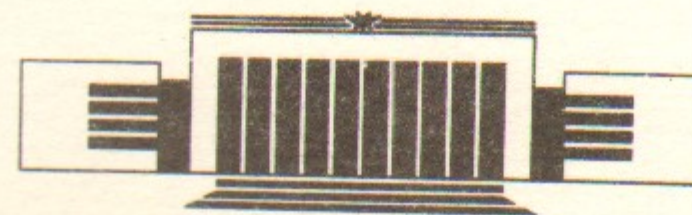




Ф.М. Израйлев, Б.В. Чириков, Д.Л. Шепелянский

**КВАНТОВЫЙ ХАОС:  
ЛОКАЛИЗАЦИЯ И ЭРГОДИЧНОСТЬ**

ПРЕПРИНТ 86-166



НОВОСИБИРСК

1986



## АННОТАЦИЯ

Дается обзор работ авторов по проблеме квантового хаоса и обсуждается современное состояние этой проблемы в целом. Обсуждаются результаты численных экспериментов на простых квантовых моделях. Основное внимание уделяется явлению локализации и эргодичности собственных функций, а также статистическим свойствам собственных функций и спектра энергий.

<sup>\*)</sup> Доклад на 2-й Международной конференции по квантовому хаосу, Куэрнавака, Мексика, 1986 г.

© Институт ядерной физики СО АН СССР

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Дается обзор работ авторов по проблеме квантового хаоса и обсуждается современное состояние этой проблемы в целом. Нашей отправной точкой служит твердо установленное и хорошо изученное к настоящему времени явление динамического хаоса в классической механике (см., например, [1, 2]), или, как мы будем говорить, в классическом пределе квантовой механики. Под динамическим хаосом мы будем понимать случайное по Алексееву движение чисто динамической системы без каких-либо случайных параметров или шума. По теореме Алексеева—Брудно (см. [3]) необходимым и достаточным условием такого хаоса является экспоненциальная локальная неустойчивость движения, или положительная (не равная нулю) динамическая энтропия Колмогорова—Синяя  $h$  (не путать с постоянной Планка, которую мы будем всегда обозначать буквой  $\hbar$ ). Величина  $h$  характеризует среднюю скорость развития локальной неустойчивости и имеет размерность частоты. Случайность (хаотичность) движения по Алексееву означает его непредсказуемость (по любому числу предыдущих наблюдений с любой конечной точностью), а также невозпроизводимость с помощью любого конечного автомата (в частности, ЭВМ). Первоисточником динамической случайности является непрерывность фазового пространства в классической механике, так что почти любой точно заданной траектории динамической системы соответствует бесконечное количество информации. Механизм локальной неустойчивости «развертывает» эту информацию во времени



таким образом, что асимптотически при  $t \rightarrow \pm \infty$  удельная информация на траектории стремится к постоянному значению:

$$\frac{J(|t|)}{|t|} \rightarrow h \quad (1.1)$$

Интервал времени  $t_p$ , в пределах которого частичное предсказание («временный детерминизм») зависит от точности наблюдения  $\varepsilon$  и определяется параметром случайности [4]

$$R = \frac{h|t|}{|\ln \varepsilon|} \sim \frac{|t|}{t_p} \quad (1.2)$$

При  $|t| \lesssim t_p$  ( $R \lesssim 1$ ) и достаточно малом  $\varepsilon$  возможно, конечно, и статистическое описание, которое остается применимым и при  $R \gg 1$ .

Отметим, что случайный характер движения еще не определяет полностью его статистические свойства, которые могут быть и весьма необычными (см., например, [5]).

Переходя к более точной квантовой механике, мы прежде всего разделим полную задачу на две неравные части: 1) собственно квантовая динамика, т. е. временная эволюция (в частности, стационарные состояния) вектора состояния  $\Psi(t)$ , и 2) измерение, вносящее неизбежный статистический элемент в форме необратимой редукции  $\Psi$  и играющее роль некоторого внешнего шума, который в квантовой механике не может быть устранен принципиально. В соответствии с нашим динамическим подходом мы, как и другие исследователи в этой области, ограничимся только первой из двух задач. Точнее, мы полностью исключаем любые промежуточные измерения, оставляя только два крайних. Первое (полное) измерение задает начальное состояние системы, а второе регистрирует конечный результат эволюции.

В дальнейшем мы будем обсуждать исключительно гамильтоновы (бездиссипативные) системы как более фундаментальные. Обычное трение есть лишь грубо приближенное описание молекулярного динамического хаоса, который также является гамильтоновым. К тому же системы с феноменологически введенным трением никогда не является, строго говоря, чисто динамическими ввиду флуктуационно-диссипативной теоремы. Это особенно ясно в квантовой механике, где трение вводится путем связи системы с некоторым термостатом.

Из гамильтоновых систем нас будут интересовать в первую

очередь консервативные (сохранение энергии) с замкнутыми энергетическими поверхностями. Движение в этом случае ограничено в фазовом пространстве, и здесь наиболее ярко проявляется основная особенность квантовой динамики — дискретность ее фазового пространства, приводящая для рассматриваемых систем к дискретности спектра энергии (и частоты).

Это не только не совместимо с динамическим хаосом, но и относится в классической механике к прямо противоположному случаю регулярного движения. Однако фундаментальный принцип соответствия требует перехода к хаосу в квазиклассической области. Как же происходит этот переход? Такой вопрос был поставлен и решен в [6] с помощью введения характерных временных масштабов квантовой эволюции. Самый короткий из них (логарифмический)  $t_E$ , который мы будем называть масштабом Эренфеста, имеет порядок

$$ht_E \sim \ln q, \quad (1.3)$$

где  $h$  — КС-энтропия (1.1), а  $q \propto \hbar^{-1}$  некоторый характерный квантовый параметр, например, квантовое число (см. также раздел 3 ниже). Этот масштаб был, по-видимому, впервые получен в [7] (см. также [6]) и связан с быстрым расплыванием узкого волнового пакета вследствие локальной неустойчивости хаотического движения в классическом пределе (подробнее см. ниже, раздел 3). По теореме Эренфеста узкий пакет следует по классической траектории, а значит его движение (на этом масштабе времени) является столь же хаотическим, как и в классическом пределе (на конечном интервале времени).

Отметим, однако, что при полном квантовом измерении величина  $\varepsilon$  в (1.2) достигает своего минимального значения  $\sim 1/q$ , а параметр случайности (см. (1.3))

$$R \lesssim \frac{\ln q}{|\ln \varepsilon|} \sim 1.$$

В этом случае весь масштаб Эренфеста оказывается в области временного детерминизма.

Хотя масштаб Эренфеста возрастает с  $q$  очень медленно, он растет неограниченно при  $q \rightarrow \infty$  ( $\hbar \rightarrow 0$ ). В принципе этого достаточно для решения задачи о переходе к классическому хаосу. Оказывается, однако, что существует гораздо более длинный (степенной) и потому более важный, масштаб квантовой динамики  $t_D$ , такой, что



$$\ln(\omega t_D) \sim \ln q, \quad (1.4)$$

где  $\omega$  — характерная классическая частота системы. На этом масштабе все еще сохраняются существенные черты классического хаоса, такие как диффузия и статистическая релаксация. Такой масштаб, получивший название диффузионного, был открыт в численных экспериментах [8] и объяснен в [6]. Именно этот масштаб и будет рассмотрен ниже (разделы 3—7).

Наконец, при  $t \rightarrow \infty$  ( $t \gg t_D$ ) квантовый характер эволюции становится, вообще говоря, преобладающим при любых конечных  $q \rightarrow \infty$ , а динамический хаос проявляется в особой статистике уровней энергии и структуре собственных функций (разделы 8—10).

## 2. ПРИМЕР ИСТИННОГО КВАНТОВОГО ХАОСА

Одним из основных результатов интенсивных исследований квантового хаоса в последнее время был вывод о его отсутствии (за исключением очень короткого масштаба Эренфеста). Впервые на это было указано еще Крыловым [9]. Причина этого, как отмечалось выше, весьма фундаментальна и связана в конечном счете с дискретностью фазового пространства в квантовой механике.

Бывают, однако, особые, исключительные случаи, когда истинный динамический хаос возможен и в квантовой системе.

Рассмотрим, например, классическую динамическую систему на  $N$ -мерном торе с угловыми переменными  $\theta_i$ :

$$\dot{\theta}_i = g_i(\theta_k); \quad i, k = 1, \dots, N \quad (2.1)$$

где функции  $g_i$  имеют период  $2\pi$  по всем  $\theta_k$ . При  $N \geq 3$  в такой системе возможен динамический хаос (см., например, [2]). Это значит, что линеаризованное на некоторой траектории движение, описываемое уравнениями

$$\dot{\xi}_i = \xi_k \frac{\partial g_i}{\partial \theta_k} \Big|_{\theta_k = \theta_k^0(t)}, \quad (2.2)$$

где  $\xi_i = \theta_i - \theta_i^0$  является экспоненциально неустойчивым

$$\xi_i \sim e^{\Lambda_m t}. \quad (2.3)$$

Здесь  $\Lambda_m$  — максимальный показатель Ляпунова линейной системы (2.2).

При любых функциях  $g_i$  динамика системы (2.1) описывается сохраняющимся гамильтонианом

$$H = n_k g_k(\theta_i). \quad (2.4)$$

Но тогда уравнения для импульсов принимают вид

$$\dot{n}_i = -n_k \frac{\partial g_k}{\partial \theta_i} \quad (2.5)$$

и, например, в случае обратимой по времени динамики системы (2.1) импульсы также растут в среднем экспоненциально (2.3).

Своеобразная, хотя и не хаотическая динамика моделей вида (2.4) для  $N=2$  исследовалась, в частности, в [10].

Рассмотрим теперь квантовую систему с оператором Гамильтона [11]

$$H = \frac{1}{2} (g_k \hat{n}_k + \hat{n}_k g_k); \quad \hat{n}_k = -i \frac{\partial}{\partial \theta_k}. \quad (2.6)$$

Тогда из уравнения Шредингера получаем для плотности вероятности  $\rho = \Psi \Psi^*$  [11]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta_k} (\rho g_k) = 0, \quad (2.7)$$

что совпадает с уравнением непрерывности классической системы (2.1) на торе. Следовательно, квантовая плотность будет изменяться точно так же, как и классическая, в том числе и в хаотическом режиме движения [11].

Из этого простого примера видно, сколь необычной должна быть истинно хаотическая квантовая динамика. Мало того, что движение является инфинитным по импульсам, последние должны еще расти экспоненциально быстро. Это связано с тем, что точная плотность не становится однородной со временем (последнее справедливо только для огрубленной плотности), а, напротив, делается все более изрезанной вследствие механизма локальной неустойчивости траекторий. А для этого необходим быстрый рост волновых чисел, или, в квантовой механике, импульсов.

## 3. МОДЕЛЬ КВАНТОВОГО РОТАТОРА

Для исследования динамики квантовых систем, стохастических



в классическом пределе, мы выбрали модель квантового ротатора с гамильтонианом [6]

$$H = \frac{\hat{n}^2}{2} + k \cos \theta \delta_T(t), \quad (3.1)$$

где  $\hat{n} = -i \frac{\partial}{\partial \theta}$ ;  $\theta$  — фаза в интервале  $[0, 2\pi]$ ;  $V = k \cos \theta$  — внешнее возмущение;  $\delta_T(t)$  — дельта-функция с безразмерным периодом  $T$  («толчки»);  $\hbar = 1$ . Динамика соответствующей классической системы задается стандартным отображением [12]

$$\bar{p} = p + K \sin \theta, \quad \bar{\theta} = \theta + \bar{p} \quad (3.2)$$

где  $p = Tn$ ;  $K = kT$ ;  $n$  и  $\theta$  — переменные действие-фаза. Переход к классическому пределу соответствует  $k \rightarrow \infty$ ,  $T \rightarrow 0$ ,  $K = kT = \text{const}$ .

Динамика квантовой модели (3.1) также задается отображением

$$\bar{\Psi} = \exp\left(i \frac{T}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \exp(-ik \cos \theta) \Psi \quad (3.3)$$

и в отличие от классической модели, существенно определяется обоими параметрами  $k$  и  $T$ . В выбранной модели возмущение периодически зависит от времени. Такой класс задач представляет и самостоятельный интерес [13]. Однако, эту систему в определенном смысле можно рассматривать и как модель консервативной динамики. Действительно, в классическом пределе двумерное отображение типа (3.2) в точности соответствует некоторой консервативной системе с двумя степенями свободы (см., например, [2]). Поэтому такое отображение описывает локальную динамику на энергетической поверхности. Это же приближенно справедливо и для квантового отображения (3.3). С другой стороны, исследование (особенно численное) неизмеримо проще, чем исследование непрерывной модели. Именно поэтому с самого начала [8] и была выбрана модель (3.1).

Динамика классической модели (3.2) полностью определяется параметром  $K$ . В зависимости от его значения существует два качественно различных режима: финитное ( $|\Delta n| \lesssim \sqrt{k/T}$ ) и инфинитное движение. Критическое значение  $K$ , разделяющее оба режима, равно  $K_{cr} = 0.9716\dots$  [14]. Следует отметить, что в обоих режимах существует как регулярная, так и хаотическая компоненты движения, причем мера первых стремится к нулю с ростом  $K$  [12].

При  $K > K_{cr}$  движение в единой хаотической компоненте может быть описано как диффузия по  $n$  со скоростью

$$D \equiv \frac{\langle (\Delta n)^2 \rangle}{\tau} = \frac{D_0(K)}{T^2},$$

где  $D_0(K)$  — скорость диффузии по  $p$  в стандартном отображении (3.2) [15, 16]:

$$D_0 = \begin{cases} \frac{K^2}{2} (1 + 2J_2(K) + 2J_2^2(K)), & K \gtrsim 4.5 \\ 0.30 (\Delta K)^3, & K \lesssim 4.5 \end{cases} \quad (3.4)$$

где  $\tau = [t/T]$  — число итераций отображения;  $J_2(K)$  — функция Бесселя, а  $\Delta K = K - K_{cr}$ . При  $K \gtrsim 4.5$  зависимость  $D_0(K)$  имеет вид осцилляций, затухающих с ростом  $K$ . Предельное значение  $D_0 = K^2/2$  соответствует квазилинейному приближению, когда фазы  $\theta(\tau)$  в (3.2) случайны и независимы. При  $K \rightarrow K_{cr}$  в (3.4) использована эмпирическая формула, полученная из численных экспериментов [17]. Значение показателя  $\eta \approx 3$  в степенной зависимости  $D_0 \propto (\Delta K)^2$  близко к данным [18].

В квазиклассической области закон диффузии (3.4) сохраняется в пределах диффузионного масштаба времени, который для рассматриваемой модели, согласно [6], имеет порядок  $\tau_D \sim D \sim k^2$ . При  $\tau \ll \tau_D$  квантовая зависимость  $D_q$  в согласии с принципом соответствия хорошо повторяет все детали классической диффузии, в том числе и не описываемые простым соотношением (3.4) (см. рис. 1 в [17], а также раздел 6 ниже).

При  $\tau \gg \tau_D$  квантовая диффузия останавливается и переходит в стационарные колебания [19], которые были прослежены вплоть до  $\tau = 5 \cdot 10^4$  [20], что означает дискретность спектра квазиэнергий модели (3.1) [6]. Уже по этой причине «квантовый хаос» во всей квазиклассической области не является истинным, как в классическом пределе. Отметим, что отклонения от настоящего хаоса начинаются уже на гораздо меньшем масштабе (1.3), где  $q = k$ . Это проявляется, в частности, в отсутствии локальной неустойчивости квантового движения при  $\tau > \tau_E$  [21] и появлении остаточных корреляций [21, 22] (см. также [1]).

Иллюстрацией устойчивости динамики квантового хаоса служит тест по обращению времени. Из явного вида гамильтониана



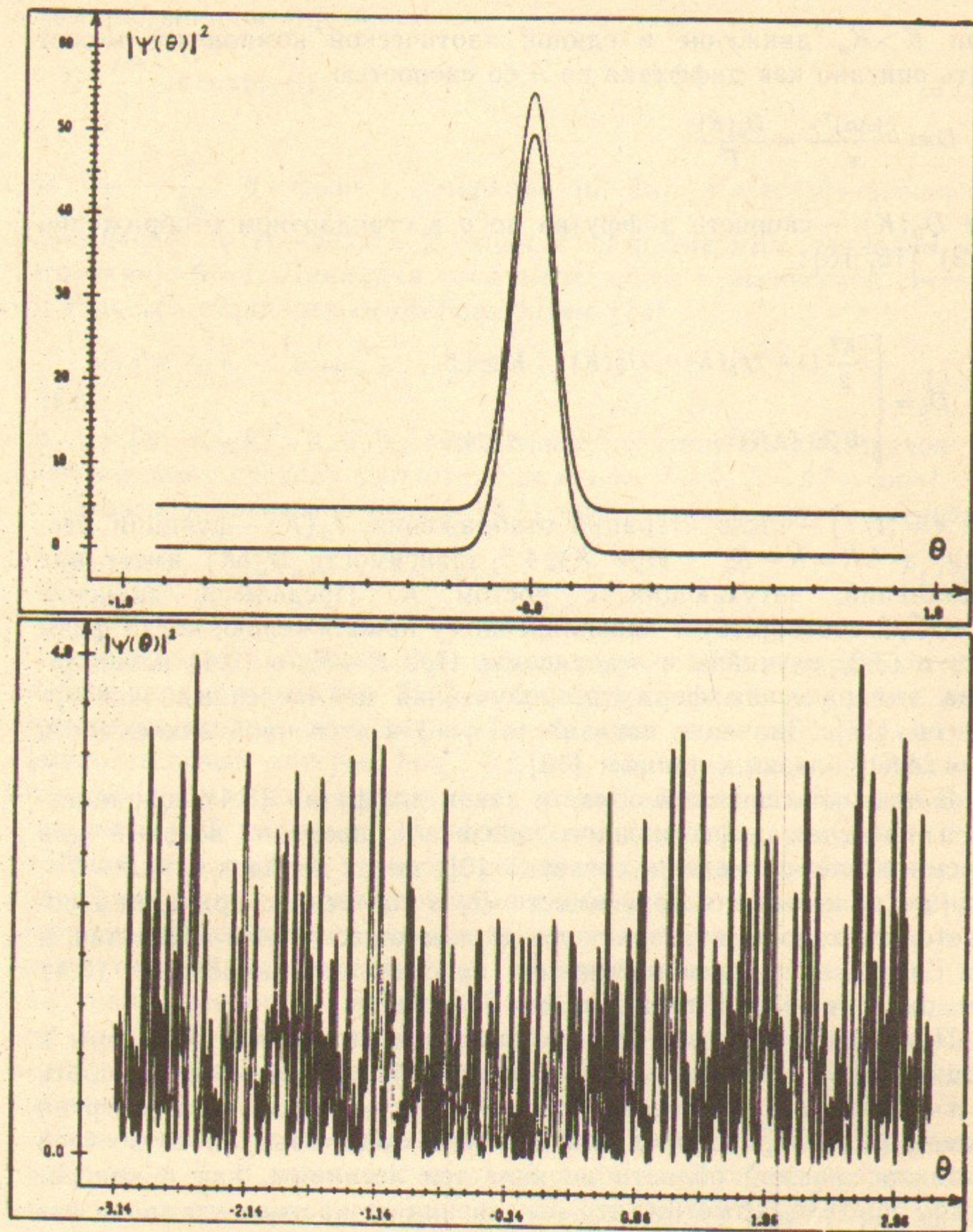


Рис. 1. Распределение вероятности по фазе в модели (3.1) для разных моментов времени ( $k=20$ ,  $K=5$ ):  $a$ —начальное гауссово распределение при  $\tau=0$  (нижняя кривая), в момент возврата  $\tau=300$  (верхняя кривая);  $b$ —«изрезанное» распределение в момент обращения времени  $\tau=150$ .

(3.1) следует, что при обращении времени  $t \rightarrow -t$  в момент  $t = (m + 1/2)T$ , где  $m$ —целое, система возвращается в исходное состояние. В классической системе хаотичность движения приводит к практической необратимости динамики. Действительно, даже при обращении классической скорости на компьютере с точностью  $\epsilon \sim 10^{-12}$  неустойчивость приводит к нарушению обратимости уже через несколько периодов:  $\tau_R \sim |\ln \epsilon| / h \sim 10$ ; ( $h \approx \ln K / 2$ ). В квантовой системе неустойчивость отсутствует и обратимость происходит с точностью порядка  $\epsilon$  [22]. Сравнение начального гауссова распределения вероятностей  $|\Psi(\theta)|^2$  с распределениями в момент обращения времени  $\tau=150$  и в момент возвращения в начальное состояние  $\tau=300$  представлено на рис. 1. Разница распределений  $|\Psi(\theta)|^2$  при  $\tau=0$  и  $\tau=300$  была порядка  $10^{-10}$ . При  $\tau=150$  волновая функция представляет собой набор предельно узких пиков. Ширина их  $\Delta\theta$  определяется числом возбужденных уровней  $\Delta\theta \sim 1/\Delta n$  ( $(\Delta n)_{\max} \sim (D\tau_D)^{1/2}$ ). Расщепление на пики происходит в процессе диффузии пакета и является отражением дробления классической функции распределения в области хаоса. Следует, однако, отметить, что, в отличие от классической системы, где расщепление происходит экспоненциально быстро и с течением времени идет на все более мелкие масштабы, в квантовой системе размер пиков определяется числом возбужденных уровней и поэтому уменьшается со временем лишь степенным образом или вообще останавливается в случае квантового ограничения диффузии.

#### 4. ПРИНЦИП КВАНТОВОЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ ХАОСА

Следуя [6], рассмотрим сначала качественно механизм ограничения диффузии в модели (3.1). Он основан на следующих простых физических соображениях. По принципу соответствия квантовое движение в квазиклассической области должно быть в каком-то смысле близко к классическому, по крайней мере, на некотором характерном масштабе времени. Это очевидно для самого короткого масштаба  $\tau_E$  т. е. до расплывания волновых пакетов, которые движутся по классическим траекториям. При  $\tau > \tau_E$  квантовая динамика, конечно, не совпадает полностью с классической [1], однако, как показывает численное моделирование [6, 8, 22], классическая диффузия в системе продолжается. Если бы диффузия была неограниченной, как в классическом пределе, то спектр



квазиэнергий был бы непрерывным. Существенно, однако, что и в случае чисто дискретного спектра со средней плотностью уровней  $\rho_0$  классическая диффузия может продолжаться в течение времени

$$\tau \sim \tau_D \sim \rho_0. \quad (4.1)$$

Это вытекает непосредственно из принципа неопределенности, поскольку при  $\tau \ll \rho_0$  система не разрешает («не чувствует») дискретный характер спектра. Оценка (4.1) и определяет диффузионный масштаб времени для модели (3.1). Поясним, что плотность  $\rho_0$  в (4.1) определяется только собственными функциями, представленными в данном состоянии системы, эффективное число которых всегда конечно. Для оценки величины  $\rho_0$  рассмотрим вначале эволюцию одного произвольного невозмущенного состояния. Тогда вследствие классической диффузии за время  $\tau_D$  будет эффективно возбуждено некоторое число соседних невозмущенных состояний  $\Delta n \sim (D\tau_D)^{1/2}$ . Это значит, что точные собственные функции системы являются суперпозициями нескольких ( $\sim \Delta n$ ) невозмущенных состояний. И наоборот, любое невозмущенное состояние представляется таким же числом собственных функций. Отсюда  $\rho_0 \sim \Delta n \sim \tau_D$  (считаем, что квазиэнергии равномерно распределены на интервале  $[0, 2\pi]$ ) и [6]

$$\tau_D \sim D \sim \Delta n \sim l \quad (4.2)$$

где  $l$  — эффективное число невозмущенных состояний, вовлеченных в стационарные колебания после прекращения диффузии. Иначе можно сказать, что величина  $l$  определяет размер области локализации собственных функций в невозмущенном базисе (по  $n$ ). Мы будем называть  $l$  длиной локализации. Замечательной особенностью соотношений (4.2) является устанавливаемая ими связь существенно квантовых характеристик движения — диффузионного масштаба  $\tau_D$  и длины локализации  $l$  со скоростью диффузии  $D$  в классическом пределе.

Оценка (4.2) для  $\tau_D$ , очевидно, не зависит от начального состояния системы за исключением маловероятных начальных состояний, близких к собственным функциям квазиэнергии (СФКЭ). Что же касается длины локализации  $l$  для стационарных колебаний, то оценка (4.2) справедлива только в том случае, когда размер начального состояния  $l_0 \ll l$ . Если же  $l_0 \gtrsim l$ , то по порядку величины размер состояния не изменяется.

Описанная выше локализация хаоса имеет место только для

иррациональных значений параметра  $T/4\pi$ . В случае рациональных  $T/4\pi$  возникает специфическое для данной модели явление квантового резонанса [23]. При этом спектр квазиэнергий становится непрерывным, а действие  $|n|$  растет пропорционально  $\tau$  ( $\tau \rightarrow \infty$ ) при любом  $k$ . Эта особенность модели связана с характером невозмущенного спектра  $H_0(n) = n^2/2$  и не является типичной для квантовой динамики. По этой же причине динамика модели (3.1) определяется величиной  $T$ , взятой по модулю  $4\pi$ . Неограниченное возбуждение имеет место и для очень специальных иррациональных значений  $T$ , экспоненциально близких к рациональным [24].

## 5. ЛОКАЛИЗАЦИЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ КВАЗИЭНЕРГИИ

В работе [25] была отмечена аналогия между описанной выше локализацией в импульсном пространстве (по  $n$ ) и хорошо известной локализацией Андерсона в одномерном случайном потенциале (см., например, [26]). Наиболее существенное различие между обоими явлениями связано с тем, что в рассматриваемой нами модели (3.1) нет никаких случайных параметров. Продолжая эту аналогию, можно заметить, что квантовый резонанс соответствует делокализованным блоховским состояниям в периодическом потенциале [23, 25]. Отметим также, что механизм локализации в (3.1) является, вообще говоря, совершенно различным в зависимости от параметров движения. Так, при  $K \gtrsim 1$  и  $k > 1$  локализация связана с остановкой классической диффузии вследствие квантовых интерференционных эффектов. Если же  $K \lesssim 1$  ( $k > 1$ ), то локализация определяется квантовым туннелированием в классически недоступную область.

Оказывается, что задача о нахождении длины локализации СФКЭ сводится к вычислению показателей Ляпунова (ПЛ) в некоторой вспомогательной классической гамильтоновой системе [27]. Важное преимущество такого подхода заключается в том, что с его помощью можно исследовать свойства СФКЭ без явного вычисления последних. Этот метод эквивалентен методу матрицы переноса, который применяется при исследовании локализации в твердом теле [26, 28, 29]. Для исследования локализации в (3.1) метод ПЛ был использован также в [30].

Для использования указанного метода рассмотрим уравнение,



которому удовлетворяет СФКЭ в (3.1) с квазиэнергией  $\omega$  [25] (см. (3.3)):

$$\begin{aligned} u_n^- &= \exp(i(\omega - TH_0(n))u_n^+) \\ u^+(\theta) &= \exp(-iV(\theta))u^-(\theta) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь  $H_0 = n^2/2$ ;  $V = k \cos \theta$ ,  $u^\pm(\theta)$  — значения функции до и после действия возмущения;  $u_n^\pm$  — фурье-компоненты  $u^\pm(\theta)$ . Для численных экспериментов удобней переписать уравнения (5.1) следующим образом. Введем  $\bar{u} = e^{\pm iV/2} u^\pm / g$ , где  $g$  — произвольная действительная функция  $\theta$ , и ограничимся случаем, когда  $V$  и  $g$  — четные. Тогда из (5.1) получаем

$$\sum_r \bar{u}_{n+r} W_r \sin(\chi_n + \varphi_r) = 0, \quad (5.2)$$

где  $e^{-iV/2} g = \sum_r W_r e^{i(r\theta + \varphi_r)}$ ,  $\chi_n = (\omega - TH_0(n))/2$ . В том случае, когда отличны от нуля только  $W_r$  с  $|r| \leq N$ , вектор из  $2N$  известных значений  $\bar{u}_n$  определяет значения СФКЭ при любом  $n$ . Рекуррентное вычисление  $\bar{u}_n$  из (5.2) можно рассматривать как некоторую динамическую систему в дискретном времени  $n$ . Динамика  $2N$ -компонентного вектора определяется матрицей переноса  $M_n$ , вид которой легко найти из (5.2). Поворотом  $M_n$  приводится к симплектической матрице. Вследствие этого динамика по  $n$  является гамильтоновой и в системе имеется  $N$  положительных и  $N$  отрицательных ПЛ, причем  $\gamma_i^+ = -\gamma_i^-$  (см., например, [2]). Асимптотически длина  $l$  локализации СФКЭ определяется минимальным положительным ПЛ  $\gamma_1 = 1/l$  [27–29]. Отличие  $\gamma_1$  от нуля приводит к тому, что все СКФЭ экспоненциально локализованы:  $u_n \propto \exp\left(-\frac{|n|}{l}\right)$  при  $|n| \rightarrow \infty$ , а спектр квазиэнергий является чисто дискретным. Техника вычисления всех ПЛ подробно описана, например, в [2].

Отметим, что задача о локализации СФКЭ может рассматриваться и как задача о локализации в твердом теле. Действительно, после простых преобразований (5.1) сводится к виду

$$\hat{H}_{ss} u = \left\{ \cos \frac{\hat{V}}{2} \operatorname{tg} \left( \frac{\omega}{2} - \frac{T}{2} \hat{H}_0 \right) \cos \frac{\hat{V}}{2} - \frac{1}{2} \sin \hat{V} \right\} u = 0 \quad (5.3)$$

где  $u = e^{\pm iV/2} u^\pm$ . После фурье-преобразования видно, что гамильтониан  $H_{ss}$  соответствует некоторой одномерной решетке с взаимо-

действующими соседями и энергией  $E = -\sum_r W_r^- W_{-r}^- \sin \varphi_r \cos \varphi_{-r}$ .

При этом квазиэнергия  $\omega$  как бы определяет потенциал взаимодействия, а собственное значение энергии  $E$  рассматривается как параметр. Кроме того, невозмущенный номер уровня  $n$  в модели (3.1) соответствует дискретной пространственной координате в решетке. В том случае, когда  $\cos V/2 \neq 0$  можно ввести  $\bar{u} = \cos(V/2) u$  и, разделив уравнение (5.3) на  $g^{-1} = \cos V/2$ , свести (5.3) к гамильтониану

$$\bar{H}_{ss} = \operatorname{tg} \left( \frac{\omega}{2} - \frac{T}{2} \hat{H}_0 \right) - \operatorname{tg} \frac{\hat{V}}{2},$$

который соответствует случаю диагонального беспорядка в твердом теле [26]. Такой путь был неявно использован в [25], что привело к возникновению нефизической особенности и не позволило рассмотреть широкий класс потенциалов с  $|V| \geq \pi$ .

Для устранения этой особенности в модели (3.1) можно выбрать  $g = 1$  [27]. Тогда получим, что в (5.2)

$$W_r = J_r(k/2), \quad \varphi_r = -\frac{\pi r}{2}, \quad \chi_n = \left( \omega - \frac{Tn^2}{2} \right) / 2,$$

где  $J_r(k/2)$  — функция Бесселя. Из-за быстрого падения  $W_r$  при  $|r| > k/2$  можно ограничиться конечным числом соседей  $N \sim k/2$ . Проверка показала, что дальнейшее увеличение  $N$  сказывается только на максимальных показателях с  $\gamma \sim 1$ . Другая проверка состояла в том, что отрицательные показатели должны быть равны по модулю положительным, что также имело место при счете на достаточно большом интервале по  $n$  ( $(\gamma_1^+ + \gamma_1^-) / \gamma_1^+ \sim 10^{-2}$ ). Как правило, этот интервал составлял  $\sim 10^5$  уровней.

Согласно теоретической оценке (4.2) длина локализации в области хаоса равна

$$l = \alpha D = \frac{D_0(K)}{2T^2} \quad (5.4)$$

Численный множитель  $\alpha = 1/2$  был получен в [27] из сравнения с точно решаемой моделью Ллойда, в которой  $V = 2 \arctg(E - 2k \cos \theta)$ ,  $\chi_n$  — случайны, а для вычисления  $D$  можно использовать квазилинейное приближение



$$D = D_{ql} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)^2 d\theta. \quad (5.5)$$

Проверка соотношения (5.4) проводилась методом ПЛ для различных значений параметров:  $5 \leq k \leq 75$ ;  $1.5 \leq K \leq 29$ ;  $T \leq 1$  и  $T/4\pi$  — типичное иррациональное число. Было получено, что среднее значение  $\langle \alpha \rangle = 0.57 \pm 0.02$  (здесь и далее ошибка статистическая). То, что экспериментальное значение  $\alpha$  оказывается несколько больше теоретического связано, по-видимому, с недостаточно малым значением отношения  $k/l \sim 1/10$ . Сравнение  $l$  с  $D$  при фиксированном значении  $k=30$  представлено на рис. 2. Из него видно, что длина локализации повторяет все осцилляции классической скорости диффузии. Полученные данные удовлетворительно согласуются с формулой (5.4) не только в области развитого хаоса  $k \gtrsim 4.5$ , где мера островков устойчивости пренебрежимо мала, но и при  $\Delta K = K - K_{cr} \ll 1$ , когда скорость диффузии определяется сложной критической структурой [4, 5, 18] и устойчивая компонента занимает около 50% всей фазовой плоскости [12]. При этом скорость диффузии в стандартном отображении  $D_0$  меняется на 4 порядка (см. рис. 3). Следует, однако, отметить, что соотношение (5.4) выполняется только тогда, когда длина локализации значительно превышает число взаимодействующих соседей (невозмущенных уровней)  $2N \approx k$ . В противном случае  $D_0/2T^2 \ll k$  диффузия оказывается чересчур медленной и не приводит к увеличению  $l$ , которое остается  $\sim k$ . Таким образом, соотношение (5.4) выполняется при условии

$$k > k_{cr} = \frac{\kappa K^2}{D_0} \gg 1, \quad K \gtrsim K_{cr} \quad (5.6)$$

где  $\kappa=1$  определяется из численных экспериментов. Неравенство (5.6), впервые полученное в [17], дает условие однородной локализации. В обратном предельном случае  $k \ll k_{cr}$  длина локализации  $l \sim N \sim k$  оказывается сравнимой с периодом резонансной структуры  $2\pi/T$  и, как и классическая скорость диффузии, локализация становится существенно неоднородной [17].

В области классической устойчивости  $K \ll 1$  длина локализации оказывается порядка числа взаимодействующих соседей:  $l \approx k/4$ .

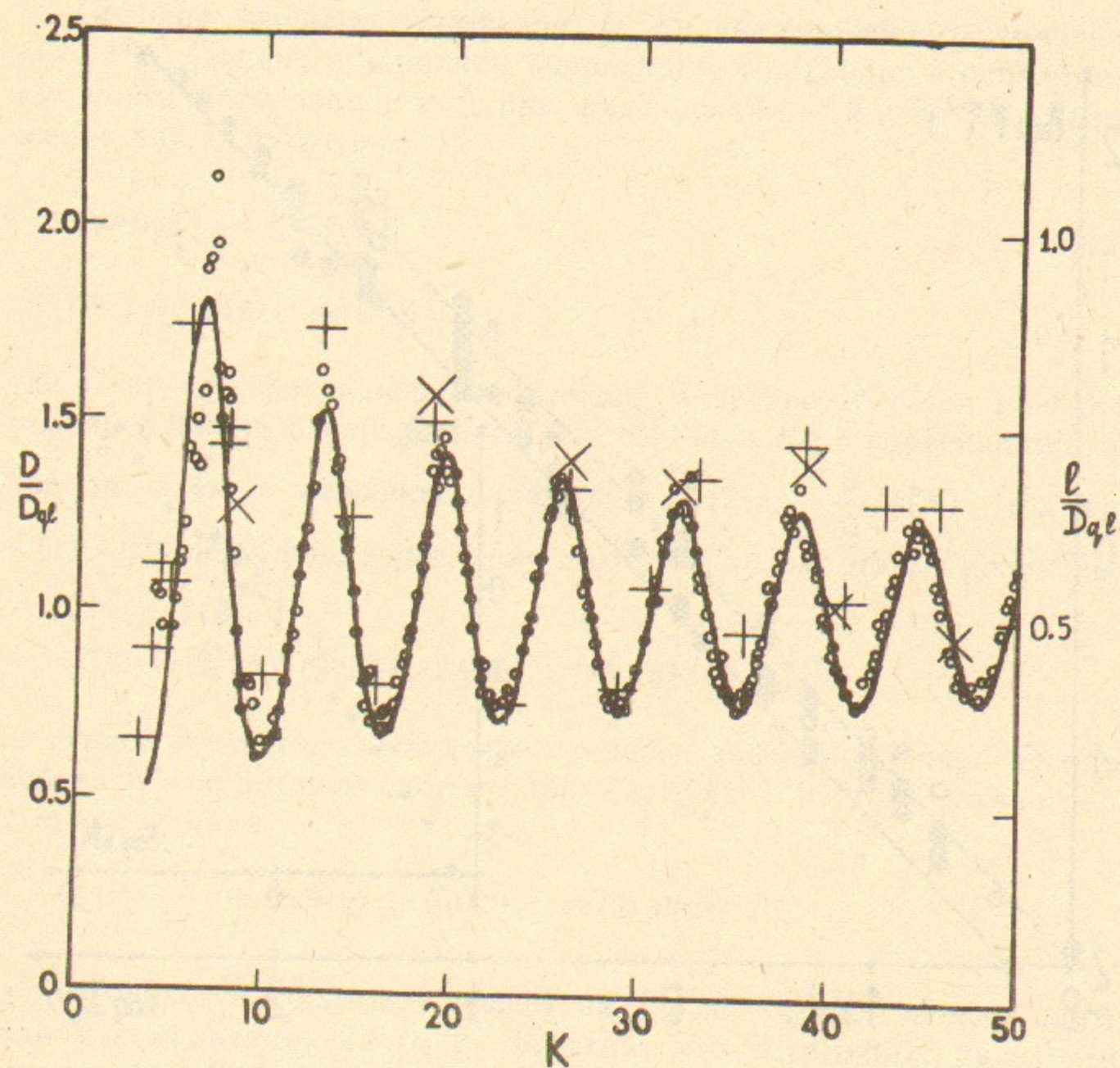


Рис. 2. Зависимость длины локализации для модели (3.1) от квантового параметра стохастичности (раздел 6)  $K_q = 2k \sin T/2 \rightarrow K$  ( $T \rightarrow 0$ ) при  $k=30$ ; (+) —  $0 < T < \pi$ , (×) —  $-\pi < T < 2\pi$ . Кружки и кривая — численные данные и теория для классической скорости диффузии  $D$  [15, 16].



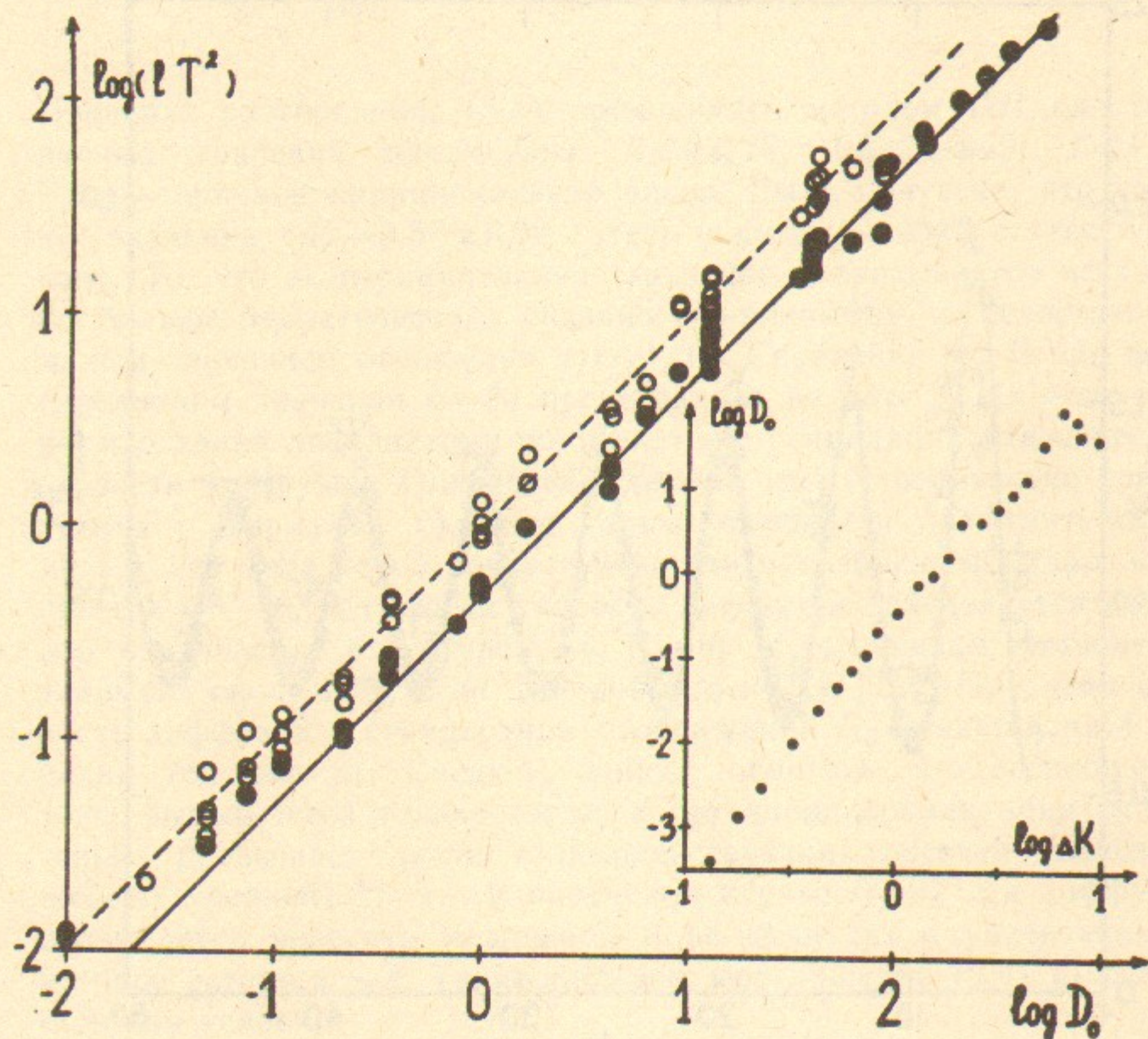


Рис. 3. Зависимость длины локализации в (3.1) от скорости диффузии  $D_0$  в стандартном отображении (3.2). Кружки—численные данные для локализации  $l_s$  в стационарном распределении (7.4). Пунктирная прямая соответствует среднему значению  $\langle a_s \rangle = 1.04$ . Точки—длина локализации в СФКЭ, полученная методом ПЛ. Прямая—теоретическая формула (5.4). На вставке представлены численные данные для зависимости  $D_0$  от  $\Delta K = K - K_{cr}$ ,  $K_{cr} = 0.9716\dots$

## 6. ЛОКАЛИЗАЦИЯ В СУЩЕСТВЕННО КВАНТОВОЙ ОБЛАСТИ $T > 1$

Отличие скорости диффузии  $D$  от квазилинейного значения  $D_{ql} = k^2/2$  связано с влиянием корреляций и приводит к осцилляциям длины локализации с  $K$  при фиксированном  $k$  (рис. 2). Выражение для  $D$  имеет вид

$$D = D_{ql} \left[ 1 + 4 \sum_{\tau=1}^{\infty} C(\tau) \right], \quad (6.1)$$

$$C(\tau) = \langle \sin \theta(\tau) \sin \theta(0) \rangle,$$

где  $C(\tau)$  — корреляционная функция, а среднее берется по однородной функции распределения [15, 16]. При  $K \gtrsim 5$  корреляции быстро затухают и основной вклад дает  $C(2) = -\frac{1}{2} J_2(K)$ , так как  $C(1) = 0$ . Следующие корреляции дают уже только малые поправки

$$C(4) = J_2^2(K)/2 \sim K^{-1}$$

$$(C(3) = (J_3^2(K) - J_1^2(K))/2 \sim K^{-2}) \quad [15, 16]$$

Такой же метод вычисления скорости диффузии можно использовать и в квантовой системе при  $T \gtrsim 1$ ,  $k \gg 1$ . В этом случае первые корреляции

$$C_q(\tau) = \frac{1}{2} \langle 0 | \sin \hat{\theta}(\tau) \sin \hat{\theta}(0) + \sin \hat{\theta}(0) \sin \hat{\theta}(\tau) | 0 \rangle$$

дадут скорость квантовой диффузии  $D_q$ , по которой можно найти длину локализации  $l = D_q/2$ . Заметим, что остаточные квантовые корреляции [22] ввиду их малости не влияют на скорость диффузии при  $\tau \ll \tau_D$ , а приводят к прекращению диффузии при  $\tau \gg \tau_D$ .

Для вычисления  $C_q(\tau)$  удобно записать оператор  $\sin \hat{\theta}(\tau)$  в нормальной форме по отношению к операторам  $\hat{\theta}(0)$ ,  $\hat{n}(0)$ , как это было сделано в [21] (например, все  $\hat{n}(0)$  стоят справа от  $\hat{\theta}(0)$ ). Используя полученное в [21] выражение для  $\sin \hat{\theta}(\tau)$  и считая, что распределение в фазовом пространстве является приблизительно однородным, так что

$$\langle 0 | e^{im_1 \hat{\theta}(0)} e^{im_2 \hat{n}(0)} | 0 \rangle = \delta_{m_1, 0} \delta_{m_2, 0}$$

получим, что первые три корреляции оказываются такими же как в классике, но с заменой  $K \rightarrow K_q = 2k \sin T/2$ . Выражение для  $C_q(4)$



содержит некоторый добавочный член в виде суммы, который, однако, как и  $C(4)$  оказывается, вообще говоря, малым:

$$C_q(4) = \frac{1}{2} \left( J_2^2(K_q) + \sum_{m \neq -2} \left[ J_m(K_q) J_{m+4}(-K_q) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times J_{2m+4} \left( 2k \sin \frac{T}{2} (m+2) \right) - J_m^2(K_q) J_{2m+2} \left( 2k \sin \frac{T}{2} (m+2) \right) \right] \right)$$

Таким образом, скорость квантовой диффузии  $D_q$  при  $T \gtrsim 1$  приближенно дается соотношением (3.4) с заменой параметра  $K$  на его квантовое значение  $K_q = 2k \sin T/2$  (при  $K_q \gtrsim 5$ ). Численные данные для длины локализации при  $k=30$ ,  $0 < T < 2\pi$  представлены на рис. 2 и удовлетворительно согласуются с теоретическим значением  $l = D_q/2$ . На рис. 2 по горизонтали отложена величина  $K_q$ , которая при  $T \ll 1$  переходит в классический параметр  $K = kT$ . Для  $T > 1$  среднее значение  $\langle \alpha \rangle \approx 0.6$  несколько превышает  $1/2$ , что, по-видимому, связано, как и для  $T < 1$ , с недостаточно большим значением отношения  $l/k$ . Из (3.4) следует, что период осцилляций равен  $\delta K_q \approx 2\pi$  (рис. 2). Отсюда получаем период осцилляций  $l/D_{ql}$  по  $k$  при фиксированном  $T$ :  $\delta k \approx \frac{\pi}{\sin T/2}$ . Такие осцилляции для  $T=1, 2$  действительно наблюдались в [30]. Их период удовлетворительно согласуется с полученным значением.

Таким образом, длина локализации существенно зависит от параметра  $T$  и приближение случайного потенциала (фазы  $\chi_n$  — случайны и независимы), предложенное в [25] неправомерно. Задача со случайными  $\chi_n$  соответствует случайной фазе  $\theta \propto \frac{\partial \chi_n}{\partial n}$  в (3.2) (см. (5.2)) и квазилинейной скорости диффузии  $D = D_{ql} = k^2/2$ . При этом длина локализации  $l = k^2/4$ , что при  $k \gtrsim 10$  удовлетворительно согласуется с нашими результатами для случайных  $\chi_n$  и численными данными [30]. Отметим, что эмпирическое значение показателя для степенной зависимости  $l$  от  $k$ , полученное в [30], оказалось меньше 2 из-за учета в интерполяции области с малыми  $k \sim 1$ , в которой квазиклассическое приближение неприменимо.

## 7. СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Пусть в начальный момент времени система находится в состо-

янии, например, с  $n=0$ . Найдем стационарное распределение, устанавливающееся при  $\tau \gg \tau_D$ . Оно получается путем усреднения вероятностей  $|\Psi(n, \tau)|^2$  на уровнях  $n$  по времени:

$$\bar{f}(n) = \overline{|\Psi(n, \tau)|^2} = \sum_m |\varphi_m(0) \varphi_m(n)|^2, \quad (7.1)$$

где  $\varphi_m(n)$  — СФКЭ с  $\omega_m$ . Отметим, что  $\bar{f}(n)$  является аналогом коррелятора плотность-плотность в твердом теле [26]. Поскольку СФКЭ экспоненциально локализованы, то их можно приближенно представить в виде следующего выражения ( $|n| \rightarrow \infty$ )

$$|\varphi_m(n)| \propto e^{-|n-m|/l + \xi_{nm}}, \quad (7.2)$$

где величина  $\xi_{nm}$  характеризует флуктуации вокруг средней экспоненциальной зависимости, причем  $\langle \xi_{nm} \rangle = 0$ . Учитывая, что в среднем

$$\langle |\varphi_m(n)|^2 \rangle \approx \frac{1}{l_s} e^{-2|n-m|/l_s}, \quad (7.3)$$

из (7.1) получаем

$$\bar{f}(n) \approx \frac{1}{2l_s} e^{(-2|n|/l_s)} \left( 1 + \frac{2|n|}{l_s} \right), \quad \bar{n}^2 = l_s^2. \quad (7.4)$$

Величина  $l_s$  может отличаться от длины локализации СФКЭ  $l$ . Причина этого связана с флуктуациями  $\xi_{nm}$ . Так в случае гауссовых флуктуаций с  $\langle (\Delta \xi_{nm})^2 \rangle = D_\xi |\Delta n|$  имеем ( $m=0$ )

$$|\varphi_0(n)| \sim \int_{n/l}^{\infty} e^{-n/l + \xi} e^{-\xi^2/(2D_\xi n)}. \quad (7.5)$$

После вычисления интеграла получаем

$$\frac{1}{l_s} = \frac{1}{l} - \frac{D_\xi}{2}, \quad D_\xi l < 1, \quad \frac{1}{l_s} = \frac{1}{2l^2 D_\xi} \quad D_\xi l \geq 1. \quad (7.6)$$

Аналогичное явление хорошо известно в твердом теле [26].

Пример стационарного распределения показан на рис. 4. В пределах статистических флуктуаций закон (7.4) выполняется в огромном диапазоне ( $0 \lesssim x \lesssim 25$ ), охватывающем около 10 порядков изменения  $\bar{f}_N$ . Типичная крупномасштабная структура связана, по-видимому, с сильными флуктуациями величины  $\xi_{nm}$  (см. (7.5)).

В численных экспериментах длина локализации  $l_s$  определялась



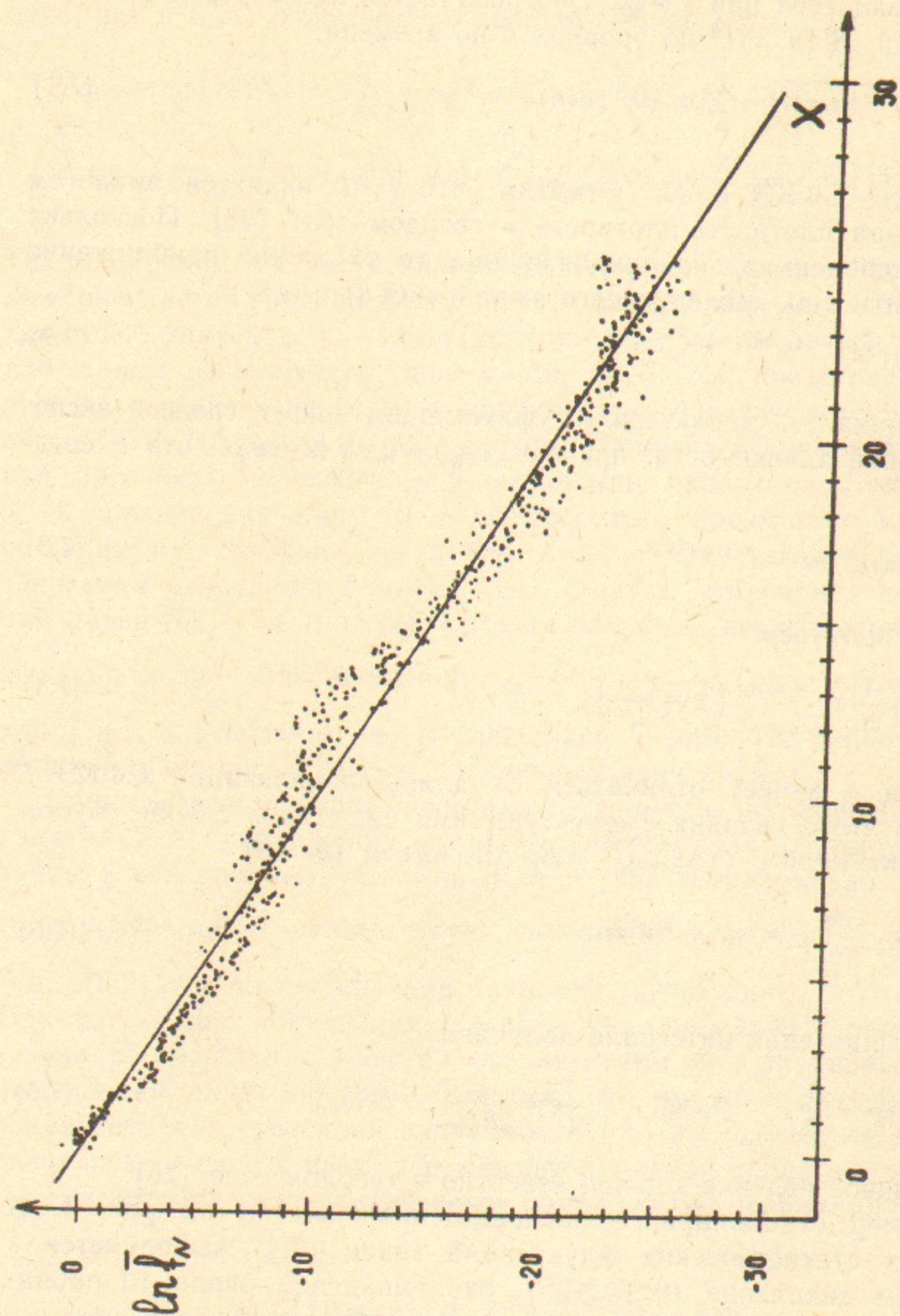


Рис. 4. Пример стационарного распределения для  $k=10$ ,  $T=0.5$ ,  $K=5$ :  $x=2n/l$ ,  $\bar{f}_N = \bar{f}(n)2l/(1+x)$ . Прямая  $\bar{f}_N = e^{-x}$ .

из стационарного распределения на основе соотношения (7.4). Согласно (4.2) отношение

$$\alpha_s = l_s/D = l_s T^2/D_0 \quad (7.7)$$

не должно зависеть от параметров модели (3.1) (в области (5.6)). На рис. 3 приведены численные данные [17] для зависимости  $l_s T^2$  от  $D_0$ . Видно, что в диапазоне, охватывающем почти 4 порядка, ожидаемая зависимость (7.7) действительно выполняется, причем среднее значение  $\langle \alpha_s \rangle = 1.04 \pm 0.03$  очень близко к единице. Квантовый параметр возмущения  $k$  изменялся в интервале  $5 \div 120$ ,  $T \leq 1$ ,  $l = 9 \div 180$ . Сравнение этих данных с длиной локализации СФКЭ, полученной методом ПЛ, отчетливо показывает, что  $l_s \approx 2l$ . Из этого соотношения определяем скорость диффузии  $\xi_{nt}$ :  $D_\xi \approx 1/l \approx 2/D$ . Прямое вычисление  $D_\xi$  методом ПЛ подтверждает это соотношение ( $\langle l D_\xi \rangle = 1.14$ ).

До сих пор мы рассматривали свойства СФКЭ и стационарного распределения при больших  $n \gg l$ . Вместе с тем значительный интерес представляет их поведение при не слишком больших  $n \sim l$ . Действительно, именно оно определяет, например, среднюю энергию стационарных колебаний  $E_s = \langle n^2/2 \rangle$ . Если  $\bar{f}_n$  имеет вид (7.4), то  $E_s = D^2/2$ . Полученные численные данные удовлетворительно согласуются с этим значением:  $\langle 2E_s/D^2 \rangle = 0.92 \pm 0.04$ . Тем не менее в этой области наблюдается ряд особенностей, которые требуют более подробных исследований. Одной из них является наличие узких пиков в центре некоторых СФКЭ, ширина которых  $\Delta l$  значительно меньше средней длины локализации  $l$ . Такие пики наблюдаются не для всех СФКЭ, но оказываются довольно типичными. Причина их появления пока не вполне понятна. Возможно, что это есть просто проявление флуктуаций СФКЭ. Альтернативное объяснение может заключаться в том, что СФКЭ представляет собой суперпозицию векторов, соответствующих различным показателям  $\gamma_i$ . Эти вопросы требуют дальнейших исследований.

#### 8. МОДЕЛЬ ХАОТИЧЕСКОЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ УРОВНЕЙ ЭНЕРГИИ

Рассмотренная выше модель квантового ротатора представляет собой неавтономную систему, для которой существен тот факт, что энергия под действием периодического возмущения может расти



неограниченно со временем. Тем не менее для типичных иррациональных значений  $T/4\pi$  и любого конечного  $k$  имеет место квантовая локализация хаоса, связанная с тем, что все собственные СФКЭ локализованы в бесконечном импульсном пространстве. Поэтому спектр квазиэнергий в общем случае оказывается дискретным, а делокализация и непрерывный спектр, как уже отмечалось выше, имеют место лишь для квантового резонанса и специальных значений  $T$ .

В этом разделе будет описана модель консервативной системы с конечным числом уровней энергии, позволяющая сравнительно просто исследовать спектральные свойства и структуру собственных функций. Эта модель связана с рассмотренной выше моделью ротатора (3.1) и основана на построении некоторой конечной унитарной матрицы  $U_{mn}$ .

Для построения модели удобно исходить из свойств системы (3.1) в квантовом резонансе, т. е. когда  $T=4\pi r/N$ , где  $r, N$  — целые несократимые числа. В работе [23] было показано, что в этом случае любая собственная функция квазиэнергии в  $\theta$ -пространстве представляет собой «гребенку»  $\delta$ -функций с периодом  $2\pi/N$  и различными комплексными амплитудами для каждого  $\delta$ -пика. Эти собственные функции являются собственными векторами некоторой унитарной матрицы  $S_{mn}$  размера  $N \times N$ , зависящей от некоторого непрерывного параметра  $\theta_0$ , который меняется в пределах  $0 \leq \theta_0 \leq 2\pi/N$ . В соответствии с этим для квантового резонанса спектр квазиэнергий является непрерывным и состоит из  $N$  зон, ширина которых зависит от динамических параметров системы  $k, T$ . Значение параметра  $\theta_0$  задает положение первого  $\delta$ -пика для каждой из  $N$  СФКЭ относительно  $\theta=0$ .

Исходя из свойств собственных функций в  $\theta$ -пространстве, нетрудно увидеть, что в импульсном пространстве СФКЭ аналогичны блоховским функциям для квазиимпульса в периодическом кристалле. В частности, при сдвиге на период  $N$  собственная функция в импульсном пространстве умножается на фазовый множитель  $\exp(-iN\theta_0)$ . В дальнейшем будем рассматривать только такие СФКЭ, для которых  $\theta_0=0$ . Это означает, что из полного набора (континуума) СФКЭ исходной системы (3.1) мы выбираем конечное число функций, периодических в бесконечном импульсном пространстве. Каждой из этих  $N$  собственных функций соответствует квазиэнергия  $\omega$ , принадлежащая одной из  $N$  зон непрерывного спектра. Таким образом, фиксируя  $\theta_0=0$ , мы получаем систему с периодическим фазовым пространством, как по фазе  $\theta$ , так и по

импульсу  $n$ . Динамика такой системы будет полностью определяться конечной унитарной матрицей  $U_{mn}$ , соответствующей квантовому резонансу системы (3.1) при  $\theta_0=0$ .

Матрицу  $U_{mn}$  можно получить из унитарной матрицы  $S_{mn}$  для квантового резонанса (см. [23]) путем перехода к импульсному представлению. Ее удобно представить в следующем симметричном виде:

$$U_{mn} = G_{mm'} B_{m'n'} G_{n'n} \quad (8.1)$$

Здесь диагональная матрица  $G_{ll'}$  соответствует свободному вращению ротатора в течение полупериода  $T/2$  между толчками:

$$G_{ll'} = \exp\left(i\frac{T}{4}l^2\right) \delta_{ll'} \quad (8.2)$$

в то время как матрица  $B_{m'n'}$  описывает результирующее действие толчка:

$$B_{m'n'} = \frac{1}{N} \sum_{l=-N_1}^{N_1} \exp\left(-ik \cos \frac{2\pi}{N}l\right) \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}l(m'-n')\right) \quad (8.3)$$

Значение  $N_1$  в выражении для  $B_{m'n'}$  равно  $N_1=(N-1)/2$ , поэтому  $N$  (в этом представлении) должно быть нечетным числом. Аналогично, все индексы в (8.1) меняются в тех же пределах от  $-N_1$  до  $N_1$ .

Таким образом, матрица  $U_{mn}$  описывает преобразование  $\Psi$ -функции ( $N$ -мерного вектора) в представлении невозмущенного гамильтониана  $H_0 = \hat{n}^2/2$  через период  $T$  в моменты времени точно посередине между толчками. Нетрудно показать, что матрица  $U_{mn}$  имеет симметрию  $U_{mn} = U_{-m, -n}$ , это соответствует тому, что в системе сохраняется пространственная четность ( $P$ -инвариантность) при отражении  $\theta \rightarrow -\theta$ . Поэтому собственные функции  $\varphi_n$  матрицы  $U_{mn}$  оказываются также симметричными или антисимметричными и в импульсном пространстве:  $\varphi_n = \pm \varphi_{-n}$ . Кроме того, система также инвариантна по отношению к изменению знака у времени  $t \rightarrow -t$  ( $T$ -инвариантность). Можно показать, что это эквивалентно наличию дополнительной симметрии  $U_{mn} = U_{-n, -m}$ . В результате матрица  $U_{mn}$  оказывается симметричной относительно обеих главных диагоналей.

Переходя к физическому смыслу полученной выше модели (8.1—8.3), прежде всего отметим, что она может рассматриваться как квазиклассический аналог стандартного отображения (3.2), замкнутого на торе по обоим каноническим переменным  $\theta$  и  $n$ . Ди-



динамика такой модели будет определяться двумя независимыми параметрами  $k$  и  $T$ , а переход к классическому пределу осуществляется при одновременном стремлении  $k \rightarrow \infty$ ,  $T \rightarrow 0$  ( $K = kT = \text{const}$ ) и увеличении числа уровней квазиэнергии  $N \rightarrow \infty$  при  $NT = 2\pi m_0$ . Здесь  $m_0$  — число фазовых «квадратов» соответствующего классического отображения (3.2), через которое происходит замыкание по импульсу  $n$ . Вследствие рациональности значений  $T/4\pi = r/N$  это число должно быть равным  $m_0 = 2r$ . В такой модели с конечным числом  $N$  уровней квазиэнергии  $\theta$ -пространство является непрерывным и волновая функция  $\Psi(\theta, t)$  представляется в виде суммы конечного числа фурье-гармоник по  $\theta$ . Похожие модели с конечным числом уровней в переменном поле исследуются в работах [31—34].

Заметим, что модель (8.1—8.3) может быть использована и для исследования квантового резонанса в системе (3.1) на множестве периодических СФКЭ с  $\theta_0 = 0$ . Однако в этом случае, в силу неограниченности импульсного пространства, фазовое пространство будет дискретно также и по фазе  $\theta$ . Первый пример модели такого типа с дискретным фазовым пространством по обоим переменным  $(n, \theta)$  для простого отображения, хаотического в классическом пределе, рассмотрен в работе [35].

Однако модель (8.1—8.3) имеет и более широкое значение. Такая модель может рассматриваться также и как модель некоторой консервативной системы с конечным числом уровней энергии на замкнутой энергетической поверхности. Тем самым модель (8.1—8.3) представляется нам весьма удобной для исследования статистических свойств квантового хаоса консервативных систем, стохастических в классическом пределе.

## 9. СТАТИСТИКА УРОВНЕЙ ЭНЕРГИИ ХАОТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В последнее время появилось большое число работ, посвященных исследованию статистических свойств спектра энергии для различных консервативных квантовых систем (см., например, обзоры [36—37]). Для количественного описания используются разные статистические тесты (см. [38]), в частности, распределение  $P(s)$  расстояний между соседними уровнями энергии в спектре системы. Зависимость  $P(s)$  является одной из важных характеристик в теории Вигнера-Дайсона [39—40] при статистическом описании

сложных квантовых систем, таких, например, как тяжелые ядра и атомы. В простейшей форме зависимость  $P(s)$  имеет вид [40]:

$$P(s) = A s^\beta e^{-Bs^2}, \quad (9.1)$$

где  $A$  и  $B$  — нормировочные константы, а  $\beta$  — параметр, определяющий степень расталкивания близких ( $s \rightarrow 0$ ) уровней. Эффект расталкивания, впервые экспериментально обнаруженный в работе [41], считается типичным для квантовых систем, стохастических в классическом пределе (см., например, [42]). Значение параметра  $\beta = 1; 2; 4$ , как показано в [40], связано с симметрией исходной системы. Имеющиеся экспериментальные данные дают лишь качественное согласие с зависимостью (9.1) для  $\beta = 1$  (см. [43—44]). То же самое можно сказать и о численных экспериментах с простыми квантовыми моделями (см., например, обзоры [36—37, 42]). Исключение составляет билиард Синая, для которого численные данные дают прекрасное соответствие с (9.1) для  $\beta = 1$ . В последнее время появились также численные результаты и для зависимости (9.1) с  $\beta = 2$  [46—47], хотя экспериментально такое распределение пока не наблюдалось.

В численных экспериментах [48—49] было показано, что распределение Вигнера-Дайсона (9.1) возникает также и в неавтономных системах, хаотических в классическом пределе (см. также [50—51]). В этом случае зависимость описывает распределение расстояний между соседними уровнями квазиэнергий, лежащих в интервале  $2\pi/T$ , где  $T$  — период возмущения.

Численные данные, приведенные в [48—49] получены для разных вариантов рассмотренной в разделе 8 модели (8.1—8.3). В этих работах была подробно исследована предельная статистика уровней квазиэнергии для больших значений  $k \gg N$ , т. е. в том случае, когда возмущение на одном периоде эффективно связывает все уровни невозмущенной системы. Результаты показали прекрасное соответствие с теоретическим законом (9.1) как для  $\beta = 1$ , так и для  $\beta = 2$ .

Значение  $\beta$  целиком определяется симметрией конечномерной матрицы, описывающей систему, и, как было показано в [49], особым образом зависит от симметрии невозмущенного движения  $H_0$  и симметрии возмущения  $V$ . В частности, было обнаружено, что в отличие от теории Вигнера-Дайсона, при нарушении  $T$ -инвариантности (временной четности) значение  $\beta$  может быть равным  $\beta = 1$ . Это наблюдается тогда, когда возмущение  $V$  имеет спе-



циальную симметрию, при которой сохраняется  $TP$ -инвариантность (симметрия при одновременном отражении  $t \rightarrow -t$  и  $\theta \rightarrow -\theta$ ). В более общем виде этот эффект рассмотрен в работах [52—53].

В рассматриваемой модели (8.1—8.3) с ограниченным фазовым пространством появляется новый физический параметр  $\Lambda = l/N_1$ , характеризующий относительную длину локализации  $l$  в сравнении с полным размером фазового пространства. При этом  $l$  определяется соотношением (5.4) для модели (3.1) в бесконечном фазовом пространстве.

Напомним, что речь идет о той области параметров системы, когда соответствующая классическая система является хаотической. Поэтому можно ожидать, что для модели (8.1—8.3) при  $K = kT \gg 1$  и  $l \gg N_1$  распределение  $P(s)$  будет близким к зависимости (9.1). На рис. 5 представлены численные данные для  $k \approx 20$  при размере матрицы  $U_{mn}$ , равном  $N = 51$ . Отметим, что в отличие от работ [48—49] здесь значение  $k$  меньше, чем размерность  $N_1$  пространства собственных функций, (см. раздел 10), которая, в силу симметрии системы равна  $N_1 \approx N/2$ . В данном случае  $\Lambda = l/N_1 \approx 5$ , что значительно больше единицы. В качестве  $s$  берется расстояние между соседними значениями квазиэнергии  $\omega_n$ , вычисленными по собственным значениям  $\lambda_n = \exp(i\omega_n)$  унитарной матрицы  $U_{mn}$ . Точность вычислений контролировалась по отклонению модуля  $\lambda_n$  от единицы и была достаточно высокой ( $\delta\lambda \equiv |\lambda| - 1 \lesssim 10^{-5}$ ). Вследствие симметрии при отражении  $\theta \rightarrow -\theta$  в системе (8.1—8.3) сохраняется четность, т. е. собственные функции  $\varphi_n$  либо симметричны, либо антисимметричны  $\varphi_n = \pm \varphi_{-n}$ . Поэтому статистическая обработка проводилась отдельно для четных и нечетных состояний и после этого данные суммировались. Кроме того, для улучшения статистики суммировались результаты 20 серий с различными значениями  $k$  в интервале  $k \approx 20 \pm 2$  (с шагом  $\Delta k = 0.2$ ). В итоге полное число собственных значений составило  $M = 20 \times 51 = 1020$ .

Соответствие численных результатов (рис. 5) с зависимостью (9.1) подтверждается обработкой по критерию согласия  $\chi^2$  ( $\chi^2_{24} \approx 28.6$  с  $P_w \approx 25\%$  уровнем значимости). Заметим, что использование критерия согласия  $\chi^2$  позволяет обнаружить принципиальные отклонения от предполагаемой аналитической зависимости, которые незаметны при простом сравнении «на глаз» (см. также раздел 10).

Особо следует подчеркнуть, что распределение (9.1) возникает в чисто динамической модели (8.1—8.3), поэтому унитарную мат-

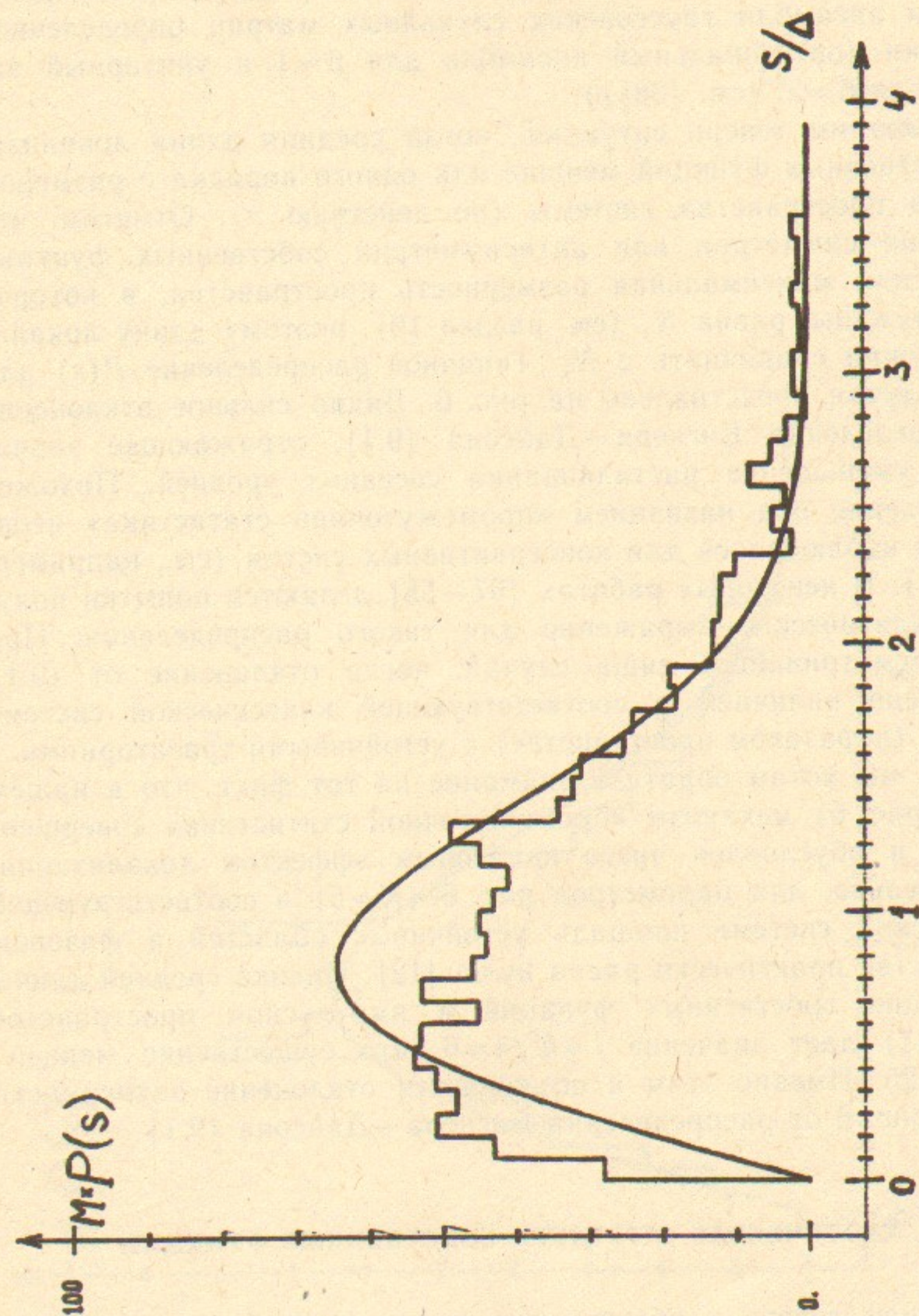


Рис. 5. Распределение расстояний между соседними уровнями квазиэнергии модели (8.1—8.3) для  $k \approx 20$ ;  $T = 16\pi/N$ ,  $K \approx 20$ ,  $\Delta k = 0.2$ ,  $\Lambda = 2\pi/N_1$ . Плавная кривая — аналитическая зависимость (9.1) с  $\beta = 1$ , ломаная кривая — численные данные для 20 матриц (8.1—8.3) размером  $N = 51$ ,  $l \approx 130$ ,  $\Lambda \approx 5$ .



рицу ни в коей мере нельзя считать случайной. Тем не менее распределение  $P(s)$  собственных значений соответствует распределению для ансамбля гауссовских случайных матриц определенной симметрии (ортогональный ансамбль для  $\beta=1$  и унитарный ансамбль для  $\beta=2$ , (см. [38])).

Рассмотрим теперь ситуацию, когда средняя длина локализации собственных функций меньше или одного порядка с размером фазового пространства системы (по действию  $n$ ). Отметим, что вследствие симметрии или антисимметрии собственных функций фактическая максимальная размерность пространства, в которое они погружены, равна  $N_1$  (см. раздел 10), поэтому длину локализации нужно сравнивать с  $N_1$ . Типичное распределение  $P(s)$  для такого случая представлено на рис. 6. Видно сильное отклонение от распределения Вигнера—Дайсона (9.1), отражающее значительное уменьшение расталкивания соседних уровней. Похожее распределение под названием «промежуточная статистика» неоднократно наблюдалось для консервативных систем (см., например, [54—56]). В некоторых работах [57—58] делаются попытки получить аналитическое выражение для такого распределения. При этом рассматривается лишь случай, когда отклонение от (9.1) обусловлено наличием в соответствующей классической системе областей (в фазовом пространстве) с устойчивыми траекториями.

Здесь мы хотим обратить внимание на тот факт, что в нашем случае (рис. 6) механизм «промежуточной статистики» совершенно иной и обусловлен чисто квантовым эффектом локализации. Действительно, для параметров рис. 6 ( $K=5$ ) в соответствующей классической системе площадь устойчивых областей в фазовом пространстве практически равна нулю [12]. Оценка средней длины локализации собственных функций в импульсном пространстве (см. (5.4)) дает значение  $l \approx k^2/4 \approx 6$ , что существенно меньше, чем  $N_1 \approx 25$ . Именно этим и объясняется отклонение зависимости  $P(s)$  на рис. 6 от распределения Вигнера—Дайсона (9.1)

#### 10. ХАОТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Перейдем теперь к обсуждению структуры собственных функций рассматриваемой модели (8.1—8.3). Согласно работе [59], эргодичности классической консервативной системы соответствует эргодичность собственных функций квантовой системы в квазиклас-

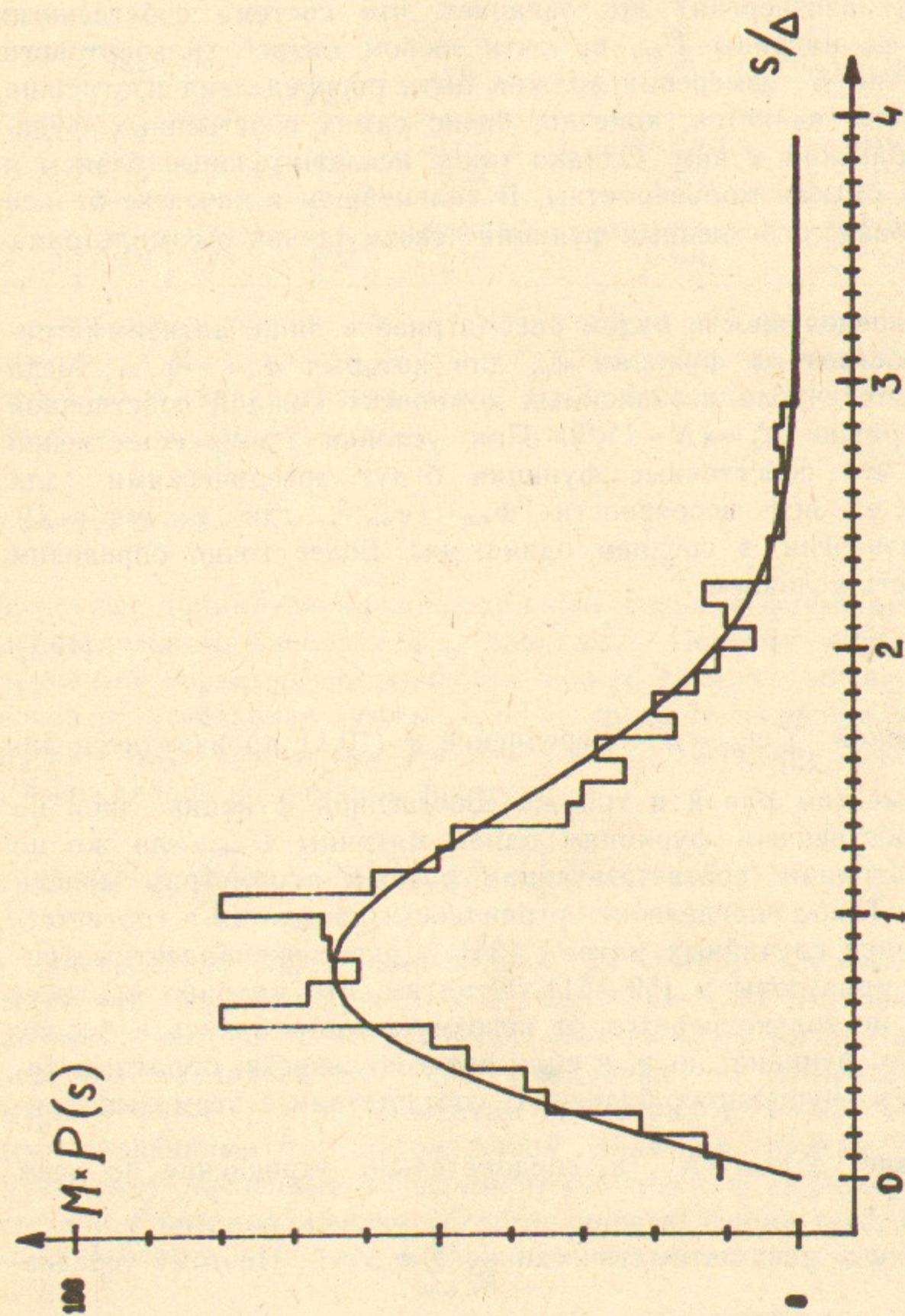


Рис. 6. То же, что на рис. 5, для  $k \approx 5$ ;  $T = 16\pi/N$ ;  $K \approx 5$ ;  $\Lambda \approx 0.25$ .



сической области. Для нашей модели с конечным числом уровней энергии (квазиэнергии) это означает, что система собственных функций  $\varphi_n$  матрицы  $U_{mn}$  в почти любом базисе гильбертового пространства  $N_1$  измерений должна быть распределена изотропно. Исключением является, конечно, базис самих собственных функций или близкий к ним. Однако такие исключительные базисы в некотором смысле маловероятны. В дальнейшем в качестве базиса выберем базис собственных функций невозмущенного гамильтониана  $H_0$ .

Для определенности будем рассматривать лишь антисимметрические собственные функции  $\varphi_n$ , для которых  $\varphi_n = -\varphi_{-n}$ . Тогда максимальное число независимых компонент каждой собственной функции равно  $N_1 = (N-1)/2$ . При условии  $l \gg N_1$  естественно ожидать, что собственные функции будут эргодическими (для  $K \gg 1$ ), т. е. все вероятности  $\omega_{nm} = |\varphi_{nm}|^2$ , где  $\varphi_{nm} \equiv \varphi_n(\omega_m)$ ,  $\omega_m$  — квазиэнергия, в среднем одинаковы. Более точно определим эргодичность условием

$$\langle \omega_{nm} \rangle = 1 \quad (10.1)$$

с нормировкой  $\sum_{n=1}^{N_1} \omega_{nm} = N_1$ . Усреднение в (10.1) производится либо по элементам одной и той же собственной функции, либо по разным собственным функциям одной матрицы  $U_{mn}$ , или же по разным матрицам, соответствующим разным параметрам модели (8.1—8.3). Такое определение эргодичности находится в соответствии с теорией случайных матриц [34]. Другие эквивалентные определения приведены в [59—61]. Отметим, что матрица  $\varphi_{nm}$  осуществляет не только переход от невозмущенного базиса к базису собственных функций, но и, в силу ортогональности, обратный переход к невозмущенному базису. В соответствии с этим выполняется условие  $\sum_{m=1}^N \omega_{nm} = N_1$ , и, следовательно, усреднение по всем элементам  $\omega_{nm}$  дает автоматически  $\frac{1}{N_1} \sum_{n,m} \omega_{nm} = 1$ . Поэтому усреднение (10.1) следует проводить только по части элементов, принадлежащих одной матрице.

Некоторые численные результаты исследования эргодичности собственных функций приведены в таблице для  $N=51$  (соответственно,  $N_1=25$ ),  $T/4\pi = 4/N$ ,  $m_0=8$ .

					Дисперсия $\sigma^2$		
					$L=1$	5	12
					$N_S=625$	25	4
Теория (10.4)					1.77	0.05	0.0036
$K$	$k$	$\Lambda$	$\Delta k$	$N_m$			
19.7	20.0	5	—	1	$1.74 \pm 0.14$	$0.038 \pm 0.014$	$0.0041 \pm 0.0010$
$\approx 20$	$\approx 20$	5	0.2	20	0.88	0.022	0.0028
5.0	5.0	0.25	—	1	$2.80 \pm 0.58$	$0.215 \pm 0.057$	$0.0015 \pm 0.0012$
$\approx 5.0$	$\approx 5.0$	0.25	0.1	20	1.18	0.044	0.005

Средние значения  $\langle \omega_{nm} \rangle$  вычислялись следующим образом. Каждая из  $N_m$  матриц с близкими значениями параметра  $k$  разбивалась на  $N_S$  квадратов размером  $L \times L$ , и для каждого квадрата с индексом  $i=1, 2, \dots, N_S$  находилась сумма

$$S_i = \frac{1}{L^2} \sum_{n,m} \omega_{nm}. \quad (10.2)$$

Численные данные обнаруживают очень сильные флуктуации каждого отдельного элемента  $\omega_{nm}$  для  $l \gg N_1$ . Поэтому указанием на случайный характер эргодичности может служить убывание дисперсии  $\sigma^2$  отклонения суммы  $S_i$  от ее среднего значения, при увеличении числа слагаемых в сумме (10.2). Дисперсия средних для  $S_i$  вычислялась по обычной формуле:

$$\sigma^2(L) = \frac{1}{N_S} \sum_{i=1}^{N_S} (S_i - \langle S \rangle)^2; \quad \langle S \rangle = \frac{1}{N_S} \sum_{i=1}^{N_S} S_i. \quad (10.3)$$

Дисперсия в (10.3) вычислялась для каждого элемента матрицы ( $L=1$ ), а также для сумм  $S_i$ , полученных из двух вариантов разбиения матриц ( $L=5$  и  $L=12$ ). Для каждого варианта в свою очередь проводилось два типа усреднения — по элементам одной матрицы ( $N_m=1$ ) и по элементам 20 матриц ( $N_m=20$ ) с различными значениями  $k$  с шагом  $\Delta k \ll k$ . Значения средних  $\langle S \rangle$ , как показывают численные эксперименты, близки к единице, в соответствии с предположением об эргодичности. Кроме того, как видно из таблицы, для  $\Lambda > 1$  значения  $\sigma^2$  сильно падают с увеличением  $L$ .

Теоретическое значение ( $\sigma^2$ ) для дисперсии можно получить из распределения для элементов случайной матрицы с учетом корреляций между элементами вследствие конечности матрицы



(см., например, [38]):

$$(\sigma^2)_r = 2 \frac{(N_1 - L)^2}{L^2(N_1 - 1)(N_1 + 2)}. \quad (10.4)$$

При выводе этой формулы фактически используется определенный вид флуктуаций элементов  $\varphi_{nm}$  случайной унитарной матрицы (см. ниже). В этом смысле сравнение численных данных для  $\sigma^2$  с выражением (10.4) позволяет получить также информацию и о характере флуктуаций элементов собственных векторов  $\varphi_{nm}$ .

Рассмотрим подробнее случай больших значений  $k \approx 20$ , когда длина локализации  $l \approx 130$  значительно превышает максимальную размерность  $N_1$  собственных функций модели (8.1—8.3). Из таблицы видно, что дисперсия  $\sigma^2$  для одной матрицы ( $N_m = 1$ ) достаточно хорошо совпадает с ожидаемым значением (10.4). Указанное в таблице среднеквадратичное отклонение получено по данным  $\sigma^2$  для 20 различных матриц с близкими значениями  $k$  (см. строку с  $N_m = 20$ ). В то же время усреднение по 20 матрицам ( $N_m = 20$ ) не дает ожидаемого уменьшения (в 20 раз) дисперсии по сравнению с усреднением только по элементам одной матрицы. Это может означать, что изменение параметра  $k$  недостаточно большое, чтобы собственные функции разных матриц были полностью независимыми.

Теперь перейдем к случаю, когда длина локализации  $l$  существенно меньше, чем  $N_1$  (две нижние строки таблицы). Для усреднения по одной матрице ( $L = 1$ ) неэргодичность собственных функций хорошо подтверждается данными для  $L = 1$  и  $L = 5$  (значения  $\sigma^2$  существенно больше теоретического  $(\sigma^2)_r$ ). В то же время обращает на себя внимание аномально малое значение  $\sigma^2$  для  $L = 12$ . Этот результат можно объяснить следующим образом. Как видно, в этом случае длина локализации собственных функций сравнима с размером  $L$ , на котором происходит усреднение. Это означает, что собственная функция может целиком быть сосредоточена внутри интервала усреднения. Соответственно, на остальных участках появляется большое число нулей и, как следствие, сильная корреляция между значениями сумм  $S_i$ . В целом данные для  $\Lambda \approx 0.25$  явно указывают на сильное нарушение эргодичности СФКЭ в сравнении с  $\Lambda \approx 5$ . Особенно хорошо это заметно по дисперсии, вычисленной по блокам размером  $L = 5$ .

Другим свойством, отражающим случайный характер собственных функций, может служить функция распределения для отклонений компонент  $\varphi_{nm}$  от среднего значения  $\langle \varphi_{nm} \rangle = 0$ . Ранее уже высказывались предположения [60, 62—64] о гауссовом характере

флуктуаций собственных функций для систем, хаотических в классическом пределе, однако до настоящего времени подтверждения этой гипотезы не было известно.

Для дальнейшего рассмотрения перейдем к действительным матрицам  $U_{mn}^{(1)}$  и  $U_{mn}^{(2)}$ , являющимся действительными и мнимыми компонентами исходной матрицы  $U_{mn}$  (см. (8.1—8.3)):  $U_{mn} = U_{mn}^{(1)} + iU_{mn}^{(2)}$ . Можно показать, что вследствие унитарности и симметричности матрицы  $U_{mn}$  действительные и мнимые части собственных функций  $\varphi_n$  связаны простым соотношением:  $\text{Re} \varphi_n = \pm \text{Im} \varphi_n$ . Поэтому размерность собственных функций матриц  $U_{mn}^{(1)}$  и  $U_{mn}^{(2)}$  та же, что и у исходных собственных функций  $\varphi_n$ . К тому же квадраты компонент собственных функций матриц  $U_{mn}^{(1)}$  и  $U_{mn}^{(2)}$  равны между собой и равны квадрату модуля компонент собственных функций  $\varphi_n$ . Исходя из этого, исследуем, например, более детально статистические свойства собственных функций  $\Psi_n$  матрицы  $U_{mn}^{(1)}$ .

Естественно теперь предположить, в духе случайных матриц [34], что в предельном случае делокализации ( $\Lambda \gg 1$ ,  $K \gg 1$ ) компоненты всех ее собственных функций  $\Psi_n$  должны быть распределены в соответствии с нормальным распределением:

$$\omega(\Psi_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle\Psi_n^2\rangle}} e^{-\Psi_n^2/2\langle\Psi_n^2\rangle} \quad (10.5)$$

Численные данные распределения компонент  $\Psi_n$  для  $\Lambda \approx 5$  представлены на рис. 7. Здесь так же, как и ранее, рассматриваются только антисимметричные собственные функции  $\Psi_n = -\Psi_{-n}$ , поэтому распределение построено для  $N_1 = (N-1)/2$  независимых компонент каждой собственной функции  $\Psi_n$  ( $n = 1, \dots, N_1$ ). Кажется, что кривая I, соответствующая гауссовому распределению (10.5), хорошо совпадает с результатом численного эксперимента. Однако это впечатление обманчиво, поскольку количественное сравнение по критерию согласия  $\chi^2$  с определенностью указывает на чрезвычайно плохое соответствие. Действительно, значение  $\chi_{38}^2$  в этом случае равно  $\approx 98$  (для 38 степеней свободы), что дает очень малую вероятность  $P_w < 10^{-6}$ . Таким образом, численные данные обнаруживают негауссовый характер распределения  $\Psi_n$ .

Объяснение этому факту заключается в том, что выражение (10.5) получено в пределе бесконечно больших случайных матриц ( $N_1 \rightarrow \infty$ ). Более точное выражение для  $\omega(\Psi_n)$  с учетом конечности гильбертового пространства собственных функций эквивалентно



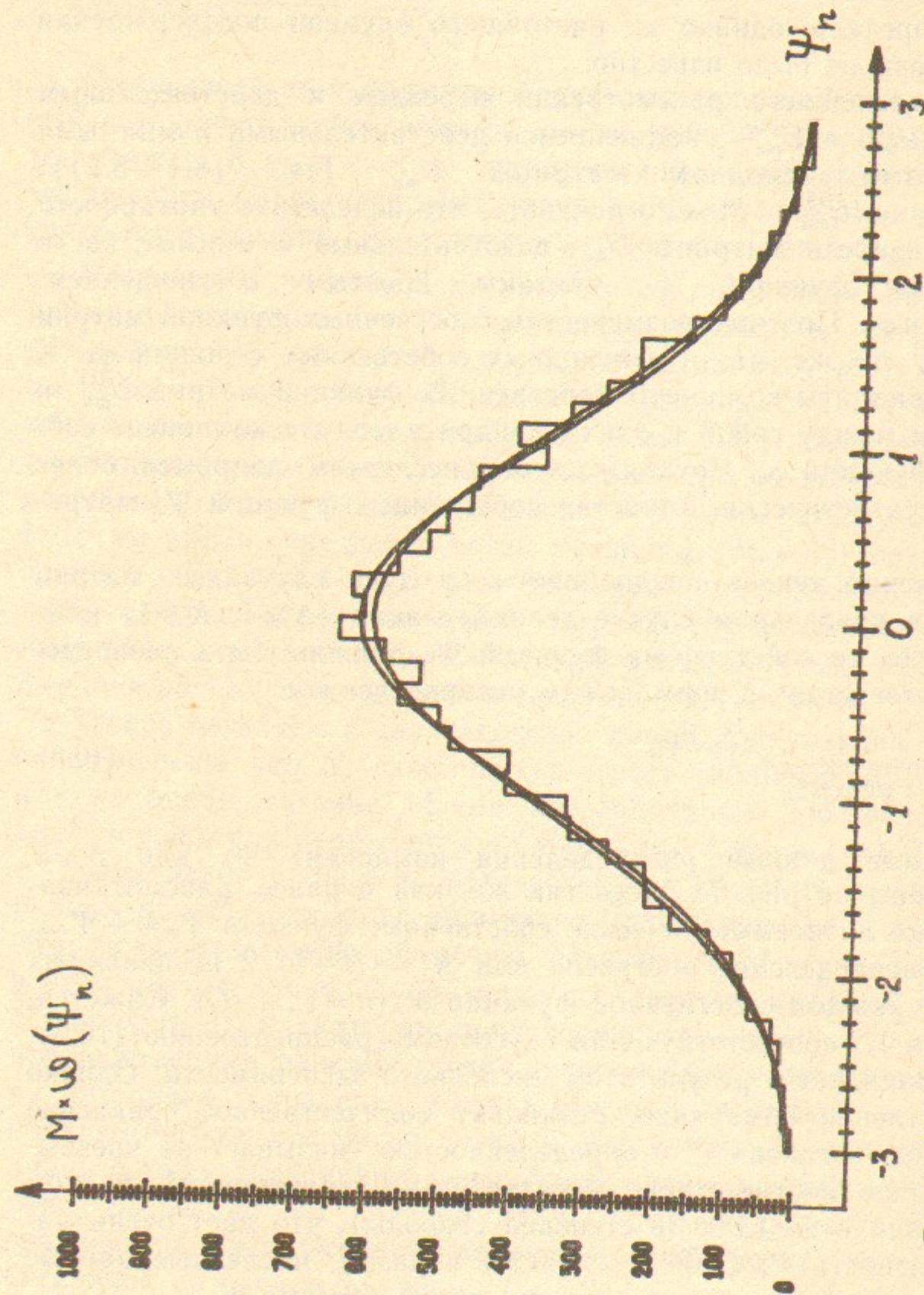


Рис. 7. Распределение компонент  $\Psi_n$  собственных функций (ломаная кривая) в базе невозмущенного гамильтониана  $H_0$  для параметров рис. 5, суммирование по 20 матрицам, полное число компонент  $\Psi_n$  равно  $M = 25 \times 25 \times 20 = 12500$ .  $\langle \Psi_n^2 \rangle = m_2 = 1$ . Кривая I — асимптотическая теоретическая зависимость (10.6) с учетом конечного числа состояний на энергетической поверхности; кривая II — изотропное распределение.

микрочаноническому распределению  $\Psi_n$  — векторов [38]:

$$\omega_N(\Psi_n) = \frac{\Gamma(N_1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{N_1-1}{2}\right)} (1 - \Psi_n^2)^{(N_1-3)/2}. \quad (10.6)$$

Кривая II на рис. 7, соответствующая выражению (10.6), «на глаз» слабо отличается от кривой I. Однако обработка численных данных по критерию согласия  $\chi^2$  с зависимостью (10.6) дает значение  $\chi_{38}^2 \approx 56$ , с вероятностью  $P_w \approx 5\%$ . Приведенные выше данные весьма поучительны в том смысле, что визуальное сравнение численных данных с теоретическими зависимостями, без обработки по  $\chi^2$ , может привести к потере важных эффектов.

Другая вспомогательная проверка негауссового характера собственных функций  $\Psi_n$  состоит в вычислении моментов функции распределения  $\omega_N(\Psi_n)$ . Для параметров  $k, T$  из рис. 7 (с усреднением по 20 матрицам) первые три четных момента равны:

$$\begin{aligned} \langle m_2^3 \rangle &= \langle \Psi_n^2 \rangle = 0.996; & \sigma_2 &= 0.012; \\ \langle m_4^3 \rangle &= \langle \Psi_n^4 \rangle = 0.888; & \sigma_4 &= 0.030; \\ \langle m_6^3 \rangle &= \langle \Psi_n^6 \rangle = 0.703; & \sigma_6 &= 0.068; \end{aligned} \quad (10.7)$$

Здесь моменты представлены в нормализованном виде, в котором все значения для гауссового распределения должны быть равны единице. В (10.7) указана также среднеквадратичная ошибка отдельного значения момента, вычисленная по 20 различным значениям. Вследствие возможных корреляций между самими значениями ошибка среднего, вообще говоря, не равна  $\sigma_k/\sqrt{20}$ . Тем не менее, даже если взять в качестве ошибки среднего значение  $\sigma_k$ , видно, что отклонение экспериментальных значений  $\langle m_4^3 \rangle$  и  $\langle m_6^3 \rangle$  от единицы нельзя считать случайным. В то же время численные данные для моментов неплохо согласуются с теоретическими значениями, полученными из микрочанонического распределения (10.6):

$$\begin{aligned} m_2 &= 1, \\ m_4 &= \frac{N_1}{2 + N_1} \approx 0.926, \\ m_6 &= \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{N_1}\right) \left(1 + \frac{4}{N_1}\right)} \approx 0.798. \end{aligned} \quad (10.8)$$



Сравнение показывает, что численные значения (10.7) для  $m_k$  совпадают, в пределах ошибки  $\sigma_k$ , с теоретическими значениями (10.8).

Пользуемся случаем выразить признательность М. Берри, О. Боигасу, И. Гварнери, Дж. Казати, М. Робнику, Т. Селигману, У. Смилянскому, И. Фербаршоту и Э. Хеллеру за интересные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.
2. Лухтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
3. Alekseev V.M., Yakobson M.V. Phys. Reports 75 (1981) 287.
4. Chirikov B.V. Intrinsic Stochasticity. In: Proc. Int. Conf. on Plasma Physics, Lausanne, 1984, v.2, p.761.
5. Chirikov B.V., Shepelyansky D.L. Physica D13 (1984) 395.
6. Chirikov B.V., Izrailev F.M., Shepelyansky D.L. Sov. Sci. Reviews 2C (1981) 209.
7. Berman G.P., Zaslavsky G.M. Physica A91 (1978) 450.
8. Casati G., Chirikov B.V., Ford J., Izrailev F.M. Lecture Notes in Physics 93 (1979) 334.
9. Крылов Н.С. Работы по обоснованию статистической физики. М.: АН СССР, 1950.
10. Salat A. Integrable and Nonintegrable Non-KAM Hamiltonians and Magnetic Field Topology. Preprint IPP 6/257, Garching, 1986.
11. Горбань А.Н., Охонин В.А. Область универсальности для статистики энергетического спектра. Препринт ИФСО-29Б. Красноярск, 1983.
12. Chirikov B.V. Phys. Rep. 52 (1979) 263.
13. Casati G., Chirikov B.V., Shepelyansky D.L. Phys. Rev. Lett. 53 (1984) 2525.
14. Greene J.M., J. Math. Phys. 201 (1979) 1183.
15. Rechester A.B., White R.B. Phys. Rev. Lett. 44 (1980) 1586.
16. Rechester A.B., Rosenbluth M.N., White R.B. Phys. Rev. 23A (1981) 2664.
17. Чуриков Б.В., Шепелянский Д.Л. Радиофизика 29 (1986) 1041.
18. MacKay R.S., Meiss J.D., Percival I.C. Physica 13D (1984) 55.
19. Чуриков Б.В. УФН 139 (1983) 360.
20. Casati G., Ford J., Guarneri I., Vivaldi F. Phys. Rev. 34A (1986) 1413.
21. Шепелянский Д.Л. ТМФ 49 (1981) 117.
22. Shepelyansky D.L. Physica 8D (1983) 208.
23. Израйлев Ф.М., Шепелянский Д.Л. ТМФ 43 (1980) 417.
24. Casati G., Guarneri I. Comm. Math. Phys. 95 (1984) 121.
25. Fishman S., Grepel D.R., Prange R.E. Phys. Rev. 29A (1984) 1639.
26. Лифшиц И.М., Гредескул С.А., Пастур Л.А. Введение в теорию неупорядоченных систем. М.: Наука, 1982.
27. Shepelyansky D.L. Phys. Rev. Lett. 56 (1986) 677.
28. Pichard J.L., Sarma G. J. Phys. C14 (1981) L127.
29. MacKinnon A., Kramer B. Phys. Rev. Lett. 47 (1981) 1546; Z. Phys. B53 (1983) 1.

30. Blumel R., Fishman S., Griniasti M., Smilansky U. Localization in the Quantum Description of the Periodically Perturbed Rotor, 1986 (unpublished).
31. Haake F., Kus M., Mostowski J., Scharf R. In: Coherence, Cooperation and Fluctuations, 1986.
32. Haake F., Kus M., Scharf R. Classical and Quantum Chaos for a Kicked Top, 1986, (unpublished).
33. Frahm H., Mikeska H.J. Levelstatistics and Stochasticity in a Driven Quantum System 1986, (unpublished).
34. Kus M., Scharf R., Haake F. Symmetry Versus Degree of Level Repulsion for Kicked Quantum Systems, 1986, (unpublished).
35. Hannay J.H., Berry M.V. Physica 1D (1980) 267.
36. Bohigas O., Giannoni M.-J. Lecture Notes in Physics 209 (1984) 1.
37. Berry M.V. Structures in Semiclassical Spectra: A Question of Scale, In: The Wave-Particle Dualism, by D. Reidel Publ. Comp. p.231, 1984.
38. Brody T.A., Flores J., French J.B., Mello P.A., Pandey A. Wong S.S.M. Rev. of Mod. Phys. 53 (1981) 385.
39. Wigner E.P. Ann. Math. 53 (1951) 36; 62 (1955) 548; 65 (1957) 203; 67 (1958) 325.
40. Dyson F.J. J. Math. Phys. 3 (1962), 140; 157; 166.
41. Гуревич И.И., Певзнер М.И. ЖЭТФ, 31 (1956) 162.
42. Berry M.V. Semiclassical Mechanics of Regular and Irregular Motion. In: Chaotic Behaviour of Deterministic Systems (Les Houches Summer School Lectures (1981)) by North-Holland Publ., 1983, p.171.
43. Haq R.U., Pandey A., Bohigas O. Phys. Rev. Lett. 48 (1982) 1086.
44. Camarda H.S., Georgopoulos P.D. Phys. Rev. Lett. 50 (1983) 492.
45. Bohigas O., Giannoni M.-J., Schmit C. Phys. Rev. Lett. 52 (1984) 1.
46. Seligman T.H., Verbaarschot J.J.M. Phys. Lett. 108A (1985) 183.
47. Berry M.V., Robnik M. J. Phys. A: Math. Gen. 19 (1986) 649.
48. Израйлев Ф.М. Препринт ИЯФ СО АН СССР 84-63. Новосибирск 1984.
49. Izrailev F.M. Phys. Rev. Lett. 56 (1986) 541.
50. Feingold M., Fishman S., Grepel D.R., Prange R.E. Phys. Rev. 31B (1985) 68.
51. Jose J.V., Cordero R. Phys. Rev. Lett. 56 (1986) 290.
52. Robnik M. Berry M.V., J. Phys. A: Math. Gen. 19 (1986) 669.
53. Robnik M. To Appear in the Proceedings of the Second International Conference on Quantum Chaos, Mexico, 6-10 Jan., 1986. (Lecture Notes in Physics)
54. Meyer H.-D., Haller E., Koppel H., Cederbaum L.S. J. Phys. A: Math. Gen. 17 (1984) L831.
55. Seligman T.H., Verbaarschot J.J.M., Zirnbauer M.R. Phys. Rev. Lett. 53 (1984) 215; J. Phys. A: Math. Gen. 18 (1985) 2751.
56. Ishikawa T., Yukawa T. Phys. Rev. Lett. 54 (1985) 1617.
57. Berry M.V., Robnik M. J. Phys. A: Math. Gen. 17 (1984) 2413.
58. Богомольный Е.Б. Письма ЖЭТФ 41 (1985) 55.
59. Шнирельман А.И. УМН, т.29, вып.6, (1974) 181.
60. Berry M.V. J. Phys. A10 (1977) 2083.
61. Voros A. Lecture Notes in Physics 93 (1979) 326.
62. Stechel E.B. Heller E.J. Ann. Rev. Phys. Chem. 35 (1984) 563.
63. Shapiro M., Goelman G. Phys. Rev. Lett. 53 (1984) 1714.
64. Heller E.J., Sunberg R.L. In: Chaotic Behaviour in Quantum Systems. Ed. G. Casati, Plenum Press, New York and London, 1985, v.120, p.255.



*Ф.М. Израйлев, Б.В. Чириков, Д.Л. Шепелянский*

**Квантовый хаос: локализация и эргодичность**

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

---

Работа поступила 22 октября 1986 г.  
Подписано к печати 17 ноября 1986 г. МН 11863  
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 3,4 печ.л., 3,0 уч.-изд.л.  
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 166

---

*Набрано в автоматизированной системе на базе фото-  
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и  
отпечатано на ротапринтере Института ядерной физики  
СО АН СССР.  
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*