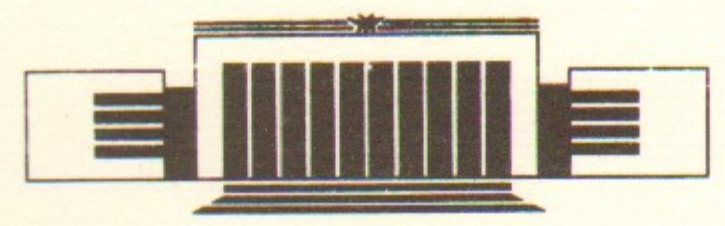




В.М. Малкин, В.Н. Худик

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕЖИМЫ  
«СКАЛЯРНОГО» КОЛЛАПСА

ПРЕПРИНТ 86-147



НОВОСИБИРСК  
1986



## Abstract

Under the commonly used assumption about the self-similar character of the collapse of Langmuir waves the statistical properties of the strong Langmuir turbulence in the inertial range are determined by some probability measure defined on a set of self-similar regimes of the collapse. These measure and set are unstudied at the present time. Only solitary and besides very peculiar solutions of Zakharov's equations and their «scalar» model are known from the computer calculations. In the present paper the simple way is given for reducing the nonlinear problem of finding the self-similar regimes of a «scalar» collapse to the well known linear problem—the solution of the Poisson's equation. It enables us to clear up the structure of the whole set of self-similar regimes of a «scalar» collapse and to find them analytically for the cavities of ellipsoidal shape.

## АННОТАЦИЯ

В обычно используемом предположении об автомодельном характере коллапса ленгмюровских волн статистические свойства сильной ленгмюровской турбулентности в инерционном интервале определяются некоторой вероятностной мерой, заданной на множестве автомодельных режимов коллапса. Эта мера и множество в настоящее время не изучены. Известны лишь единичные и притом весьма специальные примеры автомодельных решений уравнений Захарова и их скалярной модели, найденные численно. В предлагаемой работе дан простой способ сведения нелинейной задачи отыскания автомодельных режимов «скалярного» коллапса с произвольной формой каверны к хорошо известной линейной задаче—решению уравнения Пуассона. Это позволило выяснить структуру всего множества автомодельных режимов «скалярного» коллапса и аналитически найти их в случае каверн эллипсоидальной формы.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В попытках описания сильной ленгмюровской турбулентности обычно используется гипотеза о сверхзвуковом автомодельном характере коллапса ленгмюровских волн (см., например [1, 2]). Согласно этой гипотезе в инерционном интервале форма коллапсирующей каверны не меняется, а размер убывает по закону

$$a \propto (t_s - t)^{2/3}, \quad (1)$$

где  $t_s$ —момент образования особенности. Соотношение (1) удовлетворительно согласуется с результатами численных расчетов [3—5], и хотя вывод об установлении автомодельных режимов типа (1) при любых начальных условиях нуждается в более тщательной проверке [6], исследование таких режимов, по всей видимости, окажется полезным для построения последовательной теории сильной ленгмюровской турбулентности. Несмотря на значительный интерес к автомодельным режимам, проявившийся, начиная с первой же работы о коллапсе [7], о них до сих пор известно не очень много. Сам факт их существования до недавнего времени оставался спорным. Лишь в последние годы с помощью ЭВМ удалось построить примеры автомодельных решений уравнений Захарова и их скалярного аналога (предложенного в [3]). Сначала были построены центрально-симметричные решения скалярной модели коллапса и решения одномерных уравнений, приближенно описывающих электрическое поле на «короткой» оси сильно сплюснутой каверны [8]. Позже было получено решение уравнений За-



харова с центрально-симметричной каверной и триплетом одинаково заселенных связанных состояний [9]. Эти примеры, разумеется, доказывают существование автомодельных режимов сверхзвукового коллапса. Но будучи крайне малочисленными и обладая повышенной симметрией, найденные решения не дают информации о типичных представителях семейства автомодельных решений и тем более об этом семействе в целом. Между тем для последовательного описания сильной ленгмюровской турбулентности требуется не только изучить данное семейство, но и найти вероятности установления всевозможных его представителей. Ниже предпринята попытка решить первую часть этой задачи в рамках скалярной модели коллапса.

## 2. О СТРУКТУРЕ СЕМЕЙСТВА АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Автомодельные режимы типа (1) сверхзвукового «скалярного» коллапса описываются уравнениями

$$(-\Delta + n + 1)E = 0, \quad (2)$$

$$\left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}r \frac{\partial}{\partial r}\right) \left(\frac{7}{3} + \frac{2}{3}r \frac{\partial}{\partial r}\right) n = \Delta |E|^2. \quad (3)$$

Каждому решению этой системы уравнений можно поставить в соответствие область  $V$ :

$$n(\mathbf{r})|_{r \in V} < -1, \quad n(\mathbf{r})|_{r \notin V} > -1, \quad (4)$$

доступную частице с энергией  $-1$  при классическом движении в потенциале  $n$ . Оказывается, что в некотором смысле верно и обратное: если область  $V$  не имеет слишком малых характерных размеров и каждую точку ее границы  $S$  можно соединить с началом координат прямолинейным отрезком, целиком принадлежащим  $V$ , то существует автомодельное решение, удовлетворяющее условиям (4). В настоящем разделе рассматриваются области  $V$ , характерные размеры которых велики по сравнению с единицей. Данное ограничение достаточно для существования соответствующего  $V$  решения уравнений (2), (3) и позволяет относительно просто его вычислить. Возможность упрощения связана с оценочной малостью члена  $\Delta E$  в уравнении (2) по сравнению с  $E$ . Опустив член  $\Delta E$ , нетрудно было бы получить решение  $E_*$ ,  $n_*$  упрощенной систе-

мы уравнений (2), (3). Действительно, из (2) тогда следовало бы

$$n_*(\mathbf{r})|_{r \in V} = -1, \quad E_*(\mathbf{r})|_{r \notin V} = 0, \quad (5)$$

а из (3)

$$\Delta E_*^2(\mathbf{r})|_{r \in V} = -\frac{28}{9}, \quad (6)$$

$$n_*(\mathbf{r})|_{r \notin V} = g_1 r^{-2} + g_2 r^{-7/2}, \quad (7)$$

где  $g_1$  и  $g_2$  — не зависящие от  $r$  функции координат. Уравнение (6) с граничным условием

$$E_*^2|_{r \in S} = 0 \quad (8)$$

однозначно разрешимо, причем решение автоматически положительно. Функции  $g_1$  и  $g_2$  в (7) просто выражаются через скачок градиента  $E_*^2$  на поверхности  $S$ :

$$g_1 = \left(-\frac{7}{3} + \frac{3}{2} \frac{A}{R \cos \alpha}\right) R^2, \quad g_2 = \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{2} \frac{A}{R \cos \alpha}\right) R^{7/2}. \quad (9)$$

Здесь  $R$  точка пересечения радиус-вектора  $\mathbf{r}$  с поверхностью  $S$ ,  $\mathbf{A} = -\nabla E_*^2|_{r=R=0}$ ,  $\alpha$  — угол между векторами  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{A}$  (при указанных выше ограничениях этот угол острый).

Построенные функции  $E_*$ ,  $n_*$  являются хорошим приближением к решению уравнений (2), (3) вдали от поверхности  $S$ . Член  $\Delta E$  в уравнении (2) необходимо удерживать лишь в узкой окрестности этой поверхности, где масштаб изменения поля  $E_*$  оказывается достаточно малым. Для отыскания функций  $E$ ,  $n$  в данной окрестности удобно аналитически продолжить удовлетворяющее условию (8) решение уравнения (6) за пределы области  $V$  и, обозначив продолженное решение буквой  $G$ , переписать уравнение (3) в виде

$$\left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}r \frac{\partial}{\partial r}\right) \left(\frac{7}{3} + \frac{2}{3}r \frac{\partial}{\partial r}\right) (n+1) = \Delta (E^2 - G). \quad (10)$$

Поскольку вблизи поверхности  $S$  масштаб изменения величин  $n+1$  и  $E^2 - G$  вдоль нормали  $x_n$  к  $S$  гораздо меньше характерных размеров области  $V$ , двукратное интегрирование (10) по  $x_n$  дает:

$$n+1 \approx \frac{9}{4R^2 \cos^2 \alpha} (E^2 - G). \quad (11)$$



В области применимости формулы (11) функцию  $G$  можно считать линейно зависящей от  $x_n$ :

$$G \approx -Ax_n = -A(r-R) \cos \alpha. \quad (12)$$

После подстановки (11), (12) в (2) и переобозначения

$$E(r) = (\delta A)^{1/2} f\left(\frac{r-R}{\delta} \cos \alpha\right), \quad \delta = \left(\frac{4R^2 \cos^2 \alpha}{9A}\right)^{1/3} \quad (13)$$

для функции  $f(\xi)$  получается так называемое уравнение Пенлеве второго типа:

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} = (f^2 + \xi)f \quad (14)$$

(см., например, [10]). Нетрудно видеть, что масштаб  $\delta$  изменения поля  $E$  вблизи поверхности  $S$  пропорционален кубическому корню из линейных размеров области  $V$  и действительно мал по сравнению с ними. На расстояниях больших  $\delta$  от поверхности  $S$  удовлетворяющие соотношениям (11) — (14) функции  $E$ ,  $n$  должны переходить с точностью до малых поправок в  $E_*$ ,  $n_*$ . Следовательно,  $f^2 + \xi \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow -\infty$  и  $f(\xi) \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow +\infty$ . Эти условия однозначно определяют регулярное решение уравнения (14). График функции  $f(\xi)$  изображен на рис. 1.

Таким образом, задача отыскания автомодельных решений с достаточно большой каверной  $V$  сводится к решению линейного уравнения (6). Последнее можно без труда проинтегрировать численно практически в любой области  $V$  (см., например, [11]). В эллипсоиде

$$F(\mathbf{r}) \equiv 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \geq 0 \quad (15)$$

решение находится аналитически:

$$E_*^2 = \frac{14}{9} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)^{-1} F(\mathbf{r}). \quad (16)$$

Подставляя (16) в приведенные выше формулы, легко вычислить все характеристики автомодельных решений с эллипсоидальными кавернами.

При малых по сравнению с единицей размерах области  $V$  система (2), (3) не имеет решений. Естественно предположить, что в

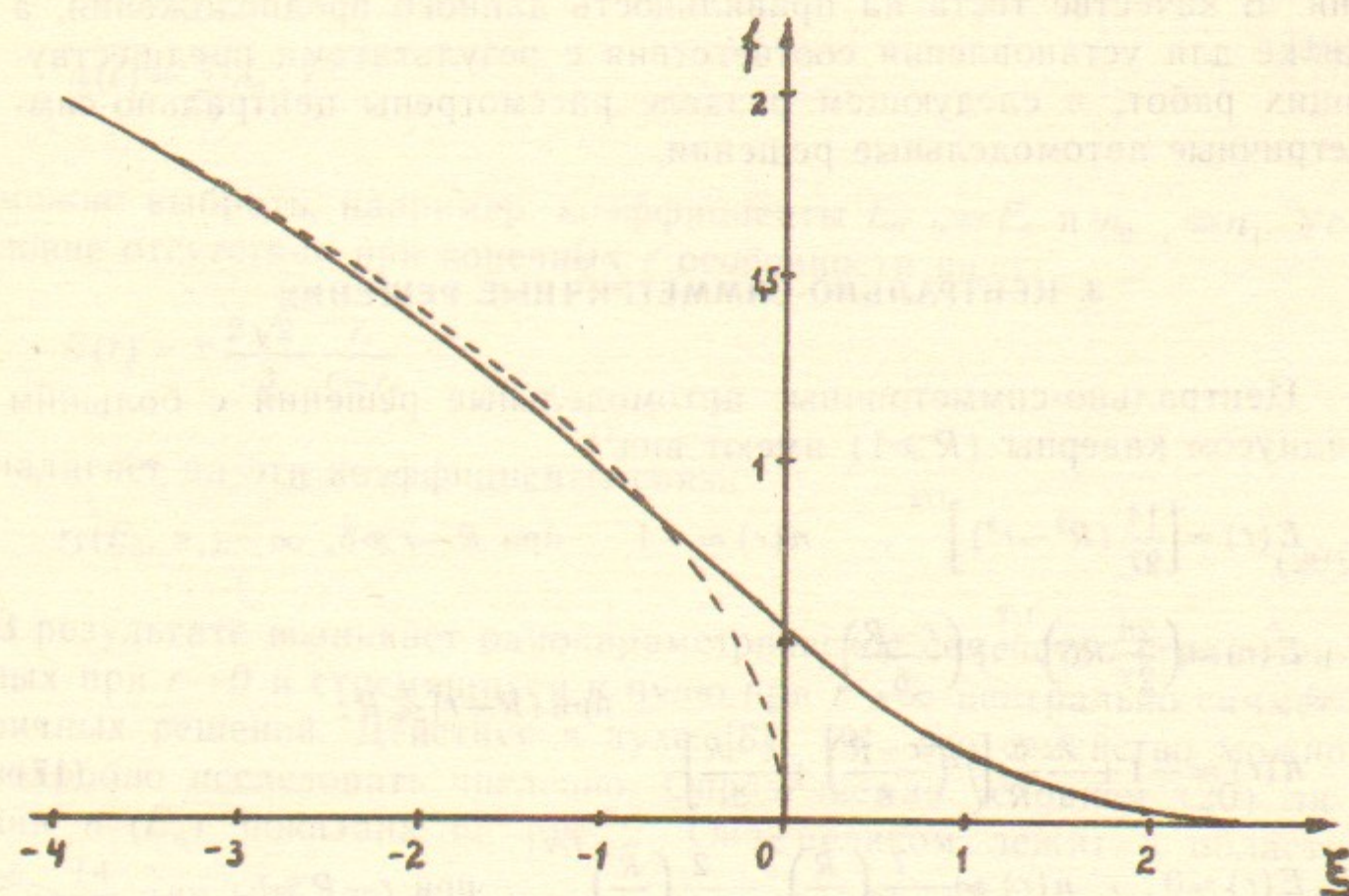


Рис. 1. Решение уравнения Пенлеве (14), удовлетворяющее граничным условиям  $f(\xi) \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow \infty$ ,  $f^2(\xi) + \xi \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow -\infty$ . Пунктиром изображена функция  $f = (-\xi)^{1/2}$ .



каждом подсемействе подобных друг другу областей  $V$  имеется единственный (свой для каждой формы) критический размер каверны, разделяющий области существования и отсутствия решений. В качестве теста на правильность данного предположения, а также для установления соответствия с результатами предшествующих работ, в следующем разделе рассмотрены центрально-симметричные автомодельные решения.

### 3. ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Центрально-симметричные автомодельные решения с большим радиусом каверны ( $R \gg 1$ ) имеют вид<sup>1)</sup>

$$E(r) \approx \left[ \frac{14}{27} (R^2 - r^2) \right]^{1/2}, \quad n(r) \approx -1 \quad \text{при } R - r \gg \delta;$$

$$E(r) \approx \left( \frac{28}{27} R \delta \right)^{1/2} f\left(\frac{r-R}{\delta}\right), \quad \text{при } |R-r| \ll R;$$

$$n(r) \approx -1 + \frac{7}{3} \frac{\delta}{R} \left[ f^2\left(\frac{r-R}{\delta}\right) + \frac{r-R}{\delta} \right] \quad (17)$$

$$E(r) \approx 0, \quad n(r) \approx -\frac{7}{9} \left(\frac{R}{r}\right)^2 - \frac{2}{9} \left(\frac{R}{r}\right)^{7/2} \quad \text{при } r - R \gg \delta.$$

Здесь  $\delta = \left(\frac{3}{7} R\right)^{1/3} \ll R$ ,  $f$  — изображенная на рис. 1 функция. В соответствии с предсказанием (6) решение существует при непрерывном наборе значений параметра  $R$  (или, что тоже самое, параметра  $E_0 \equiv E(0)$ ). Это связано с вырождением, вследствие которого ограниченные при  $r \rightarrow 0$  центрально-симметричные решения общего вида уравнений (2), (3) представимы в окрестности начала координат не рядами по четным степеням  $r$  (как считалось ранее), а двойными рядами по целым степеням  $r^2$  и  $r^c$ , где

$$c = \frac{3}{2} \left[ \left( 2E_0^2 + \frac{1}{4} \right)^{1/2} - \frac{1}{2} - \frac{4}{3} \right] \quad (18)$$

— положительное, вообще говоря, иррациональное число. В качестве

<sup>1)</sup> С той же точностью поле  $E(r)$  можно описать единой формулой  $E(r) \approx \left(\frac{28}{27} R \delta\right)^{1/2} f\left(\frac{r^2 - R^2}{2R\delta}\right)$

параметров, от которых зависит семейство ограниченных при  $r \rightarrow 0$  решений

$$E(r) = \sum_{p,q} E_{p,q} r^{2p+cq},$$

$$n(r) = \sum_{p,q} n_{p,q} r^{2p+cq} \quad (19)$$

можно выбрать, например, коэффициенты  $E_{0,0} \equiv E_0$  и  $n_{0,1} \equiv n_1$ . Условие отсутствия при конечных  $r$  особенности вида

$$E(r) = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{r_s}{r-r_s}$$

налагает на эти коэффициенты связь

$$r_s(E_0, n_1) = \infty. \quad (20)$$

В результате возникает однопараметрическое семейство ограниченных при  $r \rightarrow 0$  и стремящихся к нулю при  $r \rightarrow \infty$  центрально-симметричных решений. Действуя в духе [8], [9], это семейство можно подробно исследовать численно. Определяемая условием (20) линия  $n_1(E_0)$  показана на рис. 2. Она целиком лежит в области  $E_0^2 > \frac{14}{9}$ , так как автомодельные решения с  $E_0^2 < \frac{14}{9}$  отсутствуют. Зависимость решения от параметра  $E_0$  является плавной, несмотря на наличие у функции  $n_1(E_0)$  особенностей. Последние связаны с изменением структуры формул (19) при четных значениях  $c$  ( $c = 2m$ ) и расположены в точках  $E_0 = \tilde{E}_m$ :

$$\tilde{E}_m^2 = \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}m\right) \left(\frac{7}{3} + \frac{4}{3}m\right) \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Характер особенностей нетрудно установить, положив в (19)  $c = 2m + c_1$ ,  $c_1 \rightarrow 0$ . При этом для  $n$  получается формула вида

$$n(r) = \sum_{p,q} n_{p,q} r^{2(p+qm)} \left( 1 + qc_1 \ln r + \frac{1}{2} q^2 c_1^2 \ln^2 r + \dots \right) =$$

$$= n_{0,0} + (n_{m,0} + n_{0,1}) r^{2m} + n_{0,1} c_1 r^{2m} \ln r + \dots$$

Из условия конечности ее третьего члена при  $c_1 \rightarrow 0$  следует

$$n_{0,1} \propto \frac{1}{c_1} \propto \frac{1}{E_0^2 - \tilde{E}_m^2}$$



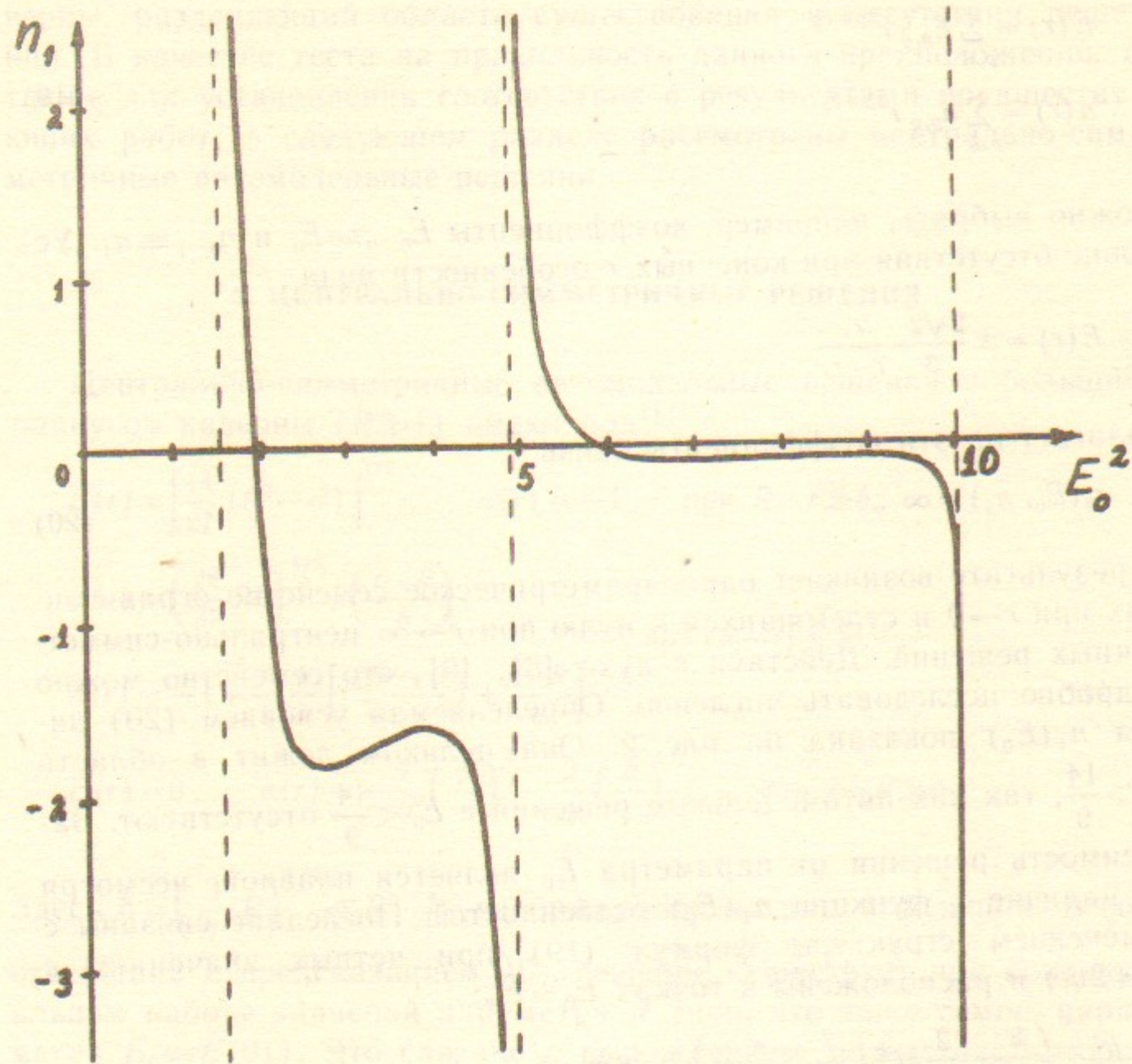


Рис. 2. Налагаемая условием регулярности автомодельных решений связь между параметрами  $n_1$  и  $E_0^2$ .

(конечность второго члена обеспечивается взаимной компенсацией неограниченно растущих при  $c_1 \rightarrow 0$  слагаемых в сумме  $n_{m,0} + n_{0,1}$ ).

Описанные в статье [8] автомодельные решения (представимые при  $r \rightarrow 0$  рядами по четным степеням  $r$ ) соответствуют нулям функции  $n_1(E_0)$ . В согласии с [8] эти нули расположены в точках  $E_1^2 \approx 1,91$ ;  $E_2^2 \approx 5,88$ ; ... . Несколько характерных примеров автомодельных решений общего вида приведено на рис. 3. При всех допустимых значениях параметра  $E_0$  поле  $E$  в этих решениях монотонно зависит от  $r$ . В области  $\frac{14}{9} < E_0^2 < E_1^2$  монотонной является и

функция  $n(r)$ . В этой области  $n_1 > 0$ ,  $c < 1$  и  $\frac{dn}{dr} \Big|_{r \rightarrow 0} \rightarrow \infty$ , т. е. у «потенциала»  $n(r)$  в начале координат имеется направленный вниз «носик». Величина «носика» растет по мере приближения  $E_0^2$  к значению  $\bar{E}_0^2 = \frac{14}{9}$ . Возникающее в пределе  $E_0^2 \rightarrow \frac{14}{9}$  решение (изображенное на рис. 3 пунктиром) имеет в начале координат логарифмическую особенность:  $n(r) \Big|_{r \rightarrow 0} \approx \frac{14}{11} \ln r + \text{const}$ .

В области  $E_0^2 > E_1^2$  функция  $n(r)$  имеет один минимум. Он удаляется от начала координат при увеличении  $E_0^2$ . В интервале  $E_1^2 < E_0^2 < 3$  у  $n(r)$  все еще имеется «носик», но уже направленный вверх (так как  $n_1 < 0$ ). «Носик» исчезает при  $E_0^2 = 3$  (т. е. при  $c = 1$ ). При дальнейшем увеличении  $E_0^2$  особенность в нуле остается лишь у производных все более и более высоких порядков от решения, а «потенциальная яма»  $n$  становится все более широкой и плоской.

#### 4. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ С БОЛЕЕ ВЫСОКИМИ НОМЕРАМИ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ

В автомодельной каверне, как известно, имеется бесконечное число связанных состояний [12]. В предыдущих разделах предполагалось, что заселено только низшее из них. Автомодельные решения с более высокими номерами заселенных состояний также существуют и должны учитываться при описании турбулентности. Примеры решений такого рода до настоящего времени отсутствовали, но они могут быть построены, причем в ряде случаев — аналитически. Доступной исследованию оказывается и структура множества всех автомодельных решений с заданными числами запол-



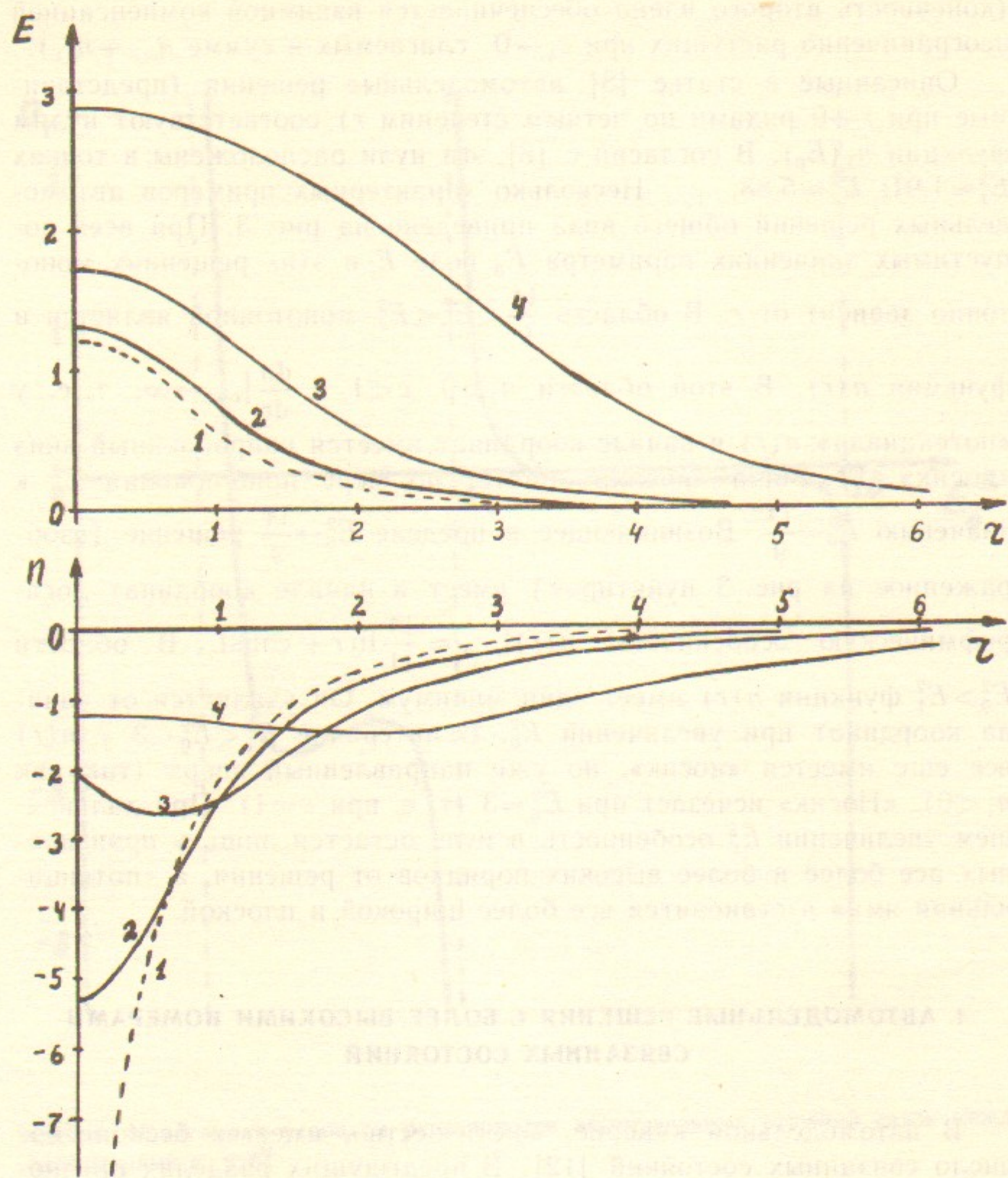


Рис. 3. Примеры автомодельных решений с различными значениями поля в центре каверны: 1)  $E_0^2 = 14/9$ ; 2) аналитическое в центре каверны решение с  $E_0^2 \approx 1,913$  3)  $E_0^2 = 3$  ( $c=1$ ); 4)  $E_0^2 = 8$ .

нения одного или нескольких связанных состояний. Можно показать, что она аналогична имеющей место при заселении основного состояния. Рассуждения, ведущие к данному выводу во многом повторяют описанные выше, поэтому целесообразно не воспроизводить их здесь, а ограничиться простейшим примером, дающим представление о специфике автомодельных решений с более высокими номерами заселенных состояний, — скажем, рассмотреть центрально-симметричные решения с единственным заселенным уровнем.

В центрально-симметричном случае уравнение (3) можно один раз проинтегрировать. Сделав это и введя новые функции и переменные согласно формулам

$$\psi = \frac{E}{E_0}, \quad u = \frac{nr^2}{E_0^2}, \quad t = \ln \frac{r}{E_0}, \quad (21)$$

нетрудно получить из (2), (3) следующую систему уравнений:

$$\frac{1}{E_0^2} \left( \frac{d^2 \psi}{dt^2} + \frac{d\psi}{dt} \right) = (u + e^{2t}) \psi, \quad (22)$$

$$\frac{2}{3} \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{d}{dt} \right) u = \left( 1 + \frac{d}{dt} \right) (\psi^2 - 1). \quad (23)$$

В новых обозначениях граничные условия не содержат параметра  $E_0$ :

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow 1, & u &\rightarrow 0 & \text{при } t &\rightarrow -\infty, \\ \psi &\rightarrow 0, & u &\rightarrow -\frac{3}{2} & \text{при } t &\rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (24)$$

Решение, соответствующее заселению основного состояния, в приближении (5) — (7) описывается внутри каверны формулами

$$u_s = -e^{2t}, \quad \psi_s^2 = 1 - \frac{14}{27} e^{2t} \quad (25)$$

и тоже не зависит от  $E_0$ . Приближение (5) — (7), как уже отмечалось выше, пригодно вплоть до узкой окрестности границы каверны, а именно в области

$$t_R - t \gg \frac{\delta}{R}, \quad t_R = \frac{1}{2} \ln \frac{27}{14}. \quad (26)$$

В данной области левая часть (22) мала по сравнению с каждым из членов в правой, что позволяет вычислять последовательными



приближениями плавно зависящие от  $t$  поправки к (25). Помимо этих, содержащих степенную малость по параметру  $E_0^{-1}$ , поправок, точное решение отличается от (25) экспоненциально малой в области (26) поправкой, характерный масштаб изменения которой порядка  $E_0^{-1}$ . Она вычисляется методом ВКБ и экспоненциально затухает при  $t \rightarrow -\infty$ . Коэффициент при экспоненте пропорционален введенному в § 3 параметру  $n_1$ . Если рассматривать  $n_1$  как свободный параметр, от которого зависит семейство регулярных при  $t \rightarrow -\infty$  решений, то наудачу взятому значению  $n_1$  будет соответствовать решение, обладающее особенностью указанного в § 3 типа. Для решений, плавно зависящих от координаты внутри каверны, условие устранения этой особенности (20) уже обсуждалось выше, — оно определяет кривую  $n_1(E_0)$ . Имеются, однако, и другие варианты устранения особенности, при которых решение совершает внутри каверны несколько быстрых осцилляций, а затем снова становится плавным. (Осцилляции, пока число их не очень велико, наглядно представимы в виде скачков с одной ветви плавного решения  $\psi \approx \pm \psi_0$  на другую). С учетом указанной возможности условие (20) определяет целый набор кривых  $n_1^{(N)}(E_0)$ . Кривая с номером  $N$  соответствует обладающей  $N$  нулями функции  $\psi = \psi^{(N)}$ , т. е. заселению  $N$ -го возбужденного состояния в каверне. Для параметризации семейства регулярных при  $t \rightarrow -\infty$  и обладающих нулями решений оказывается более удобным использовать не коэффициент  $n_1$ , а однозначно связанную с ним (при заданном значении  $E_0$ ) координату  $t_1$  первого нуля функции  $\psi$ . При такой параметризации регулярным на всей вещественной оси решениям соответствует счетный набор кривых  $t_1^{(N)}(E_0)$ .

Приступая к количественному описанию осциллирующих решений, естественно прежде всего воспользоваться малостью характерного масштаба осцилляций по сравнению с размером каверны. Уравнения (22), (23) образуют систему третьего порядка, поэтому для исключения малого масштаба из задачи достаточно отыскать три приближенных интеграла быстрых движений<sup>2)</sup>. Как видно из (23), в качестве одной из слабоосциллирующих функций нулевого приближения можно выбрать разность  $\psi^2 - \frac{4}{9}u$ . Для дальнейшего удобно усовершенствовать этот выбор следующим образом:

<sup>2)</sup> Затем эти интегралы можно уточнять, действуя в духе метода ускоренной сходимости (см., например, [13]), а именно: переходя последовательными заменами ко все менее и менее осциллирующим функциям.

$$\frac{4}{9}(u + e^{2t}) = \psi^2 - \Phi. \quad (27)$$

После замены функции  $u$  на  $\Phi$  система уравнений (22), (23) приобретает вид

$$\frac{1}{E_0^2} \left( \frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{d\psi}{dt} \right) = \frac{9}{4} (\psi^2 - \Phi) \psi, \quad (28)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = 1 - \frac{3}{2}\Phi + \frac{1}{2}\psi^2 - \frac{14}{9}e^{2t}. \quad (29)$$

В пренебрежении зависимостью  $\Phi$  от  $t$  и малым членом  $\frac{1}{E_0^2} \frac{d\psi}{dt}$  уравнение (28) имеет интеграл «энергии»:

$$W = \frac{1}{2E_0^2} \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 - \frac{9}{16} (\psi^2 - \Phi)^2. \quad (30)$$

Дифференцируя (30) по  $t$  и пользуясь точными формулами (28) — (30), нетрудно получить уравнение для функции  $W$ , которая, очевидно, также является слабоосциллирующей:

$$\frac{dW}{dt} = -2W - \frac{9}{8} (\Phi - \psi^2) \left( 1 - \frac{1}{2}\Phi^2 - \frac{1}{2}\psi^2 - \frac{14}{9}e^{2t} \right). \quad (31)$$

С помощью (30) и домноженного на  $\psi$  уравнения (28) можно придать более удобную форму уравнению (31), исключив из его правой части член  $\psi^4$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ W + \frac{1}{12E_0^2} \left( \frac{d\psi^2}{dt} + \psi^2 \right) \right] = \\ = -\frac{5}{3}W - \frac{9}{8} (\Phi - \psi^2) \left( 1 - \frac{2}{3}\Phi - \frac{14}{9}e^{2t} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

В качестве третьей слабоосциллирующей функции следует выбрать большую «частоту» осцилляций  $\frac{d\tau}{dt} \propto E_0$ . Пригодное для всех  $N$  определение «фазы»  $\tau$  требует перехода к еще менее осциллирующим, чем  $W$  и  $\Phi$ , функциям и оказывается излишне громоздким. Поэтому целесообразно дать несколько простых, хотя и не универсальных, определений, соответствующих различным значениям  $N$ .

В случае  $N=1$ , когда заселено первое возбужденное состояние.



решение вне узкой окрестности единственного нуля  $t_1 = t_1^{(1)}$  функции  $\psi = \psi_1^{(1)}$  (но внутри области (26)) является плавным с точностью до экспоненциально малой добавки и в силу (28), (30) удовлетворяет соотношениям

$$\psi^2 = \Phi + O(E_0^{-2}), \quad W = \frac{1}{2E_0^2} \left( \frac{d\Phi^{1/2}}{dt} \right)^2 + O(E_0^{-4}). \quad (33)$$

Обозначенные здесь символами  $O(E_0^{-k})$  величины порядка  $E_0^{-k}$  не трудно вычислить, но они не требуются для дальнейшего. Изменения функций  $\Phi$  и  $W$  в области скачка  $|t - t_1^{(1)}| \lesssim E_0^{-1}$  согласно (29), (31) не превосходят по порядку величины  $E_0^{-1}$ . С учетом этих обстоятельств интегрирование уравнения (32) через скачок приводит к соотношению

$$1 - \frac{2}{3} \Phi(t_1^{(1)}) - \frac{14}{9} e^{2t_1^{(1)}} = O(E_0^{-1}), \quad (34)$$

а интегрирование уравнения (29) по области плавного изменения функций дает:

$$\Phi = \psi_*^2 + O(E_0^{-1}) \quad (35)$$

Формулы (34), (35), (25) позволяют приближенно вычислить значение  $t_1^{(1)}$ :

$$\frac{14}{27} e^{2t_1^{(1)}} = \frac{1}{7} + O(E_0^{-1}). \quad (36)$$

Форма скачка определяется с помощью уравнения (30)

$$\psi = -\Phi^{1/2} \operatorname{th} \tau + O(E_0^{-1}), \quad \tau = \frac{3E_0}{2\sqrt{2}} \int_{t_1^{(1)}}^t \Phi^{1/2}(t') dt'. \quad (37)$$

Зная форму скачка в нулевом приближении (37), можно точнее проинтегрировать уравнение (29) и вычислить функцию  $\Phi$  в первом приближении, что в свою очередь позволяет уточнить положение и форму скачка, и т. д. Останавливаться на этом подробнее здесь неуместно, поскольку уже простейшие формулы (35) — (37) дают достаточно полное представление о решении, — важно лишь подчеркнуть возможность систематического вычисления малых по параметру  $E_0^{-1}$  поправок. В окрестности скачка формулы (37) стоит даже несколько огрубить, заменив  $\Phi(t)$  ее значением в точке  $t_1^{(1)}$ :  $\Phi(t_1^{(1)}) \approx 6/7$ . Полезно заметить, что скачку поля  $\psi$  (или  $E$ ) соответствует солито-

нообразный провал в возмущении концентрации  $n$ :

$$n+1 \approx -7 \operatorname{ch}^{-2} \left[ \sqrt{\frac{7}{2}} (r - r_1^{(1)}) \right], \quad r_1^{(1)} = E_0 e^{2t_1^{(1)}} \approx \frac{R}{\sqrt{7}}. \quad (38)$$

Решение с не очень большим номером  $N \ll E_0$  в нулевом приближении представляет собой набор  $N$  скачков, подобных описанному выше. Пусть  $t_1^{(N)}, t_2^{(N)}, \dots, t_N^{(N)}$  — расположенные в порядке возрастания нули функции  $\psi^{(N)}(t)$ , а  $s_1^{(N)}, s_2^{(N)}, \dots, s_{N-1}^{(N)}$  — лежащие между ними экстремумы этой функции. При  $N \ll E_0$  все скачки происходят в узкой окрестности точки  $t_1^{(1)}$ . В данной окрестности функция  $\Phi(t)$  не успевает заметно измениться и остается близкой к  $6/7$ , а функция  $W(t)$  не успевает заметно вырасти и остается малой по сравнению с единицей. В силу указанных обстоятельств, форма скачков в нулевом приближении остается той же, что и при  $N=1$ :

$$\psi^{(N)}(t) \approx (-1)^i \sqrt{\frac{6}{7}} \operatorname{th} \left[ \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} E_0 (t - t_i^{(N)}) \right] \quad (39)$$

$$t - s_{i-1}^{(N)} \gg E_0^{-1}, \quad s_i^{(N)} - t \gg E_0^{-1}.$$

В окрестности каждой из «точек остановки»  $s_i^{(N)}$  можно пренебречь изменением функции  $W(t)$  и также проинтегрировать уравнение (30):

$$\Phi - \psi^2 \approx \frac{4}{3} \sqrt{W_i^{(N)}} \operatorname{ch} \left[ \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}} E_0 (t - s_i^{(N)}) \right] \quad (40)$$

$$W_i^{(N)} \equiv -W(s_i^{(N)}), \quad t - t_i^{(N)} \gg E_0^{-1}, \quad t_{i+1}^{(N)} - t \gg E_0^{-1}.$$

Сопоставление формул (39), (40) в общей части их областей применимости позволяет выразить расстояния между соседними нулями и экстремумами функции  $\psi^{(N)}(t)$  через величины  $W_i^{(N)}$ :

$$\Delta_i^{(N)} \equiv s_i^{(N)} - t_i^{(N)} \approx t_{i+1}^{(N)} - s_i^{(N)} \approx \frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{3} E_0} \ln \frac{6\sqrt{6}}{\sqrt{7} W_i^{(N)}} \quad (41)$$

Как видно из этой формулы, при  $W_i^{(N)} \ll 1$  расстояния между соседними скачками заметно превышают ширину каждого из них, т. е. скачки действительно являются почти изолированными. Для



замыкания системы рекуррентных соотношений (41) достаточно проинтегрировать уравнение (32) через скачок:

$$W_i^{(N)} - W_{i-1}^{(N)} \approx -2\sqrt{\frac{3}{7}} E_0^{-1} (t_i^{(N)} - t_i^{(1)}). \quad (42)$$

С помощью (42) можно исключить координаты нулей функции  $\psi^{(N)}(t)$  из (41) и получить систему уравнений, содержащую только величины  $W_i^{(N)}$ :

$$W_{i+1}^{(N)} - 2W_i^{(N)} + W_{i-1}^{(N)} \approx -\frac{2}{3E_0^2} \ln \frac{1}{W_i^{(N)}}. \quad (43)$$

Не определявшиеся ранее значения  $W_0^{(N)}$  и  $W_N^{(N)}$ , возникающие в (43) при  $i=1$  и  $i=N-1$ , следует считать равными нулю. Численный множитель в правой части (43) опущен потому, что при выводе (42) не удерживались малые по параметру  $(\ln W_i^{(N)})^{-1}$  поправки. С той же логарифмической точностью решение системы уравнений (43) представимо в виде

$$W_i^{(N)} \approx \frac{i(N-i)}{3E_0^2} \ln \frac{1}{W^{(N)}}, \quad (44)$$

где  $W^{(N)} \approx \frac{N^2}{6E_0^2} \ln \frac{E_0}{N}$  — максимальное значение  $W_i^{(N)}$ . Как и предполагалось, оно мало по сравнению с единицей при  $N \ll E_0$ . Зная величины  $W_i^{(N)}$ , нетрудно найти из (42) координаты нулей функции  $\psi^{(N)}(t)$ . С принятой выше точностью они расположены симметрично относительно точки  $t_i^{(1)}$  на расстояниях порядка  $E_0^{-1} \ln \frac{E_0}{N}$  друг от друга. При учете малых по параметру  $(\ln \frac{E_0}{N})^{-1}$  поправок центр распределения нулей смещается влево от точки  $t_i^{(1)}$  на расстояние порядка  $NE_0^{-1} \ll 1$ , а симметрия в расположении нулей относительно центра слегка нарушается. Соответствующее решению с номером  $N$  возмущение концентрации содержит  $N$  расположенных в точках  $r_i^{(N)} = E_0 \exp t_i^{(N)}$  солитонобразных провалов вида (38):

$$n+1 \approx -7 \sum_{i=1}^N \text{ch}^{-2} \left[ \sqrt{\frac{7}{2}} (r - r_i^{(N)}) \right].$$

Автомодельные решения с  $1 \ll N \ll E_0$  можно вычислить и другим способом, который заслуживает упоминания потому, что в центрально-симметричном случае остается применимым и при  $N \gg E_0$ . Возможность отыскания автомодельных решений без предположения о малости отношения  $N/E_0$  связана с почти полным совпадением соседних осцилляций при большом их общем числе. Пренебрегая различием соседних осцилляций, т. е. считая функции  $W$  и  $\Phi$  в уравнении (30) постоянными, нетрудно было бы проинтегрировать это уравнение точно. При условии

$$-\frac{9}{16} \Phi^2 < W < 0 \quad (46)$$

решение было бы периодическим и имело вид

$$\psi = A \text{sn}(\tau, k), \quad (47)$$

где  $\text{sn}$  — эллиптический синус Якоби,

$$A = \psi_-, \quad k = \psi_- / \psi_+, \quad \psi_{\pm} = \left[ \Phi \pm \frac{4}{3} (-W)^{1/2} \right]^{1/2}; \quad (48)$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{3E_0\psi_-}{2\sqrt{2}k}. \quad (49)$$

При зависящих от  $t$  функциях  $\Phi(t)$  и  $W(t)$ , удовлетворяющих условию (46), соотношения (47), (48) следует рассматривать как формулы перехода от неизвестной функции  $\psi(t)$  к другой неизвестной функции  $\tau(t)$ . Уравнение для функции  $\tau(t)$  (которое легко получить с помощью (29) — (31), (47), (48)) отличается от (49) не содержащим большого параметра  $E_0$  осциллирующим слагаемым в правой части. К системе трех уравнений первого порядка для трех слабоосциллирующих функций  $\tau$ ,  $\Phi$ ,  $W$  применим метод усреднения (см., например, [14]). В нулевом приближении по параметрам  $N^{-1}$  и  $E_0^{-1}$  уравнение для усредненной функции  $\tau$  совпадает с (49), а уравнения для усредненных функций  $\Phi$  и  $W$  имеют вид

$$\frac{d\Phi}{dt} = 1 - \frac{3}{2} \Phi + \frac{\psi_-^2}{2k^2} \left[ 1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right] - \frac{14}{9} e^{2t}, \quad (50)$$

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{5}{3} W - \frac{9}{8} \left\{ \Phi - \frac{\psi_-^2}{k^2} \left[ 1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right] \right\} \left( 1 - \frac{2}{3} \Phi - \frac{14}{9} e^{2t} \right). \quad (51)$$

Здесь  $K$  и  $E$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода; а  $\Phi$ ,  $W$ ,  $\psi_{\pm}$ ,  $k$  — усредненные по периоду быстрых осцилля-



ций функции. Они обозначены теми же символами, что и точные поскольку отличаются от последних лишь незначительными для дальнейшего малыми поправками<sup>3)</sup> и удовлетворяют прежним соотношениям (48). На левом конце заполненного осцилляциями интервала (совпадающем с точностью до малой поправки с точкой  $t_1$ ) решение усредненных уравнений (50), (51) следует непрерывно сшить с плавным решением исходной системы:

$$W \approx 0, \quad \Phi \approx \psi^2 = 1 - \frac{14}{27} e^{2t}.$$

Возникающее при такой сшивке семейство решений зависит от единственного параметра<sup>4)</sup>

$$t_1 < t_1^{(1)} \approx \frac{1}{2} \ln \frac{27}{98}$$

и легко находится численным интегрированием. Результаты приведены на рис. 4. При всех возможных значениях  $t_1$  функция  $\Phi(t)$  оказывается монотонно убывающей, а функция  $W(t)$  сначала убывает, затем возрастает и успевает обратиться в нуль раньше, чем  $\Phi(t)$ . Точка  $t_N(t_1)$ , где это происходит, является правой границей заполненного осцилляциями интервала. На участке от  $t_N(t_1)$  до края каверны, т. е. до точки  $t_R(t_1)$  обращения в нуль функции  $\Phi(t)$ , снова реализуется плавное решение уравнения (29) с  $\psi^2 \approx \Phi$

$$\Phi \approx 1 - \frac{14}{27} e^{2t} - \left[ 1 - \frac{14}{27} e^{2t_N} - \Phi(t_N) \right] e^{t_N - t}. \quad (52)$$

При достаточно больших отрицательных значениях параметра  $t_1$  ( $-t_1 \gg 1$ ) решение уравнений (50), (51) в области  $t - t_1 \ll -t_1$  зависит (с точностью до малых поправок) только от разности  $t - t_1$ . Асимптотика этого универсального решения в области  $t - t_1 \gg 1$  (но  $-t \gg 1$ ) имеет вид

<sup>3)</sup> В узких окрестностях концов заполненного осцилляциями интервала относительная величина поправки к усредненной функции  $W$  не мала и правомерность усреднения неочевидна. Хотя указанные окрестности незначительны для дальнейшего (ввиду их узости), полезно заметить, что решение легко вычисляется и в них, причем результат свидетельствует о применимости усредненных уравнений даже для описания нескольких крайних осцилляций. Это связано с очень слабой (логарифмической) зависимостью периода осцилляций от величины  $W$  при  $W \rightarrow 0$ .

<sup>4)</sup> Примечательно, что зависимости от  $E_0$  нет.

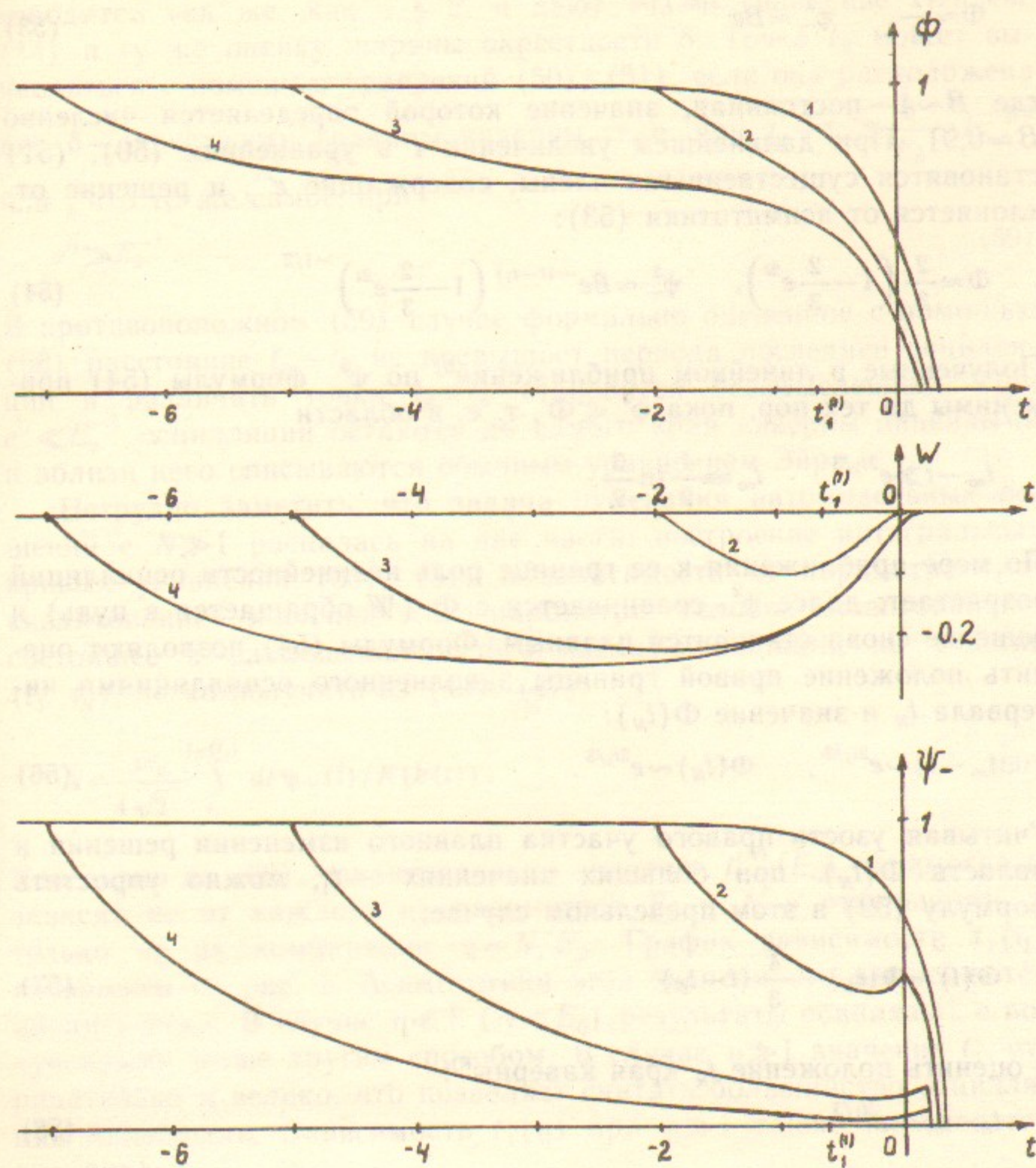


Рис. 4. Графики функций  $\Phi(t)$ ,  $W(t)$ ,  $\psi_-(t)$ , при различных значениях параметра  $t_1$ : 1)  $t_1 = t_1^{(1)} = \frac{1}{2} \ln \frac{27}{98}$ ; 2)  $t_1 = -2$ ; 3)  $t_1 = -5$ ; 4)  $t_1 = -7$ ;



$$\Phi \approx \frac{2}{3}, \quad \psi_-^2 \approx Be^{-(t-t_1)}, \quad (53)$$

где  $B \sim 1$  — постоянная, значение которой определяется численно  $B \approx 0,91$ . При дальнейшем увеличении  $t$  в уравнениях (50), (51) становятся существенными члены, содержащие  $e^{2t}$ , и решение отклоняется от асимптотики (53):

$$\Phi \approx \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{3} e^{2t}\right), \quad \psi_-^2 \approx Be^{-(t-t_1)} \left(1 - \frac{2}{3} e^{2t}\right)^{-1/2} \quad (54)$$

Полученные в линейном приближении<sup>5)</sup> по  $\psi_-^2$  формулы (54) применимы до тех пор, пока  $\psi_-^2 \ll \Phi$ , т. е. в области

$$t_\infty - t \gg e^{2t_1/3}, \quad t_\infty \equiv \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}.$$

По мере приближения к ее границе роль нелинейности осцилляций возрастает; далее  $\psi_-^2$  сравнивается с  $\Phi$  ( $\psi_-^2$  обращается в нуль) и решение снова становится плавным. Формулы (54) позволяют оценить положение правой границы заполненного осцилляциями интервала  $t_N$  и значение  $\Phi(t_N)$ :

$$t_\infty - t_N \sim e^{2t_1/3}, \quad \Phi(t_N) \sim e^{2t_1/3}. \quad (56)$$

Учитывая узость правого участка плавного изменения решения и малость  $\Phi(t_N)$  при больших значениях  $-t_1$ , можно упростить формулу (52) в этом предельном случае:

$$\Phi(t) \approx \Phi(t_N) - \frac{4}{3} (t - t_N) \quad (57)$$

и оценить положение  $t_R$  края каверны<sup>6)</sup>:

$$t_R - t_N \sim e^{2t_1/3}. \quad (58)$$

Здесь уместно напомнить, что использовавшееся выше нулевое приближение по параметру  $E_0^{-1}$  нарушается в узкой окрестности границы каверны. Необходимые в этой окрестности уточнения про-

<sup>5)</sup> В данном приближении осцилляции не влияют на форму каверны, благодаря чему формулы (54) можно получить и обычным методом ВКБ для линейного уравнения Шредингера.

<sup>6)</sup> С помощью уравнения (50) можно получить и более точную оценку:  $t_R - t_\infty \sim \exp(4t_1/3)$ .

изводятся так же, как в § 2, и дают то же уравнение Пенлеве (14) и ту же оценку ширины окрестности  $\delta$ . Точка  $t_N$  может вычисляться с помощью уравнений (50), (51), если она расположена вне  $\delta$ -окрестности границы каверны, т. е. при  $t_R - t_N \gg \frac{\delta}{E_0} \sim E_0^{-2/3}$  или, что то же самое, при

$$e^{t_1} \gg E_0^{-1}. \quad (59)$$

В противоположном (59) случае формально оцененное с помощью (58) расстояние  $t_R - t_N$  не превышает периода последней осцилляции и различать точки  $t_R$  и  $t_N$  становится бессмысленным. При  $e^{t_1} \ll E_0^{-1}$  осцилляции остаются до самого края каверны линейными и вблизи него описываются обычным уравнением Эйри.

Нетрудно заметить, что задача отыскания автомодельных решений с  $N \gg 1$  распалась на две части: построение интегральных кривых уравнений (50), (51) в зависимости от параметра  $t_1$  и «квантование» значений этого параметра. Условие «квантования», состоящее в размещении целого числа осцилляций на участке  $(t_1, t_N)$ , легко получить из (49), (47):

$$N = \frac{3E_0}{4\sqrt{2}} \int_{t_1}^{t_N(t_1)} dt \psi_+(t) / K(k(t)). \quad (60)$$

Как видно из (60), «квантованные» значения  $t_1^{(N)}(E_0)$  параметра  $t_1$  зависят не от каждого из параметров  $E_0$  и  $N$  в отдельности, а только от их комбинации  $\eta = N/E_0$ . График зависимости  $t_1(\eta)$  изображен на рис. 5. Асимптотики этой зависимости вычисляются аналитически. В случае  $\eta \ll 1$  ( $N \ll E_0$ ) результаты совпадают с полученными выше другим способом. В случае  $\eta \gg 1$  значение  $t_1$ , отрицательно и велико, что позволяет считать большинство осцилляций линейными. Зависимость  $t_1(\eta)$  при  $\eta \gg 1$  также оказывается линейной:

$$t_1 \approx -\sqrt{\frac{2}{3}} \pi(\eta + B_1). \quad (61)$$

Слагаемое  $B_1 \sim 1$  приходится устанавливать численно из-за нелинейности первых  $\Delta N \sim E_0$  осцилляций:  $B_1 \approx 0,13$ .

До сих пор в настоящем разделе рассматривались осциллирующие автомодельные решения с  $E_0 \gg 1$ . Решения с  $E_0 \sim 1$  могут быть найдены численно. В качестве примера на рис. 6. изображены ана-



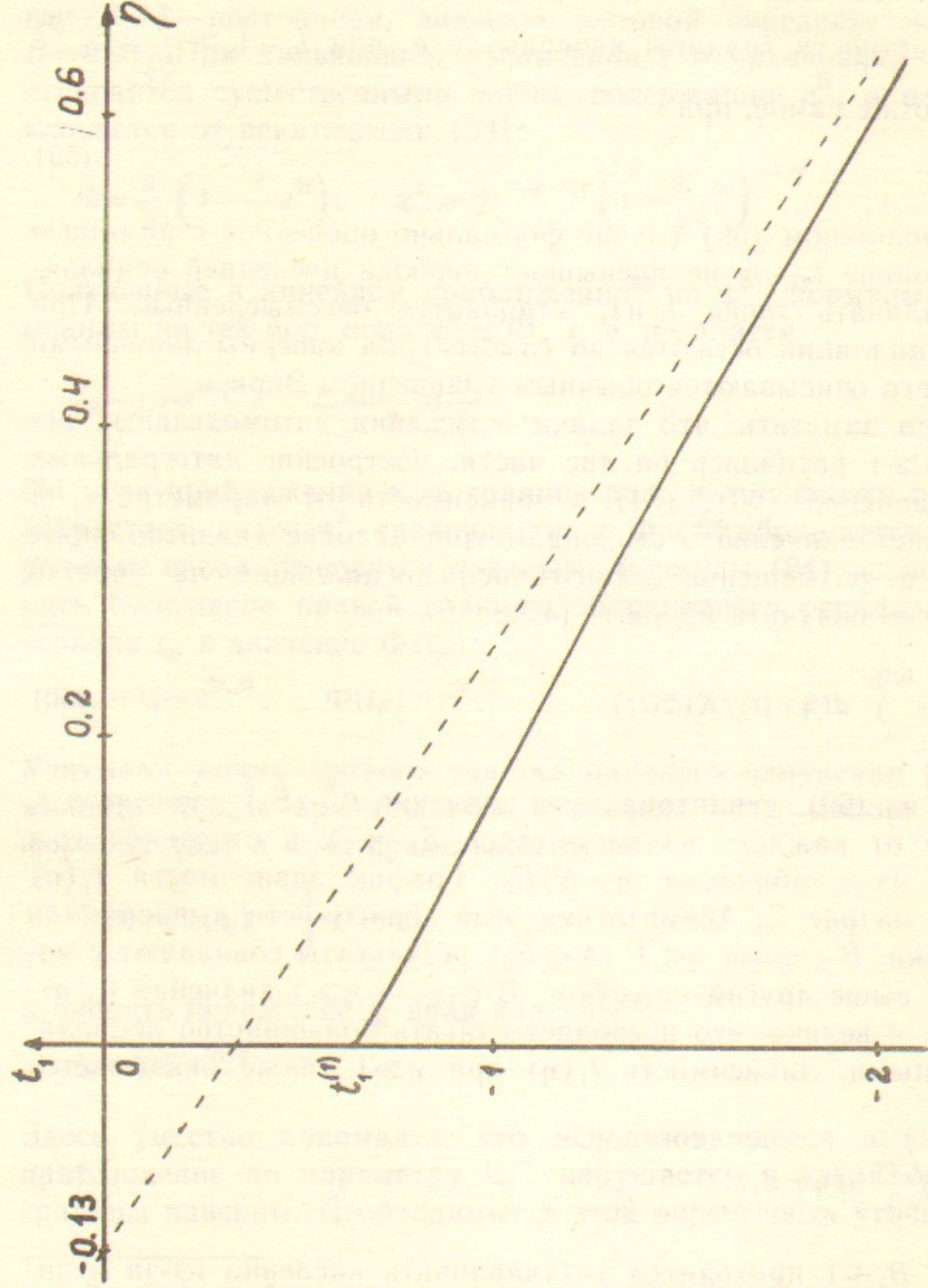


Рис. 5. Определяемая из условия регулярности осциллирующих автомодельных решений зависимость параметра  $t_1$  от  $\eta = N/E_0$ . Пунктиром изображена асимптота  $t_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}} \pi (\eta + B_1)$ ,  $B_1 \approx 0,13$ .

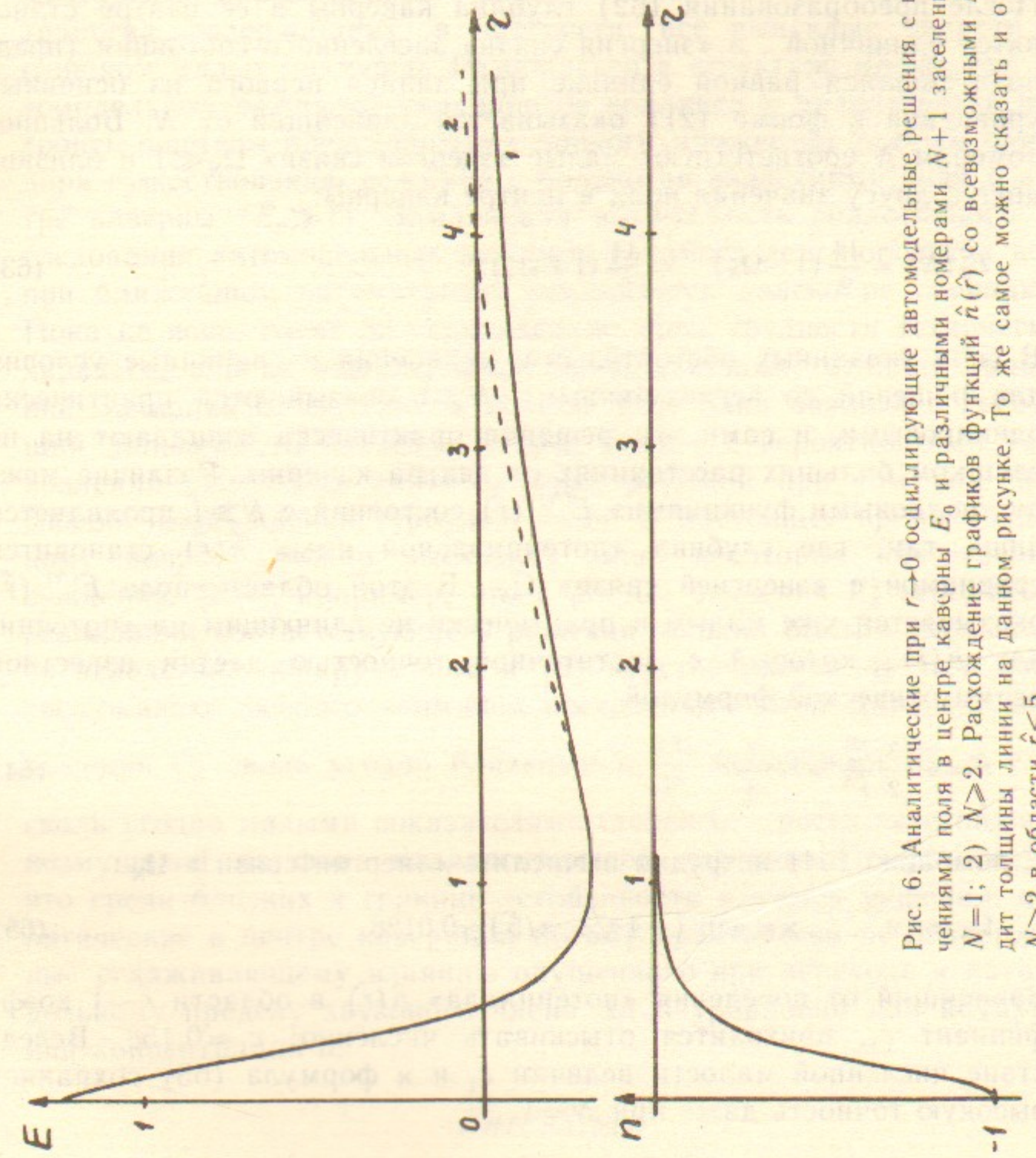


Рис. 6. Аналитические при  $r \rightarrow 0$  осциллирующие автомодельные решения с наименьшими значениями поля в центре каврны  $E_0$  и различными номерами  $N+1$  заселенных состояний: 1)  $N=1$ ; 2)  $N \geq 2$ . Расхождение графиков функций  $\hat{n}(z)$  со всевозможными  $N \geq 1$  не превосходит толщины линии на данном рисунке. То же самое можно сказать и о функциях  $E(z)$  с  $N \geq 2$  в области  $\hat{r} \leq 5$ .



литические в центре каверны центрально-симметричные решения уравнений (2), (3) с наименьшими возможными значениями поля в центре каверны  $E_0 = E_0(N)$  и различными числами  $N$ . Эти решения предварительно подвергнуты масштабному преобразованию.

$$n(r) = |n(0)| \hat{n}(\hat{r}), \quad r = |n(0)|^{-1/2} \hat{r}. \quad (62)$$

После преобразования (62) глубина каверны в ее центре становится единичной, а «энергия связи» заселенного состояния (предполагавшаяся равной единице при записи первого из основных уравнений в форме (2)) оказывается зависящей от  $N$ . Большим номерам  $N$  соответствуют малые «энергии связи»  $\Omega_N \ll 1$  и близкие друг к другу значения поля в центре каверны:

$$E_0^2(N) = \frac{14}{9} (1 - \Omega_N)^{-1} \approx \frac{14}{9} (1 + \Omega_N). \quad (63)$$

В силу указанных обстоятельств, уравнения и граничные условия для решений со всевозможными  $N \gg 1$  оказываются практически одинаковыми, и сами эти решения практически совпадают на не слишком больших расстояниях от центра каверны. Различие между «волновыми функциями»  $E^{(N)}(\hat{r})$  состояний с  $N \gg 1$  проявляется лишь там, где глубина «потенциальной ямы»  $\hat{n}(\hat{r})$  становится сравнимой с «энергией связи»  $\Omega_N$ . В этой области поле  $E^{(N)}(\hat{r})$  оказывается уже малым и практически не влияющим на «потенциал»  $\hat{n}(\hat{r})$ , который с достаточной точностью дается известной асимптотической формулой

$$\hat{n} \approx -\frac{3}{2} \frac{E_0^2}{\hat{r}^2} \approx -\frac{7}{3} \hat{r}^{-2}. \quad (64)$$

С помощью (64) нетрудно вычислить «энергии связи»  $\Omega_N$ :

$$\Omega_N \approx c_1 \kappa^N, \quad \kappa = \exp(-4\sqrt{3}\pi/5) \approx 0,0128. \quad (65)$$

Зависящий от поведения «потенциала»  $\hat{n}(\hat{r})$  в области  $\hat{r} \sim 1$  коэффициент  $c_1$ , приходится отыскивать численно:  $c_1 \approx 0,158$ . Вследствие численной малости величин  $c_1$  и  $\kappa$  формула (65) сохраняет высокую точность даже при  $N=1$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Семейство автомодельных режимов «скалярного» коллапса оказывается весьма обширным. Оно состоит из счетного множества подсемейств, соответствующих различным способам заселения имеющихся в каверне связанных состояний. Каждое подсемейство изоморфно определенному классу областей трехмерного пространства, содержащему, в частности, все выпуклые области не слишком малых размеров. Разобраться в структуре множества автомодельных режимов «скалярного» коллапса и аналитически построить примеры представителей данного множества удастся благодаря существованию режимов с большими значениями поля в центре каверны ( $E_0 \gg 1$ ). Заманчивая возможность аналогичного исследования автомодельных режимов коллапса ленгмюровских волн при ближайшем рассмотрении оказывается далеко не очевидной. Пока не ясно, носят ли возникающие здесь трудности технический характер, или за ними кроются принципиальные отличия уравнений Захарова от скалярной модели. Еще один важный и требующий дальнейшего изучения вопрос связан с вероятностями установления различных автомодельных решений при том или ином способе возбуждения турбулентности. В настоящее время по данному вопросу можно высказать лишь некоторые качественные суждения. Ясно, например, что с ростом значения  $E_0^2$  вероятность реализации соответствующего решения должна быстро уменьшаться вследствие обнаруженной в [6] неустойчивости. В этой связи заслуживают особого внимания построенные выше автомодельные решения со сколь угодно близкими к  $\frac{14}{9}$  значениями  $E_0^2$ , т. е. со сколь угодно малыми показателями степенного роста неустойчивых возмущений на фоне коллапсирующей каверны. Примечательно, что среди близких к границе устойчивости имеются решения, аналитические в центре каверны и потому практически не подверженные сглаживающему влиянию опущенного при переходе к автомодельному пределу звукового члена  $\Delta n$  в уравнении для возмущения концентрации  $n$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Галеев А.А., Сагдеев Р.З., Шапиро В.Д., Шевченко В.И. ЖЭТФ, 1977, т.73, 1352.
2. Pelletier G. Phys. Rev. Lett., 1982, v.49, 782.



3. Буднева О.Б., Захаров В.Е., Сынах В.С. Физика плазмы, 1975, т.1, 606.
4. Захаров В.Е., Матрюков А.Ф., Сынах В.С. Физика плазмы, 1975, т.1, 614.
5. Дегтярев Л.М., Захаров В.Е., Письма в ЖЭТФ, 1975, т.21, 9.  
Дегтярев Л.М., Захаров В.Е., Рудаков Л.И. Физика плазмы, 1976, т.2, 438.
6. Малкин В.М. ЖЭТФ, 1984, т.87, 433.
7. Захаров В.Е. ЖЭТФ, 1972, т.62, 1745.
8. Захаров В.Е., Щур Л.М. ЖЭТФ, 1981, т.81, 2019.
9. Малкин В.М., Цидулко Ю.А. Физика плазмы, 1985, т.11, 964.
10. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. Гос. изд. тех.-теор. лит., Москва-Ленинград, 1950, стр. 189.
11. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. «Наука». М. 1976.
12. Фрайман Г.М. Письма в ЖЭТФ, 1979, т.30, 557.
13. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. Киев, 1969.
14. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. «Наука», М. 1974, § 25.

*В.М. Малкин, В.Н. Худик*

**Автомодельные режимы  
«скалярного» коллапса**

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

---

Работа поступила 22 июля 1986 г.  
Подписано в печать 10.10.1986 г. МН 11827  
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2,0 печ.л., 1,6 уч.-изд.л.  
Тираж 220 экз. Бесплатно. Заказ № 147

---

*Набрано в автоматизированной системе на базе фото-  
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и  
отпечатано на ротапринтере Института ядерной физики  
СО АН СССР,  
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*