ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

27

А.И. Щетников

ИСКАЖЕНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В АНТИПРОБКОТРОНЕ

ПРЕПРИНТ 86-46

НОВОСИБИРСК
1986

АННОТАЦИЯ

Рассматривается влияние искажений магнитного поля, вызванных неточностью изготовления магнитной системы, на равновесие и поперечный перенос плазмы в ловушке с антипробкотроном. Показано, что из-за наличия внутри антипробкотрона точки, магнитное поле в которой равно нулю, даже малые аксиально-несимметричные возмущения приводят к сильному искажению равновесной конфигурации плазмы. Получены оценки коэффициентов поперечного переноса при наличии искажений.

В последнее время активно обсуждаются схемы аксиально-симметричных открытых ловушек, в которых для стабилизации желобковой неустойчивости плазмы в качестве одной из секций используется антипробкотрон (см., например, [1—4]). Обладая рядом важных преимуществ в сравнении с квадрупольными МГД-стабилизаторами, антипробкотронная конфигурация вместе с тем имеет определенный недостаток, заключающийся в наличии внутри области удержания плазмы точки, в которой магнитное поле **B** обращается в нуль. Наиболее известным последствием этого факта является нарушение адиабатичности движения частиц в антипробкотроне [5]. В настоящем сообщении обращается внимание на другой неблагоприятный результат существования области $\mathbf{B}\approx 0$, а именно, на возможность сильного искажения равновесия плазмы и усиления поперечного переноса при появлении небольших аксиально-несимметричных возмущений поля, вызванных неточностью изготовления магнитной системы или рассеянными полями внешних источников.

В работе рассмотрено влияние наиболее существенных возмущений магнитного поля на форму равновесных поверхностей плазмы, а также приведены оценки коэффициентов поперечного переноса, вызванного этими возмущениями.

1. Рассмотрим ловушку, состоящую из центральной секции (обычного пробкотрона) и присоединенного к ней антипробкотрона (рис. 1). Для простоты будем считать, что плазма изотропна, а ее давление p мало по сравнению с $B^2/8\pi$, и поэтому магнитное поле является вакуумным. Как известно (см., например, [6]), в изо-

тропной плазме поверхности постоянного давления совпадают с поверхностями постоянного удельного объема U:

$$U=\int\frac{dl}{B}=\text{const}\,. \tag{1}$$

Интеграл в (1) удобно разбить на две части: $U_\text{А}$ и $U_\text{П}$, которые представляют собой вклад в U от антипробкотрона и центральной части соответственно. Так как ниже будут рассматриваться искажения поверхностей постоянного давления, для которых сущест-

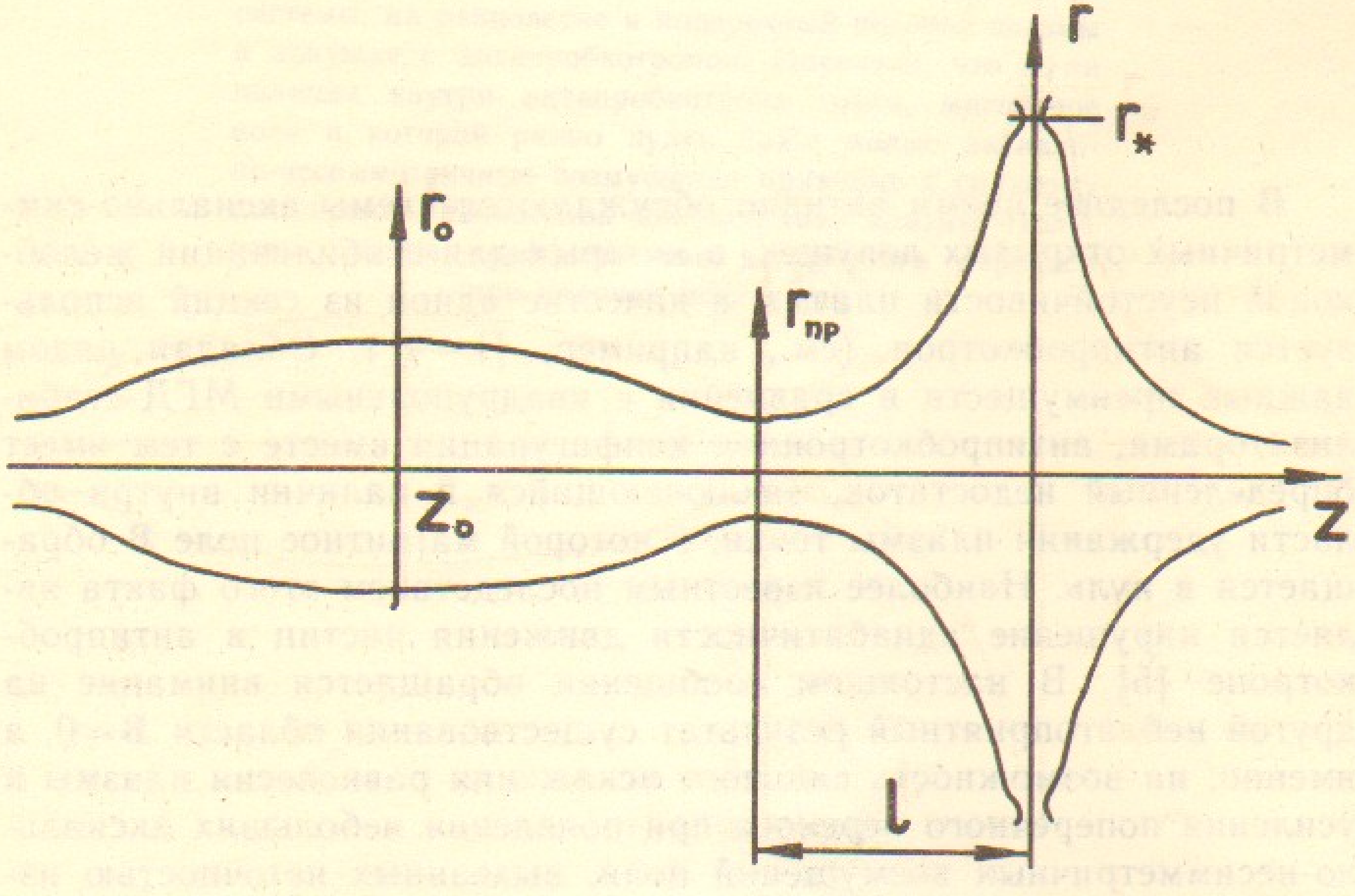

Рис. 1. Форма силовых линий в системе; через z_0 проходит плоскость минимального поля в пробкотроне, r_0 — расстояние от оси системы до силовой линии в этой плоскости.

венно наличие точки нуля поля в антипробкотроне, то естественно считать, что возмущения поля имеются только внутри антипробкотрона, и $U_\text{П}$ не зависит от возмущений.

Магнитное поле центральной секции можно описать в параксиальном приближении:

$$B_z=B(z)-\frac{B''(z)r^2}{4},\qquad B_r=-\frac{B'(z)r}{2},$$

где $B(z)$ — поле на оси ловушки. Силовые линии удобно маркиро-

вать координатами их пересечения r_0, θ_0 с плоскостью наименьшего поля $B_0=\min B(z)$ в центральной секции ловушки. Нетрудно показать, что

$$U_\text{П}=\text{const}+Cr_0^2,$$

$$C=\frac{B_0}{4}\int\limits_{\text{П}}\frac{B''(z)}{B^3(z)}dz\,, \tag{2}$$

и уравнение (1) принимает вид

$$Cr_0^2+U_\text{А}(r_0,\theta_0)=\text{const}. \tag{3}$$

Невозмущенное магнитное поле антипробкотрона в области, близкой к нулю поля, можно описать скалярным потенциалом

$$\Psi_0=b\left(\frac{r^2}{2}-z^2\right), \tag{4}$$

оставив в разложении реального скалярного потенциала в точке $\mathbf{B}=0$ по степеням координат только квадратичные члены.

Компоненты магнитного поля $\mathbf{B_0}=-\vec{\nabla}\Psi_0$:

$$B_x=-bx\,,\quad B_y=-by\,,\quad B_z=2bz\,.$$

С помощью интегрирования легко получить уравнение силовой линии

$$zr^2=\frac{lr_0^2}{R}, \tag{5}$$

где l — длина антипробкотрона (рис. 1), а R — пробочное отношение центральной секции.

Удельный объем $V_\text{А}$ в неискаженном магнитном поле антипробкотрона удобно вычислять, воспользовавшись тем, что

$$\frac{dl}{B}=\frac{dr}{B_r}\,.$$

Тогда

$$U_\text{А}=\frac{1}{b}\int\limits_{r_{пр}}^{\infty}\frac{dr}{r}\,, \tag{6}$$

где $r_{пр}=r_0/\sqrt{R}$ — радиус силовой линии в пробке, соединяющей антипробкотрон с центральной секцией. Интеграл в (6) логарифмически расходится на верхнем пределе; расходимость связана с недостаточно быстрым нарастанием магнитного поля вдали от точки $B=0$. Учет в скалярном потенциале (4) членов, содержащих более высокие степени координат, приводит к обрезанию интеграла (6) на расстоянии r_* порядка радиуса кольцевой пробки:

$$U_A=\frac{1}{b}\ln\frac{r_*}{r_{\text{пр}}}=\text{const}-\frac{1}{b}\ln r_0\,. \tag{7}$$

Подставив (7) в уравнение поверхностей постоянного давления (3), найдем зависимость удельного объема ловушки от r_0:

$$U(r_0)=Cr_0^2-\frac{1}{b}\ln r_0+\text{const}\,. \tag{8}$$

Ловушка стабилизирована относительно желобковых колебаний, если на внешней поверхности плазмы (при $r_0=a_0$)

$$\frac{d}{dr_0}U(r_0)<0\,,$$

то есть коэффициент запаса устойчивости

$$K\equiv(2Cba_0^2)^{-1}>1\,. \tag{9}$$

2. Потенциал возмущающего поля разложим в точке $\mathbf{B}=0$ по степеням координат и удержим члены разложения, содержащие первую («дипольные») и вторую («квадрупольные») степени. Следующие члены описывают поле, исчезающе малое в центре антипробкотрона по сравнению с невозмущенным.

2.1. Дипольное возмущение представляет собой однородное магнитное поле. Его продольная составляющая не нарушает аксиальной симметрии ловушки, и поэтому достаточно рассмотреть магнитное поле, перпендикулярное оси z. Можно выбрать ось x параллельной этому полю, тогда возмущающий скалярный потенциал будет равен

$$\delta\Psi=-\delta B\ x\,. \tag{10}$$

Если перейти в систему координат

$$x'=x-\frac{\delta B}{b}\,,\qquad y'=y\,,\qquad z'=z\,,$$

то возмущенный потенциал $\Psi=\Psi_0+\delta\Psi$ в этой системе

$$\Psi'=b\left(\frac{x'^2}{2}+\frac{y'^2}{2}-z'^2\right)+\text{const} \tag{11}$$

с точностью до несущественной константы имеет такой же вид, что и Ψ_0 в исходной системе координат. Это означает, что в ловушке, состоящей из одного антипробкотрона (без центральной секции), в котором поле точно задается потенциалом (4), вся плазма сдвинулась бы как целое на расстояние

$$\delta x=\frac{\delta B}{b}\,,$$

и аксиальная симметрия поверхностей постоянного давления не нарушилась бы. Учет в потенциале (4) членов более высоких степеней приводит к искажению аксиальной симметрии плазмы даже в отдельном антипробкотроне*). Правильное представление о влиянии этих членов можно получить, если обрезать интеграл в U_A при постоянном радиусе r_* на всех силовых линиях. При вычислении U_A удобно выполнять интегрирование по dz, так как B_z зависит только от z:

$$U_A=\frac{1}{2b}\int\limits_{z_*}^{l}\frac{dz}{z}=\frac{1}{2b}\ln\frac{l}{z_*}\,. \tag{12}$$

Здесь $z_*(r_0,\theta_0)$ — координата пересечения силовой линии с цилиндром $r=r_*$. Она определяется из квадратного уравнения

$$\frac{r_*^2z_*}{l}=\frac{r_*^2\sin^2\theta_0}{R}+\left[\frac{r_0\cos\theta_0}{\sqrt{R}}-\delta x\left(1-\left(\frac{z_*}{l}\right)\right)^{1/2}\right]^2, \tag{13}$$

полученного из уравнений силовых линий

$$(x-\delta x)^2z=\text{const}\,,$$

$$y^2z=\text{const}\,. \tag{14}$$

Уравнение поверхностей постоянного давления (3) принимает вид

*) Такой способ учета нелинейности поля соответствует модели антипробкотрона с сильной узкой кольцевой пробкой радиуса r_* (рис. 1).

$$z_*(r_0, \theta_0)\ \exp(-2bCr_0^2) = \text{const}. \tag{15}$$

Если коэффициент запаса устойчивости

$$K \gg \frac{r_*}{a_{\text{пр}}},$$

где $a_{\text{пр}} = a_0/\sqrt{R}$ — радиус плазмы в соединительной пробке, то поверхности постоянного давления определяются из уравнения

$$z_*(r_0, \theta_0) = \text{const} \tag{16}$$

и совпадают с поверхностями постоянного давления в отдельном антипробкотроне. В обратном случае, если

$$\frac{r_*}{a_{\text{пр}}} \gg K \gtrsim 1,$$

искажениями поверхностей постоянного давления, вносимыми членами более высоких степеней в (4), можно пренебречь, устремляя в (13) l к бесконечности, и эти поверхности находятся из уравнения

$$((x_0 - \delta x_0)^2 + y_0^2)\ \exp(-2bC(x_0^2 + y_0^2)) = \text{const}, \tag{17}$$

где $\delta x_0 = \delta x\sqrt{R}$ — смещение центральной силовой линии в плоскости $B(z) = B_0$. Качественная картина сечений поверхностей постоянного давления в этой плоскости приведена на рис. 2,*а*.

Если стабилизация ловушки осуществляется двумя или большим числом антипробкотронов, то силовые линии, проходящие через центр каждого антипробкотрона, в случае произвольных дипольных возмущений не будут совпадать. При этом аксиальная симметрия поверхностей постоянного давления при $K \gg r_*/a_{\text{пр}}$ нарушится даже без учета эффектов, связанных с членами высших порядков в (4), не только в центральной секции, но и в антипробкотронах (так как искажение равновесной конфигурации в одном из них проникает в другой). Картина сечений поверхностей постоянного давления в этом случае приведена на рис. 2,*б*.

Следует подчеркнуть, что сильное искажение в центральной секции равновесных поверхностей, близких к оси системы, присуще только рассматриваемой модели плазмы с изотропным давлением. В реальной ситуации несохранение магнитного момента частиц, траектория которых близко подходит к центру антипробкотрона

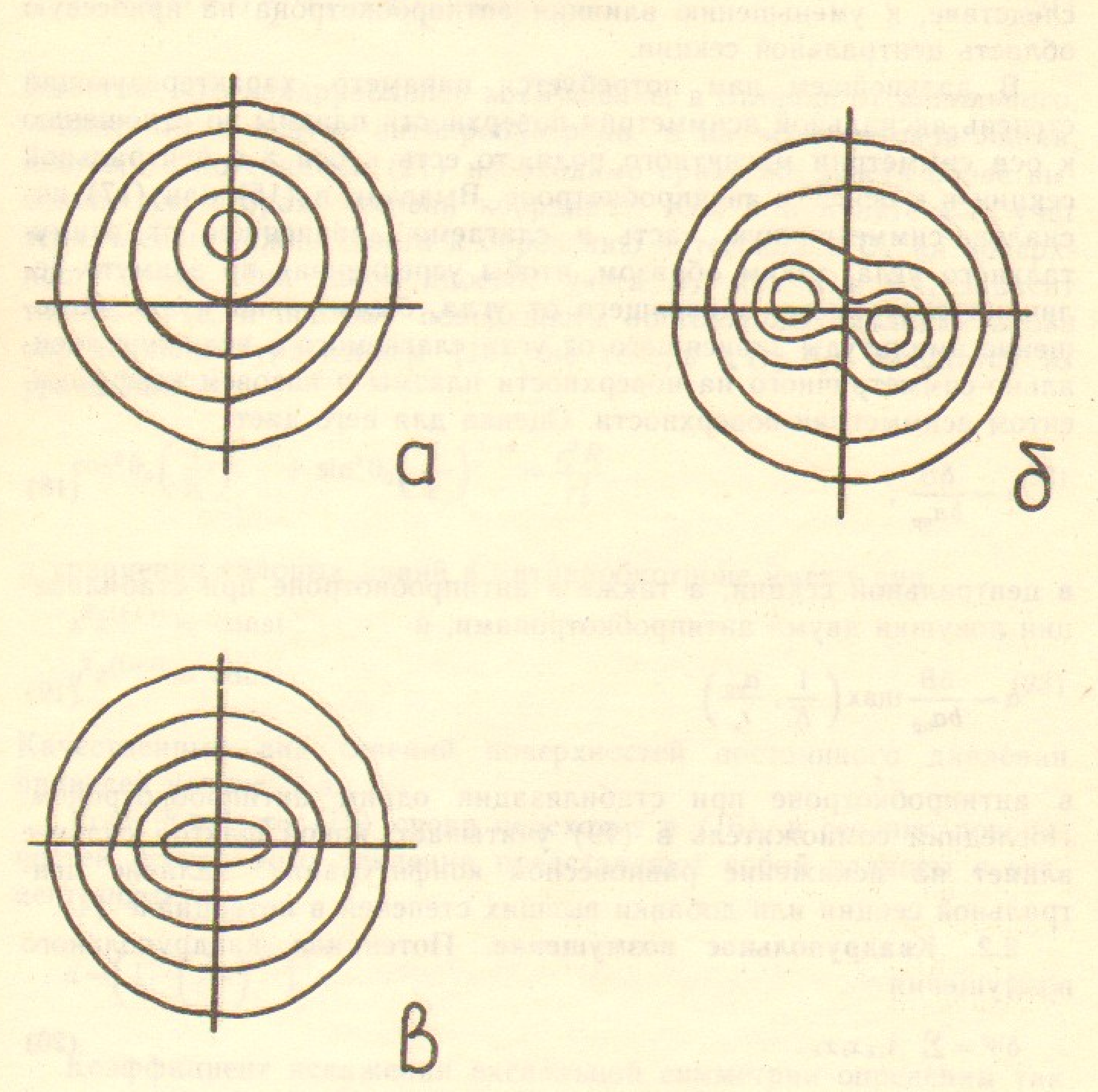

Рис. 2. Искажение поверхностей постоянного давления в плоскости $z = z_0$:

а — при дипольном возмущении; *б* — при дипольном возмущении в системе с двумя антипробкотронами; *в* — при квадрупольном возмущении.

(где $\mathbf{B} \approx 0$), приведет к уменьшению там плотности плазмы и, как следствие, к уменьшению влияния антипробкотрона на приосевую область центральной секции.

В дальнейшем нам потребуется параметр, характеризующий степень аксиальной асимметрии поверхности плазмы по отношению к оси симметрии магнитного поля, то есть к оси z в центральной секции и к оси z' в антипробкотроне. Выделим в (15) или (17) аксиально-симметричную часть и слагаемое, зависящее от азимутального угла, таким образом, чтобы усредненная по азимуту величина слагаемого, зависящего от угла, была равна нулю. Отношение амплитуды зависящего от угла слагаемого к величине аксиально-симметричного на поверхности плазмы и назовем коэффициентом асимметрии поверхности. Оценка для него дает

$$\alpha \sim \frac{\delta B}{b a_{\text{пр}}}, \tag{18}$$

в центральной секции, а также в антипробкотроне при стабилизации ловушки двумя антипробкотронами, и

$$\alpha \sim \frac{\delta B}{b a_{\text{пр}}} \max\left(\frac{1}{K}, \frac{a_{\text{пр}}}{r_*}\right) \tag{19}$$

в антипробкотроне при стабилизации одним антипробкотроном. Последний сомножитель в (19) учитывает, какой фактор сильнее влияет на искажение равновесной конфигурации: наличие центральной секции или добавки высших степеней в потенциале (4).

2.2. Квадрупольное возмущение. Потенциал квадрупольного возмущения

$$\delta\Psi = \sum_{ik} A_{ik} x_i x_k . \tag{20}$$

Коэффициенты A_{ik} всегда могут быть выбраны так, что $A_{ik} = A_{ki}$, при этом условие $\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0$ приводит к требованию $\sum_i A_{ii} = 0$. Квадрупольное возмущение представляет собой «сплющивание» магнитных поверхностей и (или) разворот оси z. Формально эта операция приводит квадратичную форму $\Psi = \Psi_0 + \delta\Psi$ к диагональному виду.

«Сплющивание» — это наложение квадрупольного возмущающего потенциала, зависящего только от x, y; при соответствующем выборе осей x, y возмущенный потенциал имеет вид

$$\Psi = b\left((1+\varepsilon)\frac{x^2}{2} + (1-\varepsilon)\frac{y^2}{2} - z^2\right). \tag{21}$$

Заметим, что квадрупольное возмущение, в отличие от дипольного, «сидит» не в центре антипробкотрона, а на всей силовой линии, поэтому в потенциале (21) необходимо сразу же учесть более высокие, чем вторая, степени координат. Как и в пункте 2.1, учет этих членов можно свести к обрезанию интеграла в U_A на поверхности $r = r_*$. При таком способе учета B_z, как и в 2.1, зависит только от z, и поэтому поверхности постоянного давления вновь определяются уравнением (15), но теперь $z_*(r_0, \theta_0)$ находится из уравнения

$$\cos^2\theta_0\left(\frac{l}{z_*}\right)^{1+\varepsilon} + \sin^2\theta_0\left(\frac{l}{z_*}\right)^{1-\varepsilon} = \frac{r_*^2 R}{r_0^2}, \tag{22}$$

а уравнения силовых линий в антипробкотроне имеют вид

$$x^2 z^{(1+\varepsilon)} = \text{const},$$
$$y^2 z^{(1-\varepsilon)} = \text{const}. \tag{23}$$

Качественный вид сечений поверхностей постоянного давления приведен на рис. 2,*в*.

Если $K \gg 1$, то (15) снова переходит в (16), и сечения поверхностей постоянного давления представляют собой эллипсы с эксцентриситетом

$$d = \left(1 - \left(\frac{z_*}{l}\right)^{2\varepsilon}\right)^{1/2}. \tag{24}$$

Коэффициент искажения аксиальной симметрии определим так же, как и в пункте 2.1, разлагая уравнение (22). Допустимы, конечно, только такие возмущающие поля, при которых эксцентриситет сечения внешней поверхности плазмы мал по сравнению с единицей. С учетом этого во всех секциях ловушки

$$\alpha \sim d^2 \sim \varepsilon \ln \frac{r_*}{a_{\text{пр}}}. \tag{25}$$

Можно убедиться в том, что разворот оси z антипробкотрона на малый угол β вокруг оси y приводит с точностью β^2 к такому же искажению поверхностей постоянного давления в центральной секции, что и сдвиг оси z на расстояние $l\beta$ вдоль оси x, а такое искажение уже было рассмотрено в пункте 2.1.

3. На основании полученных оценок искажения поверхностей постоянного давления можно оценить коэффициенты поперечного переноса так же, как это было сделано в работе [7] для амбиполярных ловушек. Если за один пролет вдоль ловушки ведущий центр частицы смещается по азимуту на малый угол, то реализуется режим неоклассической диффузии. В центральной секции ловушки максимальное значение коэффициента неоклассической диффузии (в режиме плато) равно

$$D_{\Pi} \sim \frac{cT}{eB_0}\,\alpha_{\Pi}^2\,. \tag{26}$$

Здесь α_{Π} — вычисленный выше ((18), (25)) коэффициент аксиальной асимметрии поверхности плазмы в центральной секции.

Чтобы найти коэффициент поперечного переноса в антипробкотроне, предварительно ответим на вопрос: могут ли ионы с малыми питч-углами, залетающие далеко в пробки, быть захваченными на банановые траектории? Для этого рассмотрим продольный адиабатический инвариант I в невозмущенном поле. Для ионов с малыми питч-углами зависимость пробочного отношения от длины дуги l силовой линии, отсчитываемой от точки минимума поля на этой силовой линии, можно приближенно считать линейной:

$$R(l) \sim \frac{|l|}{\varrho_0}\,.$$

Здесь ϱ_0 — расстояние до точки минимума поля от начала координат. Учитывая, что

$$B(\varrho_0) \sim b\varrho_0\,,$$

найдем продольный адиабатический инвариант:

$$I = \oint p_{\parallel}\,dl \sim \frac{1}{m^{1/2}\mu b}\left(E - e\varphi(\varrho_0) - \mu x\varrho_0\right)^{3/2}.$$

Запертые ионы определяются из условия

$$\frac{\partial I}{\partial \varrho_0} = 0\,.$$

Если ионная и электронная температуры плазмы в антипробкотроне равны, то это условие приводит к оценке

$$\mu b \sim e\,\frac{d\varphi(\varrho_0)}{d\varrho_0} \sim \frac{mv_{T_i}^2}{\varrho_0}\,,$$

из которой следует, что поперечная скорость ионов с малыми питч-углами, захваченных на банановые траектории, есть величина порядка тепловой скорости ионов. Следовательно, число таких ионов экспоненциально мало.

Теперь, когда мы знаем, что питч-угол большинства ионов, находящихся на банановых траекториях, — величина порядка единицы, оценим коэффициент неоклассической диффузии по конусу минимумов поля:

$$D_{A} \sim \frac{cT}{eb\,(la_{\text{пр}}^2)^{1/3}}\,\alpha_{A}^2\,. \tag{27}$$

Здесь $(la_{\text{пр}}^2)^{1/3}$ — расстояние до точки минимума поля на поверхности плазмы от начала координат; α_A — коэффициент аксиальной асимметрии поверхности плазмы в антипробкотроне ((18), (19), (25)).

Приведенные здесь оценки коэффициентов переноса позволяют определить допустимые искажения магнитного поля в ловушке.

В заключение автор благодарит И.А. Котельникова и Д.Д. Рютова за полезные обсуждения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г.И. Димов.* Препринт ИЯФ СО АН СССР № 82-150. Новосибирск, 1982.
2. *B.G. Logan.* Comments on Plasma Phys. Contr. Fusion, 22, 1982, p.1547.
3. *S. Okamura et al.* Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion Research, IAEA, 2, 1984, p.337.
4. *А.А. Сковорода.* Физика плазмы, 1985, т.11, с.1319.
5. *Б.В. Чириков.* В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып.13/Под ред. Б.Б. Кадомцева. М.: Энергоатомиздат, 1984, с.3.
6. *Г.В. Ступаков.* Физика плазмы, 1979, т.5, с.871.
7. *Д.Д. Рютов, Г.В. Ступаков.* В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып.13/Под ред. Б.Б. Кадомцева. М.: Энергоатомиздат, 1984, с.74.

А.И. Щетников

Искажения магнитного поля в антипробкотроне

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 6 декабря 1985 г.
Подписано в печать 7.03. 1986 г. МН 11686
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1,1 печ.л., 0,9 уч.-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 46

Набрано в автоматизированной системе на базе фотонаборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и отпечатано на ротапринте Института ядерной физики СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.