ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

23

А.В. Буров, Н.С. Диканский, Д.В. Пестриков

БЫСТРЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПРОДОЛЬНЫХ КОГЕРЕНТНЫХ КОЛЕБАНИЙ РЕЛЯТИВИСТСКОГО СГУСТКА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО С СИСТЕМОЙ БЕЗ ПАМЯТИ

ПРЕПРИНТ 86-41

НОВОСИБИРСК
1986

А Н Н О Т А Ц И Я

Предлагается теория, описывающая линейную стадию развития быстрых продольных когерентных неустойчивостей релятивистского сгустка, взаимодействующего с системой без памяти. Исследуется фундаментальное решение для сгустка произвольной формы с учетом теплового разброса. Объясняется эффект неоднородного разогрева сгруппированного пучка, наблюдавшийся на установках DORIS, SPEAR II

I. Введение

В работе /I/ было установлено, что развитие быстрых однооборотных неустойчивостей в сгруппированных пучках может обладать рядом важных особенностей, обусловленных отсутствием у когерентных колебаний спектра собственных частот. Последний эффект тесным образом связан с незамыканием обратной связи частиц по пучку за время развития неустойчивости. – Движение частиц возмущается запаздывающим полем, наведенным впередиидущими частицами. Малое время развития неустойчивости

$$\tau_\kappa \omega_c \ll 1$$

(ω_c – частота синхротронных колебаний) не позволяет частицам за время τ_κ обменяться азимутальным положением и тем замкнуть обратную связь. В результате раскачка когерентных колебаний при быстрых неустойчивостях оказывается обусловленной резонансным взаимодействием частиц вдоль пучка. Отсутствие когерентных мод является основным отличием быстрых от нормальных (синхротронных и синхробетатронных /2,3/) неустойчивостей. В работе /I/ рассмотрено развитие в пучке поперечных колебаний. Целью настоящей работы является исследование особенностей развития в сгустке быстрых продольных однооборотных неустойчивостей.

Для описания развития в сгустке быстрых однооборотных неустойчивостей можно воспользоваться линеаризованным уравнением:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \hat{V} f = 0 \qquad \text{(I)}$$

$\hat{V}$ – линейно интегродифференциальный оператор, не содержащий времени t явно.

В литературе по когерентным колебаниям сгустков (например /4,5/) обычно предлагается искать решения, гармонически зависящие от времени, т.е. найти спектр оператора $\hat{V}$. Существование и полнота системы собственных функций при этом молчаливо подразумевается. Из теории линейных интегральных уравнений известно, однако, что далеко не всякий оператор обладает такими свойствами. Вольтерровский, например, не имеет спектра вовсе.

Допустим, что когерентное движение является быстрым по сравнению с периодом одночастичных синхротронных колебаний. Тогда действием на частицы полей стационарного состояния можно пренебречь. Положим также, что структура вакуумной камеры является низкодобротной, т.е. поля, наводимые в ней сгустком, за период оборота успевают затухнуть. В этом случае при отсутствии связи продольного движения с поперечными колебаниями линеаризованное уравнение Власова может быть представлено в следующем виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\theta}(p')\frac{\partial f}{\partial \theta} + eE(\theta,t)\frac{\partial f_0}{\partial p'} = 0 \tag{2}$$

Здесь t – время, θ – азимут, p' – импульс частицы, eE – продольная сила, f_0 – стационарная функция распределения. Все величины взяты в лабораторной системе отсчета.

Перейдем к новым переменным, исключив движение сгустка как целого:

$$x = R_0(\theta - \dot{\theta}_0 t)$$
$$p = p' - p'_0 \tag{3}$$

где p'_0 – средний импульс в начальный момент времени, $\dot{\theta}_0 = \dot{\theta}(p'_0)$, $R_0 = R(p'_0)$ – азимутальная частота и среднеорбитальный радиус кривизны частицы со средним импульсом.

В этих переменных

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v(p)\frac{\partial f}{\partial x} + eE(x,t)\frac{\partial f_0}{\partial p} = 0 \tag{4}$$
$$v \equiv \dot{x} = R_0(\dot{\theta} - \dot{\theta}_0)$$

Напряженность электрического поля $E(x,t)$ находится решением уравнений Максвелла для данной геометрии. Пренебрегая действием задних частиц на передние, положим:

$$eE(x,t) = \int_{-\infty}^{x} dx' \rho(x') G(x-x',t) \tag{5}$$

Здесь $\rho(x) = \int f\,dp$ – возмущение плотности, координата определена нарастающей к хвосту сгустка. Допустим, что возмущение функции распределения слабо меняется за время оборота. В этом случае можно пользоваться усредненным выражением для силы:

$$eE(x) = \int_{-\infty}^{x} dx' \rho(x') \bar{G}(x-x')$$

$$\bar{G}(x-x') = \frac{1}{T}\int_0^T G(x-x',t)\,dt$$

Т – период оборота. Переходя от переменной p к переменной v, получим:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} + \dot{v}\frac{\partial f_0}{\partial v} = 0$$

$$\dot{v} + \int_{-\infty}^{x} g(x-x')\rho(x')dx' = 0 \tag{6}$$

$$g(x) = -R_0 \frac{d\dot{\theta}(p)}{dp}\Big|_{p=0} \bar{G}(x) \tag{7}$$

$$\rho(x) = \int f\,dv \tag{8}$$

Функция $g(x)$ может быть выражена также через продольный импеданс $Z(\omega)$:

$$g(x) = -\frac{1}{2\pi}\frac{d\dot{\theta}(p)}{dp}\int_{-\infty}^{\infty} Z(\omega)\, e^{-i\frac{\omega}{c}x}\,\frac{d\omega}{2\pi} \tag{9}$$

Уравнение Власова в пренебрежении тепловым разбросам частот эквивалентно паре гидродинамических уравнений для плотности и скорости:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\lambda v) = 0$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + \int_{-\infty}^{x} g(x-x')\rho(x')dx' = 0 \tag{10}$$

$\lambda(x)$ – невозмущенная плотность.

Везде, за исключением последнего раздела, рассматривается задача об отклике на точечное возмущение:

$$\rho(x,0) = \delta(x); \quad v(x,0) = 0 \tag{11}$$

Как и в /I/, простые по форме записи решения $\rho(x,t)$ могут быть получены лишь для функций $\lambda(x)$ специального вида, например,

$$\lambda(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ в сгустке} \\ 0, & x \text{ не в сгустке} \end{cases}$$

В разделах II, III, IV рассмотрена именно эта относительно простая ситуация. Обобщение полученных там результатов на случай неоднородного сгустка дается в разделе У. В разделе УI обсуждается задача с начальными условиями, отвечающими дробовому шуму.

П. Сгусток с постоянной плотностью. Изложение метода

В задачу об отклике на точечное возмущение в сгустке произвольной формы входят значения невозмущенной плотности лишь на интервале от точки возмущения до точки наблюдения. Если она на этом интервале меняется достаточно слабо, возмущение будет таким же, как для сгустка с постоянной плотностью при любых значениях переменной x . В последнем случае, однако, задача является пространственно однородной, что позволяет применить преобразование Фурье по координате и представить решение в следующем виде:

$$\rho(x,t) = Re \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx - i\omega(k)t}\, C_k \qquad (I2)$$

Где $\omega(k)$ – решение дисперсионного уравнения:

$$1 = i g_k \int dv \frac{df_0}{dv} \frac{1}{\omega(k) - kv} \ ; \quad g_k = \int_0^{\infty} g(x) e^{-ikx}\, dx \qquad (I3)$$

Частота $\omega(k)$ имеет следующие предельные свойства:

$$\omega(k) = \begin{cases} i\Lambda_k\,, & |\Lambda_k| \gg |k| v_T \\ -i\xi |k| v_T\,, & |\Lambda_k| \ll |k| v_T \end{cases} \qquad (I4)$$

Здесь Λ_k – комплексный инкремент гидродинамической задачи (I0), v_T – тепловой разброс скоростей; ξ – комплексный формфактор, определяемый функцией распределения по скоростям, $|\xi| \simeq 1$, $Re\,\xi > 0$

$$\Lambda_k^2 = \Gamma^2 \frac{ik g_k}{g(0)} \qquad (I5)$$

$$g(0) = g(x=0) \qquad (I6)$$

$$\Gamma^2 = \lambda g(0) \qquad (I7)$$

Г, как видно, является асимптотическим значением инкремента в коротковолновой области: $\Gamma = \lim_{k\to\infty} \Lambda_k$

Ниже этот параметр будем называть локальным инкрементом.

Влияние теплового движения можно оценить, полагая приближенно для вещественных k :

$$\omega(k) = i\Lambda_k - i\xi |k| v_T \qquad (I8)$$

Пользуясь тем, что $\Lambda_{-k} = \Lambda_k^*$ и отбрасывая затухающее слагаемое, получим

$$\rho(x,t) = Re \int_0^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx + \Lambda_k t - \xi k v_T t} \equiv Re \int_0^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{\psi(k)} \qquad (I9)$$

Интегралы такого типа могут быть приближенно вычислены методом перевала:

$$\int \frac{dk}{2\pi}\, e^{\psi(k)} \approx \frac{e^{\psi_0}}{\tau_0} \qquad (20)$$

где

$$\psi_0 = \psi(k_0) \ ; \quad \tau_0 = \sqrt{2\pi \psi''(k_0)} \qquad (2I)$$

Величина k_0 находится из уравнения на точку перевала:

$$\psi'(k_0) = 0 \quad \Rightarrow \qquad (22)$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\partial\omega}{\partial k}\bigg|_{k=k_0} t \qquad (23)$$

Штрихи означают дифференцирование по k . Уравнения (20)-(23) имеют довольно прозрачный физический смысл. Исходное возбуждение в точке $x = 0$, $t = 0$ можно понимать как рождение совокупности квазичастиц – волновых пакетов, каждый из которых имеет скорость

$$u(k) = \frac{\partial\omega}{\partial k} \qquad (24)$$

и размер $\tau(k) = \sqrt{2\pi \frac{\partial^2\omega}{\partial k^2} t}$ (25)

Возмущение плотности, созданное пакетом с импульсом k :

$$\rho_k = Re\,\frac{e^{\psi(k)}}{\tau(k)} \tag{26}$$

Соотношение (23) позволяет найти импульс той квазичастицы, которая в данный момент времени находится в точке наблюдения. Применимость метода перевала ограничена требованием малости следующего члена в разложении ψ :

$$\left|\frac{\psi'''}{(\psi'')^{3/2}}\right|_{k=k_0} \ll 1 \tag{27}$$

Пусть $\psi = \bar{\psi} + \tilde{\psi}$, где $\tilde{\psi}$ – переменная по k часть фазы, т.е. $\tilde{\psi}$: $\psi'' \sim \frac{\tilde{\psi}}{k_0^2}$; $\psi''' \sim \frac{\tilde{\psi}}{k_0^3}$

Тогда (27) эквивалентно:

$$\sqrt{|\tilde{\psi}|} \gg 1 \tag{28}$$

Это условие может нарушаться в следующих случаях:

I) $|\psi| > 1, |\tilde{\psi}| < 1$ – неразвитое возмущение. Отклонение от начальных условий невелико.

2) $|\psi| > 1, |\tilde{\psi}| < 1 \Rightarrow \psi \simeq \bar{\psi} = \Gamma t$.

Как можно будет увидеть из дальнейшего, этот случай по существу не отличается от того, что ниже называется "пределом малых расстояний". Таким образом, метод перевала неприменим лишь для ситуаций, которые, кажется, не являются сколько-нибудь интересными. Поэтому будем пользоваться им без ограничений.

Из (27) следует также:

$$|k_0 \tau| \gg 1 \;;\quad x \gg \tau \tag{29}$$

Т.е. точка наблюдения находится в "волновой зоне" пакета.

Учет теплового движения, как видно из (I9), сводится к замене:

$$x \to x + i\xi v_T t \tag{30}$$

в формулах, не учитывающих разброса частот обращения. По этой причине ниже будут приводиться только гидродинамические выражения.

Ш. <u>Сгусток с постоянной плотностью. Применение метода</u>

Для выяснения характера решений приведем ответы для некоторых частных случаев

1. $$g(x) = g(0)\,e^{-\varkappa x} \tag{3I}$$

Моделируется функция Грина электродов длиной более половины сгустка

$$\Lambda_k^2 = \Gamma^2 \frac{ik}{ik+\varkappa} \tag{32}$$

Положим $s = \frac{\Gamma}{\varkappa}$. Этот параметр будем называть "скорость звука"

а) $x \ll st$

$$k_0 = \varkappa\left(\frac{st}{2x}\right)^{1/2} \;;\quad \psi_0 = \Gamma t + i\left(2\Gamma t\cdot\varkappa x\right)^{1/2} \tag{33}$$

$$\frac{1}{\tau_0} = \frac{\varkappa}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{(\Gamma t)^{1/4}}{(\varkappa x)^{3/4}}$$

б) $x \gg st$

$$ik_0 = -\varkappa\left(\frac{st}{2x}\right)^2 ;\quad \psi_0 = -\frac{(\Gamma t)^2}{4\varkappa x} ;\quad \frac{1}{\tau_0} = \frac{\varkappa}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma t}{(\varkappa x)^{3/2}} \tag{34}$$

В соответствии с (I9), (20)

$$\rho(x,t) = Re\,\frac{e^{\psi_0}}{\tau_0} \tag{35}$$

Видно, что возмущение остается локализованным на размере $x \lesssim st$, где оно растет с инкрементом, примерно равным локальному.

Интересно, что из соотношения (32), казалось бы, следует неустойчивый рост возмущения на больших расстояниях. Из ответа (34) видно, однако, что такой неустойчивости нет.

2. $$g(x) = g(0)\cos\varkappa x \tag{36}$$

– резонатор, маленький по сравнению со сгустком. Время затухания поля в резонаторе велико по сравнению с временем пролёта сгустка (и, конечно, мало по сравнению с периодом оборота).

$$\Lambda_k^2 = \Gamma^2 \frac{k^2}{k^2 - \varkappa^2} \tag{37}$$

$$S = \frac{\Gamma}{\varkappa} \tag{38}$$

а) $x \ll St$

$$ik_0 = \varkappa\left(\frac{St}{x}\right)^{1/3}\frac{1+i\sqrt{3}}{2}; \quad \psi_0 = \Gamma t + \frac{3}{2}\left(\Gamma t\cdot\varkappa^2 x^2\right)^{1/3}\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \tag{39а}$$

$$\frac{1}{\tau_0} = \frac{\varkappa}{\sqrt{6\pi}}\frac{(\Gamma t)^{1/6}}{(\varkappa x)^{2/3}}$$

б) $x \gg St$

$$ik_0 = i\varkappa + \frac{\varkappa}{2}\left(\frac{St}{x}\right)^{2/3}\frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

$$\psi_0 = i\varkappa x + \frac{3}{2}\left(\Gamma^2 t^2 \varkappa x\right)^{1/3} \tag{39б}$$

$$\frac{1}{\tau_0} = \frac{\varkappa}{\sqrt{6\pi}}\frac{(\Gamma t)^{1/3}}{(\varkappa x)^{5/6}}$$

На больших расстояниях неустойчивость является резонансной. Это – самое быстрое движение в задаче. Тепловой разброс, необходимый для подавления неустойчивости на малых расстояниях $x \lesssim St$, не достаточен для предотвращения резонансной самобунчировки.

3. $$g(x) = \frac{g_0\nu}{\pi}\int\frac{dq\cos qx}{(q-\varkappa)^2+\nu^2} = g_0 e^{-\nu x}\cos\varkappa x \tag{40}$$

$$\Lambda_k^2 = \Gamma^2\frac{k(k-i\nu)}{(k-i\nu)^2-\varkappa^2}$$

Ограничимся случаем $\nu \sim \varkappa$, моделирующим учет большого количества разнообразных полостей, маленьких по сравнению с длиной сгустка.

а) $x \ll St$

$$k_0 = \nu\left(\frac{\Gamma t}{\nu x}\right)^{1/2}; \quad \psi_0 = \Gamma t + 2i(\Gamma t\,\nu x)^{1/2}; \quad \frac{1}{\tau_0} = \frac{\nu}{\sqrt{2\pi}}\frac{\Gamma t}{(\nu x)^{3/2}} \tag{41}$$

б) $x \gg St$

$$ik_0 = i\varkappa - \nu + \frac{\varkappa}{2}\left[\frac{\Gamma t}{\varkappa x}\left(1+\frac{i\nu}{\varkappa}\right)\right]^{2/3}\frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

$$\psi_0 = i\varkappa x - \nu x + \frac{3}{2}\left[\Gamma^2 t^2\cdot\varkappa x\left(1+\frac{i\nu}{\varkappa}\right)\right]^{1/3}\frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

$$\frac{1}{\tau_0} = \frac{\varkappa}{\sqrt{6\pi}}\frac{\left(\Gamma t\sqrt{1+\nu^2/\varkappa^2}\right)^{1/3}}{(\varkappa x)^{5/6}} \tag{42}$$

Этот пример по результату почти не отличается от первого – за исключением поведения на больших X, где возмущение экспоненциально мало, и, наверное, некоторых отличий в промежуточной области $x \sim St$.

4. $g(x) = -\frac{A}{x^\alpha}$, при $X = 0$ особенность такая, что

$$\int_0^\infty g(x)\,dx = 0 \tag{43}$$

Пусть ℓ – длина локализации особенности, $\ell \to 0$. Из (43) следует:

$$g(0)\ell \sim \frac{A}{\ell^{\alpha-1}} \Rightarrow g(0) \sim \frac{1}{\ell^\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S^2 \sim g(0)\ell^2 \sim \ell^{2-\alpha}$$

откуда видно, что при $\alpha < 2$ $\lim\limits_{\ell\to 0} S = 0$, где S – скорость звука типа (37). Т.е. при $\alpha < 2$ и только тогда конкретное поведение $g(x)$ при $x \lesssim \ell$ несущественно при достаточно малых ℓ.

В этом случае

$$g_k = B k^{\alpha-1} e^{-\frac{\pi i}{2}(\alpha-1)}; \quad B = \frac{A\,\Gamma(2-\alpha)}{\alpha-1}$$

$$k_0 = \left[-\frac{\alpha}{2}(\lambda B)^{1/2} e^{-\frac{\pi i\alpha}{4}}\frac{t}{x}\right]^{\frac{2}{2-\alpha}} \tag{44}$$

$$\psi_0 = -i\left[-(\lambda B)^{1/2} e^{-\frac{\pi i\alpha}{4}}\right]^{\frac{2}{2-\alpha}}\frac{t^{\frac{2}{2-\alpha}}}{x^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}\frac{2-\alpha}{2}$$

Решения, полученные для трех конкретных примеров, обладают некоторыми универсальными свойствами.

1. Фаза $\psi_0(x,t)$ является однородной функцией первой степени.

2. При $x \lesssim st$ $\psi_0 \simeq \Gamma t$ (гидродинамическое приближение).

3. При $x > st$ знак $Re\,\psi_0$ различен для затухающей и периодической функции Грина.

IУ. Учет теплового движения

Приведенные формулы с помощью подстановки (30) позволяют учесть тепловое движение. Например, для малых расстояний получаются формулы типа:

$$\psi = \Gamma t + \eta (\Gamma t)^{\beta} \left[æ x + i \xi æ v_T t \right]^{1-\beta} \tag{45}$$

где $\beta \in [0, 1]$ - параметр, определяемый функцией $g(x)$, η - комплексное число, $|\eta| \simeq 1$.

$$\begin{aligned} &t < \frac{x}{v_T} \Rightarrow Re\,\psi \simeq \Gamma t \\ &t > \frac{x}{v_T} \Rightarrow Re\,\psi \simeq \left[\Gamma - \eta' \Gamma^{\beta} (æ v_T)^{1-\beta} \right] t \end{aligned} \tag{46}$$

$\eta' \sim 1$ - вещественное положительное число. Т.е. на малых временах $t < x/v_T$ возмущение нарастает, а на больших $t > x/v_T$ может как нарастать, так и затухать. Приведенный пример наводит на мысль определить пороговый разброс как граничное значение между множеством разбросов, отвечающих нарастанию и и множеством разбросов, отвечающих затуханию возмущения при $t \to \infty$.

Итак, пороговым разбросом v_{th} будем называть точную нижнюю грань множества вещественных положительных чисел $\{v_T\}$, удовлетворяющих условию: при произвольных начальных условиях для любой точки сгустка $\lim\limits_{t\to\infty} \rho(x,t,v_T) = 0$. Иначе говоря

$$v_{th} = \min \left[\{v_T\} : \lim_{t\to\infty} \rho(x,t,v_T) = 0 \right] \tag{47}$$

Несмотря на то, что точно на пороге метод перевала неприменим, пороговый разброс удовлетворяет следующему соотношению:

$$v_{th} = \min \left[\{v_T\} : \lim_{t\to\infty} Re\,\psi_0(x,t,v_T) \leq 0 \right] \tag{48}$$

где ψ_0 определяется (21), $\omega(\kappa)$ находится из (13). В течение времени $\tau = x/v_T$ возмущение может нарасти до такой степени, что линейное приближение перестанет выполняться и утверждение о последующем затухании окажется неверным. Введем разброс v_c такой, что требование

$$v_T \gtrsim v_c$$

является условием применимости линейного приближения для любого момента времени. Из сказанного выше следует, что

$$v_c \geq v_{th}$$

Каждому значению v_T отвечает длина сгустка

$$\Delta_T = \frac{v_T}{\omega_c} \tag{49}$$

где ω_c - частота одночастичных синхротронных колебаний. Длину (49) будем называть тепловой, в отличие от потенциальной длины, т.е. вычисленной в пренебрежении тепловым разбросом /6/. Тепловые длины, отвечающие пороговой и критической скоростям, будем называть и обозначать соответствующим образом: Δ_{th}, Δ_c.

Приближенный характер учета теплового разброса соотношением (18) не позволяет получить точные формулы для пороговых величин. Что же касается критических параметров, то они уже сами своим определением заданы лишь приблизительно.

Интересно, что пороговый разброс оказывается удовлетворяющим универсальной оценке:

$$v_{th} \simeq s \Rightarrow \Delta_{th} \sim N^{1/3} \tag{50}$$

где N - полное число частиц в сгустке.

Критические же величины оказываются зависящими от специфики $g(x)$. Для примеров 1,3 предыдущего раздела:

$$v_c \simeq v_{th} \simeq s \quad ; \quad \Delta_c \simeq \Delta_{th} \tag{51}$$

В примере 2

$$v_c \simeq \begin{cases} s, & æ\Delta < 1 \\ s(æ\Delta)^{1/2}, & æ\Delta > 1 \end{cases} \tag{52}$$

$$\Delta_c \gg N^{1/2} \qquad (\text{при} \quad \varkappa\Delta \gg 1)$$

Если $v_T < v_c$, $\varkappa\Delta \gg 1$ в сгустке развивается неустойчивость на резонансной длине волны, имеющая тенденцию разбить его на периодически идущие подсгустки.

В примере 4

$$\Delta_c \gg N^{\frac{1}{1+\alpha}} \tag{53}$$

Здесь взаимодействие $g(x)$ такое же, как в /7/. Утверждение (53) эквивалентно соответствующим выводам упомянутой работы.

Для взаимодействия типа примера I в случае $\varkappa\Delta \gg 1$, где Δ – длина сгустка, потенциальная длина велика по сравнению с тепловой. Отсюда следует, что в этом случае существует устойчивое замороженное состояние /6/.

У. <u>Неоднородный сгусток</u>

Изложенный метод сравнительно просто переносится на случай неоднородного сгустка в коротковолновом ($|K\Delta| \gg 1$) приближении (ВКБ). В этом случае импульс пакета K из-за неоднородности среды уже не является интегралом движения. Сохраняющейся же величиной является энергия квазичастицы, т.к. явной зависимости от времени нет. Поскольку частота как функция координаты и импульса является гамильтонианом пакета, уравнения движения квазичастицы могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial\omega}{\partial K} \\[2mm] \dfrac{dK}{dt} = -\dfrac{\partial\omega}{\partial x} \end{cases} \tag{54}$$

Знание того, что $\omega(K,x)$ – интеграл движения, позволяет вычислить $K(x,\omega)$. Уравнение для точки перевала – аналог (23) – очевидно, выглядит так:

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{u(x',\omega_0)} = \frac{\partial}{\partial\omega_0}\int dx'\, K(x',\omega_0) \tag{55}$$

Здесь x_0 – точка возбуждения, $u = \dfrac{\partial\omega}{\partial K}$ – скорость квазичастицы, ω_0 – частота, отвечающая точке перевала. Общее решение уравнений движения среды может быть представлено в следующем виде:

$$\rho(x,t) = \mathrm{Re}\int \frac{dK_0'}{2\pi}\, e^{i\psi}$$
$$\psi = i\int_{x_0}^{x} K(\omega, x')\,dx' - i\omega t \tag{56}$$

$K_0' = K(x_0,\omega)$ – начальное значение импульса квазичастицы. Соотношения (55), (56) сводят исходную систему линейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами к взятию интеграла и решению алгебраического уравнения. В общем виде окончательный ответ может быть записан так же, как для однородного сгустка:

$$\rho(x,t) = \frac{1}{\tau_0}\,\mathrm{Re}\, e^{\psi_0} \tag{57}$$
$$\psi_0 = \psi(\omega_0)\,; \quad \tau_0 = \sqrt{2\pi/|\psi_0''|}\,; \quad \psi_0'' = \frac{\partial^2\psi}{\partial K_0'^2}\,; \quad \frac{\partial}{\partial K_0'} = \frac{\partial\omega}{\partial K_0'}\,\frac{\partial}{\partial\omega}$$

В качестве иллюстрации влияния неоднородности сгустка на характер получаемых решений, приведем ответы для фазы в некоторых из рассматривавшихся частных случаях.

I. $g(x) = g(0)\,e^{-\varkappa x}$

$$\psi_0 = \begin{cases} \Gamma_{max}(x_0,x)\,t\,(1+o(1))\,; & t \gg \displaystyle\int_{x_0}^{x} \varkappa\, dx' \frac{\Gamma^2}{\Gamma_{max}^3} \\[3mm] -\dfrac{t^2}{4\varkappa \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\Gamma^2(x')}}\,, & t \ll \displaystyle\int_{x_0}^{x} \varkappa\, dx' \frac{\Gamma^2}{\Gamma_{max}^3} \end{cases} \tag{58}$$

$$\Gamma_{max}(x_0,x) = \max_{x_0 \le x' \le x} \Gamma(x')$$

2. $g(x) = g(0)\cos\varkappa x$

$$\psi_0 = \begin{cases} \Gamma_{max}\, t\,(1+o(1))\,; & t \gg \displaystyle\int \varkappa\, dx' \frac{\Gamma^2}{\Gamma_{max}^3} \\[3mm] i\varkappa x + \dfrac{3}{2}\left(t^2 \displaystyle\int_{x_0}^{x} \Gamma^2(x')\,dx' \cdot \varkappa\right)^{1/3} \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\,; & t \ll \displaystyle\int \varkappa\, dx' \frac{\Gamma^2}{\Gamma_{max}^3} \end{cases} \tag{59}$$

Критический и пороговый разбросы в неоднородном сгустке, очевидно, зависят от координат. Для определения этой зависимости разобьем мысленно сгусток на достаточно маленькие однородные подсгустки. В этом случае, если локальный тепловой разброс везде превышает локальный критический, то будет применима линейная теория. Аналогично, при превышении локальным тепловым разбросом локального порогового значения, возмущение на достаточно больших временах будет затухать. Таким образом, критический и пороговый разбросы для неоднородного сгустка, могут быть найдены сразу же, как только получены выражения для этих величин в случае сгустка с постоянной плотностью. От координат они зависят только в виду того, что зависят от плотности:

$$\begin{aligned} v_c(x) &= v_c(\lambda(x)) \\ v_{th}(x) &= v_{th}(\lambda(x)) \end{aligned} \tag{60}$$

Отсюда, например, следует, что для короткодействующих взаимодействий (типа (3I), (40))

$$v_c(x) \simeq v_{th}(x) \simeq s(x) \tag{6I}$$

Где $s(x)$ - локальная скорость звука:

$$s^2(x) = \lambda(x)\,\frac{g(0)}{\varkappa^2} \tag{62}$$

УI. Начальные условия: дробовой шум

До сих пор решалась задача о развитии неустойчивости при начальных условиях, отвечающих точечному возбуждению. Для произвольных начальных условий $\rho(x, t=0) = \rho_0(x)$ отклик будет выглядеть следующим образом:

$$\rho(x,t) = \int_{-\infty}^{x} L(x,x',t)\,\rho_0(x')\,dx' \tag{63}$$

где $L(x, x', t)$ - решение задачи с точечным возбуждением. Получим некоторые формулы для отклика на дробовой шум:

$$\begin{aligned} \langle \rho_0(x')\rho_0(x'')\rangle &= \lambda(x')\,\delta(x'-x'') \\ \langle \rho^2(x,t)\rangle &= \int_{-\infty}^{x} L^2(x,x',t)\,\lambda(x')\,dx' \end{aligned} \tag{64}$$

Для короткодействующего взаимодействия гидродинамическую функцию отклика можно приближенно записать в следующем виде:

$$L(x,x',t) \simeq \frac{1}{\tau}\begin{cases} e^{\Gamma_{max}(x,x')t}, & t > \varkappa\displaystyle\int_{x'}^{x} dx''\,\frac{\Gamma^2}{\Gamma^3_{max}} \\ 0, & t < \varkappa\displaystyle\int dx''\,\frac{\Gamma^2}{\Gamma^3_{max}} \end{cases} \tag{65}$$

$$\langle \rho^2(x,t)\rangle \simeq \frac{N}{\Delta\tau^2}\int_{x-st}^{x} e^{2\Gamma_{max}(x,x')t}\,dx' \tag{66}$$

При $\Delta \gg st$

$$\langle \rho^2(x,t)\rangle \simeq \frac{N\cdot st}{\Delta\cdot\tau^2}\,e^{2\Gamma(x)t} \tag{67}$$

В обратной ситуации $\Delta \ll st$:

$$\begin{aligned} \langle \rho^2(x,t)\rangle &\simeq \frac{N}{\tau^2}\,e^{2\bar{\Gamma}_{max}(x)t} \\ \bar{\Gamma}_{max}(x) &= \max_{x'<x} \Gamma(x') \end{aligned} \tag{68}$$

Из формул типа (67), (60) видно, что воздействие быстрых когерентных колебаний на локальные макроскопические параметры сгустка (плотность, тепловой разброс) особенно велико в центре, а к краям спадает. Поэтому следует ожидать, например, что энергетическое уширение сгустка в результате действия неустойчивости должно быть больше в центре по сравнению с краями. Именно такого сорта результаты были получены на установке DORIS/8/, где проводились соответствующие измерения.

Литература

1. Пестриков Д.В. Быстрые однооборотные поперечные колебания сгруппированных пучков. Препринт ИЯФ СО АН СССР № 85-105, Новосибирск 1985.
2. Дербенев Я.С., Диканский Н.С. Препринт ИЯФ СО АН СССР № 315, Новосибирск 1969.
3. Диканский Н.С. Кандидатская диссертация. Новосибирск 1969.
4. J.M.Wang, C.Pellegrini. Proc. 11 Int. Conf. on High En. Acc. CERN (1980) p.554
5. J.L.Laclare. Proc. 11 Int. Conf. on High Energy Accel. CERN (1980) p.526.
6. А.В.Буров Препринт ИЯФ СО АН СССР № 84-159, Новосибирск 1984.
7. A.W.Chao, J.Gareyte. SLAC Rep. SPEAR-197/PEP-224 (1976).
8. R.D.Kohaupt. Труды Х Международной конф. по ускорителям для физики высоких энергий. Москва (1977), стр.43.

А.В.Буров, Н.С.Диканский, Д.В.Пестриков

БЫСТРЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПРОДОЛЬНЫХ КОГЕРЕНТНЫХ КОЛЕБАНИЙ РЕЛЯТИВИСТСКОГО СГУСТКА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО С СИСТЕМОЙ БЕЗ ПАМЯТИ

Препринт
№ 86- 41

Работа поступила - 24 декабря 1985 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати 14.02-1986 г. МН 11659
Формат бумаги 60х90 1/16 Усл.1,4 печ.л., 1,1 учетно-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 41.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90