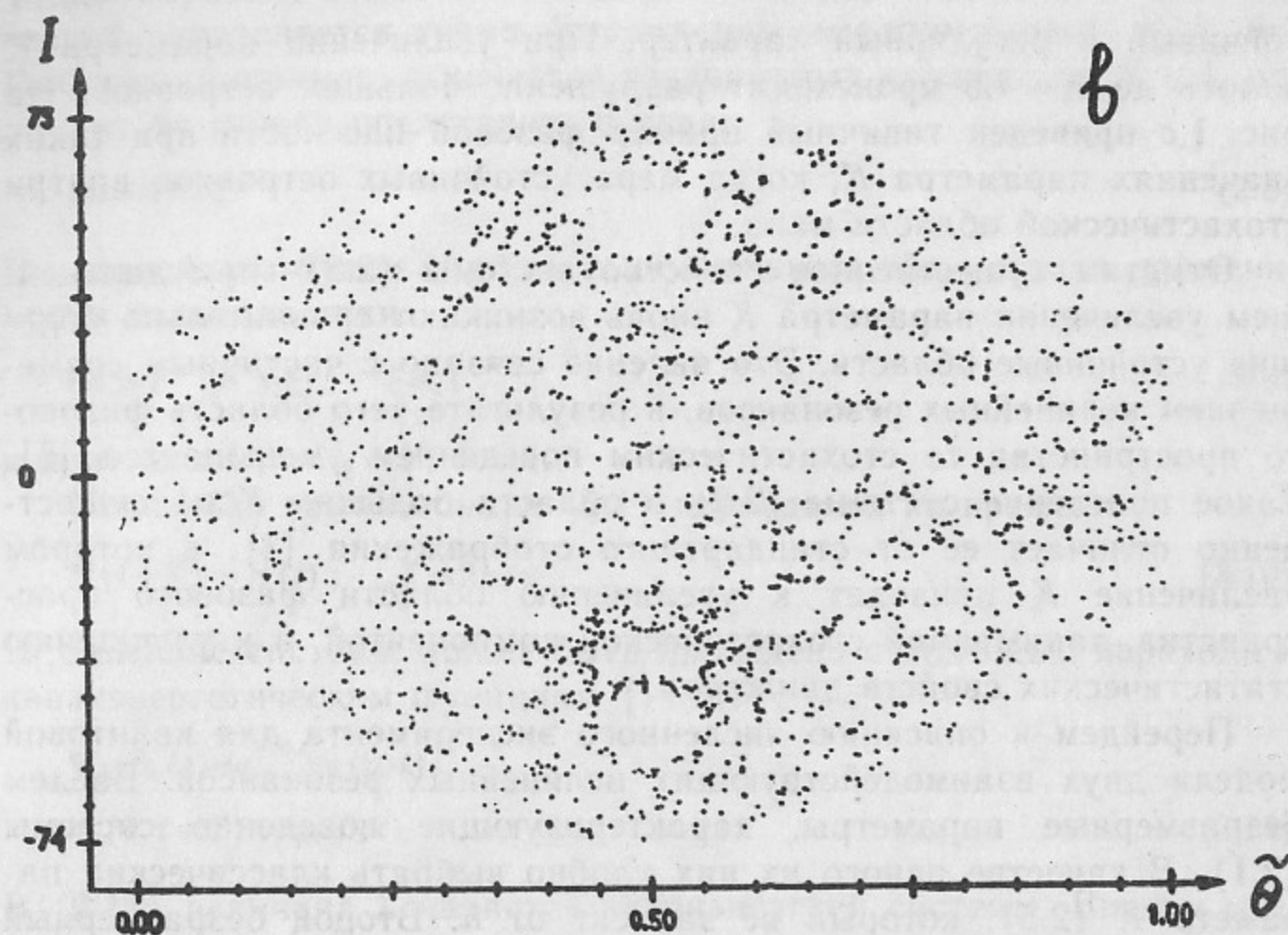


Рис. 1. Структура фазовой плоскости классической системы (2.2) для $V=20$; $\gamma=2,5 \cdot 10^{-2}$. Точки на рис. 1, a, b, c соответствуют значениям I , $\bar{\theta}=\theta/2\pi$ в моменты времени $t_m=2\pi m/\nu$ (через период внешнего поля T). На рис. 1, a изображено 46 траекторий с разными начальными значениями I_0 , θ_0 в течение 100 периодов ($t_m \leq 100 T$). На рис. 1, b, c представлена одна стохастическая траектория ($t_m \leq 2000$). Параметры системы (2.2) равны: a) $K \approx 0,57$, $\nu=3,5$; b) $K \approx 1,33$, $\nu=1,5$; c) $K \approx 4,44$, $\nu=0,45$.



тойчивый и регулярный характер. При увеличении параметра K вплоть до $K \approx 4,5$ происходит разрушение больших островков. На рис. 1,с приведен типичный пример фазовой плоскости при таких значениях параметра K , когда мера устойчивых островков внутри стохастической области мала.

Отметим существенное свойство системы (2.2) — при дальнейшем увеличении параметра K вновь возникают сравнительно большие устойчивые области. Это явление связано с частичным совмещением нелинейных резонансов, в результате чего область фазового пространства со стохастическим поведением уменьшается [5]. Такое поведение системы (2.2) в области больших $K \gg 1$ существенно отличает ее от стандартного отображения [3], в котором увеличение K приводит к увеличению области фазового пространства, занимаемой стохастической компонентой, и к улучшению статистических свойств движения.

Перейдем к описанию численного эксперимента для квантовой модели двух взаимодействующих нелинейных резонансов. Введем безразмерные параметры, характеризующие поведение системы (2.1). В качестве одного из них удобно выбрать классический параметр K (2.5), который не зависит от \hbar . Второй безразмерный параметр является чисто квантовым и имеет вид:

$$\xi = \gamma \hbar T. \quad (2.6)$$

Физический смысл параметра (2.6) состоит в следующем [18]. Из-за нелинейности системы (2.2) ячейки в фазовом пространстве (I, θ) размером по действию порядка $\Delta I \sim \hbar$ за период внешнего поля $T = 2\pi/\nu$ расплываются по фазе θ на величину порядка $\Delta\theta \sim (d\omega/dI) T \Delta I \sim \gamma \hbar T = \xi$. При выполнении условия $\Delta\theta \gtrsim 1$ квантовые эффекты, связанные с интерференцией, становятся существенными уже на одном периоде движения. В обратном случае $\xi \ll 1$ квантовые эффекты малы, и это условие является условием квазиклассического приближения. Кроме того, для применимости квазиклассики необходимо еще выполнение дополнительного условия $\delta n \gg 1$, где δn — характерное число уровней, участвующих в динамике системы (2.1) [12, 19]. Явное выражение для δn может быть введено как число уровней, находящихся в потенциальной яме изолированного нелинейного резонанса, полученное в квазиклассическом приближении для $V_1 = V$, $V_2 = 0$:

$$\delta n = \frac{4}{\pi \hbar} \sqrt{\frac{2V}{\gamma}}. \quad (2.7)$$

Таким образом, поведение квантовой системы в отличие от классической определяется тремя безразмерными параметрами: K , ξ , δn . Выбирая, например, в качестве независимых параметров K и ξ , величину δn можно представить в виде:

$$\delta n = 4K/\xi. \quad (2.8)$$

В дальнейшем будем считать выполненными оба условия применимости квазиклассики:

$$\delta n \gg 1 \quad (K \gg \xi); \quad \xi \ll 1 \quad (2.9)$$

и положим $V_1 = V_2 = V$; $\hbar = 1$.

Поскольку гамильтониан (2.1) периодичен по времени:

$$\hat{H}(t+T) = \hat{H}(t); \quad T = 2\pi/\nu, \quad (2.10)$$

то описание системы может быть проведено с помощью перехода к квазиэнергетическим функциям [14, 15]:

$$\begin{aligned} \Psi_\lambda(\theta, t) &= e^{-i\lambda t} \varphi_\lambda(\theta, t), \\ \varphi_\lambda(\theta, t+T) &= \varphi_\lambda(\theta, t). \end{aligned} \quad (2.11)$$

В (2.11) величина λ является квазиэнергией системы. Введем оператор эволюции \hat{S} волновой функции за период внешнего поля:

$$\Psi(\theta, t+T) = \hat{S}\Psi(\theta, t).$$

Пусть $\Psi_\varepsilon(\theta, t)$ — собственная функция оператора эволюции \hat{S} :

$$\hat{S}\Psi_\varepsilon(\theta, t) = e^{-i\varepsilon} \Psi_\varepsilon(\theta, t), \quad (2.12)$$

где $\varepsilon = \lambda T$, и в дальнейшем для удобства также будем называть величину ε квазиэнергией.

Таким образом, задача сводится к построению оператора эволюции \hat{S} на периоде внешнего поля T с последующим нахождением его собственных функций и собственных значений.

Разобьем интервал T (рис. 2) на M равных частей $\tau = T/M$ и заменим оператор \hat{H} в (2.1) на следующий:

$$\hat{H} = -\gamma \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \sum_{j=1}^M v_j \delta(t-t_j) \cos \theta; \quad v_j = 2V\tau \cos \nu t_j, \quad (2.13)$$

где $\delta(t-t_j)$ — дельта-функция, $t_j = j\tau$. Можно показать, что такая аппроксимация (2.13) исходного гамильтониана (2.1) эквивалент-

на тому, что в возмущении, кроме основной гармоники $\cos vt$, добавляются высокие гармоники с частотами Mv , $(M \pm 1)v$, $(M \pm 2)v \dots$. Для больших значений $M \gg 1$ такие гармоники являются нерезонансными и вклад их оказывается малым. Точность вычислений проверяется при таком подходе путем увеличения параметра M . В численных экспериментах обычно выбиралось $M = 100$.

В результате оператор эволюции $\hat{S} \equiv \hat{S}_{t=0}$ может быть представлен в следующем виде:

$$\hat{S} = \hat{S}_1 \hat{S}_2 \dots \hat{S}_j \dots \hat{S}_{M-1} \hat{S}_M, \quad (2.14)$$

где

$$S_j = \exp\left(-i \frac{\tau\gamma}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \exp(-iv_j \cos \theta) \exp\left(-i \frac{\tau\gamma}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right). \quad (2.15)$$

Поскольку исходный гамильтониан инвариантен по отношению к изменению знака θ , то собственные функции квазиэнергии могут быть классифицированы по четности. В дальнейшем для упроще-

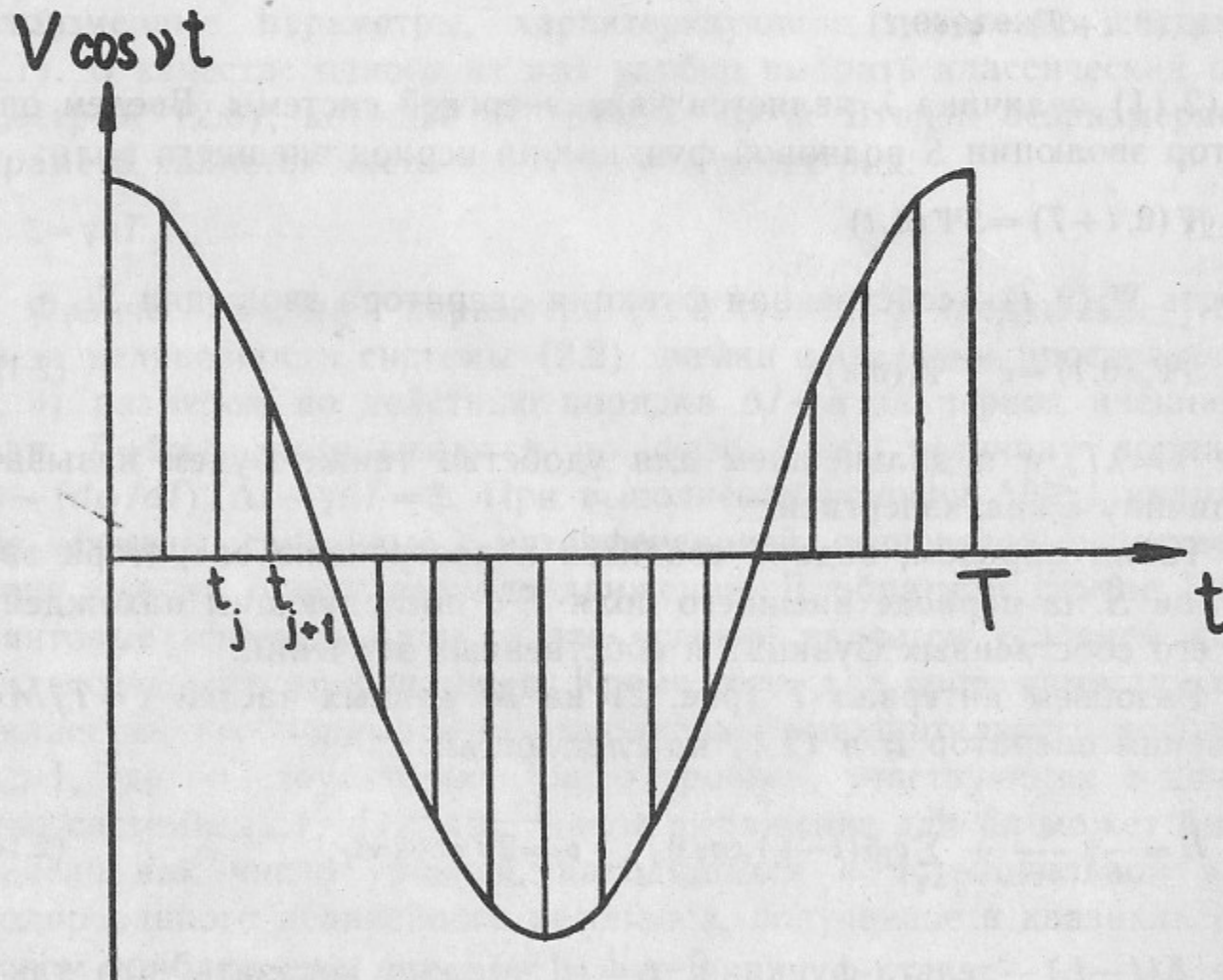


Рис. 2. Аппроксимация (2.13) потенциала исходной системы (2.1).

ния вычислений будем рассматривать только антисимметрические функции: $\Psi_e(-\theta, t) = -\Psi_e(\theta, t)$. Выберем в качестве базиса антисимметрические функции невозмущенного оператора:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin n\theta; \quad (n=1, 2, \dots). \quad (2.16)$$

В представлении (2.16) матричные элементы оператора \hat{S}_j имеют вид:

$$S_{nm}(j) \equiv \langle n | \hat{S}_j | m \rangle = \exp\left(i \frac{\tau\gamma n^2}{2}\right) B_{nm} \exp\left(i \frac{\tau\gamma m^2}{2}\right), \quad (2.17)$$

где

$$B_{nm} = \frac{1}{2N+1} \sum_{l=1}^{2N+1} \left[\cos(n-m) \frac{2\pi l}{2N+1} - \cos(n+m) \frac{2\pi l}{2N+1} \right] \times \\ \times \exp\left(-iv_j \cos \frac{2\pi l}{2N+1}\right), \quad (n, m=1, \dots, N). \quad (2.18)$$

В (2.18) параметр N равен полному числу состояний (2.16) в численном эксперименте. Критерием выбора величины N являлось слабое изменение собственных функций и собственных значений в исследуемой области фазового пространства взаимодействующих резонансов при увеличении N (обычно выбиралось $N = 89; 151$).

Отметим, что матрицы $S_{nm}(j)$ (2.17) являются симметричными и унитарными. В итоге конечная матрица S_{nm} , получающаяся в результате перемножений матриц (2.17), обладает теми же свойствами симметрии. Симметричность унитарной матрицы S_{nm} свидетельствует о сохранении инвариантности в модели с конечным числом уровней по отношению к обращению времени (в соответствии со свойствами исходной системы (2.1)). Таким образом, численный анализ сводится к определению спектра квазиэнергий и собственных квазиэнергетических функций симметрической матрицы S_{nm} :

$$S_{nm} = \sum_{m_1, \dots, m_M} S_{nm_1}(1) S_{m_1 m_2}(2) \dots S_{m_M m}(M). \quad (2.19)$$

3. СТРУКТУРА КВАЗИЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРИТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ($K \sim 1$)

Прежде всего остановимся на свойствах собственных функций изолированного нелинейного резонанса, который можно получить

из (2.1), полагая, например, $V_1 = V$; $V_2 = 0$. В этом случае гамильтониан изолированного резонанса принимает вид [12, 13]:

$$\hat{H} = -\gamma \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + V \cos \vartheta, \quad (3.1)$$

где $\vartheta = \theta + vt$, и произведен переход к новой волновой функции $\varphi(\vartheta, t)$:

$$\varphi(\vartheta, t) = \exp[i(l_1 \vartheta - \gamma \hbar l_1^2 t)] \Psi(\vartheta, t). \quad (3.2)$$

В (3.2) через l обозначен номер резонансного уровня, удовлетворяющий условию (см. левое равенство в (2.3)):

$$2\gamma \hbar l_1 = -v. \quad (3.3)$$

Задача по определению собственных функций гамильтониана (3.1) сводится к решению уравнения Матье:

$$\gamma \hbar^2 \frac{d^2 \varphi_\varepsilon(\vartheta)}{d\vartheta^2} + (\varepsilon - V \cos \vartheta) \varphi_\varepsilon(\vartheta) = 0; \quad \varphi_\varepsilon(\vartheta + 2\pi) = \varphi_\varepsilon(\vartheta). \quad (3.4)$$

Решениями уравнения (3.4) являются периодические функции Матье, ряды Фурье которых в общем случае имеют достаточно сложную структуру. Поэтому определение вида этих функций проводилось численным путем. На рис. 3 представлены собственные квазиэнергетические функции $\varphi_\varepsilon(\vartheta)$ связанных состояний в невозмущенном базисе $(1/\sqrt{2\pi}) \exp(in\vartheta)$. Видно, что число собственных состояний в потенциальной яме $V \cos \vartheta$ хорошо согласуется с квазиклассической оценкой (2.7): $\delta n \approx 36$. Как показывают численные данные, для $\delta n \gg 1$ структура собственных функций вблизи сепаратрисы (края ямы) существенно усложняется. Естественно ожидать, что при наличии возмущения такие собственные функции подвержены более сильному изменению с возможным появлением нерегулярности в структуре (см. разд. 4). Выше сепаратрисы ($\varepsilon_l > V$) квазиэнергетические функции достаточно быстро приближаются к асимптотическим выражениям $\sin(l\vartheta)$ и $\cos(l\vartheta)$, что на рис. 3 соответствовало бы двум пикам (фурье-амплитудам) $A_{\pm|l|}$.

Для количественной характеристики структуры собственных функций, соответствующих уровням энергии для $\varepsilon_l > V$, удобно ввести следующие величины [20]:

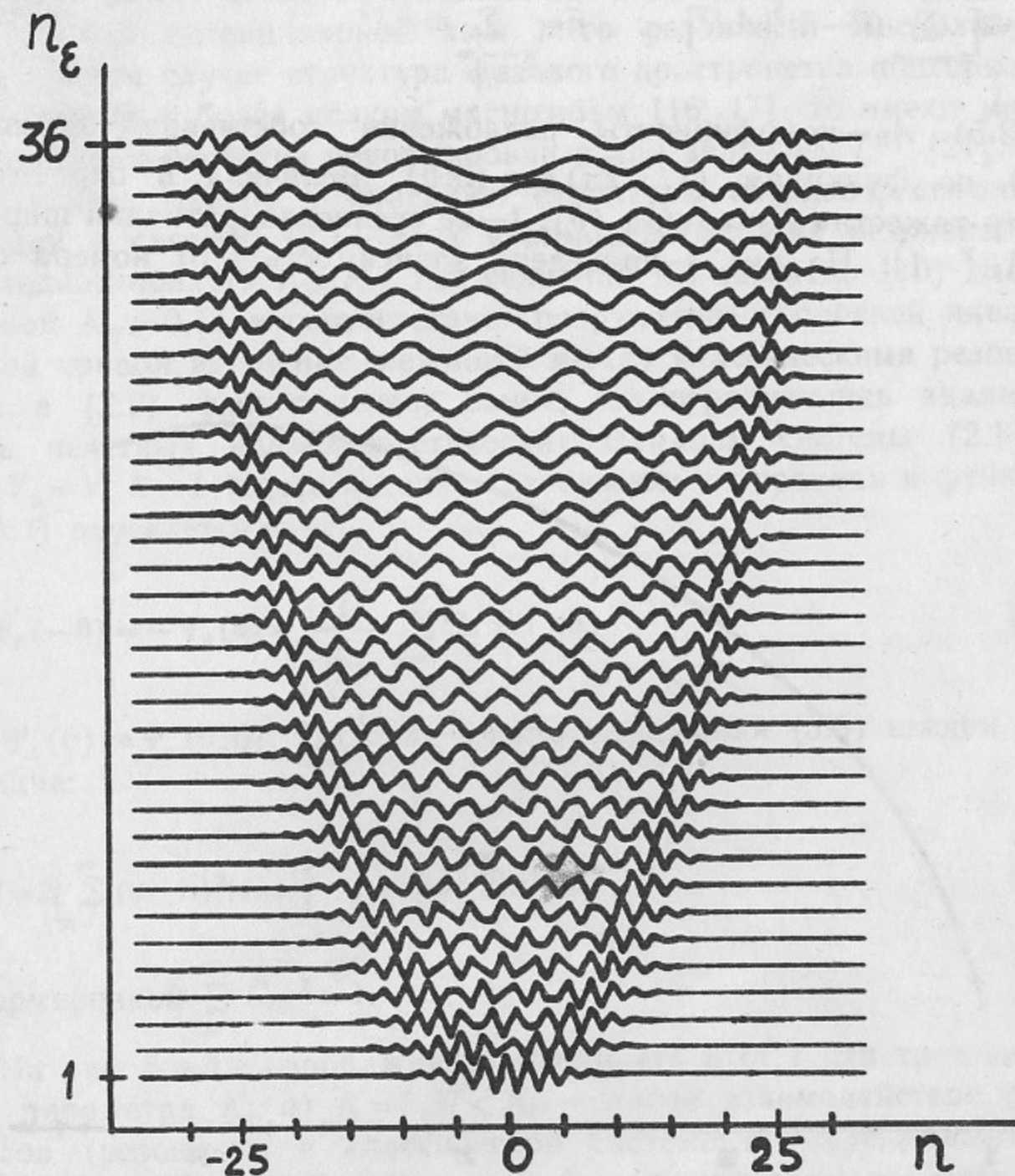


Рис. 3. Квазиэнергетические функции изолированного резонанса в базисе невозмущенных ($V_1 = V_2 = 0$) состояний. Показаны фурье-амплитуды C_n всех собственных функций связанных состояний ($\varepsilon < V$) системы (3.4) с параметрами $V = 0,2$; $\gamma = 5 \cdot 10^{-4}$, $\hbar = 1$. Значение n_ε соответствует номеру собственной функции при отсчете от дна потенциальной ямы.

$$l = 2 \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} (n - \bar{n})^2 |A_n|^2 \right]^{1/2}; \quad \bar{n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n |A_n|^2. \quad (3.5)$$

В (3.5) A_n — коэффициенты разложения собственной функции $\varphi_e(\theta)$ по функциям $(1/\sqrt{2\pi}) \exp(in\theta)$. Величина \bar{n} определяет «центр тяжести» функции $\varphi_e(\theta)$; l — ее среднеквадратичная ширина ($\sum_n |A_n|^2 = 1$). На рис. 4 приведена зависимость l от номера собственного состояния n_e .

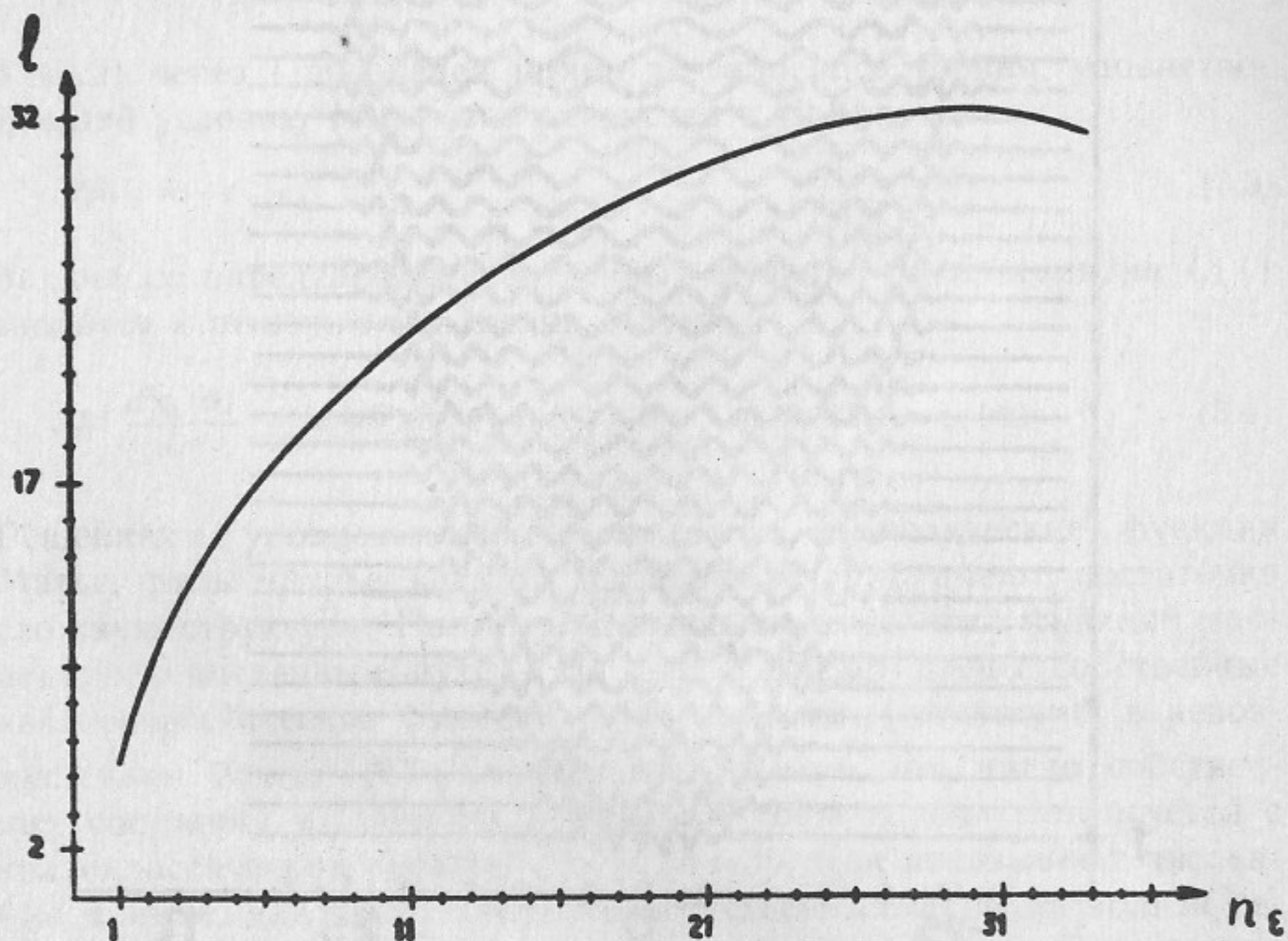


Рис. 4. Зависимость среднеквадратичной ширины l (см. (3.5)) собственной функции от n_e для параметров рис. 3.

Как видно из рис. 4, эффективная ширина l собственной функции увеличивается при приближении к сепаратрисе (краю ямы), и для квазиэнергетических функций, лежащих в области сепаратрисы, $l_s \sim \delta n$ (см. (2.7)).

Такая «делокализация» квазиэнергетических функций по мере приближения соответствующих им уровней к краю ямы является характерным свойством для любого неразрушенного резонанса (включая вторичные и более высокие резонансы системы (2.1)).

Поэтому имеет место приближенная оценка: $l_s^{(m)} \sim \delta n(V_m)$, где V_m — глубина потенциальной ямы m -го резонанса. Поскольку в классическом случае структура фазового пространства повторяется при переходе к более мелким масштабам [16, 17], то имеют место определенные свойства ренормировки и для величины $l_s^{(m)}$ [21].

Перейдем теперь к описанию структуры квазиэнергетических функций в системе (2.1) двух взаимодействующих резонансов в переходной области $K > K_{cr}$, где величина K_{cr} согласно [16] дается оценкой $K_{cr} \approx 0,71$ и соответствует разрушению последней инвариантной кривой вращения, лежащей между классическими резонансами в (2.2). Как отмечено выше, мы ограничились анализом лишь нечетных квазиэнергетических функций системы (2.1) с $V_1 = V_2 = V$, $\hbar = 1$ (здесь и далее зависимость от времени в функции $\Psi_e(\theta, t)$ опускается):

$$\Psi_e(-\theta) = -\Psi_e(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin n\theta, \quad (3.6)$$

где $\Psi_e(\theta) \equiv \Psi_e(\theta, 0)$. Поэтому вместо выражения (3.5) введем следующие:

$$l = 2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} (n - \bar{n})^2 |C_n|^2 \right]^{1/2}; \quad \bar{n} = \sum_{n=1}^{\infty} n |C_n|^2 \quad (3.7)$$

с нормировкой $\sum_n |C_n|^2 = 1$.

На рис. 5, а, б, в изображена зависимость \bar{n} от l для трех значений параметра K ; а) $K \approx 0,57 < K_{cr}$ — слабое взаимодействие резонансов (резонансы в классической системе не перекрываются); б) $K \approx 1,33 > K_{cr}$; в) $K \approx 4,45$ — случай сильного взаимодействия (в классическом пределе разрушены первичные резонансы). Дальнейшее увеличение $K > 4,5$, как уже отмечалось, приводит к совмещению первичных резонансов и уменьшению стохастической компоненты. Каждая точка на рис. 5 соответствует нечетной собственной квазиэнергетической функции $\Psi_e(\theta)$. Для сопоставления с классической картиной фазового пространства (рис. 1) рис. 5 нужно дополнить симметричной нижней частью ($\bar{n} < 0$) относительно прямой $\bar{n} = 0$ (такая симметричная картина соответствует разложению функции $\Psi_e(\theta)$ по функциям $\exp(in\theta)$). Тогда две симметричные точки на диаграмме (\bar{n}, l) определяли бы одну и ту же квазиэнергетическую функцию $\Psi_e(\theta)$, а в классическом пределе

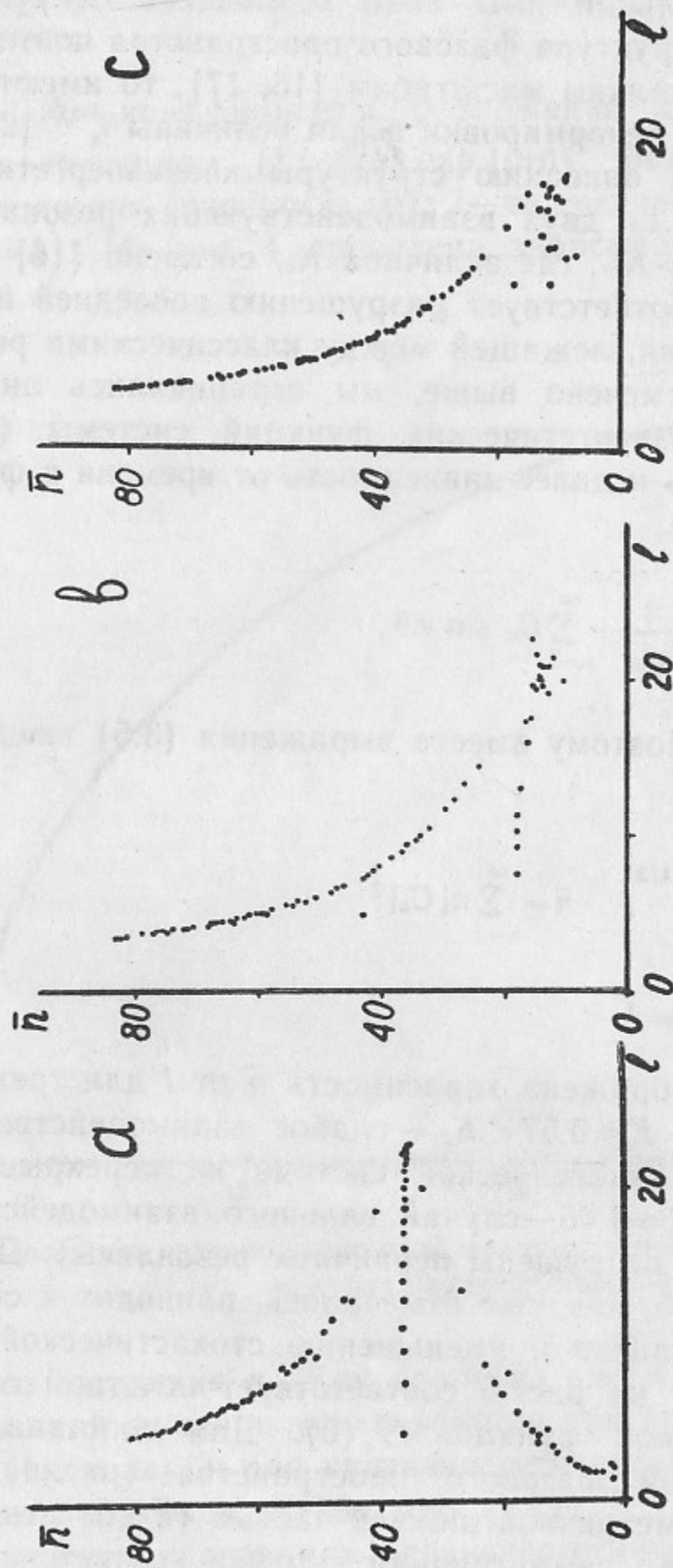


Рис. 5. Зависимость «центра тяжести» \bar{n} собственной функции от ее среднеквадратичной ширины l для системы (2.1) с параметрами $V_1 = V_2 = 10$; $\gamma = 5 \cdot 10^{-2}$, $\delta l \approx 25,5$. Рис. 5,а — классические резонансы не перекрываются, $K \approx 0,57$; $\nu = 3,5$; рис. 5,б — слабое перекрытие резонансов, $K \approx 1,33$, $\nu = 1,5$; рис. 5,с — сильное перекрытие резонансов, $K \approx 4,4$, $\nu = 0,45$.

они соответствовали бы движению в двух частях фазового пространства с $I > 0$ и $I < 0$.

Из рис. 5,а видно, что точки, соответствующие различным $\Psi_e(\theta)$, в основном ложатся на три ветви, в дальнейшем будем называть эту картину «клювом». Верхняя часть клюва соответствует функциям $\Psi_e(\theta)$, лежащим выше краев потенциальных ям первичных резонансов (им соответствуют классические траектории «пролетных» частиц). Точкам на горизонтальной ветви клюва соответствуют собственные функции уровней, находящихся внутри потенциальных ям первичных резонансов. Нижняя ветвь клюва на рис. 5,а соответствует функциям $\Psi_e(\theta)$, расположенным на диаграмме (\bar{n}, l) между первичными резонансами и полужелым резонансом (окрестность $\bar{n} \approx 0$, на рис. 1,а — окрестность $I \approx 0$). Отметим два обстоятельства: 1) точки на горизонтальной ветви с малыми l соответствуют собственным функциям, лежащим у дна потенциальных ям первичных резонансов, и такие функции являются в этом смысле хорошо локализованными; 2) нижняя ветвь клюва на рис. 5,а включает часть точек верхней ветви клюва полужелого резонанса (небольшой «всплеск» вблизи $\bar{n} \approx 0$ на нижней части рис. 5,а). В вершине большого клюва находятся наиболее делокализованные собственные функции, соответствующие окрестности сепаратрис первичных резонансов.

Существенным является тот факт, что каждому неразрушенному резонансу с номером m соответствует свой m -ый клюв, повторяющий основные особенности рис. 5,а, но в более мелком масштабе, поскольку глубина его потенциальной ямы уменьшается с ростом m . С учетом выбранных на рис. 5,а параметров оценки показывают, что число нечетных собственных функций, связанных с полужелым резонансом, примерно равно 5, и он находится на границе квазиклассичности (см. (2.9)) — его клюв частично разрушен.

В другом предельном случае сильного взаимодействия (рис. 5,с) основные и полужелый резонансы разрушены и, соответственно, разрушены горизонтальная ветвь большого клюва и вся нижняя ветвь. Неразрушенной осталась лишь верхняя ветвь клюва, соответствующая высоколежащим состояниям. Следует отметить нерегулярный характер собственных функций, принадлежащих вершине большого разрушенного клюва на рис. 5,с. Они являются не только делокализованными (большие $l \gg 1$), но, как видно из рис. 5,с, соответствующие им точки располагаются на диаграмме (\bar{n}, l) нерегулярным образом. Это означает, что в самой структуре таких состояний должна содержаться определенная доля

нерегулярной составляющей. Этот вопрос будет рассмотрен ниже.

Остановимся теперь на характерных особенностях разрушения нижней ветви на рис. 5,а. Этот вопрос представляет особый интерес, поскольку разрушение этой ветви связано с разрушением верхней ветви клюва полупростого резонанса, лежащего в области $\bar{n} \approx 0$. Другими словами, речь идет о характере разрушения собственных функций вблизи сепаратрисы полупростого резонанса, что соответствует в классическом пределе разрушению последней инвариантной кривой между основными резонансами. На рис. 6,а показано разрушение нижней ветви при увеличении параметра перекрытия K (верхняя ветвь на рис. 6 не приведена). Как видно из рис. 6, разрушение нижней ветви происходит из-за разрушения полупростого резонанса, причем, нерегулярным образом (нижние точки на рис. 6,б,с). Первичные резонансы при этом не разрушаются (точки на горизонтальной ветви сохраняются). По мере разрушения собственные функции нижней ветви перестраиваются — делокализуются (l возрастает) и вытесняются на диаграмме (\bar{n}, l) в область вершины клюва первичных резонансов, где также располагаются нерегулярным образом (последнее связано с разрушением сепаратрис первичных резонансов). Такой нерегулярный характер делокализации квазиэнергетических функций является квантовым проявлением классического хаоса. Более детальные особенности характера разрушения нижней ветви требуют дополнительного исследования, включая увеличение размерности матриц, использованных в процессе численной диагонализации оператора эволюции \hat{S} .

4. КВАЗИЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В ОБЛАСТИ МАКСИМАЛЬНОГО ХАОСА

Перейдем теперь к вопросу о статистических свойствах квазиэнергетических функций в области максимального хаоса, когда первичные резонансы полностью разрушены. Для этого рассмотрим квазиэнергетические функции, принадлежащие вершине разрушенного клюва. На рис. 7,а,б представлено фурье-разложение двух типичных квазиэнергетических функций с различными областями их локализации. Естественно, предположить, что собственные функции типа изображенной на рис. 7,а, которые находятся в области стохастичности, образованной перекрытием двух основных

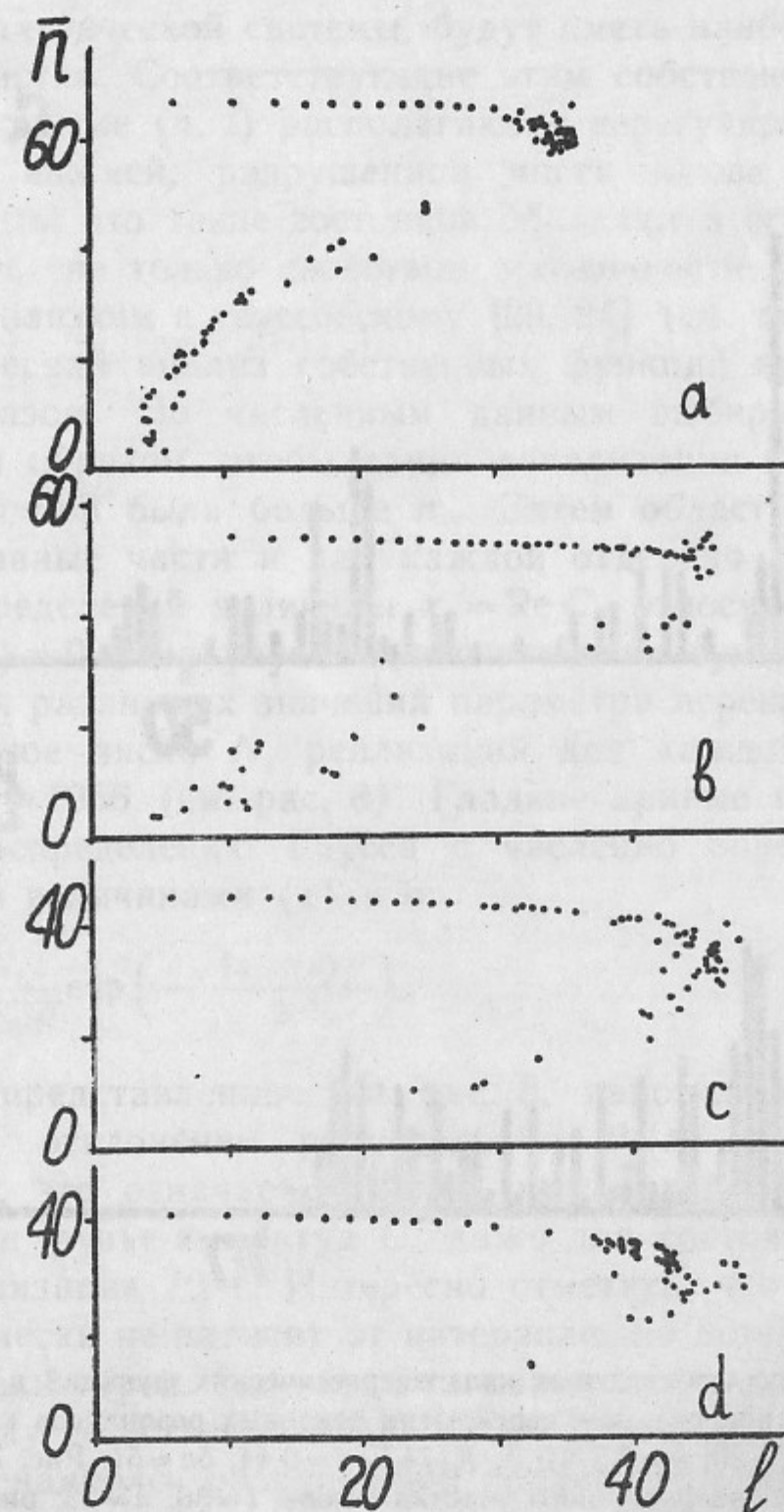


Рис. 6. Разрушение нижней ветви «клюва» при увеличении параметра перекрытия K : $\delta n \approx 51$, $V=20$, $\gamma=2,5 \cdot 10^{-2}$; рис. 6,а — $K=0,625$, $\nu=3,2$; рис. 6,б — $K=0,8$, $\nu=2,5$; рис. 6,с — $K=1,0$, $\nu=2$; рис. 6,д — $K=1,176$, $\nu=1,7$.

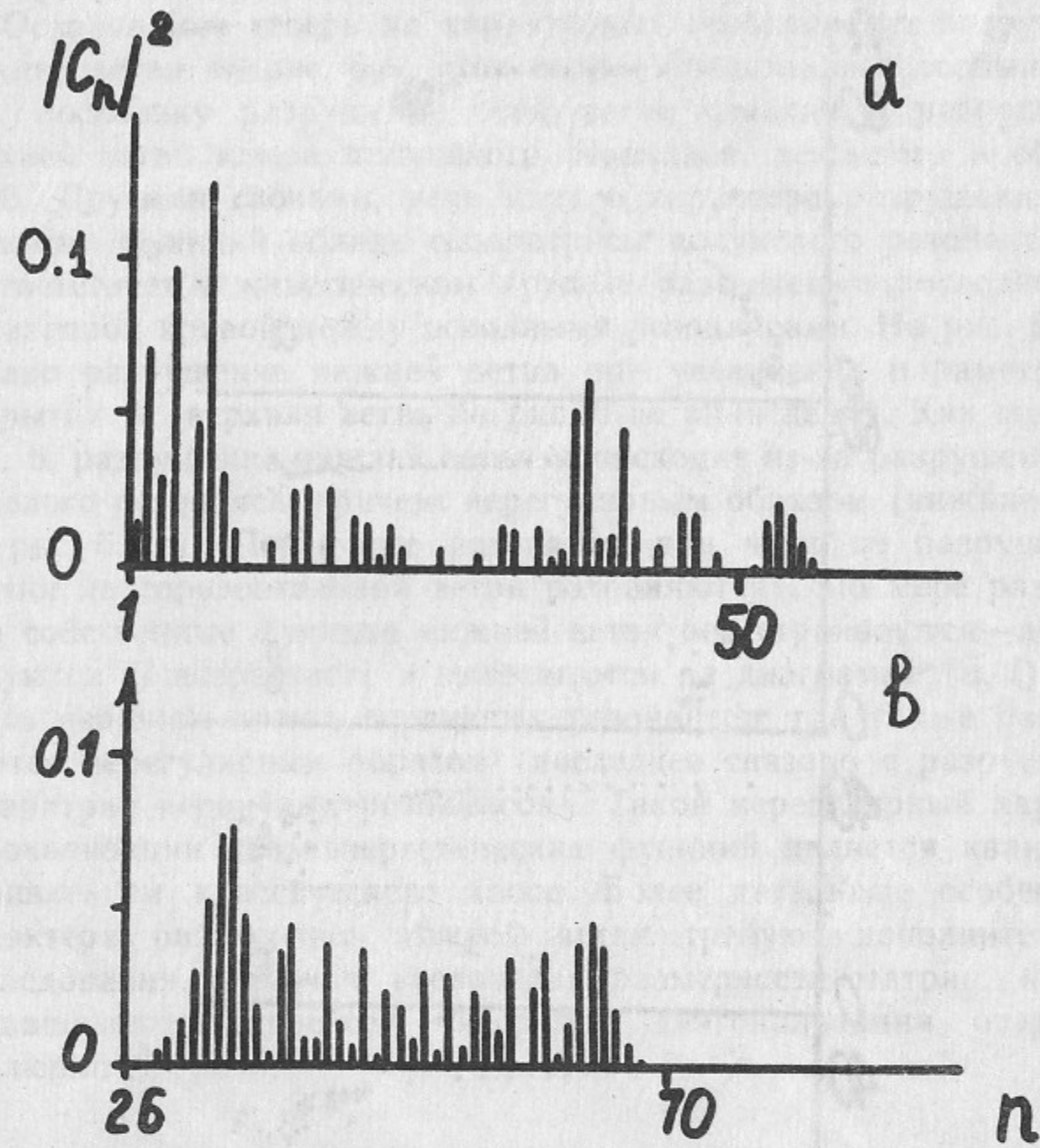


Рис. 7. Пример двух собственных квазиэнергетических функций в базисе невозмущенных состояний при сильном перекрытии основных резонансов классической системы (2.2): $V_1 = V_2 = 20$; $\gamma = 2,5 \cdot 10^{-2}$; $K \approx 4,5$, $\nu \approx 0,44$, $\delta n \approx 51$. Рис. 7,а — собственная функция из области разрушенного участка клюва, $l \approx 36$, $\bar{n} \approx 23$; рис. 7,б — собственная функция из переходной области верхней ветви клюва, $l \approx 24$, $\bar{n} \approx 46$.

резонансов классической системы, будут иметь наибольшие статистические свойства. Соответствующие этим собственным функциям точки на диаграмме (\bar{n}, l) располагаются нерегулярным образом и относятся к нижней, разрушенной части клюва (см. рис. 5,с). Можно ожидать, что такие состояния обладают в ограниченной области $1 < n \leq n_{cr}$ не только свойством эргодичности [22], но и распределением, близким к гауссовскому [23, 24] (см. также [25]).

Статистический анализ собственных функций проводился следующим образом. По численным данным выбирается значение $n_{cr} = 48$ таким образом, чтобы длина локализации выбранных собственных функций была больше n_{cr} . Затем область по n делится на четыре равные части и для каждой отдельно строится гистограмма распределений величины $x_n = \text{Re } C_n$ относительно среднего значения $\langle x_n \rangle \approx 0$. Для улучшения статистики суммировались гистограммы для различных значений параметра перекрытия K . В результате полное число N_1 реализаций для каждой гистограммы составило $N_1 = 1956$ (см. рис. 8). Гладкие кривые на рис. 8 соответствуют распределению Гаусса с численно определенными по гистограммам величинами $\langle x \rangle$ и σ :

$$P_f(x) = \frac{N_1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (4.1)$$

Данные, представленные на рис. 8, явно свидетельствуют о значительном отклонении распределения $P_f(x)$ от гауссовского. По-видимому, это означает наличие регулярной составляющей в распределении фурье-амплитуд C_n даже для состояний с большой длиной локализации $l \gg 1$. Интересно отметить, что распределение $P_f(x)$ практически не зависит от интервала, по которому проводится суммирование (рис. 8,а—д). Это кажется несколько неожиданным, поскольку естественно предположить, что для малых n , соответствующих наиболее разрушенной области при перекрытии резонансов в классической модели, корреляции должны быть меньше, чем на краю локализации собственной функции $n \lesssim n_{cr} \leq l$. Приведенные численные данные можно трактовать таким образом, что ограниченность (по действию) области со стохастическим поведением приводит к значительным корреляциям между амплитудами во всей области локализации собственных функций. В конечном счете такие корреляции усиливают квантовое ограничение классического хаоса (который для рассматриваемой системы не является сильно развитым).

5. СТАТИСТИКА СПЕКТРА КВАЗИЭНЕРГИЙ

Известно, что хаотическому движению автономной классической системы можно сопоставить определенные статистические свойства спектра энергии квантовой системы (см., например, [4, 26]). Для количественного описания используются разные статистические тесты [27], в частности, распределение $P(s)$ расстояний между соседними уровнями энергии в спектре системы. Зависимость $P(s)$ является одной из важных характеристик в теории Вигнера-Дайсона [28—29] при статистическом описании сложных квантовых систем, например, таких, как тяжелые ядра и атомы. В простейшей форме зависимость $P(s)$ имеет вид:

$$P(s) = As^\beta e^{-Bs^2}, \quad (5.1)$$

где s — расстояние между ближайшими уровнями; A , B — нормировочные константы; β — параметр, определяющий степень расталкивания близких уровней. Значение параметра $\beta = 1; 2; 4$, как следует из работы [29], связано с симметрией исходной системы.

В работах [30—31] было показано, что распределение Вигнера-Дайсона (5.1) имеет место также и для неавтономных систем (с периодически зависящим от времени возмущением), которые в классическом пределе являются стохастическими (см. также [32]). В этом случае зависимость $P(s)$ описывает распределение расстояний между соседними уровнями квазиэнергии, сведенными в интервал $2\pi/T$, где T — период возмущения.

Для нашей системы (2.1) распределение $P(s)$ для всех квазиэнергий ε_l в случае максимального хаоса ($K \approx 4,4$) имеет вид, представленный на рис. 9,а. Здесь, также как и ранее, для улучшения статистики использовался ансамбль из нескольких матриц (2.19) с различными значениями параметра стохастичности K . Для сравнения на рис. 9,а приведено распределение Пуассона:

$$P(s) = \frac{N_1}{\Delta} e^{-s/\Delta}, \quad (5.2)$$

которое может достаточно хорошо описывать распределение $P(s)$ для систем, интегрируемых в классическом пределе (см. [33], а также дискуссию в [34]). Из рис. 9,а видно, что численные данные для $P(s)$ гораздо ближе к зависимости (5.2), чем к распределению Вигнера-Дайсона (5.1). Отметим, что в силу инвариантности относительно обращения времени как для исходной системы

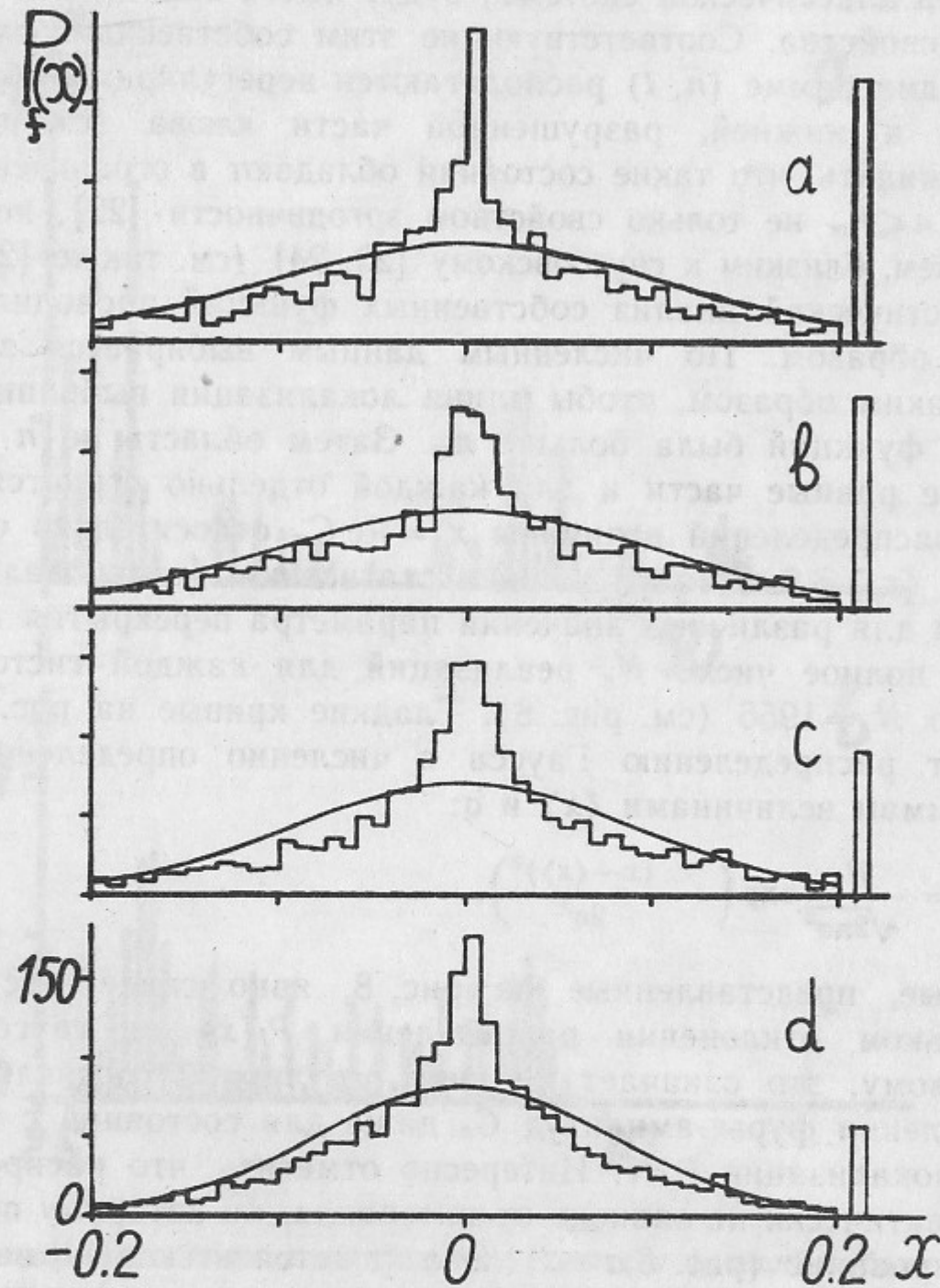


Рис. 8. Гистограмма распределения величины $x_n = \text{Re } C_n$ для собственных функций с большой длиной локализации $l \gg 1$ при сильном перекрытии резонансов: $V=20$, $\gamma=2,5 \cdot 10^{-2}$; $\delta n \approx 51$, $N_1=1956$, $n_{cr}=48$. Параметр перекрытия изменялся в пределах $4,5 \leq K \leq 5,1$. Гладкая кривая — распределение Гаусса (4.1). Приведены данные для разных участков невозмущенных состояний n : а) $1 \leq n \leq 12$; б) $13 \leq n \leq 24$; в) $25 \leq n \leq 36$; д) $37 \leq n \leq 48$. Отдельным пиком показано число значений с $|x| > 0,2$.

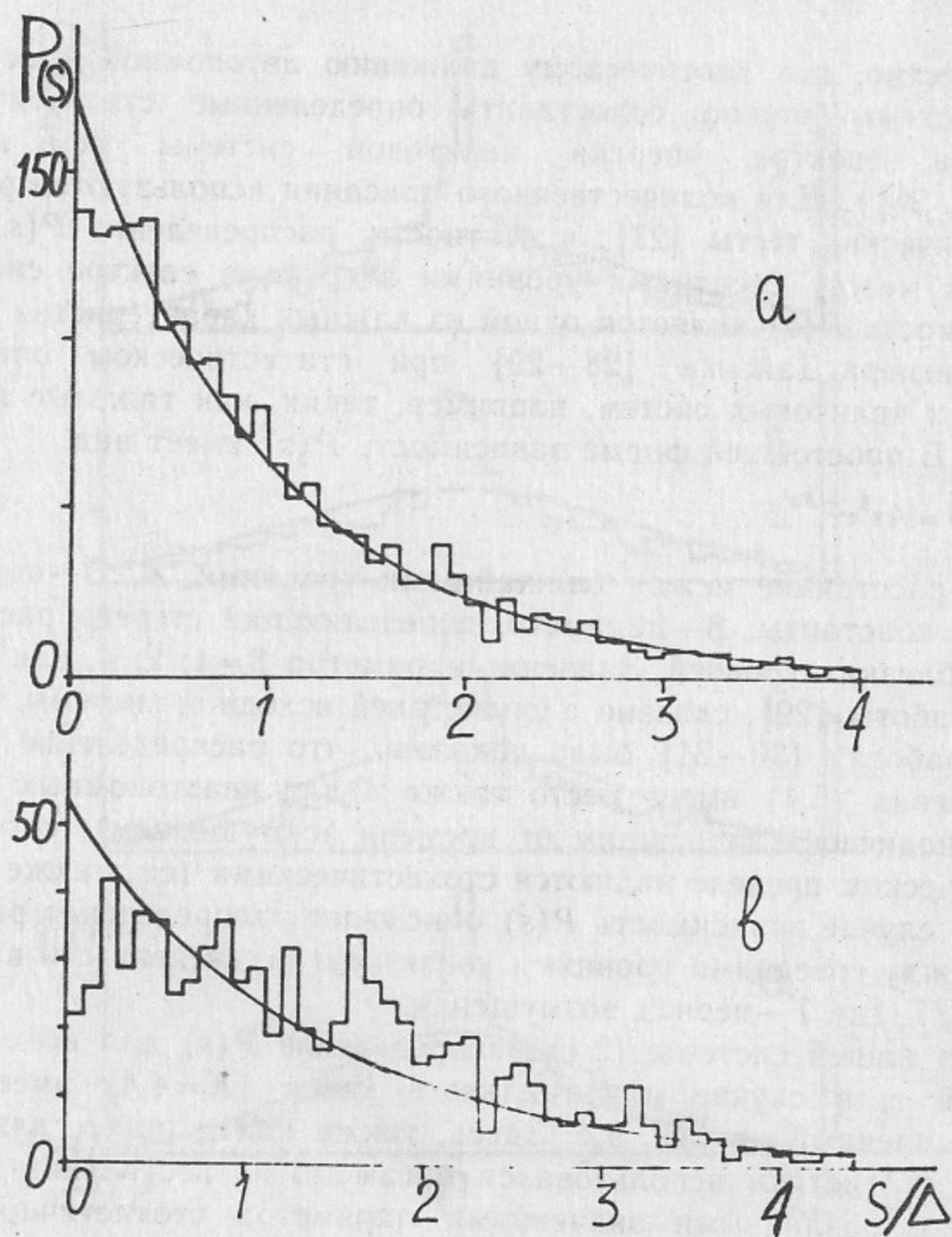


Рис. 9. Распределение $P(s)$ расстояний между соседними значениями квазиэнергии для $V=20$, $\gamma=2,5 \cdot 10^{-2}$, $\delta n \approx 51$. Величина Δ соответствует среднему расстоянию между уровнями: $\Delta=2\pi/N$. Плавная кривая—пуассоновское распределение (5.2). Рис. 9,а—распределение $P(s)$ для всех собственных значений: $N_1=2047$, $4,31 \leq K \leq 4,52$; $0,44 \leq \nu \leq 0,46$. Рис. 9,б—распределение $P(s)$ для наиболее делокализованных и нерегулярных состояний, $N_1=778$; $4,31 \leq K \leq 4,46$; $0,45 \leq \nu \leq 0,46$.

(2.1), так и для модели (2.13—2.19), нужно рассматривать только значение $\beta=1$. Несмотря на неплохое качественное согласие зависимости $P(s)$ на рис. 9,а с распределением Пуассона (5.2), заметно некоторое отклонение в области малых $s \ll \Delta$. Близость распределения $P(s)$ к пуассоновскому не удивительна, поскольку статистическая обработка проводилась по всем собственным значениям, большая часть из которых соответствует сильно локализованным состояниям. Последние включают в себя также состояния, соответствующие устойчивому классическому движению вне резонанса (вращению). Поэтому естественно рассмотреть статистику собственных значений тех квазиэнергетических состояний, которые имеют большую ширину $l \gg 1$ и, в той или иной степени, нерегулярны.

На рис. 9,б представлено распределение $P(s)$ для собственных значений, соответствующих наиболее делокализованным собственным функциям квазиэнергий (см. разд. 4 и рис. 8). По сравнению с рис. 9,а в области малых s отклонение от зависимости (5.2) стало более сильным. В частности, заметно появление расталкивания между близкими уровнями квазиэнергий. В целом, однако, распределение $P(s)$, даже для таких состояний, весьма далеко от распределения Вигнера-Дайсона (5.1) с $\beta=1$. Это указывает на значительные корреляции в квазиэнергетических состояниях и согласуется с отмеченным в разд. 4 негауссовым характером флуктуаций компонент собственных функций. Распределение $P(s)$ в этом случае (рис. 9,б) оказывается промежуточным между пуассоновским и распределением Вигнера-Дайсона. Такая ситуация является типичной для автономных квантовых систем, фазовое пространство которых в классическом пределе разделено на области с устойчивым движением и области, в которых движение стохастическое (см., например, [35]).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При рассмотрении нелинейных квантовых систем с внешним периодическим во времени полем, адекватным методом описания является метод квазиэнергетического представления. На диаграмме (\bar{n}, l) (\bar{n} —«центр тяжести» квазиэнергетической функции, l —ее эффективная ширина) квазиэнергетические функции при большом параметре квазиклассичности образуют характерную структуру, которую мы назвали «клювом». При этом, поскольку в классичес-

ком пределе каждому изолированному резонансу соответствует своя потенциальная яма с амплитудой V_m , и имеет место определенная ренормировка фазового пространства за счет высших резонансов [16, 17], то в квантовом случае аналогичная ренормализация возникает на диаграмме (\bar{n}, l) для «ключевых» неразрушенных резонансов. В такой картине существует, однако, квантовый предел, связанный с существованием высоких резонансов, для которых число захваченных уровней мало [21].

Известно, что в классической системе разрушение резонансов сопровождается возникновением областей с хаотической компонентой. В первую очередь такие области возникают в окрестности сепаратрис взаимодействующих резонансов. Аналогом классической стохастичности в квантовом случае на языке собственных квазиэнергетических функций является их перестройка с возникновением нерегулярности на диаграмме (\bar{n}, l) и с их делокализацией. Последнее означает существенную перестройку квазиэнергетической функции за счет увеличения числа содержащихся в ней гармоник невозмущенного спектра (см. рис. 7).

Анализ распределений делокализованных квазиэнергетических функций, соответствующих разрушенным резонансам, и распределение расстояний между ближайшими уровнями квазиэнергий показывает наличие существенных корреляций. Последние связаны как с ограниченностью хаотического движения в фазовом пространстве классической системы, так и с квантовыми эффектами, приводящими к ограничению классического хаоса.

Авторы искренне благодарны Б.В. Чирикову за постоянное внимание к работе и полезные замечания, а также А.Р. Коловскому и Д.Л. Шепелянскому за обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ридберговские состояния атомов и молекул. Под ред. Р. Стеббингса и Ф. Данинга, М.: Мир, 1985.
2. Делоне Н.Б., Крайнов В.П., Шепелянский Д.Л. УФН, 1983, т.140, с.355.
3. Chirikov B.V. Phys. Rep., 1979, v.52, p.263.
4. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1985.
5. Лухтенберг А., Либман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
6. Chirikov B.V., Izrailev F.M., Shepelyansky D.L. Sov. Sci. Reviews, 1981, v.2C, p.209.
7. Berman G.P., Kolovsky A.R. Physica, 1983, v.D8, p.117.
8. Casati G., Chirikov B.V., Guarneri I., Shepelyansky D.L. Phys. Rev. Lett., 1986, v.56, p.2437.

9. Izrailev F.M. Physica, 1981, v.D2, p.243.
10. Берман Г.П., Заславский Г.М., Коловский А.Р. ЖЭТФ, 1985, т.88, с.1551.
11. Doveil F. Phys. Rev. Lett., 1981, v.46, p.532.
12. Берман Г.П., Заславский Г.М., Коловский А.Р. ЖЭТФ, 1984, т.81, с.506.
13. Berman G.P., Zaslavsky G.M., Kolovsky A.R. Phys. Lett., 1982, v.A87, p.152.
14. Зельдович Я.Б. ЖЭТФ, 1966, т.51, с.1492.
15. Ритус В.И. ЖЭТФ, 1966, т.51, с.1544.
16. Escande D.F., Doveil F. J. Stat. Phys., 1981, v.26, p.257.
17. Escande D.F. Phys. Rep., 1985, v.121, p.167.
18. Berman G.P., Zaslavsky G.M. Physica, 1982, v.A111, p.17.
19. Шуряк Э.В. ЖЭТФ, 1976, т.71, с.2039.
20. Toda M. Phys. Lett., 1985, v.A110, p.235.
21. Берман Г.П., Власова О.Ф., Израйлев Ф.М., Коловский А.Р. Препринт ИФ СО АН СССР, № 402Ф, Красноярск, 1986.
22. Шнирельман А.И. УМН, 1974, т.29, с.181.
23. Porter C.E., Tomas R.G. In: Statistical Theories of Spectra: Fluctuations.—Acad. Press N.Y. and London, 1965, p.167.
24. Berry M.V. J. Phys. A: Math. Gen., 1977, v.10, p.2083.
25. Chirikov B.V. Phys. Lett., 1985, v.A108, p.68.
26. Bohigas O., Giannoni M.J. Lecture Notes in Physics, 1984, v.209, p.1.
27. Brody T.A., Flores J., French J.B., Mello P.A., Pandey A., Wong S.S.M. Rev. of Mod. Phys., 1981, v.53, p.385.
28. Wigner E.P. In: Statistical Theories of Spectra: Fluctuations.—Acad. Press N.Y. and London, 1965, p.88, 145, 176, 226.
29. Dyson F.J. J. Math. Phys., 1962, v.3, p.140, 157, 166 (перевод: Ф. Дайсон, Статистическая теория энергетических уровней сложных систем. М.: Ин. лит., 1963).
30. Израйлев Ф.М. Препринт ИЯФ СО АН СССР 84-63. Новосибирск, 1984.
31. Izrailev F.M. Phys. Rev. Lett., 1986, v.56, p.541.
32. Jose J.V., Cordero R. Phys. Rev. Lett., 1986, v.56, p.290.
33. Berry M.V., Tabor M. Proc. Roy. Soc. of London, A: Math. Phys. Sc., 1977, v.356, p.375.
34. Casati G., Chirikov B.V., Guarneri I. Phys. Rev. Lett., 1985, v.54, p.1350.
35. Seligman T.N., Verbaarschot J.J.M., Zirnbauer M.R. Phys. Rev. Lett., 1984, v.53, p.215; J. Phys. A: Math. Gen., 1985, v.18, p.2751.

Г.П. Берман, О.Ф. Власова, Ф.М. Израйлев

**Квазиэнергетические функции и спектр квазиэнергий
двух взаимодействующих нелинейных резонансов
в области классического хаоса**

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 15 декабря 1986 г.
Подписано в печать 30.XII 1986 г. МН 11919
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2,0 печ.л., 1,6 уч.-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 181

*Набрано в автоматизированной системе на базе фото-
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и
отпечатано на ротапринтере Института ядерной физики
СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*