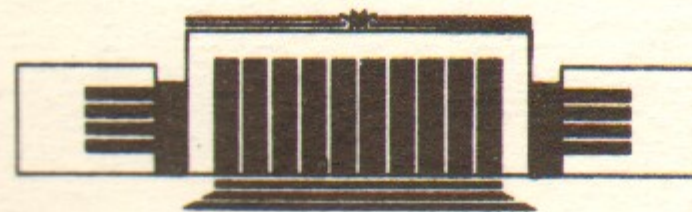




В.Н. Байер, В.М. Катков, В.М. Страховенко

**ИЗЛУЧЕНИЕ ЧАСТИЦ ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ  
В ОРИЕНТИРОВАННЫХ МОНОКРИСТАЛЛАХ**

ПРЕПРИНТ 86-115



НОВОСИБИРСК

1986

ИЗЛУЧЕНИЕ ЧАСТИЦ ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ В ОРИЕНТИРОВАННЫХ МОНОКРИСТАЛЛАХ

В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко

А Н Н О Т А Ц И Я

Развита теория излучения фотона заряженной частицей высокой энергии в ориентированном монокристалле. При малых углах влета она описывает излучение в непрерывном потенциале кристаллической оси или плоскости, а для достаточно больших углов переходит в стандартную теорию когерентного тормозного излучения (КТИ). Получена модификация теории КТИ, применимая в более широком интервале углов влета. Развитый подход позволяет найти ориентационную зависимость полной интенсивности излучения при любых энергиях частицы, а для достаточно высоких энергий, когда при малых углах влета становится применимым магнитотормозное описание - вычислить любые характеристики излучения для произвольного угла влета.

V.N.Baier, V.M.Katkov and V.M.Strakhovenko

Institute of Nuclear Physics, 630090 Novosibirsk, USSR

## A b s t r a c t

The theory is developed of photon radiation by a high-energy charged particle in an aligned single crystal. At small angles of incidence it describes the radiation in the continuous potential of a crystalline axis or a plane, while for rather large angles it goes over to the standard theory of coherent bremsstrahlung (CBT). A modification of the CBT has been derived which is applicable in a broader interval of the angles of incidence. The developed approach allows one to find the orientation dependence of the total radiation intensity at any energy of the particle. For fairly high energies, when the magnetic-bremsstrahlung description becomes applicable at small angles of incidence, it makes possible to calculate any characteristics of the radiation for an arbitrary angle of incidence.

## I. Введение

Процесс излучения фотона заряженной частицей и рождения электрон-позитронной пары фотоном в случае, когда начальная частица движется под малым углом  $\vartheta_0$  к направлению осей или плоскостей монокристалла, существенно модифицируется по сравнению с аморфной средой. Этот круг вопросов активно обсуждается в последние годы. Недавно авторы развили подход к описанию рождения пар фотонами большой энергии в монокристаллах, справедливый при любых энергиях и углах влета фотона [1-3]. Этот подход основывается на общем квазиклассическом формализме\* для описания явлений во внешних полях ([4], гл. 3). В настоящей работе аналогичный подход развит в задаче излучения. При этом возникает ряд новых моментов, в частности, необходимо учитывать перераспределение потока заряженных частиц в кристалле.

Обсудим качественные особенности процесса излучения в ориентированном монокристалле. Хорошо известно (см., например, [4], гл. I), что характеристики этого процесса существенно зависят от соотношения между характерным углом излучения  $\vartheta \equiv \frac{m}{\epsilon} = \frac{1}{\gamma}$  ( $m$  - масса электрона,  $\epsilon$  - его энергия) и углом отклонения частицы на траектории  $\Theta^2 \sim \langle (\Delta \vec{v})^2 \rangle = \langle \vec{v}^2 \rangle - \langle \vec{v} \rangle^2$ , где  $\langle \dots \rangle$  означает усреднение по времени. Соответствующий параметр  $\varrho$  был введен в [7] (см. также [3], [8]):

$$\varrho = 2\gamma^2 \langle (\Delta \vec{v})^2 \rangle \quad (I.1)$$

Напомним, что при значениях параметра  $\varrho \ll 1$  излучение носит дипольный характер и формируется за время порядка периода движения, а при  $\varrho \gg 1$  имеет магнитотормозной характер (для частот, дающих вклад в интенсивность) и происходит с небольшого участка траектории.

Движение частицы и, соответственно, параметр  $\varrho$  зависят от величины угла влета  $\vartheta_0$  частицы в кристалл по сравнению с характерным углом каналирования  $\vartheta_c \equiv \sqrt{\frac{\epsilon V_0}{\epsilon}}$ , где  $V_0$  - масштаб непрерывного потенциала оси или плоскости, относительно которых определяется угол  $\vartheta_0$ . При углах влета  $\vartheta_0 \lesssim \vartheta_c$  пада-

\* В работах [5,6] использовались исходные формулы формализма [4], а все дальнейшие вычисления проводились численно.  
 \*\* В работе используется система единиц  $\hbar = c = 1$ .

ющие электроны захватываются в каналы или низкие надбарьерные состояния, а при  $\vartheta_0 \gg \vartheta_c$  частицы движутся высоко над барьером. В последнем случае для описания движения можно использовать приближение прямолинейной траектории, с помощью которого из (I.1) получаем оценку:

$$\varrho(\vartheta_0) \approx \left( \frac{2V_0}{m\vartheta_0} \right)^2 \quad (I.2)$$

Для углов влета  $\vartheta_0 \lesssim \vartheta_c$  значение поперечной (к оси, плоскости) скорости частицы  $v_{\perp} \lesssim \vartheta_c$  и параметр  $\varrho \lesssim \varrho_c$ , где

$$\varrho_c = \frac{2V_0 \epsilon}{m^2} \quad (I.3)$$

Из (I.2) видно, что в задаче возникает еще один характерный угол  $\vartheta_v \equiv V_0/m$ , причем  $\varrho_c = (2\vartheta_v/\vartheta_c)^2$ .

В работе авторов [8] показано, что при заданной частоте движения  $\omega_0$  характерные частоты излучаемых фотонов определяются соотношением:

$$u \equiv \frac{\omega}{\epsilon - \omega} \sim \frac{2\omega_0 \epsilon}{m^2} \sqrt{1 + \varrho} \quad (I.4)$$

При движении заряженной частицы вблизи оси (плоскости) кристалла можно для оценки считать, что  $\omega_0 \sim v_{\perp}/a_s \sim V_0/m a_s \sqrt{\epsilon}$ , где  $a_s$  - размер области действия непрерывного потенциала. Тогда из (I.4) получаем  $u \sim (1 + \varrho)^{1/2} \chi_s$ , где параметр  $\chi_s$

$$\chi_s = \frac{V_0 \epsilon}{m^3 a_s} \quad (I.5)$$

характеризует квантовые эффекты при излучении. Действительно, из полученной оценки (справедливой вплоть до значений  $\chi_s \sim 1$ ) следует, что соотношение  $\omega/\epsilon \ll 1$  для характерных излучаемых частот, позволяющее пренебречь отдачей и пользоваться классической теорией излучения, может выполняться лишь при условии

$\chi_s \ll 1$ . Однако и в этом случае применимость классического описания излучения нарушается при  $\sqrt{\epsilon} \lesssim \chi_s$ , т.е. при  $\vartheta_0 \gtrsim \frac{V_0}{m\chi_s} = \frac{m a_s}{\gamma} \equiv \vartheta_m$ . Отметим, что в кристаллах

типичное значение величины  $m a_s \sim 10^2 \gg 1$ .

Для достаточно больших углов влета  $\vartheta_0$  оказывается справедливой теория когерентного тормозного излучения - КТИ (см. [9], гл. I-2; [10], гл. 8; критерий применимости КТИ обсуждался в [11]), которая по существу является борновским приближением по потенциалу кристалла и для своей применимости требует (в наших терминах) одновременного выполнения условия дипольности и возможности использования приближения прямолинейной траектории.

Обсудим теперь зависимость картины излучения от энергии частиц. Для малых энергий (до нескольких МэВ в осевом и до нескольких десятков МэВ - в плоскостном случае) излучение определяется переходами между уровнями энергии в соответствующей потенциальной яме. Мы будем рассматривать область энергий, когда число этих уровней велико и движение частицы можно описывать классически.

До тех пор, пока выполняется условие  $\varrho_c \ll 1$  (при этом  $\vartheta_v \ll \vartheta_c \ll \vartheta_x \ll \vartheta_m$ ) излучение является дипольным для всех углов влета частицы в кристалл. Параметр  $\chi_s$  мал:  $\chi_s = \varrho_c/2m a_s \ll \varrho_c \ll 1$  и  $\chi_s/\sqrt{\epsilon} \ll 1$ , т.е. справедливо классическое описание излучения, которое нарушается для углов  $\vartheta_0 \sim \vartheta_m$ , но для таких углов уже применима теория КТИ, справедливая в этом случае при  $\vartheta_0 \gg \vartheta_c$ . Когда при дальнейшем увеличении энергии начинает выполняться условие  $\varrho_c \sim 1$ , т.е.  $\vartheta_v \sim \vartheta_c \sim \vartheta_x \ll \vartheta_m$ , все сказанное выше о характере излучения сохраняет силу, за исключением того, что теперь для малых углов влета  $\vartheta_0 \lesssim \vartheta_c$  излучение перестает быть дипольным. Наконец, при  $\varrho_c \gg 1$ , когда  $\vartheta_x \ll \vartheta_c \ll \vartheta_v$  для углов влета  $\vartheta_0 \ll \vartheta_v$  справедливо магнитотормозное описание излучения ( $\varrho \gg 1$ ), а теорию КТИ можно применять в противоположном случае  $\vartheta_0 \gg \vartheta_v$  (при  $\vartheta_0 \sim \vartheta_v$  из (I.2) имеем  $\varrho \sim 1$  и нарушается условие дипольности). Для таких энергий параметр  $\chi_s$  уже нельзя считать малым (так, уже при  $\chi = 0.1$  вычисленное классически значение полной интенсивности примерно в 1,5 раза превышает правильный результат) и становится необходимым точный учет квантовой отдачи при излучении.

Приведем еще оценку длины формирования излучения  $l_f$  для углов влета  $\vartheta_0 \lesssim \vartheta_c$ . Поскольку  $l_f \sim \epsilon/m^2 u$ , то, используя (I.4) получаем следующую картину: при  $\varrho_c \ll 1$ ,

$l_f \sim l_0 \sqrt{\varrho_c} \sim 1/\omega_0$ , где  $l_0 = a_s/\vartheta_V$  и длина  $l_f$  растет  $l_f \propto \sqrt{\varepsilon}$ ; когда начинает выполняться условие  $\varrho_c \sim 1$ , этот рост прекращается и пока  $u \sim \chi_s$ , т.е. вплоть до  $\varrho_c \approx 10^2$  длина формирования остается приблизительно постоянной  $l_f \sim l_0$ ; при дальнейшем увеличении энергии имеем  $u \sim 1$  и  $l_f \sim \varepsilon/m^2$ ; при энергиях  $\varepsilon \sim 10$  ТэВ и выше этот закон меняется на более медленный  $l_f \sim l_0 \chi_s^{1/3}$ . Величина  $l_0$  больше для легких кристаллов и, например, для оси  $\langle 111 \rangle$  меняется от  $5,7 \cdot 10^{-5}$  см в алмазе до  $2,6 \cdot 10^{-6}$  см в вольфраме. При энергии  $\varepsilon \sim 10$  ТэВ длины формирования в различных веществах становятся одного порядка:  $l_f \sim 10^{-3}$  см. Ниже мы будем предполагать, что толщина кристалла  $L$  удовлетворяет условию  $L \gg l_f$ .

В настоящей работе кристалл считается тонким, т.е. мы пренебрегаем изменением функции распределения в поперечном фазовом пространстве при прохождении частиц через кристалл. Для справедливости этого приближения необходимо, чтобы (см. обсуждение в [12]) толщина кристалла была меньше характерной длины деканализирования и характерной длины потерь энергии  $L_d$

$$L_d^{-1} = \frac{I(\varepsilon)}{\varepsilon} \quad (1.6)$$

где  $I(\varepsilon)$  - полная интенсивность излучения. Анализ (см. [12] и раздел III настоящей работы) показывает, что область толщин, для которых кристалл можно считать тонким и одновременно  $L \gg l_f$  существует при любых энергиях. С другой стороны, для рассматриваемой области энергий ( $\varrho_c \gg 1$ ) в толстом кристалле при  $\vartheta_0 \lesssim \vartheta_V$  с необходимостью развивается специфический электромагнитный ливень (см. [2]). Тогда описание излучения в терминах одной частицы становится неадекватным и следует решать соответствующие уравнения каскадной теории, ядрами которых служат полученные ниже выражения, описывающие излучение, и выражения, описывающие рождение пар фотоном, полученные в работе [3].

В большом числе работ опубликованных до последнего времени рассматривались только отдельные аспекты теории излучения в ориентированных монокристаллах. Изучалось когерентное тормозное излучение, излучение частиц в каналах и движущихся над барьером, причем большинство работ посвящено области  $\varrho_c \lesssim 1$ . В работах, посвященных области  $\varrho_c \gg 1$ , как правило, не

учитывалась квантовая отдача при излучении.

В настоящей работе развита теория излучения электронов и позитронов в тонких кристаллах в области  $\varrho_c \gg 1$  ( $\varepsilon \gg m^2/V_0$ ) с учетом квантовых эффектов. Полученные результаты применимы при любых углах влета  $\vartheta_0$ . В области  $\vartheta_0 \ll \vartheta_V$  они переходят в теорию излучения в полях осей (плоскостей) в магнитотормозном пределе (эта область проанализирована в [1, 13], см, также [5, 6]). В этой области найдена также поправка  $\propto (m\vartheta_0/V_0)^2$  (раздел III). В области  $\vartheta_0 \gtrsim \vartheta_V$  из общих формул следует выражение для вероятности, представляющее модификацию стандартной теории когерентного тормозного излучения, а при  $\vartheta_0 \gg \vartheta_V$  получается стандартная теория КТИ (раздел IV). Оказалось, что полученное общее выражение, описывающее ориентационную зависимость полной интенсивности излучения, применимо при любых энергиях, где справедлива квазиклассическая теория излучения (т.е. и при  $\varrho_c \lesssim 1$ ).

## II. Квазиклассическое описание излучения фотона заряженной частицей в монокристалле

Наиболее адекватным подходом к задаче об излучении релятивистских частиц является формализм, использующий операторный квазиклассический метод, развитый двумя из авторов (см. [4]), поскольку он применим во всех типах внешних полей, включая неоднородные и переменные. В случае больших квантовых чисел движения (квазиклассичность) этот метод позволяет исходя из точных квантовых выражений перейти, после серии преобразований, к величинам на классической траектории частицы, отдача при излучении фотона при этом учитывается точно. Общая формула для интенсивности излучения имеет вид (см. [4], § 10):

$$dE = e^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^2} \left| \int dt R(t) e^{i\mathbf{k}'\mathbf{x}(t)} \right|^2 \quad (2.1)$$

где  $R(t) = \psi_f^+ [A(t) + i\vec{\sigma} \vec{B}(t)] \psi_i$ ,

$$A = \frac{\vec{e}^* \vec{p}(t)}{2\sqrt{\varepsilon\varepsilon'}} \left( \sqrt{\frac{\varepsilon'+m}{\varepsilon+m}} + \sqrt{\frac{\varepsilon+m}{\varepsilon'+m}} \right), \quad (2.2)$$

$$\vec{B}(t) = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon\epsilon'}} \left( \sqrt{\frac{\epsilon'+m}{\epsilon+m}} [\vec{e}^* \vec{p}(t)] - \sqrt{\frac{\epsilon+m}{\epsilon'+m}} [\vec{e}^* (\vec{p}(t) - \vec{K})] \right),$$

$$K'^{\mu} = K^{\mu} \frac{\epsilon}{\epsilon'}, \quad \epsilon' = \epsilon - \omega, \quad K^{\mu} = (\omega, \vec{K})$$

$\vec{e}$  - вектор поляризации излученного фотона;  $\varphi_i, \varphi_f$  - спиноры, описывающие начальное и конечное спиновые состояния частицы. Формулы (2.1) и (2.2) определяют все характеристики излучения, включая спиновые и поляризационные. Если провести в (2.1) суммирование по спину конечного электрона и усреднение по спину начального, то получим (см. [4], [8])

$$dE = e^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^2} \int dt_1 \int dt_2 L(t_1, t_2) e^{iK'(x_1 - x_2)} \quad (2.3)$$

где

$$L(t_1, t_2) = \frac{(\epsilon + \epsilon')^2}{4\epsilon'^2} (\vec{e}^* \vec{v}_1)(\vec{e} \vec{v}_2) - \frac{\omega^2}{4\epsilon'^2} \left[ (\vec{e}^* \vec{v}_2)(\vec{e} \vec{v}_1) - (\vec{v}_1 \vec{v}_2 - 1 + \frac{1}{\gamma^2}) (\vec{e}^* \vec{e}) \right] \quad (2.4)$$

Здесь введены обозначения  $x_{1,2} \equiv x(t_{1,2}), \vec{v}_{1,2} \equiv \vec{v}(t_{1,2})$ . Суммируя по поляризациям фотона, найдем:

$$\bar{L} = \frac{\epsilon^2 + \epsilon'^2}{2\epsilon'^2} (\vec{v}_1 \vec{v}_2 - 1) + \frac{\omega^2}{2\gamma^2 \epsilon'^2} \quad (2.5)$$

Ниже мы будем, вообще говоря, считать кристалл тонким, а условие  $\varrho_c \gg 1$  - выполненным. В этом случае чрезвычайно сложная задача усреднения выражений (2.1), (2.3) полученных для заданной траектории по всем возможным траекториям частицы в кристалле радикально упрощается. Действительно, при  $\varrho_c \gg 1$

в области, где траектории существенно непрямолинейны ( $\varrho_c \lesssim \varrho_c, v_1 \sim \varrho_c$ ) механизм излучения является магнитотормозным и характеристики излучения выражаются через локальные характеристики движения. Тогда для усреднения достаточно знать только функцию распределения в поперечном фазовом пространстве  $dN(\vec{\varrho}, \vec{v}_1)$ , которая для тонкого кристалла непосредственно задается начальными условиями влета частиц в кристалл. При заданном угле влета  $\vartheta_0$  (угол между импульсом падающей частицы и кристаллической осью или плоскостью) имеем  $dN/N = d^3z/V \cdot F(\vec{z}, \vartheta_0)$ , где  $V$  - объем кристалла,  $N$  - полное число частиц. Функция  $F(\vec{z}, \vartheta_0)$  в осевом случае имеет вид

$$F_{ax}(\vec{\varrho}, \vartheta_0) = \int \frac{d^2 \varrho_0}{S(\epsilon_1(\vec{\varrho}_0))} \vartheta(\epsilon_1(\vec{\varrho}_0) - U(\vec{\varrho})) \quad (2.6)$$

где  $U(\vec{\varrho})$  - непрерывный потенциал оси, зависящий от поперечной координаты  $\vec{\varrho}$ , нормированный так, что  $U(\vec{\varrho}) = 0$  на границе ячейки;  $U_0$  - глубина потенциальной ямы,  $S(\epsilon_1(\vec{\varrho}_0)) = \int d^2 \varrho \vartheta(\epsilon_1(\vec{\varrho}_0) - U(\vec{\varrho}))$ ,  $\epsilon_1(\vec{\varrho}_0) = \frac{1}{2} \epsilon \varrho_0^2 + U(\vec{\varrho}_0)$ ;  $\vartheta(x)$  - функция Хевисайда:  $\vartheta(x) = 0$  при  $x < 0$  и  $\vartheta(x) = 1$  при  $x > 0$ . В плоскостном случае имеем:

$$F_{pe}(x, \vartheta_0) = \int \frac{dx_0}{v(\epsilon_{10}, x)} \cdot \frac{\vartheta(\epsilon_{10} - U(x))}{\int dy \vartheta(\epsilon_{10} - U(y)) / v(\epsilon_{10}, y)} \quad (2.7)$$

где  $U(x)$  - непрерывный потенциал плоскости, зависящий от поперечной координаты  $x$ ,  $U_0$  - глубина потенциальной ямы,  $v(\epsilon_{10}, x) = \sqrt{\frac{2}{\epsilon} (\epsilon_{10} - U(x))}$  - поперечная скорость частицы,  $\epsilon_{10} = \frac{1}{2} \epsilon \varrho_0^2 + U(x_0)$ . Отметим, что распределение (2.6) при  $\epsilon_1(\vec{\varrho}_0) > U_0$  (для надбарьерных частиц) становится равномерным, тогда как распределение (2.7) переходит в равномерное лишь при  $\epsilon_{10} \gg U_0$ .

Подставив (2.5) в (2.3) и просуммировав по траекториям частиц в кристалле с учетом перераспределения потока (2.6), (2.7) получим после несложных преобразований для потери энергии частицей (ср. с формулой (2.2) в [3])

$$E = - \frac{\alpha m^2}{4\pi^2} \int \frac{d^3k}{\epsilon\epsilon'} \int \frac{d^3z}{V} \int d^2\vartheta_0 F(\vec{z}, \vartheta_0) \int dt_1 \int dt_2$$

$$\left\{ 1 + \frac{\epsilon^2 + \epsilon'^2}{4\epsilon\epsilon'} \gamma^2 (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 \right\} e^{-iA}, \quad (2.8)$$

$$A = \frac{\omega\epsilon}{2\epsilon'} \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{1}{\gamma^2} + (\vec{v} - \vec{v}(t))^2 \right], \quad \vec{v} = \frac{\vec{k}}{\omega}, \quad \alpha = e^2 = \frac{1}{137}$$

Представим скорость частицы  $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \Delta\vec{v}(t, \vec{v}_0)$   
Тогда подынтегральное выражение в фазе  $A$  в (2.8) можно записать в виде

$$\frac{1}{\gamma^2} + \vec{u}^2 - 2\vec{u}\Delta\vec{v} + (\Delta\vec{v})^2, \quad (2.9)$$

где

$$\vec{u} = \vec{v} - \vec{v}_0 \simeq \vec{v} - \vec{v}_0 (\vec{v}\vec{v}_0) = \vec{v}_\perp,$$

так что можно считать, что вектор  $\vec{u}$  лежит в плоскости перпендикулярной  $\vec{v}_0$ . Основной вклад в интенсивность (2.8) будут давать участки траектории, на которых направление вектора  $\vec{v}$  близко к  $\vec{v}_0$ :  $|\vec{u} - \Delta\vec{v}(t, \vec{v}_0)| \sim 1/\gamma$ ,  $|\Delta\vec{v}| \sim \sqrt{\epsilon}/\gamma$ , где  $\vartheta$  определено в (I.1) - (I.3). Выполняя в (2.8) интегрирование по  $\vec{u}$  ( $d^3k = \omega^2 d\omega d\vec{u}$ ) имеем (ср. формулу (4.2) работы [8] и (2.4) работы [3])

$$E = \frac{i\alpha m^2}{2\pi\epsilon^2} \int \omega d\omega \int \frac{d^3z}{V} F(\vec{z}, \vartheta_0) \int \frac{dt d\tau}{\tau - i0} \left\{ 1 + \frac{\epsilon^2 + \epsilon'^2}{4\epsilon\epsilon'} \gamma^2 \left[ \Delta\vec{v}(t - \frac{\tau}{2}) - \Delta\vec{v}(t + \frac{\tau}{2}) \right]^2 \right\} e^{-iA_1}, \quad (2.10)$$

$$A_1 = \frac{\omega\epsilon\tau}{2\epsilon'} \left[ \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} ds (\Delta\vec{v}(t+s))^2 - \left( \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} ds \Delta\vec{v}(t+s) \right)^2 \right]$$

где мы перешли к переменным  $t, \tau$ :  $t_1 = t - \tau/2$ ,  $t_2 = t + \tau/2$ ; направление обхода точки  $\tau = 0$  (знак мнимой добавки) следует из сходимости интеграла по  $\vec{u}$ .

Представим потенциал кристалла в форме

$$U(\vec{z}) = \sum_{\vec{q}} G(\vec{q}) e^{-i\vec{q}\vec{z}} \quad (2.11)$$

В случае  $\vartheta_0 \gg \vartheta_c$  частицы движутся высоко над барьером и для нахождения  $\Delta\vec{v}(t)$  можно воспользоваться приближением прямолинейной траектории:

$$\Delta\vec{v}(t) = -\frac{1}{\epsilon} \sum_{\vec{q}} G(\vec{q}) e^{-i\vec{q}\vec{z}} \left( e^{-iq_{||}t} - 1 \right) \frac{\vec{q}_\perp}{q_{||}}, \quad (2.12)$$

где  $q_{||} = (\vec{q}\vec{v}_0)$ ,  $\vec{q}_\perp = \vec{q} - \vec{v}_0(\vec{q}\vec{v}_0)$

Обратим внимание на важное обстоятельство. При выполнении условия  $\vartheta_c \gg 1$  всегда можно выбрать такие углы  $\vartheta_0$ , что  $\vartheta_c \ll \vartheta_0 \ll \vartheta_v$ , т.е. применима как магнитотормозное описание, так и приближение прямолинейной траектории. Однако формулы, полученные в указанном интервале  $\vartheta_0$ , остаются справедливыми вплоть до  $\vartheta_0 = 0$ . Это обусловлено тем, что магнитотормозной подход дает единое описание для всех углов  $\vartheta_0 \ll \vartheta_v$ . Более детально эта область проанализирована в следующем разделе. Что же касается области  $\vartheta_0 \gtrsim \vartheta_v$ , то в ней при  $\vartheta_c \gg 1$  заведомо применимо приближение прямолинейной траектории. Таким образом, подставив (2.12) в (2.10) и проведя простые вычисления получим общее выражение для интенсивности излучения справедливое при любых углах  $\vartheta_0$  (ср. формулу (2.8) в [3]):

$$I \equiv \frac{dE}{dt} = \frac{i\alpha m^2}{2\pi\epsilon^2} \int \omega d\omega \int \frac{d^3z}{V} F(\vec{z}, \vartheta_0) \int \frac{d\tau}{\tau - i0} \left\{ 1 - \varphi(\epsilon) \left( \sum_{\vec{q}} \frac{G(\vec{q}) \vec{q}_\perp}{m q_{||}} e^{-i\vec{q}\vec{z}} \sin q_{||}\tau \right)^2 \right\} e^{-iA_2}, \quad (2.13)$$

где

$$A_2 = \frac{m^2 \omega \tau}{\epsilon \epsilon'} \left[ 1 + \sum_{\vec{q}, \vec{q}'} \frac{G(\vec{q}) G(\vec{q}') / (\vec{q}_z \vec{q}'_z)}{m^2 q_{||} q'_{||}} \exp(-i(\vec{q} + \vec{q}') \vec{z}) \cdot \left( \frac{\sin(q_{||} + q'_{||}) \tau}{(q_{||} + q'_{||}) \tau} - \frac{\sin q_{||} \tau \sin q'_{||} \tau}{q_{||} \tau q'_{||} \tau} \right) \right] \varphi(\epsilon) = \frac{\epsilon}{\epsilon'} + \frac{\epsilon'}{\epsilon} \quad (2.14)$$

В формуле (2.13) сделана замена  $\tau \rightarrow 2\tau$ . Мы считаем, что толщина кристалла существенно больше длины формирования фотона  $\ell_f$ , что позволяет перейти к интенсивности  $I = dE/dt$ . Выражение (2.13) дает описание излучения для неполяризованных фотонов и электронов. Исходя из формул (2.2) и (2.4) и проводя рассмотрение, как это было сделано в разделе 4 работы [8], можно получить выражение для интенсивности описывающее поляризационные свойства излучения и зависящее от спиновых состояний электрона.

Формула (2.13) описывает спектральные свойства излучения (для этого надо опустить интеграл по  $\omega$ ) при  $\vartheta_0 \gg \vartheta_c$  для любых значений  $\vartheta_c$ , а при  $\vartheta_0 \lesssim \vartheta_c$  при выполнении условия  $\vartheta_c \gg 1$ . Однако для полной интенсивности излучения область применимости выражения (2.13) гораздо шире и совпадает с применимостью квазиклассического приближения. Это обусловлено тем, что при энергиях, когда  $\vartheta_c \lesssim 1$  и перестает действовать магнитотормозное описание, для углов  $\vartheta_0 \lesssim \vartheta_c$  справедлива классическая теория излучения, полная интенсивность которого также зависит только от локальных характеристик движения.

Как будет показано ниже, при  $\vartheta_0 \ll \vartheta_v$  формула (2.13) описывает излучение в магнитотормозном пределе, а при  $\vartheta_0 \gg \vartheta_v$  переходит в известные выражения для когерентного тормозного излучения. В промежуточной области надо непосредственно использовать (2.13).

### III. Интенсивность излучения при $\vartheta_0 \ll \vartheta_v$ . Поправки к магнитотормозному пределу.

Приступим к анализу общего выражения (2.13). Для оценок мы будем предполагать, что  $G(\vec{q}) \sim V_0$ ,  $|\vec{q}_z| \sim 1/a_s$ ,  $q_{||} \sim \vartheta_0/V_0$  ( $V_0$ ,  $a_s$  определены во Введении). Тогда порядок величины

двойной суммы в  $A_2$  (2.14) есть  $(V_0/m\vartheta_0)^2$ . Рассмотрим сначала случай относительно малых углов, когда  $\vartheta_0 \ll \vartheta_0/m \equiv \vartheta_v$  (пока будем предполагать, попрежнему, что  $\vartheta_0 \gg \vartheta_c$ , что возможно благодаря условию  $\vartheta_c \gg 1$ ). Выберем ось  $z$  вдоль кристаллической оси<sup>\*</sup>, относительно которой отсчитывается угол  $\vartheta_0$ . Тогда для векторов  $\vec{q}$  лежащих в плоскости  $(x, y)$  имеем  $q_{||} \tau \sim \frac{m\vartheta_0}{V_0} \ll 1$ , а для любых других  $\vec{q}$  будет  $q_{||} \tau \sim \frac{m}{V_0} \gg 1$  и в двойной сумме в  $A_2$  (2.14) следует сохранить только члены с  $q_z = q'_z = 0$ , вклад же остальных членов с  $q_z \neq 0$  подавлен степенным образом по параметру  $(V_0/m)$ . Разлагая, с учетом сказанного, функции от  $q_{||} \tau$  по степеням аргумента, получаем

$$A_2 \approx \frac{m^2 \omega \tau}{\epsilon \epsilon'} \left\{ 1 - \frac{\tau^2}{3} \sum_{\vec{q}_t, \vec{q}'_t} \frac{G(\vec{q}_t) G(\vec{q}'_t) (\vec{q}_t \vec{q}'_t)}{m^2} e^{-i(\vec{q}_t + \vec{q}'_t) \vec{s}} \cdot \left[ 1 - \frac{\tau^2}{10} \left( (\vec{q}_t \vec{n})^2 + (\vec{q}'_t \vec{n})^2 + \frac{2}{3} (\vec{q}_t \vec{n})(\vec{q}'_t \vec{n}) \right) \right] \right\} \quad (3.1)$$

где индекс  $t$  означает компоненту вектора, лежащую в плоскости  $(x, y)$ ,  $\vec{s} = \vec{z}_t$ ,  $\vec{n} = \vec{v}_0/v_0$ . Можно переписать формулу (3.1) в терминах непрерывного потенциала оси зависящего только от поперечной координаты  $\vec{s}$

$$U(\vec{s}) = \sum_{\vec{q}_t} G(\vec{q}_t) e^{-i\vec{q}_t \vec{s}} \quad (3.2)$$

а именно:

$$A_2 = \frac{m^2 \omega \tau}{\epsilon \epsilon'} \left\{ 1 + \frac{\vec{b}^2 \tau^2}{3} + \frac{\tau^4}{15} \left( (\vec{b} \cdot (\vec{n} \vec{\nabla}) \vec{b}) + \frac{1}{3} ((\vec{n} \vec{\nabla}) \vec{b})^2 \right) \right\} \quad (3.3)$$

где  $\vec{b} = \vec{\nabla} \frac{U(\vec{s})}{m}$ ,  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \vec{s}}$ . После аналогичной процедуры предэкспоненциальный фактор в подынтегральном выражении в (2.13) приобретает вид:

<sup>\*</sup> Ниже мы будем предполагать, что вектор  $\vec{n} = \vec{v}_0/v_0$  не лежит вблизи кристаллических плоскостей. Вопрос об излучении в плоскостном режиме будет рассмотрен отдельно.



$$\{ \dots \} = 1 + \varphi(\varepsilon) \tau^2 \left[ \vec{b}^2 + \frac{\tau^2}{3} (\vec{b} \cdot (\vec{n} \vec{\nabla})^2 \vec{b}) \right]. \quad (3.4)$$

Отметим, что  $\vec{b}$  выражается через ускорение частицы:  $\vec{b} = -\gamma \vec{v}(\vec{r})$ , так что все выражение для  $\Gamma$  оказывается зависящим от локальных характеристик движения, что характерно для магнитотормозного излучения. Члены, содержащие  $\vec{n}$  в (3.3) имеют относительный порядок малости  $\sim (m v_0 / v_0)^2$  и по ним в  $e^{-iA_2}$  можно провести разложение. После подстановки (3.3), (3.4) в (2.13) и проведения указанного разложения, интегралы по  $\tau$  берутся с помощью известных формул

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\lambda(\tau + \frac{\tau^3}{3})} = \frac{2}{\sqrt{3}} K_{1/3} \left( \frac{2\lambda}{3} \right), \quad \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \tau e^{-i\lambda(\tau + \frac{\tau^3}{3})} = -\frac{2i}{\sqrt{3}} K_{2/3} \left( \frac{2\lambda}{3} \right) \quad (3.5)$$

и рекуррентных соотношений для функций Макдональда  $K_\nu(z)$ . Проведя это вычисление, получим для спектрального распределения интенсивности излучения  $dI^F(\omega)$  в пределе  $v_0 \ll v$ :

$$dI^F = \frac{\alpha m^2 \omega d\omega}{\sqrt{3} \pi \varepsilon^2} \int_S \frac{d^2 \varrho}{S} \left\{ \int \frac{d^2 \varrho_0 \mathcal{V}(\varepsilon_1(\vec{\varrho}_0) - \mathcal{U}(\vec{\varrho}))}{S(\varepsilon_1(\vec{\varrho}_0))} \cdot \left[ \varphi(\varepsilon) K_{2/3}(\lambda) - \int_{\lambda}^{\infty} dy K_{1/3}(y) \right] - \frac{1}{3} \frac{(\vec{b} \cdot (\vec{n} \vec{\nabla})^2 \vec{b})}{b^4} \varphi(\varepsilon) \left[ K_{2/3}(\lambda) - \frac{2}{3\lambda} K_{1/3}(\lambda) \right] + \frac{1}{30 b^4} \left[ ((\vec{n} \vec{\nabla}) \vec{b})^2 + 3(\vec{b} \cdot (\vec{n} \vec{\nabla})^2 \vec{b}) \right] \left[ K_{1/3}(\lambda) - \frac{4}{3\lambda} K_{2/3}(\lambda) + \varphi(\varepsilon) \left( \frac{4}{\lambda} K_{2/3}(\lambda) - K_{1/3}(\lambda) \left( 1 + \frac{16}{9\lambda^2} \right) \right) \right] \right\}, \quad (3.6)$$

где  $\lambda = \frac{2m^2 \omega}{3\varepsilon \varepsilon' |\vec{b}|}$ . Поскольку выражение для  $dI^F$  не зависит от  $\vec{z}$ , то  $\int \frac{d^3 z}{V} \rightarrow \int \frac{d^2 \varrho}{S}$ ,  $S$  - площадь поперечного сечения, приходящегося на одну ось. Первые два члена в (3.6), не зависящие от  $\vec{n}$ , представляют собой спектральное распределение интенсивности магнитотормозного излучения (ср.,

напр., [4], § 10), с учетом перераспределения потока заряженных частиц, остальные являются поправкой  $\propto v_0^2$  (ср. формулу (4.16) работы [8]). В формуле (3.6) учтено, что при  $v_0 \sim v_c$  величина  $(m v_0 / v_0)^2 \sim \frac{1}{\varepsilon_c}$ , а сохранение таких членов в (3.6) было бы превышением точности, т.к. они отбрасывались при выводе формулы (2.13). Поэтому поправки  $\sim (m v_0 / v_0)^2$  нужно учитывать только при  $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$ , когда  $F(\vec{z}, v_0) = 1$ .

Дальнейшие упрощения выражения (3.6) возможны, если потенциал оси можно считать аксиально-симметричным. В некоторых случаях, например, для оси  $\langle 111 \rangle$  в кристаллических структурах типа fcc(d), bcc, потенциал с хорошей точностью является аксиально-симметричным относительно выделенной оси во всей области  $S$ , приходящейся на эту ось. Но даже если потенциал не является аксиально-симметричным во всей области  $S$ , он во всяком случае обладает этим свойством при  $|\vec{r}| \leq a_s$ , где  $a_s$  - эффективный радиус экранирования потенциала цепочки,  $\vec{r}$  - отсчитывается от оси. Напряженность электрического поля и, следовательно, ускорение частицы, максимальны как раз в области  $|\vec{r}| \leq a_s$ . Считая, что  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\vec{r}^2)$  можно провести в (3.6) интегрирование по углам вектора  $\vec{\varrho}$ :

$$dI^F = \frac{\alpha m^2 \omega d\omega}{\sqrt{3} \pi \varepsilon^2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x_0} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{dy \mathcal{V}(\varepsilon_1(y) - \mathcal{U}(\infty))}{y_0(\varepsilon_1(y))} \left[ \varphi(\varepsilon) K_{2/3}(\lambda) - \int_{\lambda}^{\infty} dy K_{1/3}(y) \right] - \frac{1}{6} \left( \frac{m v_0}{V_0} \right)^2 \left[ \varphi(\varepsilon) \frac{x g'' + 2g'}{x g^3} \left( K_{2/3}(\lambda) - \frac{2}{3\lambda} K_{1/3}(\lambda) \right) - \frac{1}{20 g^4 x^2} \left( 2x^2 g'^2 + g^2 + 14 g g' x + 6 x^2 g g'' \right) \left( \lambda K_{1/3}(\lambda) - \frac{4}{3} K_{2/3}(\lambda) + \varphi(\varepsilon) \left( 4 K_{2/3}(\lambda) - \left( 1 + \frac{16}{9\lambda^2} \right) K_{1/3}(\lambda) \right) \right) \right] \right\} \quad (3.7)$$

где мы перешли к переменной  $x = \vec{r}^2 / a_s^2$ ,  $x_0^{-1} = \pi a_s^2 n d$ ,  $d$  - среднее расстояние между атомами цепочки, образующей ось,  $n$  - плотность атомов в кристалле,

$$y_0(\varepsilon_1(y)) = \int_0^{x_0} dx \mathcal{J}(\varepsilon_1(y) - \mathcal{U}(x)), \quad \varepsilon_1(y) = \frac{\varepsilon_1 \vartheta_0^2}{2} + \mathcal{U}(y).$$

В формуле (3.7) введено обозначение  $\mathcal{U}(x) = V_0 g(x)$ , тогда

$$\lambda = \frac{m^3 \omega a_s}{3 \varepsilon \varepsilon' V_0 \sqrt{x} |g|} = \frac{u}{3 \chi_s \sqrt{x} |g|}, \quad \chi_s = \frac{V_0 \varepsilon}{\alpha_s m^3}, \quad u = \frac{\omega}{\varepsilon'} \quad (3.8)$$

Полученное выражение (3.7) дает спектральное распределение интенсивности излучения (после интегрирования по  $\omega$  - интенсивность излучения) для произвольной формы аксиально-симметричного потенциала оси. Для конкретных расчетов мы будем использовать потенциал, который оказался вполне адекватным в рассмотренных нами ранее конкретных задачах излучения [14] и в задаче рождения пар [1-3]:

$$\mathcal{U}(x) = V_0 \left[ \ln\left(1 + \frac{z}{x+\varrho}\right) - \ln\left(1 + \frac{z}{x_0+\varrho}\right) \right] \quad (3.9)$$

Для оценок можно считать, что  $V_0 \approx z e^2/d$ ,  $\varrho \approx \frac{2u_1^2}{a_s^2}$ , где  $u_1$  - амплитуда тепловых колебаний. Фактически же параметры потенциала находились с помощью подгоночной процедуры (см. детали в [14]), исходя из модели потенциала решетки, основанного на потенциале Мольера для изолированного атома (параметры приведены в Таблице). Для потенциала (3.9)

$$g(x) = \frac{z}{x+\varrho} - \frac{z}{z+x+\varrho} = \frac{z}{(x+\varrho)(x+\varrho+z)},$$

$$\chi(x) = \frac{e E(x) \gamma}{m^2} = \frac{2V_0 \varepsilon}{m^3 a_s} \sqrt{x} g(x) = \chi_s 2\sqrt{x} g(x) \quad (3.10)$$

здесь  $\chi(x)$  - локальное значение квантового параметра  $\chi$  (на расстоянии  $x = \xi^2/a_s^2$  от оси).

Формулы (3.6), (3.7) получены из интенсивности (2.13) в области применимости последней ( $\vartheta_0 \gg \vartheta_c$ ). Однако при дальнейшем уменьшении угла  $\vartheta_0$  интенсивность меняется незначительно, как это очевидно следует из формулы (3.7). Отсюда сле-

дует, что формулы (3.6), (3.7), а тем самым и формула (2.13), справедливы вплоть до  $\vartheta_0 = 0$ .

В этом разделе во всех конкретных расчетах и оценках для простоты считается, что распределение по поперечным координатам является равномерным (это справедливо для больших углов падения  $\vartheta_0 > \vartheta_c$  и приближенно правильно для пучков с большим угловым разбросом  $\Delta\vartheta_0 \sim \vartheta_c$ ). Численные расчеты проводились для потенциала (3.9). Влияние перераспределения потока на ориентационную зависимость обсуждается в разделе V.

Полученные результаты иллюстрируются на рис.1,2. На рис.1 приведена обратная характерная длина потери энергии частицей в магнитотормозном пределе  $L_{ch}^{-1} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\ell} = I^M(\varepsilon)/\varepsilon$  как функция энергии электрона для некоторых веществ. Видно, что при  $\varepsilon \approx 1$  ТэВ величина  $L_{ch}^{-1}$  достигает максимума, вблизи которого зависимость  $L_{ch}^{-1}$  от энергии оказывается довольно слабой, а величина  $L_{ch}$  в несколько десятков раз меньше, чем радиационная длина в соответствующем аморфном веществе (например, для Si (ось  $\langle 110 \rangle$ ) имеем  $L_{rad}/L_{ch}|_{max} \approx 75$ ). На рис.2 изображено спектральное распределение интенсивности  $dI^M/d\omega$  излученных фотонов при разных энергиях электрона для оси  $\langle 110 \rangle$  в кремнии и германии. Видно, что при энергии  $\varepsilon = 100$  ГэВ величина  $dI^M/d\omega$  имеет максимум при  $\omega/\varepsilon \ll 1$  и быстро спадает с ростом частоты. Однако по мере роста энергии распределение становится все более равномерным по всему спектру, вплоть до  $\omega \approx \varepsilon$ .

Спектральные характеристики излучения существенно зависят от соотношения между значениями  $u = \omega/\varepsilon'$  и  $\chi_s$ . При выполнении неравенства  $u \gg \chi_s/\sqrt{\varrho}$  излучение экспоненциально подавлено, так что в спектре излучения имеются в основном частоты, для которых  $u \lesssim \chi_s/\sqrt{\varrho}$ . При  $u \ll \chi_s$  можно получить явное асимптотическое выражение для спектрального распределения интенсивности излучения, особенно удобное для анализа области высоких энергий  $\chi_s \gg 1$ . Область интегрирования по  $x$  в (3.7) можно разбить на три: 1)  $0 \leq x \leq x_1 \ll 1$ ; 2)  $x_1 \leq x \leq x_2 \gg 1$ ; 3)  $x_2 \leq x \leq x_0$ , считая, что  $x_0 \gg 1$ , причем  $\lambda(x_1) \ll 1$ ,  $\lambda(x_2) \ll 1$ . Тогда в областях (1) и (3) можно  $g(x)$  заменить на приближенные значения при малых и больших  $x$  и перейти к интегрированию по  $\lambda$ , а в области (2) использовать разложение  $K_\nu(u)$  при  $\lambda \ll 1$ ,

распространяя интегрирование до бесконечности. В результате довольно громоздких вычислений, получается

$$\frac{dI^F}{\omega d\omega} = \frac{\alpha m^2}{3\sqrt{3} \pi \alpha_0 \varepsilon^2} \left[ \Phi_1^M - \left( \frac{m v_0}{V_0} \right)^2 \Phi_2 \right], \quad (3.11)$$

где

$$\Phi_1^M = \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{6X_s}{u}\right)^{2/3} \varphi(u) \left[ \ln \frac{28\sqrt{3}X_s}{u} - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - C - \frac{3}{2\varphi(u)} - \ell_1(\eta) \right], \quad (3.12)$$

$$\Phi_2 = \frac{4\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)(1+2\eta)}{405} \left(\frac{6X_s}{u}\right)^{4/3} \varphi(u) \left[ \ln \frac{28\sqrt{3}X_s}{u} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - C + \frac{3}{8} - \frac{21}{4\varphi(u)} - \ell_2(\eta) \right],$$

$$\ell_1(\eta) = \frac{3}{2} \int_0^\infty \frac{dx}{x} \left[ (1+x)^{-2/3} - (1+\eta x)^{-2/3} (1+(1+\eta)x)^{-2/3} \right] = -B_1(\eta) + B_1(0),$$

$$\ell_2(\eta) = \frac{3}{2} \int_0^\infty \frac{dx}{x} \left[ (1+x)^{-4/3} - (1+\eta x)^{-4/3} (1+(1+\eta)x)^{-4/3} \right] + \frac{3}{16(1+2\eta)} \int_0^\infty \frac{dx}{(1+\eta x)^{4/3} (1+(1+\eta)x)^{4/3}} - \frac{9}{16} = -B_2(\eta) + B_2(0),$$

$\varphi(u) = 1 + \frac{1}{u} + \frac{1}{1+u}$ ,  $C = 0,577\dots$  - постоянная Эйлера.

Интегралы  $\ell_1(\eta)$  и  $\ell_2(\eta)$  выражаются через гипергеометрические функции, функции  $B_1(\eta)$ ,  $B_2(\eta)$  входят в асимптотическое представление вероятности рождения пар при  $X_s \gg 1$  [3]. Учитывая, что при не очень высоких температурах обычно  $\eta \ll 1$ , приведем приближенные выражения

$$\ell_1(\eta) = 3,975 \beta^{2/3} \left( 1 + \frac{8}{15} \beta + \frac{7}{18} \beta^2 \right) - \beta \left( \frac{3}{2} + \frac{9}{8} \beta + \frac{13}{14} \beta^2 \right), \quad (3.13)$$

$$\ell_2(\eta) = 2,31 \beta^{4/3} \left( 1 + \frac{2}{3} \beta - \frac{19}{63} \beta^2 \right) + \frac{\beta}{160} (30 + 144\beta - 29\beta^2)$$

где  $\beta = \eta/(1+\eta)$ .

При выводе формулы (3.11) интегрирование по  $x$  проводилось в бесконечных пределах. Поскольку основной (логарифмический) вклад в (3.11) дает область  $x \sim (X_s/u)^{2/3}$  (область 3), то ясно, что асимптотика (3.11) справедлива только при

$$(X_s/u)^{2/3} < \alpha_0.$$

Следует иметь в виду, что формула (3.11) неприменима в области малых частот<sup>\*)</sup> (при  $u \rightarrow 0$ ). Физическая причина неприменимости магнитотормозного подхода для описания излучения малых частот связана с тем, что при малых частотах излучение формируется на всей траектории пролета частицы вблизи оси. Проведем анализ этого вопроса. Для применимости магнитотормозного подхода переданный импульс на прицельном параметре  $\sqrt{x} \alpha_s$  должен значительно превышать массу:

$$\frac{\Delta p_\perp}{m} \approx \frac{2V_0 \sqrt{x}}{m \alpha_s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\left(x + \frac{t^2 v_0^2}{\alpha_s^2}\right)^2} = \frac{\pi V_0}{m \alpha_s v_0} \gg 1$$

Подставив сюда в качестве  $x = (X_s/u)^{2/3}$  находим нижнюю границу частот до которой справедливо магнитотормозное описание (см. формулы (3.6), (3.7), (3.11))

$$\left(\frac{X_s}{u}\right)^{4/3} \frac{1}{g(\eta_0)} \ll 1 \quad (3.14)$$

или

$$u \gg u_{\min}, \quad u_{\min} = \frac{X_s}{g^{3/4}(\eta_0)}$$

В связи с найденным критерием обратим внимание на anomalно малую (в  $(X_s/u)^{2/3}$  раз) величину первой поправки в разложении (3.11). Отметим, еще, что при  $X_s \ll 1$  асимптотическое выражение (3.11) дает описание спектра вне области основных частот (3.11) относится к  $u \ll X_s$ , тогда как основной вклад в интенсивность излучения дают  $u \sim X_s$ , в то же время при  $X_s \gg 1$  условию  $u \ll X_s$  удовлетворяют частоты с  $u \sim 1$ , дающие основной вклад в интенсивность.

\*) По этой причине она не может быть использована для вычисления поправок к полной интенсивности и вероятности излучения.

Проанализируем качественные особенности спектрального распределения интенсивности в зависимости от энергии излучающей частицы. При относительно малых энергиях, когда  $X_s \ll 1$  (но  $g_c = 2V_0 \epsilon / m c^2 \gg 1$ , иначе вообще неприменим магнитотормозной подход) основной вклад в интенсивность излучения дает область  $\sqrt{2} \lesssim x \lesssim 1$  ( $u_1 \lesssim \vartheta \lesssim a_s$ ), а максимум спектральной плотности приходится на частоты  $\omega \sim X_s \epsilon \ll \epsilon$ . С ростом  $X_s(\epsilon)$  доля вклада частот  $\omega \sim \epsilon$  становится заметной ( $X_s \sim 1$ ), а при  $X_s \gg 1$  в основном излучаются частоты  $\omega \sim \epsilon$ . При столь больших энергиях электрона спектральная интенсивность излучения слабо зависит от частоты испускаемого фотона. Это следует из формулы (3.11) и иллюстрируется на рис. 2. В обсуждаемой области величина  $L_{ch}^{-1}$  слабо зависит от энергии (см. рис. 1), так что ситуация в целом оказывается схожей со свойствами тормозного излучения на отдельных ядрах (механизм Бете-Гайтлера), только с радиационными длинами в несколько десятков раз меньшими соответствующих длин в аморфной среде. В этой же области энергий аналогичная ситуация имеет место и в процессе рождения электрон-позитронной пары фотоном (см. [2], [3]). Отсюда вытекает, что при малых углах влета фотона (электрона) достаточно большой энергии в монокристалле развивается (на длинах в десятки раз более коротких, чем в соответствующем аморфном веществе) специфический электрон-фотонный ливень\*) [2].

Как известно, в квантовой электродинамике существует связь между дифференциальными вероятностями излучения фотона заряженной частицей и рождения пары фотоном. Для сечений, проинтегрированных по углам вылета конечных частиц такой связи, вообще говоря, уже не существует. Однако можно показать, что в силу малости всех характерных углов задачи, в нашем случае такая связь имеет место и для спектра конечных частиц. Поэтому, как общая формула (2.13), так и формула (3.6), (3.7), (3.11) могут быть получены из соответствующих формул работы [3] с помощью "правил подстановки":  $\epsilon \rightarrow -\epsilon$ ,  $\omega \rightarrow -\omega$ ,  $\epsilon' \rightarrow \epsilon'$ ,  $\varphi \rightarrow -\varphi$ ,  $\epsilon^2 d\epsilon \rightarrow -\omega^2 d\omega$  (напомним, что  $dI^F = \omega dW^F$ ).

Обратимся теперь к вычислению полной интенсивности излучения. Для этого удобно в формуле (3.7) провести интегрирование по частям, по переменной  $\alpha$ , а затем в некоторых членах

\*) Развитие этих ливней, во многом отличающихся от бете-гайтлеровских, будет рассмотрено отдельно.

интегрирование по частям проведено и по переменной  $\alpha$ , получаем в итоге:

$$I^F = i_1^M(X_s) - \frac{1}{g(\vartheta_0)} i_2(X_s) = \frac{\alpha m^2}{3\sqrt{3} \pi \alpha_0} \int_0^\infty \frac{u du}{(2+u)^4} \int d\alpha \cdot \left\{ \int d^2 \varrho_0 \frac{\vartheta(\epsilon_1(\varrho_0) - 2l(\varrho_0^*)) (4u^2 + 5u + 4) K_{2/3}(\lambda) - \left(\frac{m \vartheta_0}{V_0}\right)^2 \frac{3 X_s \sqrt{x}}{10 (2+u)^2} K_{4/3}(\lambda) \left[ 5A(u) + \frac{1+2\vartheta}{\alpha} B(u) + \frac{g(\alpha)}{2} C(u) \right] \right\}, \quad (3.15)$$

где

$$A(u) = 4u^3 - u^2 + 14u - 1, \quad B(u) = -4u^3 + 27u^2 - 2u + 27, \\ C(u) = 16u^3 - 43u^2 + 38u - 43, \quad g(\vartheta_0) = \left(\frac{2V_0}{m \vartheta_0}\right)^2$$

Как уже отмечалось, область применимости формулы (3.15) совпадает с областью применимости квазиклассического приближения. В области низких энергий (в классическом пределе), как хорошо известно,  $I(\alpha) \propto X^2(\alpha)$  (см., напр., [4]) не зависит от  $\vartheta_0$  и это остается справедливым вплоть до углов, когда становится существенным излучение частот  $\omega \sim \vartheta_0 \delta^2 \sim \epsilon$  и классическая теория перестает быть справедливой. Отсюда следует, что при относительно малых энергиях, когда  $X_s \ll 1$  должно иметь место  $i_2 / i_1 \ll 1$  и для ориентационной зависимости интенсивности излучения применимы формулы работы [14], полученные в классической теории, когда как член с  $i_2$  представляет собой квантовую поправку. Действительно, при малых  $X_s$  имеем для функций  $i_1, i_2$  (3.15):

$$i_1^M = \frac{8 \alpha m^2 X_s^2}{3 \alpha_0} \left[ (1+2\vartheta) \ln \frac{1+\vartheta}{2} - 2 \right], \\ i_2 = \frac{\alpha m^2 \sqrt{3} \pi X_s^3 \left[ 87(1+2\vartheta) + 218\sqrt{\vartheta(1+\vartheta)} \right]}{40 \alpha_0 \sqrt{\vartheta(1+\vartheta)} (\sqrt{\vartheta} + \sqrt{1+\vartheta})^3}. \quad (3.16)$$

Из (3.16) видно, что  $i_2/i_1 \propto X_s/\sqrt{\eta}$  ( $\eta \ll 1$ ). Это связано с тем, что относительный вклад в  $i_2$  определяется в основном областью  $X(\alpha)$  вблизи максимального значения  $X_{\max} \sim X_s/\sqrt{\eta}$ .

В области высоких энергий ( $X_s \gg 1$ ) также можно получить асимптотические формулы для интенсивности излучения. Для  $L_{ch}^{-1} = I^F(\epsilon)/\epsilon$  имеем

$$L_{ch}^{-1} \approx \alpha \frac{V_0}{m \alpha_0 a_s} \left[ F(X_s) - \frac{g_1 X_s}{g_0} \right], \quad F(X_s) = \frac{g_1}{X_s^{1/3}} (\ln X_s + g_0) \quad (3.17)$$

где

$$g_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^6 6^{2/3} \Gamma(2/3) \approx 0,3925$$

$$g_0 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{5}{2} \ln 3 + \ln 2 - C - \frac{99}{32} - \ell_1(\eta) \approx 0,6756 - \ell_1(\eta)$$

Из (3.17) следует, что при  $X_s \gg 1$  магнитотормозное описание излучения справедливо в области, где величина  $X_s^{1/3}/g_0 \ll 1$ . Это согласуется с формулой (3.14), если учесть, что при таких  $X_s$  основной вклад в интенсивность дают  $u \sim 1$ .

Величина  $F(X_s)$  (3.17) достигает максимума в точке  $X_s^0 = \exp(3 - g_0)$ , вблизи которого она меняется очень плавно. Поскольку  $X_s^0 \gg e^3 \gg 1$ , это оправдывает использование выражения (3.17) в районе максимума. Ввиду плавного изменения  $F(X_s)$  в районе максимума, значение энергии  $\epsilon_0$  получаемой из  $X_s^0$ , является лишь оценкой. Величина же  $L_{ch}^{-1}/\max$  дается формулой (3.17) вполне удовлетворительно и находится в хорошем согласии с результатами численного расчета по формуле (3.7):

$$L_{ch}^{-1}/\max \approx 0,543 \frac{\alpha V_0 e^{-\ell_1(\eta)/3}}{m \alpha_0 a_s} \quad (3.18)$$

Интересно сравнить (3.18) с максимальной вероятностью рождения пар фотоном ([3] формула (3.14)). Имеем соотношение  $W_e^{max} L_{ch}^{max} \approx 0,72$ , следует, однако, иметь в виду, что характеристики рождения пар и излучения достигают максимума при

разных энергиях. При очень высоких энергиях величины  $W_e$  и  $L_{ch}^{-1}$  становятся очень близкими друг к другу независимо от вещества:  $W_e L_{ch} \approx 5,36 \Gamma^3(2/3) \cdot (7,27 \pi^2)^{-1} \approx 1,023$ .

Хотя произведение этих величин, как и бете-гайтлеровском случае есть константа (значения констант отличаются: 1,023 и 0,778), сами величины  $W_e$  и  $L_{ch}^{-1}$ , в отличие от бете-гайтлеровских, существенно зависят от энергии. Отметим еще, что фактор  $\exp(-\ell_1(\eta)/3)$  слабо зависит от вещества и меняется (для обычно используемых веществ) в интервале 0,90-0,75 при изменении  $\eta$  от 0,025 (алмаз) до 0,15 (кремний).

Значительный интерес представляет максимальное превышение  $L_{rad}$  в соответствующем аморфном веществе над  $L_{ch}/\max$ :

$$z_{\gamma}^{max} \equiv \frac{L_{rad}}{L_{ch}/\max} \approx 0,426 \frac{V_0 m a_s e^{-\ell_1(\eta)/3}}{Z^2 \alpha^2 \ln(283 Z^{-1/3})} \sim \frac{a_s m}{37 \alpha \ln(183 Z^{-1/3})} \quad (3.19)$$

где вторая (упрощенная) оценка является довольно грубой. Отсюда видно, что  $z_{\gamma}^{max}$  тем больше, чем меньше  $Z$  и чем больше  $a_s$ . Наибольший выигрыш (среди используемых веществ) достигается в алмазе ( $z_{\gamma}^{max} \sim 160$ ), величины  $z_{\gamma}^{max}$  приведены в таблице.

Обратимся теперь к вычислению полной вероятности излучения, которая характеризует полное число излученных фотонов, ограничившись магнитотормозным приближением. Тогда для потенциала (3.9) в случае  $X_s \ll 1$  имеем для полной вероятности

$$W_1^M(X_s \ll 1) = \frac{5 \alpha m^2}{2\sqrt{3} \alpha_0 \epsilon} \int_0^{x_0} X(\alpha) d\alpha = \frac{10 \alpha V_0}{\sqrt{3} a_s m \alpha_0} \quad (3.20)$$

$$\left( \sqrt{1+\eta} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\alpha_0}{2+\eta}} - \sqrt{\eta} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\alpha_0}{2}} \right) \approx \frac{5 \sqrt{\eta} \alpha V_0}{\sqrt{3} a_s m \alpha_0} \left[ \sqrt{1+\eta} - \sqrt{\eta} - \frac{2}{\sqrt{1+\eta} \alpha_0} \right]$$

В другом предельном случае  $X_s \gg 1$  проведя интегрирование в формуле (3.11) с учетом того, что  $d\omega = \epsilon(1+u)^{-2} du$ , т.е. надо интегрировать по  $u$   $\phi_1^M$  с весом  $(1+u)^{-2}$ ,

получим:

$$W_1^M(x_s \gg 1) = \frac{28.6^{2/3} \Gamma(2/3) \alpha V_0}{8L m x_0 a_s x_s^{1/3}} [\ln x_s + D(\varrho)], \quad (3.21)$$

где

$$D(\varrho) = \ln 2 + \frac{5}{2} \ln 3 + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - C + \frac{3}{28} - \ell_2(\varrho) = 3,8765 - \ell_2(\varrho)$$

Используя формулы (3.16), (3.17), (3.20), (3.21) можно найти среднюю частоту излученного фотона

$$\bar{\omega}(x_s \ll 1) = \frac{8x_s \varepsilon}{5\sqrt{3} \pi} \frac{(\varepsilon + 2\varrho) \ln(\varepsilon + 2\varrho) - 2}{\sqrt{\varepsilon + 2\varrho} - \sqrt{2\varrho} - \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{x_0}}}, \quad (3.22)$$

$$\bar{\omega}(x_s \gg 1) = \frac{16\varepsilon}{63} \frac{\ln x_s + 0,676 - \ell_2(\varrho)}{\ln x_s + 3,877 - \ell_2(\varrho)}$$

Из приведенного выше анализа характерных частот, дающих основной вклад в интенсивность ( $\omega \sim x_s \varepsilon$  ( $x_s \ll 1$ );  $\omega \sim \varepsilon$  ( $x_s \gg 1$ )) и выражения (3.22) видно, что в процессе излучения испускается большое число мягких фотонов, не влияющих на потери энергии частицей. При больших энергиях частиц ( $x_s \gg 1$ ) эти фотоны, однако, могут заметно проявляться в эксперименте. В частности, они могут образовывать (с помощью бете-гайтлеровского механизма) вторичные пары заряженных частиц, число которых будет определяться вероятностью (3.21). На рис.3 приведена зависимость полной вероятности  $W_1^M$  от энергии частиц для разных веществ. Как видно, вероятность в левой части графика выходит на плато (вероятность излучения во внешнем поле при  $x \ll 1$  не зависит от энергии). Затем следует область логарифмического спада (где кривая на склоне вполне удовлетворительно аппроксимируется прямой). На рис.4 приведена вероятность излучения фотона проинтегрированная по частотам в интервале  $\omega_0 \div \varepsilon$  при разных

$\varepsilon$ , как функция  $\omega_0$ . Тот факт, что даже при  $\omega_0 \sim \varepsilon$  эта вероятность  $W_1^M(\omega_0 \div \varepsilon) \sim L c \hbar^{-2}$  подтверждает сказанное относительно вклада мягких фотонов.

В заключение раздела проведем теоретический анализ случая, когда существенным является вклад области  $x \gg 1$ . В проведенном выше рассмотрении использовался потенциал (3.9) для которого  $g(x) \sim 1/x^2$  при  $x \gg 1$ . Допустим теперь, что закон спада потенциала при  $x \gg 1$  будет иным:  $g(x) \sim x^{-(\mu+1)}$  тогда  $X(x) \sim x_s \cdot x^{-(\mu+1/2)}$  (см. (3.10)). При  $x_s \gg 1$  область  $X(x) \lesssim 1$  лежит слева от точки  $x \sim x_s^{2/(\mu+1)} \equiv x_1$ . Вклад в полную интенсивность от области  $x \sim x_1$  будет  $I \sim x_s^{2/(\mu+1)}$ , а от области  $x \sim 1$  составляет  $I \sim x_s^{2/3}$ . Итак, для потенциала, спадающего быстрее чем  $1/x$  ( $\mu > 1$ ) интенсивность излучения определяется областью  $x \sim 1$ . В этом случае характеристики излучения ведут себя также, как в магнитотормозном подходе, в частности полная интенсивность  $I \sim x_s^{2/3}$ , причем критерий применимости подхода будет  $\mathcal{D}_0 \ll \mathcal{D}_v x_s^{-1/3}$ . Если же  $\mu < 1$ , то для  $x_s \gg 1$  вклад области  $x \sim x_1$  становится определяющим и критерий применимости магнитотормозного описания будет  $\mathcal{D}_0 \ll \mathcal{D}_v x_s^{-2\mu/(2\mu+1)}$ . Когда по мере роста энергии величина  $x_1$  сравнивается с  $x_0$  (границей площади приходящейся на одну ось) происходит смена режима. При  $x_1 \gg x_0$  ( $X(x) \gg 1$  для всех  $x$ ) имеем  $I \sim x_s^{2/3}$ , а критерий применимости станет  $\mathcal{D}_0 \ll \mathcal{D}_v x_s^{-1/3} x_0^{-1/3} (2\mu-1/2)$ . Для потенциала (3.9)  $\mu=1$  и при  $x_s \gg 1$  -  $I \sim x_s^{2/3} \ln x_s$ . Появление логарифма связано с тем, что вклад дает вся область  $1 \lesssim x \lesssim x_1$ . В этом случае смена режима состоит в том, что в полной интенсивности  $\ln x_s \rightarrow \frac{3}{2} \ln x_0$ . Кроме того, при  $x_1 \gtrsim x_0$  потенциал оси уже нельзя считать аксиально-симметричным и вместо формулы (3.7) следует использовать (3.6). Отметим, что для потенциала (3.9)  $x_1$  сравнивается с  $x_0$  при энергии (в зависимости от вещества)  $\varepsilon \sim (10+20)$  ТаВ.

#### IV. Интенсивность излучения при $\mathcal{D}_0 > \mathcal{D}_v$ . Модифицированная теория когерентного излучения.

Рассмотрим теперь область относительно больших углов влета частиц. Покажем, прежде всего, что в этой области из (2.13) следуют результаты стандартной теории когерентного излучения.

Из оценок, сделанных в начале раздела III, вытекает, что порядок величины двойной суммы в  $A_2$  (2.14) есть  $(V_0/m\vartheta_0)^2$ . Поэтому член с двойной суммой в  $A_2$  при  $\vartheta_0 \gg V_0/m$  является малым и  $e^{iA_2}$  в (2.13) можно соответственно разложить. В результате спектральное распределение интенсивности излучения (2.13) приобретает вид:

$$dI^{coh} = -\frac{i\alpha m^2}{2\pi\epsilon^2} \omega d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau - i0} \exp\left[-i\frac{m^2\omega\tau}{\epsilon\epsilon'}\right] \cdot \sum_{\vec{q}, \vec{q}'} \frac{G(\vec{q})G(\vec{q}')(\vec{q}_\perp \vec{q}'_\perp)}{m^2 q_{||} q'_{||}} \left\{ \varphi(\epsilon) \sin q_{||}\tau \sin q'_{||}\tau + \frac{im^2\omega\tau}{\epsilon\epsilon'} \left[ \frac{\sin(q_{||}+q'_{||})\tau}{(q_{||}+q'_{||})\tau} - \frac{\sin q_{||}\tau \sin q'_{||}\tau}{q_{||}\tau q'_{||}\tau} \right] \right\} \int \frac{d^3z}{V} e^{-i(\vec{q}+\vec{q}')z} \quad (4.1)$$

Интегрирование по объему в (4.1) элементарно и дает  $\int_{\vec{q}+\vec{q}',0} d^3z$  ( $\vec{q}$  - дискретная переменная). После этого вычисляется сумма по  $\vec{q}'$ , а интегралы по  $\tau$  легко берутся с помощью теории вычетов. В итоге имеем:

$$dI^{coh} = \frac{\alpha\omega d\omega}{4\epsilon^2} \sum_{\vec{q}} |G(\vec{q})|^2 \frac{q_\perp^2}{q_{||}^2} \left\{ \varphi(\epsilon) - \frac{2\omega m^2}{\epsilon\epsilon' q_{||}^2} \left( \frac{q_{||}}{2\epsilon\epsilon'} - \frac{\omega m^2}{2\epsilon\epsilon'} \right) \right\} \cdot \vartheta\left(|q_{||}| - \frac{\omega m^2}{2\epsilon\epsilon'}\right) \quad (4.2)$$

Проводя в (4.2) интегрирование по  $\omega$  (удобно перейти к переменной  $u = \omega/\epsilon'$ ) получим:

$$I^{coh} = \frac{\alpha}{4} \sum_{\vec{q}} |G(\vec{q})|^2 \frac{q_\perp^2}{q_{||}^2} \Phi(\tilde{z}), \quad \tilde{z} = \frac{2\epsilon|q_{||}|}{m^2}, \quad (4.3)$$

где

$$\Phi(\tilde{z}) = \left[ \ln(1+z) - \frac{z(2+3z)}{2(1+z)^2} \right] \left[ 1 - \frac{4(3+z)}{z^2} \right] + \frac{z}{(1+z)^2} \left( 4 + \frac{z(3+2z)}{3(1+z)} \right) \quad (4.4)$$

Спектральное распределение (4.2) совпадает с результатами стандартной теории когерентного излучения [9].

При  $\chi_s \gg 1$  из общего выражения (2.13) могут быть получены выражения для спектрального распределения, область применимости которых шире, чем стандартной теории когерентного излучения. Для этого следует учесть, что второй член в двойной сумме в  $A_2$  (2.14) имеет порядок  $(V_0/m\vartheta_0)^4/\chi_s^2$ , а первый член содержит вклады двух типов: при  $q_{||}+q'_{||}=0$  порядка  $(V_0/m\vartheta_0)^2$ , а при  $q_{||}+q'_{||} \neq 0$  - порядка  $(V_0/m\vartheta_0)^3/\chi_s$ . Вклады порядка  $(V_0/m\vartheta_0)^3/\chi_s$  (и тем более  $(V_0/m\vartheta_0)^4/\chi_s^2$ ) могут оказаться при  $\chi_s \gg 1$  малыми даже для углов  $\vartheta_0 \leq V_0/m$ . Поэтому будем считать эти вклады малыми и проведем в  $e^{iA_2}$  соответствующие разложения, а члены с  $q_{||}+q'_{||}=0$  в первом члене в двойной сумме в  $A_2$  сохраним в показателе экспоненты. В результате получим выражение, совпадающее по форме с (4.1), только в нем нужно заменить

$$\exp\left(-\frac{im^2\omega\tau}{\epsilon\epsilon'}\right) \rightarrow \exp\left(-\frac{im_*^2\omega\tau}{\epsilon\epsilon'}\right), \quad m_*^2 = m^2\left(1 + \frac{\vartheta}{2}\right) \quad (4.5)$$

и в члене  $\frac{\sin(q_{||}+q'_{||})\tau}{(q_{||}+q'_{||})\tau}$  считать  $q_{||}+q'_{||} \neq 0$ . Здесь

$$\frac{\vartheta}{2} = \chi^2 [\langle \vec{v}^2 \rangle - \langle v \rangle^2] = \frac{1}{m^2} \sum_{\vec{q}, \vec{q}'} \frac{G(\vec{q})G(\vec{q}')(\vec{q}_\perp \vec{q}'_\perp)}{q_{||}q'_{||}} \cdot [\delta_{q_{||}+q'_{||},0} - \delta_{q_{||},0} \delta_{q'_{||},0}] = \sum_{\vec{q}, q_{||} \neq 0} \frac{|G(\vec{q})|^2 q_\perp^2}{m^2 q_{||}^2} \quad (4.6)$$

Переход  $m \rightarrow m_*$  соответствует переходу к эффективной массе при рассмотрении задачи излучения в поле плоской электромагнитной волны (см., напр., [15]). В задаче излучения учет отличия  $m$  и  $m_*$  необходим, когда  $\vartheta/2 \gtrsim 1$ , т.е. когда излучение перестает быть дипольным.

Дальнейшие вычисления проводятся также, как при переходе от (4.1) к (4.2). В итоге имеем для спектрального распределения интенсивности излучения

$$dI^{mcoh} = \frac{\alpha \omega d\omega}{4\epsilon^2} \sum_{\vec{q}} |G(\vec{q})|^2 \frac{\vec{q}_\perp^2}{q_{||}^2} \left[ \varphi(\epsilon) - \frac{2\omega m^2}{\epsilon \epsilon' q_{||}^2} \left( |q_{||}| - \frac{\omega m^2}{2\epsilon \epsilon'} \right) \right] \mathcal{J} \left( |q_{||}| - \frac{\omega m^2}{2\epsilon \epsilon'} \right) \quad (4.7)$$

После интегрирования по  $\omega$  в (4.7) получаем для полной интенсивности излучения

$$I^{mcoh} = \frac{\alpha}{4} \sum_{\vec{q}} |G(\vec{q})|^2 \frac{\vec{q}_\perp^2}{q_{||}^2} F(z), \quad z = \frac{2\epsilon |q_{||}|}{m_*^2}, \quad (4.8)$$

где

$$F(z) = \left[ \ln(1+z) - \frac{z(2+3z)}{2(1+z)^2} \right] \left[ 1 - \frac{\delta(3+z)}{z^2(2+\delta)} \right] + \frac{z}{(1+z)^2} \left( \frac{\delta}{2+\delta} + \frac{z(3+2z)}{3(1+z)} \right).$$

Формулы (4.7), (4.8) не сложнее (4.2), (4.3), но имеют значительно более широкую область применимости. При  $\mathcal{J}_0 \gg V_0/m$  ( $\delta \ll 1$ ) формулы (4.7), (4.8) переходят соответственно в (4.2), (4.3).

Входящие в описывающие излучение формулы величины  $G(\vec{q})$  (см. (2.II)) запишем в виде

$$G(\vec{q}) = \frac{1}{\ell^3} \varphi(\vec{q}) S_{mnk} \quad (4.9)$$

где  $\ell$  - постоянная решетки,  $\vec{q} = \frac{2\pi}{\ell}(m, n, k)$ ;  $m, n, k$  - целые числа, по которым идет суммирование в  $\sum_{\vec{q}}$ ,  $S_{mnk}$  - структурный фактор. Для решетки типа алмазной  $fcc(d)$ , которую имеют, в частности, кристаллы алмаза, кремния  $Si$  и германия  $Ge$

$$S_{mnk}^{(d)} = \left[ 1 + e^{i\frac{\pi}{2}(m+n+k)} \right] (\cos \pi k + \cos \pi m) (\cos \pi n + \cos \pi m), \quad (4.10)$$

а для решетки  $bcc(W, Fe)$

$$S_{mnk}^{(b)} = 1 + \cos \pi(m+n+k) \quad (4.11)$$

Величина  $\varphi(\vec{q})$  в (4.9) - фурье-компонента потенциала отдельного атома с учетом тепловых колебаний. Мы использовали для атома потенциал Мольера, тогда

$$\varphi(\vec{q}) = 4\pi z e^2 \exp\left(-\frac{u_L^2 \vec{q}^2}{2}\right) \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i}{\vec{q}^2 + \beta_i} \quad (4.12)$$

где  $u_L$  - амплитуда тепловых колебаний;  $\alpha_i, \beta_i$  - параметры потенциала (см., напр., [4]). Использование усредненного по тепловым колебаниям потенциала фактически исключает из рассмотрения тормозное излучение по механизму Бете-Гайтлера. Последнее также меняется в кристаллах по сравнению с аморфным веществом (см., напр., [9] в теории когерентного тормозного излучения). Входящие в формулы (4.7), (4.6) параметр  $\mathcal{J}_0/2$  вычисляется согласно (4.6), (4.9). При этом следует обращать особое внимание на адекватный учет вкладов плоскостей высокого порядка, когда вектор  $\vec{n} = \vec{v}_0/|\vec{v}_0|$  случайно оказывается лежащим в этих плоскостях.

При сравнительно малых энергиях частицы и не слишком больших углах влета частицы в кристалл, когда  $z \ll 1$ , проводя в (4.8) разложение по  $z$  и сохраняя старший член ( $\propto z^2$ ), получаем классическое выражение для полной интенсивности излучения. Следующие члены разложения дают квантовые поправки, по величине которых можно судить об области применимости классического выражения. Оценивая эти поправки учтем, что члены содержащие дополнительные степени  $z$  пропорциональны  $|q_{||}|$  и будут содержать в сумме (4.8)  $|q_{||}|$  в числителе. Как видно из формул (4.8), (4.12) это приводит к тому, что вклад в суммы дают, вообще говоря, высшие гармоники<sup>\*)</sup>, вклад которых в сумму (4.8) обрывается на амплитуде тепловых колебаний  $u_L$  ( $|q_{||}| u_L \lesssim 1$ ), так что эффективно в указанные поправки входит величина  $\chi_u = \chi_s \frac{a_s}{u_L}$ , а относительная величина поправочных членов будет определяться параметром

<sup>\*)</sup> Тогда суммирование в (4.8) можно приближенно заменить на интегрирование



$$\lambda_u = \frac{\varepsilon \mathcal{V}_0}{m^2 u_2} = \frac{m}{V_0} \mathcal{V}_0 \chi_u \quad (4.13)$$

Рассмотрим спектральную интенсивность излучения в сугубо квантовом случае, когда параметр  $\lambda = \frac{2\varepsilon |q_{||\min}|}{m^2} \sim \frac{\varepsilon \mathcal{V}_0}{m^2 a_s} \gg 1$

В этом случае максимум интенсивности когерентного излучения достигается при таких  $\mathcal{V}_0$ , при которых теория когерентного излучения становится неприменимой. Учитывая, что в случае  $\lambda \gg 1$  и  $\mathcal{V}_0 \sim V_0/m$ ,  $\chi_s \sim \lambda \gg 1$ , удобно использовать модифицированную теорию когерентного излучения, спектральное распределение которого в этом случае принимает вид

$$\frac{dI}{d\omega} \approx \frac{\alpha \omega}{4\varepsilon^2} \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right) \sum_{\vec{q}} |G(\vec{q})|^2 \frac{q_{\perp}^2}{q_{||}^2} \mathcal{J}(u_0 - u) \quad (4.14)$$

где 
$$u_0 = \frac{2\varepsilon |q_{||}|}{m^2 (1 + \vartheta/2)}, \quad u = \frac{\omega}{\varepsilon'}$$

Спектральная интенсивность (4.14) имеет резко выраженный максимум вблизи конца спектра при  $\omega \simeq \varepsilon \lambda (1 + \lambda)^{-1}$  с относительно малой (по  $\lambda/\lambda$ ) шириной  $\Delta\omega \sim \frac{\varepsilon}{\lambda} (1 + \frac{\vartheta}{2}) = \frac{m^2 (1 + \vartheta/2)}{2|q_{||\min}|}$

$$\left. \frac{dI}{d\omega} \right|_{\max} \approx \alpha |q_{||\min}| \frac{\vartheta}{2(2 + \vartheta)} \quad (4.15)$$

Видно, что как сама величина максимума спектральной кривой, так и ее эффективная ширина от энергии не зависят. Однако, при вычислении полной интенсивности излучения, как это следует из формулы (4.8) появляется слабая (логарифмическая) зависимость интенсивности от энергии частицы.

$$I \approx \frac{\alpha}{\vartheta} \vartheta m^2 v \lambda \quad (4.16)$$

Описанное поведение спектральной и полной интенсивности излучения типично для теории ондуляторного излучения в сугубо квантовом случае и полностью согласуется с результатами авторов [16] (раздел 3, формулы (34) – (38)). Указанные особенности спектра излучения связаны с доминирующим вкладом низших гармоник в спектре эквивалентных фотонов в случае  $\lambda \gg 1$ , при этом существенной становится его дискретность. Такое поведение спектра эквивалентных фотонов коренным образом отличает его от спектра эквивалентных фотонов в бете-гайтлеровском случае, где он непрерывен и простирается до сколь угодно малых частот.

Спектральные кривые, полученные в работе [17] (см. рис. 7, 8) для различных (больших) значений  $\lambda$  при  $\vartheta \ll 1$  прекрасно иллюстрируют указанные особенности спектрального распределения излучения в этой области. К сожалению, в литературе (см., напр., [18]) при анализе этой области КТИ имеется ошибочное утверждение, что вероятности излучения и образования пар в кристалле только численным множителем отличаются от соответствующих вероятностей излучения и образования пар в аморфной среде, тогда как форма спектра и зависимость от энергии полной интенсивности излучения в этих двух случаях, как показано выше, существенно различна.

#### У. Ориентационная зависимость интенсивности излучения.

##### Обсуждение результатов

Ориентационная зависимость спектрального распределения и полной интенсивности излучения дается формулой (2.13). Расчет по этой формуле является довольно сложной вычислительной задачей. В то же время он сравнительно прост при использовании полученных из (2.13) приближенных выражений для малых углов влета – магнитотормозное описание с поправкой (формулы (3.6), (3.7), (3.15) и больших углов влета – модифицированная теория КТИ (формулы (4.7), (4.8)). Поэтому имеет смысл использовать общую формулу (2.13) только в промежуточной области углов  $\mathcal{V}_0 \sim V_0/m$ . Более того, используя описанную в [3] процедуру интерполяции, можно в первом приближении ограничиться указанными простыми формулами для нахождения ориентационной зависимости излучения.

Остановимся подробнее на ориентационной зависимости полной интенсивности излучения. Как уже отмечалось, область применимости формулы (2.13) при этом не связана с величиной параметра  $\vartheta_c$  и совпадает с областью применимости квазиклассического приближения. При  $\vartheta_0 \leq \vartheta_c$  ориентационная зависимость в тонком кристалле связана с перераспределением потока падающих частиц, иначе говоря с изменением функции распределения  $F(\vec{z}, \vartheta_0)$  (см. (2.6)) в зависимости от угла  $\vartheta_0$ . Это распределение оказывается разным для электронов (-) и позитронов (+), поэтому и излучение при  $\vartheta_0 \leq \vartheta_c$  зависит от знака заряда частицы. При  $\vartheta_0 = 0$  находим из (2.6) для произвольного аксиально-симметричного потенциала:

$$F_{ax}^{(-)}(\vec{s}, 0) = \ln \frac{x_0}{x}, \quad F_{ax}^{(+)}(\vec{s}, 0) = \ln \frac{x_0}{x_0 - x} \quad (5.1)$$

$$x = \vec{s}^2 / a_s^2$$

При  $\chi_s \lesssim 1$  вклад в полную интенсивность дает интервал значений  $\eta \lesssim x \lesssim 1$ , для которого  $F_{ax}^{(-)} \approx \ln x_0$ ,  $F_{ax}^{(+)} \sim 1/x_0$  откуда следует, что по сравнению со случаем равномерного распределения по поперечной координате интенсивность  $I^{(-)}$  усилена при  $\vartheta_0 = 0$  примерно в  $\ln x_0$  раз, а интенсивность  $I^{(+)}$  ослаблена примерно в  $x_0$  раз. При увеличении угла  $\vartheta_0$  распределение  $F_{ax}^{(-)}(\vec{s}, \vartheta_0)$  быстро приближается к равномерному, тогда как  $F_{ax}^{(+)}(\vec{s}, \vartheta_0)$  меняется довольно медленно. Об этом можно судить и по результатам работы [14] (формулы (30) - (35)), где (для  $\chi_s \ll 1$ ) показано, что  $I^{(+)}$  максимальна при  $\vartheta_0 = 0$  и при увеличении угла влета быстро приближается к величине  $I^{as} = \dot{c}_1$ , определенной в (3.16), тогда как  $I^{(-)}$  при  $\vartheta_0 = 0$  имеет минимум и сравнивается с  $I^{as}$  вблизи  $\vartheta_0 = \vartheta_c$ . Характер изменения распределения  $F(\vec{z}, \vartheta_0)$  существенно проявляется при рассмотрении излучения пучка электронов, имеющего конечную угловую ширину  $\Delta \vartheta_0$ , так как уже при  $\Delta \vartheta_0 \approx \frac{1}{2} \vartheta_c$  примерно 80% электронов находятся в надбарьерных состояниях и, следовательно, равномерно распределены по поперечным координатам. Кроме того следует учитывать также, что ввиду отмечавшегося выше перераспределения потока, многократное рассеяние электронов усиливается, а позитронов ослабляется при  $\vartheta_0 < \vartheta_c$ , так что возможна ситуация, когда кристалл является тонким для позитронов и не является таковым для электронов. При  $\vartheta_0 \geq \vartheta_c$  при

$\chi_s \ll 1$  интенсивность излучения выходит на плато (равномерное распределение), а при  $\vartheta_0 \sim \vartheta_c / m \chi_s$  начинается<sup>ж)</sup> ее падение, описываемое формулой (4.3). Интенсивность излучения электронов и позитронов одинакова при  $\vartheta_0 > \vartheta_c$ . Области применимости формул (3.15) и (4.3) при  $\chi_s \ll 1$  перекрываются, так что при  $\chi_s \ll 1$  ориентационная зависимость интенсивности излучения полностью описывается этими простыми формулами<sup>жж)</sup>. По мере роста параметра  $\chi_s$  это плато сужается и при  $\chi_s = \chi_s^{as} \sim 1$  полностью исчезает. При  $\chi_s \gtrsim 1$  интенсивность излучения электронов попрежнему максимальна при  $\vartheta_0 = 0$  и монотонно спадает с ростом  $\vartheta_0$ . Для позитронов также при  $\vartheta_0 = 0$  остается минимум интенсивности  $I^{(+)}$ , с ростом  $\vartheta_0$   $I^{(+)}$  растет и достигает максимума при  $\vartheta_0 \approx \vartheta_c$ , а при  $\vartheta_0 \geq \vartheta_c$  совпадает с интенсивностью излучения электронов. Отметим, что с ростом  $\chi_s$  вклад в интенсивность при  $\vartheta_0 < \vartheta_c$  дают все большие значения  $x$ . В результате различие в интенсивности излучения электронов и позитронов убывает, а при достаточно больших  $\chi_s \sim x_0^{3/2} \gg 1$  это различие практически исчезает.

Типичный вид ориентационной зависимости интенсивности излучения электронов и позитронов при  $\chi_s \sim 1$  (Ge, ось  $\langle 110 \rangle$ ,  $T = 100\text{K}$ ,  $\varepsilon = 150$  ГэВ) в тонком кристалле приведен на рис.5. Кривая I получена по формулам этой работы. Видно, что при  $\vartheta_0 < \vartheta_c$  интенсивность существенно зависит от сорта частиц и угловой ширины пучка  $\Delta \vartheta_0$ : кривые I и 3 соответственно описывают интенсивности излучения позитронов и электронов (при  $\Delta \vartheta_0 = 0$ ). Кривая 2 описывает случай равномерного распределения по координатам, что соответствует большому угловому разбросу в падающем пучке ( $\Delta \vartheta_0 \sim \vartheta_c$ ). При  $\vartheta_0 > \vartheta_c$  все три кривые сливаются в одну. Кривая II на рис.5 построена по стандартной теории КТМ. Из сравнения ее с I можно судить об области применимости этой теории. На рис.6 кривые получены с помощью расчета на основании результатов этой работы, экспериментальные данные взяты из работы [19], [20], где измерялась ориентационная зависимость

ж) Как видно из проведенного в разделе IV обсуждения фактически параметром в этом случае является величина  $\lambda_a$  определенная формулой (4.13).

жж) Ориентационная зависимость в случае плоскостного каналирования была прослежена в этой ситуации еще в работе авторов [7].

относительной потери энергии  $\Delta\varepsilon/\varepsilon_0$  ( $\text{Ge}$ ,  $T = 100$  К, ось  $\langle 110 \rangle$ ,  $\varepsilon_0 = 150$  ГэВ, толщина кристалла  $L = 1,4$  мм). Используемый в эксперименте кристалл для электронов уже нельзя считать тонким, т.к. в соответствующей аморфной среде угол многократного рассеяния  $\langle \vartheta_s \rangle \approx 35$  мкрад  $\approx 0,5 \vartheta_c$ . Кроме того, угловая ширина падающего пучка была  $\Delta \vartheta_0 \approx \pm 30$  мкрад и качество кристалла могло соответствовать внутренней кривизне  $\leq 10$  мкрад [19]. Поскольку для указанной эффективной расходимости  $\Delta \vartheta_0 \approx (30 + 40)$  мкрад большинство электронов сразу попадает в надбарьерные состояния, а усиленное многократное рассеяние быстро выводит из канала оставшиеся электроны, то распределение электронов  $F(\vartheta, \vartheta_0)$  считалось равномерным при всех углах падения. Напротив, для позитронов в первом приближении многократным рассеянием можно пренебречь и расчет проводился для тонкого кристалла с учетом эффективной ширины падающего пучка. Отметим, что в более тонких кристаллах и для меньшей угловой расходимости падающего пучка ориентационная зависимость интенсивности при  $\vartheta_0 < \vartheta_c$  может наблюдаться и для электронов. Дальнейший расчет потерь проводился как в [13]. Сплошные участки кривых построены в соответствии с формулами (3.15) и (4.8), пунктирный участок — результат интерполяции, которая проводилась также как в [3].

Отметим, что когда  $\vartheta_0 \leq \vartheta_c$  при  $\chi_s \ll 1$  даже в случае  $\vartheta_c \gg 1$  максимум спектральной интенсивности приходится на частоты, для которых  $u \sim u_{\min}$ , где магнитотормозное описание оказывается несправедливым. Тем не менее его можно использовать для частот  $\omega \gtrsim \varepsilon \chi_s$ . Такая ситуация, например, осуществляется в эксперименте [21], где использовался кристалл кремния, ось  $\langle 111 \rangle$ , энергия падающих частиц  $\varepsilon = 10$  ГэВ. Используя формулы (1.4) и (3.14) находим для основной частоты  $\omega \sim \varepsilon \chi_s \approx 270$  МэВ и  $\omega_{\min} \sim \varepsilon u_{\min} \approx 90$  МэВ;  $\vartheta_c \approx 4,1$ . На рис. 7 приведены результаты расчета спектра для этого случая, выполненного в магнитотормозном приближении с учетом эффективной расходимости пучка и экспериментальные данные работы [21]. Видно, что теоретическая кривая вполне удовлетворительно описывает экспериментальные данные для частот фотонов  $\omega > 300$  МэВ.

## ЛИТЕРАТУРА:

1. V.N.Baier, V.M.Katkov and V.M.Strakhovenko. Phys. Lett. 1985, 109A, 179.
2. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко. ДАН СССР, 1985, 282, 851.
3. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко. ЖЭТФ, 1986, 90, 801.
4. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.С.Фадин. Излучение релятивистских электронов. Атомиздат, Москва, 1973.
5. A.Belkacem, N.Cue and J.C.Kimball. Phys. Lett. 1985, 111A, 86.
6. J.C.Kimball, N.Cue and A.Belkacem. 11th International Conference on Atomic Collisions in Solids. Washington. USA 1985.
7. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко. "Излучение ультра-релятивистских частиц при плоскостном каналировании". Препринт ИЯФ 80-03, Новосибирск, 1980.
8. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко. ЖЭТФ, 1981, 80, 1348.
9. М.А.Тер-Микаелян. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях. Изд. АН Арм.ССР, Ереван, 1969.
10. Н.П.Калашников. Когерентные взаимодействия заряженных частиц в монокристаллах. Атомиздат, Москва, 1981.
11. А.И.Ахиезер, В.Ф.Болдышев, Н.Ф.Шульга. ЭЧАЯ, 1979, 10, 51.
12. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко. ДАН СССР, 1984, 275, 1369.
13. V.N.Baier, V.M.Katkov, V.M.Strakhovenko. Phys. Lett., 1986, 114A, 511.
14. V.N.Baier, V.M.Katkov, V.M.Strakhovenko. Nucl. Instr. and Meth. 1984, B4, 346.
15. В.Н.Байер, В.М.Катков, А.И.Мильштейн, В.М.Страховенко. ЖЭТФ, 1975, 69, 783.
16. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко. ЖЭТФ, 1972, 63, 2121.
17. H.Bilokon, G.Bologna, F.Celani et al., Nucl. Instr. and Meth. 1983, 204, 299.
18. А.И.Ахиезер, Н.Ф.Шульга. ЖЭТФ, 1983, 85, 94.
19. A.Belkacem, G.Bologna, M.Chevallier et al. Phys. Rev. Lett. 1985, 54, 2667.

20. A. Belkacem, G. Bologna, M. Chevallier et al. Preprint CERN  
-EP/85-156 (1985).

21. Н.К. Булгаков, А.С. Водопьянов, И. Войтковска и др. ЖЭТФ,  
1986, 90, 1527.

Подписи к рисункам:

Рис.1. Зависимость от энергии обратной характерной длины по-  
терь энергии  $L_{ch}^{-1} = I^M(\epsilon)/\epsilon$  в  $Si \langle 110 \rangle$ ,  $T = 293$  К  
- кривая 1, в алмазе  $\langle III \rangle$ ,  $T = 293$  К - кривая 2, в  $Ge \langle 110 \rangle$ ,  
 $T = 280$  К - кривая 3 и в  $Ge \langle 110 \rangle$ ,  $T = 100$  К - кривая 4.

Рис.2. Спектральная интенсивность излучения при заданной энер-  
гии в  $Si \langle 110 \rangle$ ,  $T = 293$  К,  $\epsilon = 100$  ГэВ - кривая 1,  
 $\epsilon = 700$  ГэВ - кривая 2,  $\epsilon = 5$  ТэВ - кривая 3 и в  $Ge \langle 110 \rangle$ ,  
 $T = 280$  К,  $\epsilon = 100$  ГэВ - кривая 4,  $\epsilon = 3$  ТэВ - кривая 5.

Рис.3. Зависимость от энергии полной вероятности излучения в  
 $Si \langle 110 \rangle$ ,  $T = 293$  К - кривая 1, в алмазе  $\langle III \rangle$ ,  
 $T = 293$  К - кривая 2, в  $Ge \langle 110 \rangle$ ,  $T = 280$  К - кри-  
вая 3 и в  $Ge \langle 110 \rangle$ ,  $T = 100$  К - кривая 4.

Рис.4. Зависимость вероятности излучения фотонов  $W(\omega) =$   
 $= \int_{\omega_0}^{\epsilon} (dW/d\omega) d\omega$  с энергией  $\omega \gg \omega_0$  от  $\omega_0$  в  
 $Si \langle 110 \rangle$ ,  $T = 293$  К для  $\epsilon = 100$  ГэВ - кривая 1,  
 $\epsilon = 400$  ГэВ - кривая 2,  $\epsilon = 2$  ТэВ - кривая 3.

Рис.5. Ориентационная зависимость интенсивности излучения в  
 $Ge \langle 110 \rangle$ ,  $T = 100$  К,  $\epsilon = 150$  ГэВ. Кривая I полу-  
чена в соответствии с формулами настоящей работы: в соот-  
ветствии с формулой (4.8) справа от штриховой линии,  
в соответствии с (3.15) слева: 1 - для позитронов, 3 -  
для электронов, 2 - для равномерного распределения.  
Штриховая линия - интерполяция. Кривая II получена по  
формулам стандартной теории когерентного излучения.

Рис.6. Относительные потери энергии в зависимости от угла вле-  
та относительно оси  $\langle 110 \rangle$  кристалла  $Ge$  ( $T = 100$  К,  
начальная энергия  $\epsilon_0 = 150$  ГэВ,  $L = 1,4$  мм). Номера  
кривых означают то же, что и на рис.5. Эксперименталь-  
ные данные взяты из работ [19,20]: сплошные кружки -  
электроны, полые - позитроны.

Рис.7. Спектральная интенсивность излучения в  $Si \langle 111 \rangle$ ,  $\epsilon =$   
 $= 10$  ГэВ. Экспериментальные данные взяты из работы [21].

Таблица.

Параметры потенциала и некоторые величины, характеризующие излучение

Кристалл	Ось	$T$	$u_l$ (Å)	$V_0$ (эВ)	$\rho$	$a_s$ (Å)	$\alpha_0$	$\chi_s$ ( $\epsilon=100$ ГэВ)	$\xi_c$ ( $\epsilon=10$ ГэВ)	$\tau^{max}$ $\gamma$
C <sup>(11)</sup>	III	293	0,040	29	0,025	0,326	5,5	0,13	2,22	168
Si	III	293	0,075	54	0,150	0,299	15,1	0,27	4,14	71
Si	II0	293	0,075	70	0,145	0,324	15,8	0,32	5,36	81
Ge	III	293	0,085	91	0,130	0,300	16,3	0,45	6,97	26
Ge	II0	280	0,083	110	0,115	0,337	15,8	0,48	8,43	30
Ge	II0	100	0,054	114,5	0,063	0,063	19,8	0,56	8,77	30
W	III	293	0,050	417	0,115	0,215	39,7	2,87	31,94	11

$T$  - температура в шкале Кельвина;  $u_l$  - амплитуда тепловых колебаний;  $V_0, \rho$ ,  $\alpha_s, \alpha_0$  - параметры потенциала (3.9);  $\chi_s$  - параметр, характеризующий величину квантовых эффектов (1.5);  $\xi_c$  - параметр, определяющий мультипольность излучения (1.3);  $\tau^{max}$  - оценка по формуле (3.19) максимальной величины эффекта.

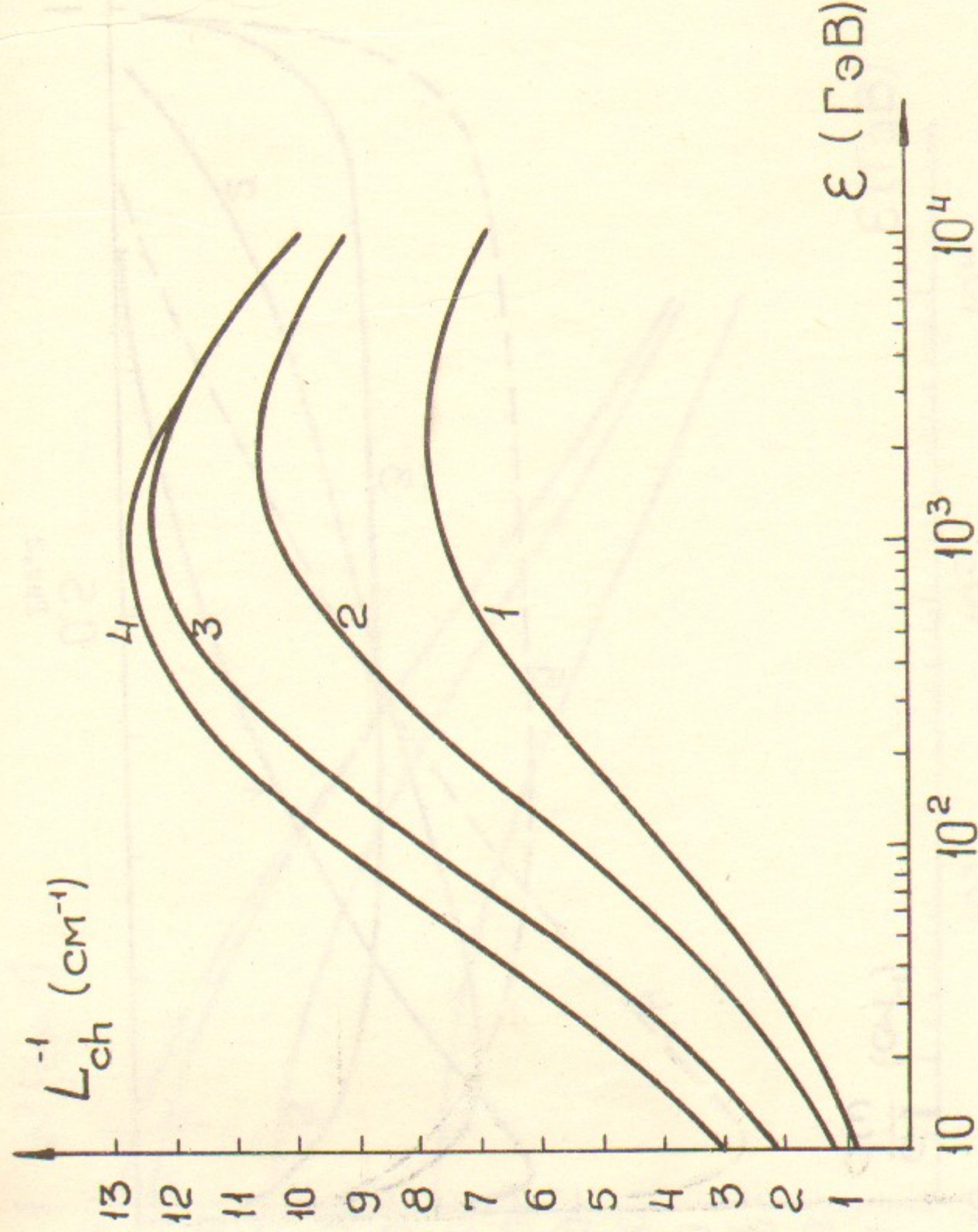


Рис. 1

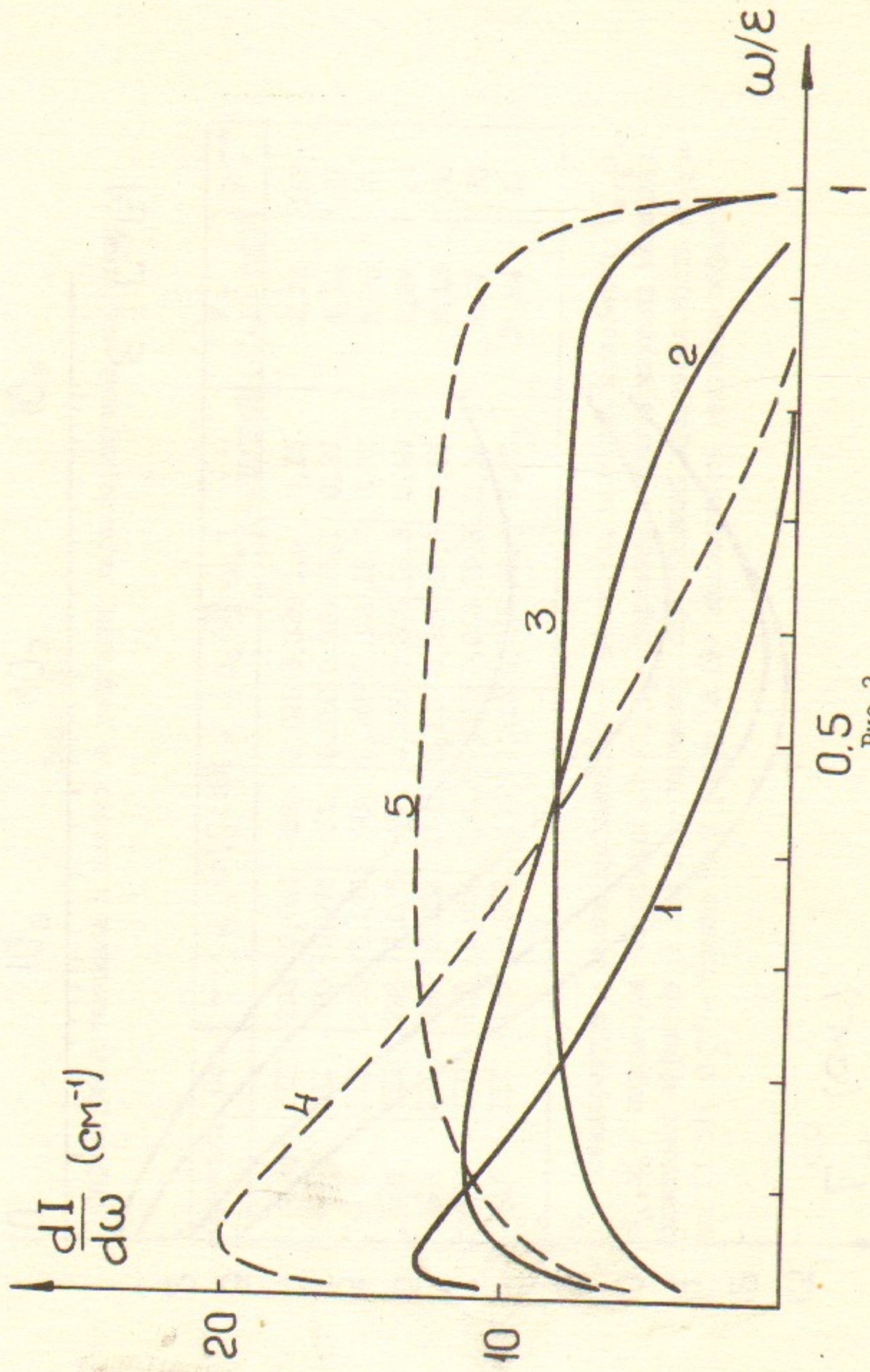


Рис. 2

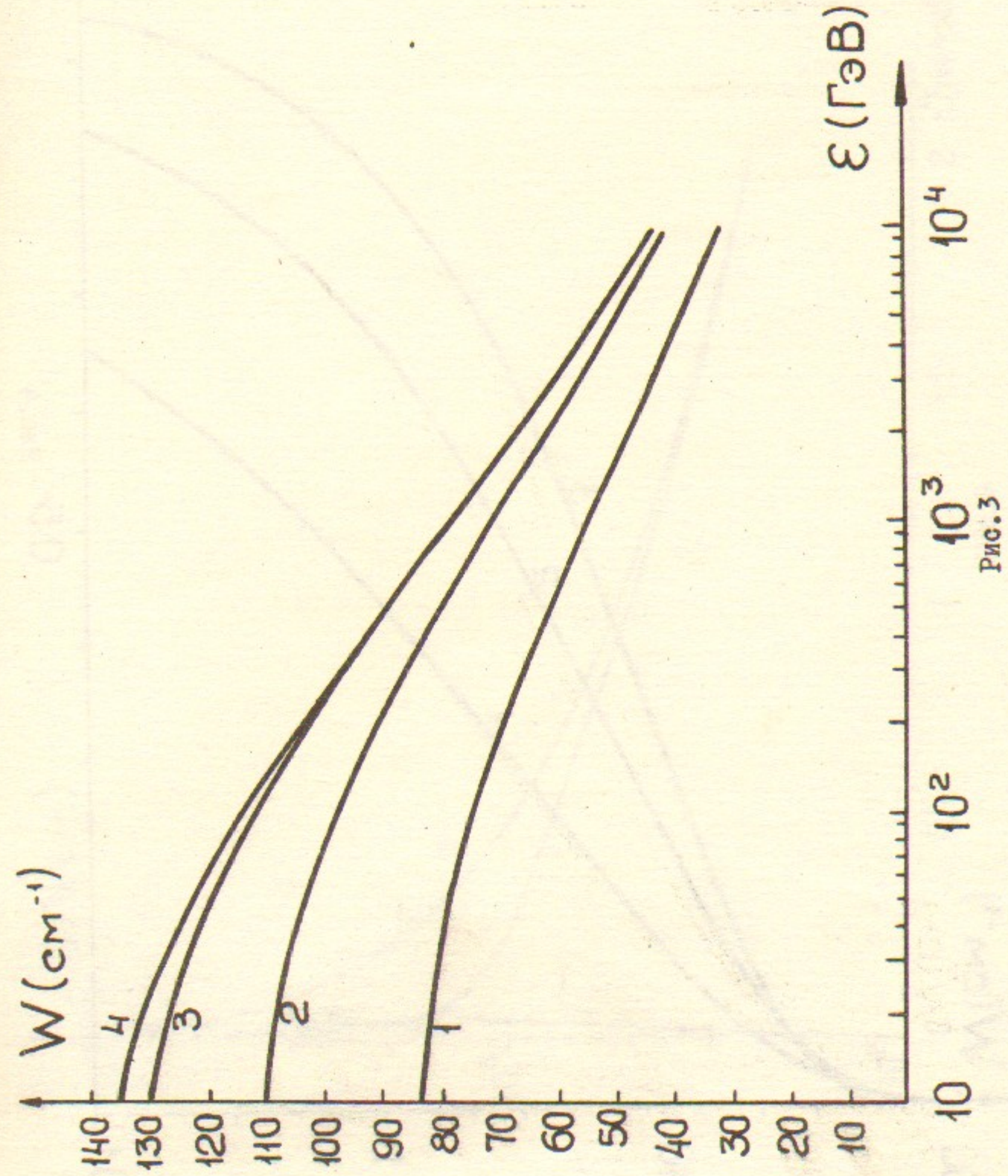


Рис. 3

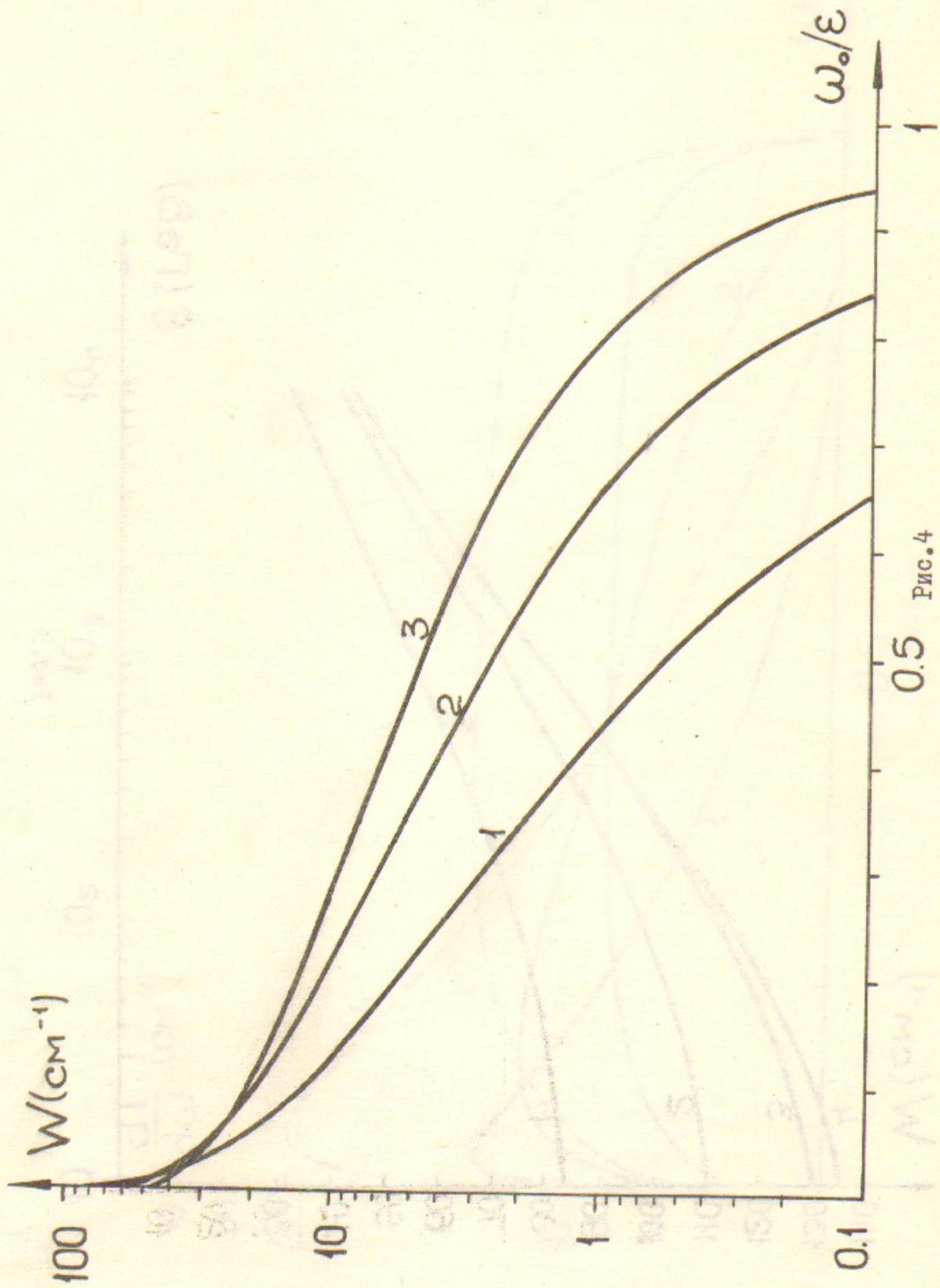


Рис.4

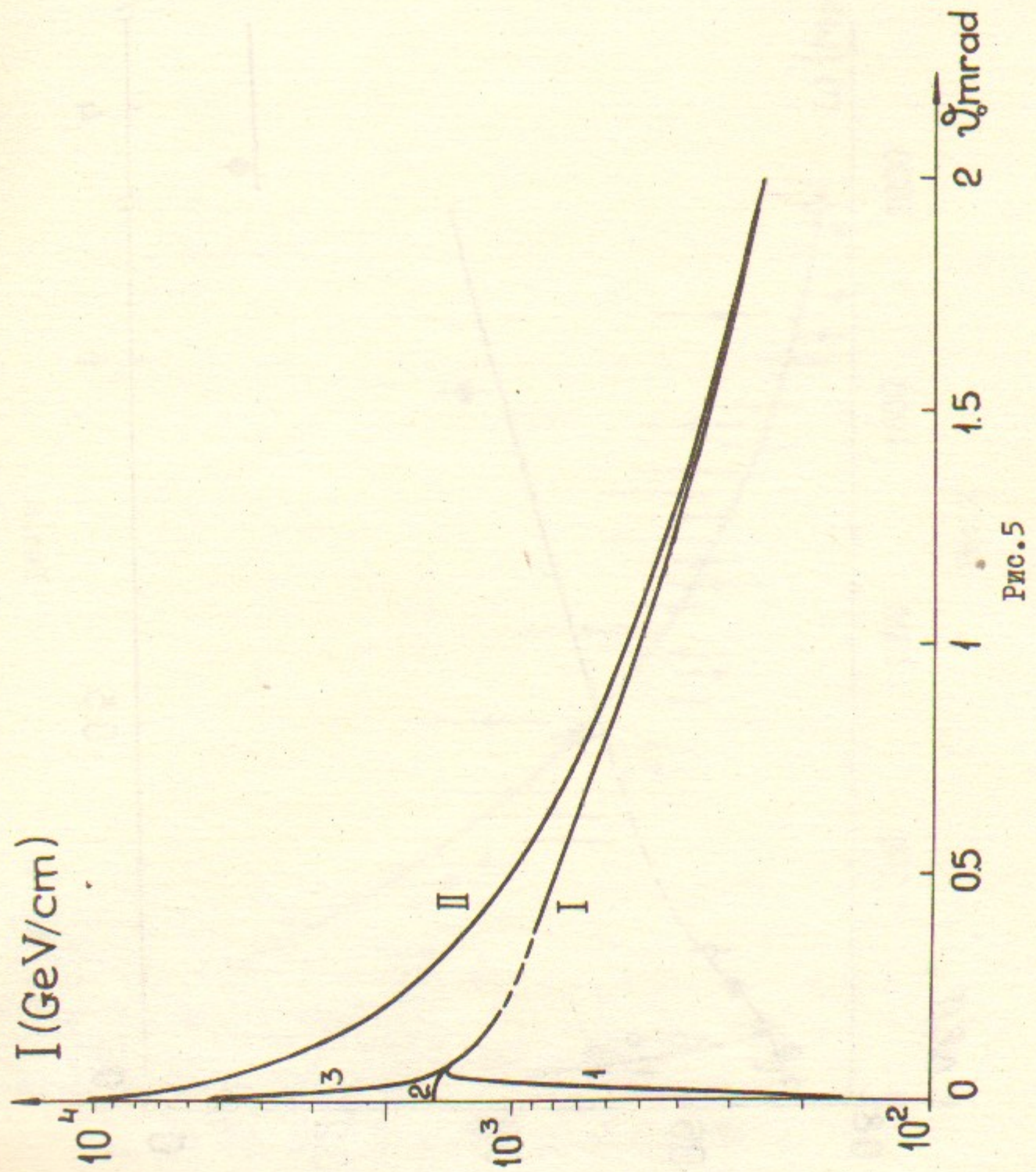


Рис.5

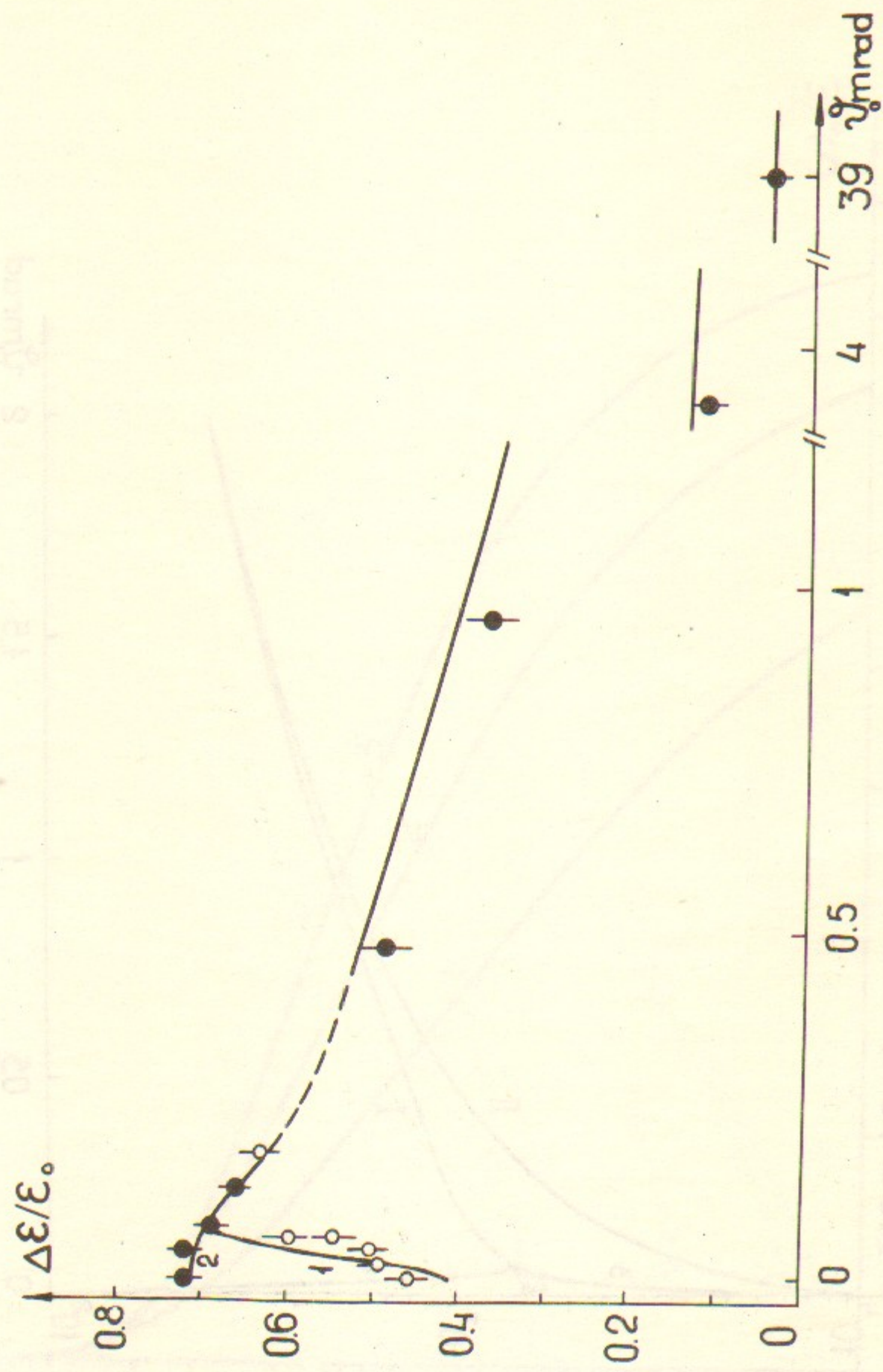


Рис. 6

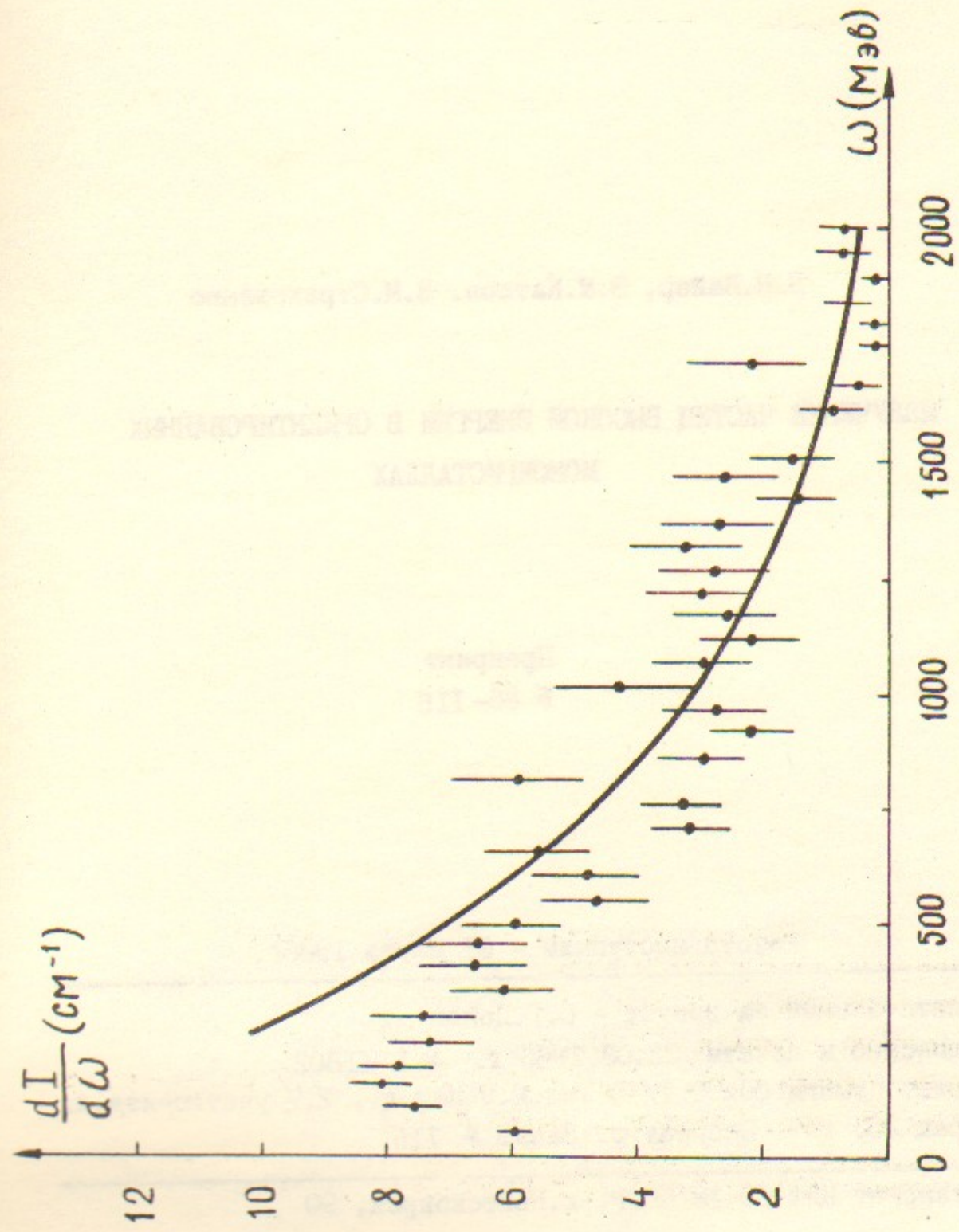


Рис. 7



В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко

ИЗЛУЧЕНИЕ ЧАСТИЦ ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ В ОРИЕНТИРОВАННЫХ  
МОНОКРИСТАЛЛАХ

Препринт  
№ 86- II5

Работа поступила - 31 марта 1986г.

---

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов  
Подписано к печати 22.08.1986 г. М.Н. II802  
Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.2,9 печ.л., 2,7 учетно-изд.л.  
Тираж 250 экз. Бесплатно. Заказ № II5

---

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90