

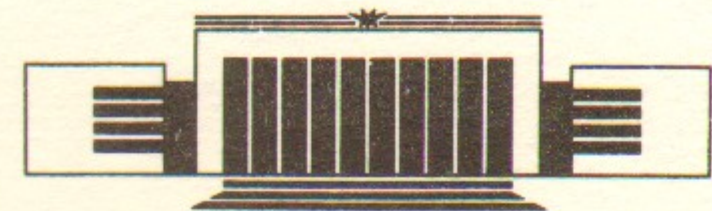


48  
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

Г.Е. Векштейн

РЕЛАКСАЦИОННАЯ ДИССИПАЦИЯ  
ЭНЕРГИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ  
В РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЕ

ПРЕПРИНТ 86-87



НОВОСИБИРСК

1986



РЕЛАКСАЦИОННАЯ ДИССИПАЦИЯ ЭНЕРГИИ МАГНИТНОГО  
ПОЛЯ В РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЕ

Г.Е. Векштейн

Институт ядерной физики СО АН СССР,  
630090, Новосибирск

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассматривается механизм нагрева плазмы солнечной короны, связанный с релаксацией магнитной конфигурации в короне к состоянию минимума магнитной энергии. Источником энергии являются при этом фотосферные пульсации плазмы, приводящие к генерации продольных токов. Избыточная магнитная энергия этих токов диссипирует в результате перезамыкания силовых линий магнитного поля в узких токовых слоях. Плазменная турбулентность, связанная с процессом магнитного перезамыкания, описывается при этом феноменологически введением некоторого характерного времени релаксации. Такой подход позволяет в рамках простой модели магнитного поля связать мощность нагрева плазмы с параметрами фотосферных движений.

MAGNETIC ENERGY DISSIPATION IN A RAREFIED PLASMA  
BY THE RELAXATION PROCESS

G.E. Vekstein

Institute of Nuclear Physics, 630090, Novosibirsk, U S S R

Abstract

The problem of coronal heating by the relaxation to the minimum magnetic energy state in highly conductive plasmas (Taylor, 1974; Heyvaerts and Priest, 1984) is considered. Such a heating is provided by photospheric fluid motions that permanently build up coronal electric currents, likely to be force free. The redundant magnetic energy connected with these currents may be dissipated by the complex magnetic reconnection processes. This turbulence is treated here phenomenologically by introducing some characteristic relaxation time. This allows to express the rate of coronal heating in terms of a photospheric driver.

РЕЛАКСАЦИОННАЯ ДИССИПАЦИЯ ЭНЕРГИИ МАГНИТНОГО  
ПОЛЯ В РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЕ

Г.Е. Векштейн

1. В в е д е н и е

До еще сравнительно недавнего времени общепринятой была точка зрения, что нагрев плазмы в солнечной короне имеет акустическую природу. Считалось, что звуковые волны, которые генерируются турбулентностью в конвективной зоне, увеличивают свою амплитуду по мере распространения вверх во все более разреженные области атмосферы, что и приводит в конце концов к их "опрокидыванию" и диссипации энергии. Однако в последние годы в результате более детальных наблюдений выяснилось, что нагрев звуковыми волнами может быть эффективен лишь для нижней хромосферы Солнца. Поэтому сейчас считается, что механизм нагрева короны связан, скорее, с магнитным полем. История этого вопроса и его современное состояние подробно изложены в [1].

Магнитный нагрев короны происходит из-за возмущения магнитного поля, возникающего при движении оснований магнитных силовых линий в фотосфере (рис.1). Физика этого явления, существенно зависит от частоты  $\omega$  таких возмущений. Если  $\omega \gtrsim v_A/\ell$ , где  $v_A$  - характерное значение альфвеновской скорости, а  $\ell$  - пространственный масштаб магнитной конфигурации, то фотосферные движения приводят к возбуждению магнитогидродинамических колебаний такой системы. Задача в этом случае состоит в выяснении различных механизмов затухания этих волн [1]. В противоположном пределе, когда  $\omega \ll v_A/\ell$ , возмущения являются квазистатическими. При этом под действием фотосферных движений магнитная конфигурация проходит через последовательность равновесных состояний. Так как в условиях солнечной короны давление плазмы много меньше давления магнитного поля (величина  $\beta = 8\pi P/B^2 \ll 1$ ), то в каждый момент времени магнитное поле остается бессильным, то есть генерируемые в плазме токи текут вдоль поля. Непосредственная джоулева диссипация, связанная с этими токами, оказывается крайне неэффективной из-за высокой проводимости плазмы солнечной короны. Не помогает здесь и возможное аномальное со-



сопротивление плазмы. Поэтому необходимый магнитный нагрев может быть обеспечен только в результате развития плазменной турбулентности, сопровождаемой пересоединением магнитных силовых линий и образованием узких токовых слоев [1]. Один из механизмов, приводящих к такой структуре — неустойчивость типа тиринг-моды в корональных петлях [2]. Для нахождения связи мощности нагрева плазмы с параметрами фотосферных движений можно воспользоваться предложенным в [3] подходом, в котором развитие плазменных неустойчивостей учитывается феноменологически как релаксация системы к состоянию минимума магнитной энергии. Целью настоящей статьи является последовательное рассмотрение этого вопроса, позволяющее получить зависимость диссипируемой в плазме энергии от различных характеристик фотосферных движений.

## 2. Модель и основные уравнения

Для упрощения будем считать, как и в [3], что все параметры конфигурации не зависят от одной из координат (например,  $y$ ). Тогда магнитное поле можно представить в следующем виде:

$$\vec{B} = [\nabla\psi(x, z) \times \vec{e}_y] + B_y(x, z) \vec{e}_y \quad (1)$$

Так как при этом

$$\text{rot } \vec{B} = -\Delta\psi \vec{e}_y + [\nabla B_y \times \vec{e}_y] \quad (2)$$

то такое магнитное поле будет бессильным, если

$$B_y \equiv f(\psi), \quad \Delta\psi = -f df/d\psi \quad (3)$$

Пусть поверхность "фотосферы" является плоскостью  $z = 0$ , на которой задано поле горизонтальных смещений  $\xi_{ox}(x)$  и  $\xi_{oy}(x)$ , а "атмосфера" занимает полупространство  $z > 0$ . В невозмущенном фотосферными движениями состоянии в области  $z > 0$  нет токов, так что там имеется потенциальное магнитное поле  $\vec{B}_0$  ( $B_{0x}, B_{0z}$ ), задаваемое функциями

$$\psi = \psi_0(x, z), \quad f = f_0(\psi_0) = 0, \quad \Delta\psi_0 = 0 \quad (4)$$

Его силовые линии определяются условием  $\psi_0(x, z) = \text{const}$ , а

( $x_1, x_2$ ) — координаты оснований данной силовой линии (рис. 2). Под действием смещений  $\vec{\xi}_c$  появляются возмущения магнитного поля:  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1$ . В дальнейшем будем считать эти смещения достаточно малыми и находить  $\vec{B}_1$  в линейном по  $\vec{\xi}_c$  приближении.

Как уже отмечалось, интересующие нас процессы происходят за время, гораздо меньшее скин-слоевого времени  $\tau_c$ , связанного с конечной проводимостью плазмы  $\sigma$  ( $\tau_c \sim l^2/D_m$ , где  $D_m = c^2/4\pi\sigma$  — магнитная вязкость плазмы). Поэтому в уравнении для магнитного поля можно считать плазму идеально проводящей, а процесс магнитного пересоединения учитывать как релаксацию поля к состоянию минимума магнитной энергии с некоторым характерным релаксационным временем  $\tau_r$ <sup>1)</sup>. Простейшее уравнение такого типа выглядит так:

$$\partial(\vec{B}^{(M)})/\partial t = -(\vec{B} - \vec{B}^{(z)})/\tau_r \quad (5)$$

Здесь  $\vec{B}$  — бессильное магнитное поле, вычисленное в рамках идеальной магнитной гидродинамики и соответствующее в каждый момент времени заданному смещению  $\vec{\xi}_c(x, t)$  на плоскости  $z = 0$ , а  $\vec{B}^{(z)}$  — магнитное поле, обеспечивающее минимум магнитной энергии при том же смещении и ограничениях, накладываемых высокой проводимостью плазмы (см. ниже). Перейдем к вычислению этих полей.

В идеальной МГД

$$\partial\vec{B}/\partial t = \text{rot}[\vec{v} \times \vec{B}] \quad (6)$$

и в линейном по возмущениям приближении

$$\vec{B}^{(M)} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1^{(M)}, \quad \vec{B}_1^{(M)} = \text{rot}[\vec{\xi} \times \vec{B}_0] \quad (7)$$

где  $\vec{\xi}$  — смещение плазмы в области  $z > 0$ , которое устанавливается таким, чтобы поле  $\vec{B}^{(M)}$  было бессильным и  $\vec{\xi} = \vec{\xi}_c$  при  $z = 0$ . С учетом (1), (3) и (4) из (7) следует, что

$$\vec{B}_1^{(M)} = [\nabla\xi_y \times \nabla\psi_0] - [\nabla(\vec{\xi} \cdot \nabla\psi_0) \times \vec{e}_y] \quad (8)$$

<sup>1)</sup> Естественно, что  $\tau_r \ll \tau_c$ . По порядку величины  $\tau_r$  можно оценивать как характерное время развития тиринг-неустойчивости в плазме [4].



Сравнивая (8) и (1), получаем, что теперь

$$\Psi = \Psi_0 - (\vec{\xi} \cdot \vec{\nabla} \Psi_0), \quad B_y = [\vec{\nabla} \xi_y \times \vec{\nabla} \Psi_0] \cdot \vec{e}_y \quad (9)$$

и магнитное поле будет бессильным, если

$$\Delta(\vec{\xi} \cdot \vec{\nabla} \Psi_0) = 0, \quad [\vec{\nabla} \xi_y \times \vec{\nabla} \Psi_0] \cdot \vec{e}_y = f(\Psi_0) \quad (10)$$

Как это видно из (9) и (10), смещения плазмы  $\xi_y$  и  $(\xi_x, \xi_z)$  входят в данном случае в уравнения независимо друг от друга. Поэтому ограничимся здесь наиболее простым случаем, когда на плоскости фотосферы  $\xi_0 x = 0$ . Тогда  $(\vec{\xi} \cdot \vec{\nabla} \Psi_0) = 0$  во всем объеме плазмы и фотосферные движения приводят к появлению лишь  $y$ -компоненты в возмущении магнитного поля. Из второго условия (10) следует, что  $B_1^{(M)} \equiv B_{1y}^{(M)}$  постоянно на силовой линии невозмущенного магнитного поля  $\vec{B}_0$  и удовлетворяет уравнению

$$B_0 d\xi/ds = B_1^{(M)} \quad (11)$$

Здесь и в дальнейшем  $\xi \equiv \xi_y(x, z, t)$ ,  $\xi_0 \equiv \xi_y(x, 0, t)$ , а  $S$  - координата вдоль силовой линии. Интегрируя (11) вдоль силовой линии от основания 1 до основания 2 (рис. 2), получаем, что

$$B_1^{(M)} = \xi_0(x_2, t) - \xi_0(x_1, t) / \int_1^2 ds/B_0(s) \quad (12)$$

то есть возмущение поля на данной силовой линии определяется разностью смещений её оснований на поверхности фотосферы.

Для нахождения магнитного поля  $\vec{B}^{(2)}$ , обладающего минимумом магнитной энергии, воспользуемся обобщением [3] известной гипотезы Тейлора [5], постулирующей, что при локальных перезамыканиях силовых линий сохраняется полная спиральность магнитного поля  $K = \int \vec{A} \cdot \vec{B} dV$ , где  $\vec{A}$  - векторный потенциал, а интегрирование проводится по всему объему плазмы.<sup>2)</sup> Варьируя теперь энергию магнитного поля  $W_M = \int dV B^2/8\pi$  при постоянном  $K$ , получаем, что

$$\delta(W_M - \mu K) = \int dV \left\{ \frac{\text{rot } \vec{B}}{4\pi} - 2\mu \vec{B} \right\} \delta \vec{A} + \int \left( \frac{\vec{B}}{4\pi} - \mu \vec{A} \right) [d\vec{s} \times \delta \vec{A}] \quad (13)$$

2) Некоторые качественные аргументы, поясняющие физический смысл этой гипотезы, приведены в Приложении.

Будем предполагать нормальную составляющую магнитного поля на поверхности фотосферы заданной,  $\delta B_n|_{z=0} = 0$ , что эквивалентно условию  $[d\vec{s} \times \delta \vec{A}]_{z=0} = 0$ . Если, к тому же, магнитное поле  $\vec{B}$  и векторный потенциал  $\vec{A}$  убывают на бесконечности достаточно быстро, то поверхностный интеграл в правой части (13) обращается в нуль, так что искомое магнитное поле  $\vec{B}^{(2)}$  удовлетворяет уравнению [5]:

$$\text{rot } \vec{B}^{(2)} = \alpha \vec{B}^{(2)}, \quad \alpha = \text{const} \quad (14)$$

Поэтому, представив его в форме (1) с помощью функций  $\Psi^{(2)}$  и  $B_y^{(2)}$ , из (2) получим, что

$$B_y^{(2)} = \alpha \Psi^{(2)}, \quad \Delta \Psi^{(2)} = -\alpha^2 [\Psi^{(2)}]^2 \quad (15)$$

Так как невозмущенное магнитное поле  $\vec{B}_0$  является потенциальным, то постоянная  $\alpha$  будет, вообще говоря, величиной первого порядка по амплитуде смещений  $\xi_0$ . Отсюда следует, что в линейном приближении

$$B_1^{(2)} \equiv B_y^{(2)} = \alpha \Psi_0, \quad \Delta \Psi^{(2)} = 0 \quad (16)$$

При заданной на плоскости  $Z=0$  нормальной составляющей магнитного поля уравнение (16) для  $\Psi^{(2)}$  имеет единственное решение, совпадающее с  $\Psi_0$ :  $\Psi^{(2)} = \Psi_0$ . Поэтому с этой точностью релаксация магнитного поля не меняет его  $X$  и  $Z$ -компонент.

Согласно первому из уравнений (16), для нахождения  $B_1^{(2)}$  нужно знать величину  $\alpha$ . Её значение определяется изменением спиральности магнитного поля  $K$ , связанным с фотосферными смещениями [3].

Из уравнения (6) следует, что

$$\partial \vec{A} / \partial t = [\vec{v} \times \vec{B}] + \vec{\nabla} g / \partial t \quad (17)$$

(произвольная функция  $g$  определяется выбором калибровки  $\vec{A}$ ). Тогда, используя (6) и (17), получим:

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} = \int \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{B} dV + \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{A} dV = \int (\vec{A} \cdot \vec{v})(\vec{B} \cdot d\vec{s}) - \int (\vec{A} \cdot \vec{B})(\vec{v} \cdot d\vec{s}) + \\ + \int (\vec{B} \cdot d\vec{s}) \partial g / \partial t \end{aligned} \quad (18)$$



Так как на поверхности  $Z=0$  имеются только горизонтальные смещения, то  $(\vec{v} \cdot d\vec{S})_{z=0} = 0$  и в линейном приближении

$$\delta K = K^{(z)} - K_0 = - \int (A_{0y} B_{0z})_{z=0} \xi_0 dx - \int (g B_{0z})_{z=0} dx \quad (19)$$

где  $K_0$  и  $K^{(z)}$  - спиральности (отнесенные к единице длины вдоль оси  $y$ ), соответственно, невозмущенного магнитного поля  $\vec{B}_0$  и поля  $\vec{B}^{(z)}$ . Векторный потенциал исходного поля удобно выбрать в виде  $\vec{A}_0 = (0, A_{0y}, 0)$  с  $A_{0y} = \Psi_0$ , так что  $K_0 = 0$ . Тогда, учитывая (16), получаем, что

$$\vec{A}^{(z)} = (0, A_{0y}, A_{1z}), \quad A_{1z} = -2 \int \Psi_0 dx' \quad (20)$$

а для спиральности  $K^{(z)}$  имеем теперь такое выражение:

$$K^{(z)} = \iint \vec{A}^{(z)} \cdot \vec{B}^{(z)} dS = \int_0^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} dx (A_{0y} B_{1z} + A_{1z} B_{0z}) = 2 \int \Psi_0^2 dS \quad (21)$$

Как видно из уравнения (19), для изменения спиральности магнитного поля  $\delta K$  достаточно знать значение калибровочной функции  $g$  лишь на плоскости  $Z=0$ . Последнее можно определить, проинтегрировав по времени уравнение (17) на плоскости фотосферы:

$$\delta \vec{A} \Big|_{z=0} = [\vec{E}_0 \times \vec{B}_0]_{z=0} + \vec{\nabla} g \quad (22)$$

и взяв  $x$  - компоненту (22), откуда

$$g \Big|_{z=0} = - \int \xi_0 B_{0z} \Big|_{z=0} dx' = - \int dx' \xi_0 \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \Big|_{z=0} \quad (23)$$

Подставляя это выражение для  $g$  в (19) и используя (21), окончательно находим, что

$$\Delta(t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_0(x,t) \left( \Psi_0 \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \right)_{z=0} dx / \iint \Psi_0^2 dS \quad (24)$$

Теперь, зная магнитные поля  $\vec{B}^{(M)}$  и  $\vec{B}^{(z)}$ , из уравнения (5) можно определить устанавливающееся в плазме магнитное поле и, тем самым, все интересующие нас характеристики такой магнитной конфигурации.

### 3. Магнитный нагрев

Не уменьшая общности, будем считать, что фотосферные смещения меняются во времени по гармоническому закону, то есть

$$\xi_0(x,t) = \xi_0(x) e^{-i\omega t} \quad (25)$$

При этом мощность диссипации энергии в плазме определяется усредненным по периоду колебаний потоком энергии через плоскость фотосферы:

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle S_z \rangle \Big|_{z=0} dx; \quad \vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{B}] \quad (26)$$

- вектор Пойнтинга

Согласно (5), возмущение магнитного поля в плазме

$$B_y = (B_y^{(z)} - i\omega \tau_r B_y^{(M)}) / (1 - i\omega \tau_r) \quad (27)$$

Возникающее же при смещениях электрическое поле на поверхности фотосферы

$$\vec{E} \Big|_{z=0} = - \frac{1}{c} [\vec{E}_0 \times \vec{B}_0]_{z=0} = \frac{i\omega}{c} [\vec{E}_0 \times \vec{B}_0]_{z=0} \quad (28)$$

Поэтому, как это следует из соотношений (25 - 28),

$$Q = \frac{F(\omega \tau_r)}{8\pi \tau_r} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \{ B_{0z} (B_y^{(z)} - B_y^{(M)})_{z=0} \xi_0(x) \} \quad (29)$$

где функция  $F(\omega \tau_r) = (\omega \tau_r)^2 / (1 + (\omega \tau_r)^2)$ . Таким образом, при малых частотах фотосферных смещений ( $\omega \tau_r \ll 1$ ) диссипируемая в плазме энергия пропорциональна  $\omega^2$ , а для высоких частот ( $\omega \tau_r \gg 1$ ) мощность нагрева не зависит от  $\omega$ . Такая зависимость диссипируемой энергии от частоты колебаний является типичной для релаксационных процессов.<sup>3)</sup>

Преобразуем формулу (29) к более удобному виду, из которого, в частности, будет следовать, что диссипируемая мощность

$Q \geq 0$ . Для этого воспользуемся явными выражениями (12), (16) и (24) для полей  $B_y^{(M)}$  и  $B_y^{(z)}$ . Тогда

3) В качестве примера можно привести затухание звуковых волн в газе, связанное с частотной дисперсией второй вязкости [6].



$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx (B_{0z} \cdot B_y^{(z)})_{z=0} \cdot f_0(x) = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dx f_0(\psi_0) \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \Big|_{z=0} = - \frac{\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(\psi_0) \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \Big|_{z=0} dx \right\}^2}{\iint \psi_0^2 ds} \quad (30)$$

При вычислении вклада в  $Q$ , связанного с полем  $B_y^{(M)}$ , заметим, что на разных основаниях данной силовой линии вертикальная компонента  $B_{0z}$  исходного магнитного поля имеет противоположные знаки, причем из условия сохранения магнитного потока между двумя близкими силовыми линиями (рис.2)  $B_{0z}(x_1) dx_1 = -B_{0z}(x_2) dx_2$ . С учетом этого обстоятельства можно записать, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f_0(B_{0z} \cdot B_y^{(M)})_{z=0} = - \int dx_1 B_{0z} f_0(x_1) \frac{f_0(x_2) - f_0(x_1)}{U(x_1)} + \int dx_2 |B_{0z}| f_0(x_2) \frac{f_0(x_2) - f_0(x_1)}{U(x_2)} = \int_{-\infty}^0 dx_1 B_{0z}(x_1) q^2(x_1) / U(x_1) \quad (31)$$

где  $q(x_1) = f_0(x_2) - f_0(x_1)$ ,  $U(x_1) = U(x_2) = \int_1^2 ds / B_0(s)$  (начало координат здесь выбрано так, что  $B_{0z}(0) = 0$ ).

В этих обозначениях каждая силовая линия магнитного поля маркируется координатой одного из своих оснований  $x_1$ . Однако более удобной характеристикой является введенная выше функция магнитного потока  $\psi_0$ . Так как  $d\psi_0 = dx_1 B_{0z}(x_1)$ , то изменению  $x_1$  в интервале  $(-\infty, 0)$  соответствует интервал значений  $\psi_0$   $(0, \psi_{0m})$  где  $\psi_{0m} = \int_{-\infty}^0 dx_1 B_{0z}(x_1)$ . Теперь, учитывая формулы (30) и (31), выражение (29) для  $Q$  нетрудно преобразовать к следующему виду.

$$Q = \frac{F(\omega \tau_r)}{8\pi \tau_r} \left\{ \int_0^{\psi_{0m}} \frac{d\psi_0}{U(\psi_0)} q^2(\psi_0) - \left[ \int_0^{\psi_{0m}} d\psi_0 \psi_0 q(\psi_0) \right]^2 / \iint \psi_0^2 ds \right\} \quad (32)$$

Для доказательства того, что величина  $Q \geq 0$  при произвольной разности смещений оснований силовых линий  $q(\psi)$ , рассмотрим такой функционал:

$$\mathcal{Y}(q) = \int_0^{\psi_{0m}} \frac{d\psi_0}{U(\psi_0)} q^2(\psi_0) / \left[ \int_0^{\psi_{0m}} d\psi_0 \psi_0 q(\psi_0) \right]^2 \quad (33)$$

Довольно очевидно, что значение  $\mathcal{Y}(q)$  не ограничено сверху, так что нас будет интересовать его минимум. Поскольку  $\mathcal{Y}$  не меняется при умножении  $q(\psi_0)$  на постоянный множитель, найдем минимум  $\mathcal{Y}(q)$  при заданном значении интеграла в знаменателе формулы (33):  $\int_0^{\psi_{0m}} d\psi_0 \psi_0 q(\psi_0) = const$ . Решая со-

ответствующую вариационную задачу, получаем, что

$$\delta \left\{ \int_0^{\psi_{0m}} \frac{d\psi_0}{U} q^2 - \mu \int_0^{\psi_{0m}} d\psi_0 \psi_0 q \right\} = \int_0^{\psi_{0m}} d\psi_0 \left( \frac{2q}{U} - \mu \psi \right) \delta q$$

то есть минимум функционала  $\mathcal{Y}(q)$  достигается при

$$q(\psi_0) \equiv q_m(\psi_0) \propto \psi_0 U(\psi_0) \quad (34)$$

Подставляя это выражение для  $q_m(\psi_0)$  в (33), находим

$$\mathcal{Y}(q_m) = \left[ \int_0^{\psi_{0m}} d\psi_0 \psi_0^2 U(\psi_0) \right]^{-1}$$

Нетрудно убедиться в том, что входящая сюда величина  $U(\psi_0) = \int_1^2 ds / B_0(s)$  представляют собой удельную поверхность силовой трубки:  $U(\psi_0) = dS / d\psi_0$ , где  $dS$  - поверхность, заключенная между двумя близкими силовыми линиями магнитного поля (рис.2),  $d\psi_0$  - разность их функций потока. Поэтому

$$\mathcal{Y}(q_m) = \left[ \int_0^{\psi_{0m}} d\psi_0 \psi_0^2 dS / d\psi_0 \right]^{-1} = \left[ \iint \psi_0^2 ds \right]^{-1}$$

и, согласно выражению (32), мощность диссипации энергии  $Q = 0$  при  $q(\psi_0) = q_m$ .

Таким образом, величина  $Q$  принимает минимальное значение, равное нулю, при  $q(\psi_0) = q_m$ , а при любом другом поле смещений ( $q \neq q_m$ )  $Q > 0$ . Выделенность смещения  $q_m(\psi_0) \propto \psi_0 U(\psi_0)$  имеет простой смысл. В этом случае, как это видно из (12), возмущение магнитного поля  $B_1^{(M)}$ , полученное в рамках идеальной МГД, пропорционально  $\psi_0$ , то есть, согласно (16), совпадает с полем  $B_1^{(z)}$ , соответствующим минимуму магнитной энергии. Естественно, что при этом не происходит никаких пере замыканий магнитного поля, сопровождаемых выделением избыточной энергии.

Общую формулу (32) для мощности нагрева плазмы при фотосферных возмущениях магнитного поля можно упростить, если характерный пространственный масштаб изменения фотосферных смещений (обозначим его  $\lambda$ ) существенно отличается от размера магнитной конфигурации  $l$ . Рассмотрим вначале случай, когда  $\lambda \ll l$ . В этом пределе можно считать, что смещения оснований силовых линий в среднем никак не скоррелированы, так что фигурирующий в (32) интеграл  $\int_0^{\psi_{0m}} d\psi_0 \psi_0 q(\psi) \approx 0$ . Физически это означает, что при мелкомасштабных смещениях



магнитное поле  $\vec{B}_1^{(r)} \approx 0$ , то есть релаксация магнитной структуры сводится просто к затуханию тока в плазме. Для диссипируемой в плазме энергии получаем при этом следующее выражение:

$$Q = \frac{F(\omega\tau_r)}{8\pi\tau_r} \int_0^{\psi_{cm}} \frac{d\psi}{v(\psi)} q^2(\psi) = \frac{F(\omega\tau_r)}{4\pi\tau_r} \langle \xi_0^2 \rangle \int_0^{\psi_{cm}} \frac{d\psi}{v} \sim \frac{F(\omega\tau_r)}{4\pi\tau_r} \langle \xi_0^2 \rangle B_0^2 \quad (35)$$

где  $\langle \xi_0^2 \rangle$  - среднее (по пространству) значение квадрата смещения плазмы в плоскости фотосферы.

Обратимся теперь к длиноволновым смещениям, когда  $\lambda \gg \ell$ . В этом случае зависимость от координаты  $x$  фотосферного смещения  $\xi_0(x)$  может быть представлена в виде

$$\xi_0(x) \approx a(1 + x/\lambda + \dots) \quad (36)$$

так что разность смещений оснований силовой линии (рис.2)

$$q(\psi) = \xi_0(x_2) - \xi_0(x_1) \approx \Delta x(\psi) a/\lambda, \quad \Delta x(\psi) = x_2(\psi) - x_1(\psi)$$

Подставляя это значение  $q(\psi)$  в формулу (32), получим, что

$$Q = \frac{F(\omega\tau_r)}{8\pi\tau_r} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 \left\{ \int \frac{d\psi [\Delta x]^2}{v} - \frac{[\int d\psi \psi \Delta x]^2}{\int \psi_0^2 dS} \right\} \sim \frac{F(\omega\tau_r)}{8\pi\tau_r} B_0^2 a^2 \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 \quad (37)$$

Отсюда видно, что при длиноволновых смещениях мощность нагрева плазмы обратно пропорциональна квадрату характерного пространственного масштаба фотосферных пульсаций.<sup>4)</sup>

В заключение обсудим кратко вопрос о том, может ли рассмотренный выше механизм обеспечить необходимый нагрев плазмы в условиях солнечной короны. Характеристики фотосферных движений на Солнце известны сейчас достаточно хорошо. В то же время присутствие в полученных формулах феноменологического параметра  $\tau_r$  и необходимость учета сложной структуры солнечного магнитного поля вносят в этот вопрос заметную долю неопределенности. Поэтому на основе полученных результатов можно сделать лишь следующий вывод (см. также [3]): подстановка

4) В некоторых частных случаях, как, например, для рассмотренной в [3] периодической магнитной конфигурации, поле смещений вида (36) не приводит к нагреву плазмы, так как для него совпадают поля  $B_1^{(m)}$  и  $B_1^{(v)}$ . В таких случаях нужно учитывать следующие члены разложения  $\xi_0(x)$  по степеням  $x/\lambda$ . Так для магнитной структуры в [3]  $Q \sim \omega(\ell/\lambda)$ .

в выражения (32), (35) и (37) средних характеристик магнитного поля и плазмы в солнечной короне показывает, что в оптимальных условиях ( $\omega\tau_r \sim 1, \lambda \sim \ell$ ) наблюдаемый уровень фотосферных пульсаций вполне достаточен для генерации необходимых потоков энергии.

Автор пользуется случаем поблагодарить Г.В.Ступакова за многочисленные и полезные обсуждения затронутых в работе вопросов.

### Приложение

Приведем здесь некоторые аргументы, поясняющие физический смысл использованной в работе гипотезы Тэйлора [5]. Заключается она, как известно, в том, что при быстрой (то есть происходящей за время, много меньшее скин-слоя) диссипации магнитной энергии в хорошо проводящей среде сохраняется интегральная спиральность магнитного поля  $K = \int \vec{A} \cdot \vec{B} dV$ .

Запишем уравнения для магнитного поля  $\vec{B}$  и векторного потенциала  $\vec{A}$  при учете конечной проводимости среды  $\sigma$ :

$$\partial \vec{B} / \partial t = \text{rot} \{ [\vec{v} \times \vec{B}] - c \vec{j} / \sigma \}, \quad \partial \vec{A} / \partial t = [\vec{v} \times \vec{B}] - c \vec{j} / \sigma \quad (\text{п.1})$$

Используя их, найдем изменение во времени магнитной энергии

$W_M = \int dV B^2 / 8\pi$  и спиральности  $K$ :

$$\frac{dW_M}{dt} = \int \frac{\vec{B}}{4\pi} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dV = - \int \frac{(\vec{j})^2}{\sigma} dV + \frac{1}{c} \int \vec{j} \cdot [\vec{v} \times \vec{B}] dV + \frac{1}{4\pi} \int \vec{B} \cdot [d\vec{s} \times [\vec{v} \times \vec{B}]] \quad (\text{п.2})$$

$$\frac{dK}{dt} = \int \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{B} dV + \int \vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dV = -2c \int \frac{\vec{j} \cdot \vec{B}}{\sigma} dV + c \int d\vec{s} \frac{[\vec{A} \times \vec{j}]}{\sigma} + \int (\vec{A} \cdot \vec{v})(\vec{B} \cdot d\vec{s}) - \int (\vec{A} \cdot \vec{B})(\vec{v} \cdot d\vec{s}) \quad (\text{п.3})$$

Как видно из (п.2), быстрая диссипация энергии магнитного поля возможна при возникновении в плазме узких токовых слоев с толщиной  $\delta \ll \ell$  - характерного размера магнитной структуры (причиной их появления может быть, например, тиринг - неустойчивость плазмы [4]). При этом плотность тока в слое

$$\vec{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot} \vec{B} \sim cB / 4\pi\delta, \quad \text{поэтому мощность диссипации}$$

$$Q_g = - \int \frac{(\vec{j})^2}{\sigma} dV \sim c^2 B^2 \ell^2 / 16\pi^2 \sigma \delta$$



и изменение энергии магнитного поля происходит за характерное время

$$\tau_w \sim \frac{B^2}{8\pi} \ell^3 / Q_3 \sim \tau_c \delta / \ell \ll \tau_c \quad (\text{п.4})$$

где  $\tau_c = 4\pi\sigma\ell^2/c^2$  - скиновое время. С другой стороны, как это следует из (п.3), наличие таких токовых слоев не приводит к существенному изменению темпа эволюции интегральной спиральности  $K$ :

$$\frac{dK}{dt} \approx -2c \int \frac{\vec{j} \cdot \vec{B}}{\sigma} dV \sim \frac{c^2 B^2 \ell^2}{4\pi\sigma}; \quad \tau_K \sim K \left( \frac{dK}{dt} \right)^{-1} \sim \tau_c \quad (\text{п.5})$$

Таким образом, в среде с высокой проводимостью, когда перезамыкание магнитных силовых линий происходит в узких токовых слоях, эволюции магнитной энергии и спиральности поля происходят в разных масштабах времени, причем  $\tau_w \ll \tau_K$ . Это и позволяет считать, что магнитная конфигурация релаксирует в этом случае к состоянию минимума магнитной энергии при постоянной интегральной спиральности магнитного поля.

#### Л и т е р а т у р а

1. Прист Э.Р. Солнечная магнитогидродинамика, Москва, "Мир", 1985.
2. Galeev, A.A., Rosner, R., Serio, S., Vaina, G.S. *Astrophys. Journ.*, **23**, 301, 1981.
3. Heyvaerts, J., Priest, E.R. *Astron. Astrophys.* **137**, 63, 1984.
4. Farth, H.P., Killeen, J., Rosenbluth, M.N., *Phys. Fluids*, **6**, 459, 1963.
5. Taylor, J.B. *Phys. Rev. Lett.*, **33**, 1139, 1974.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Механика сплошных сред*, Гостехиздат, Москва, 1953, стр.376.

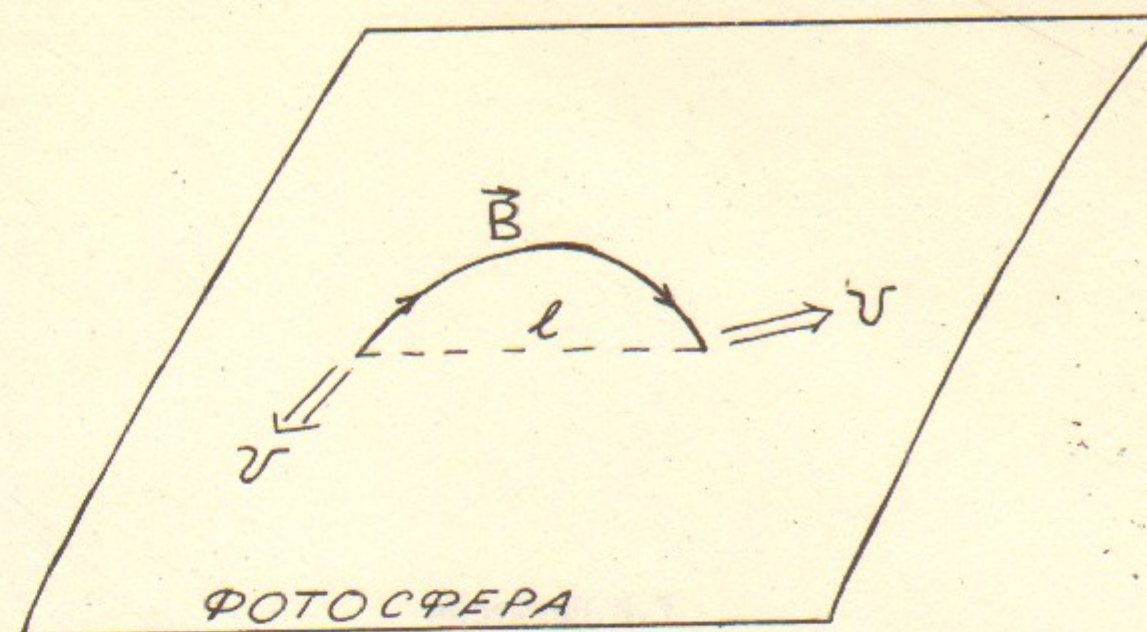


Рис.1. Фотосферные движения и возмущения магнитного поля.

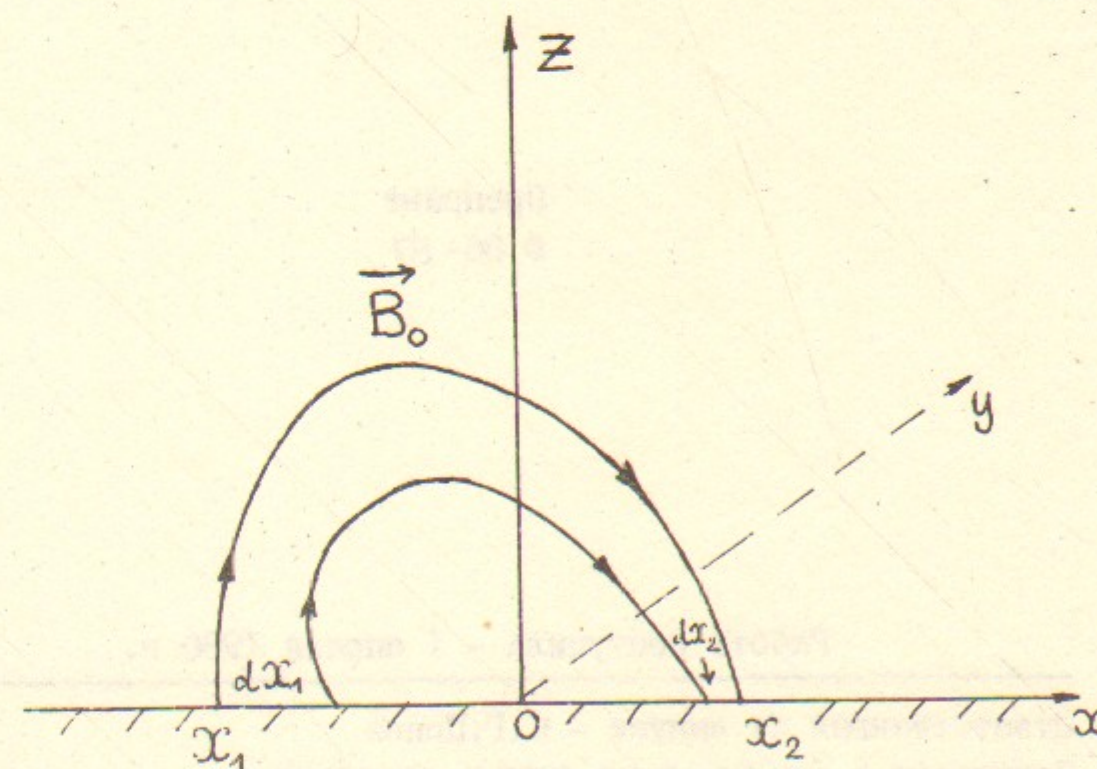


Рис.2. Силовые линии невозмущенного магнитного поля.



Г.Е.Векштейн

РЕЛАКСАЦИОННАЯ ДИССИПАЦИЯ ЭНЕРГИИ МАГНИТНОГО  
ПОЛЯ В РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЕ

Препринт  
№ 86-87

Работа поступила - I апреля 1986 г.

---

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов  
Подписано к печати 5.06.1986г. МН II747  
Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.1,3 печ.л., 1,0 учетно-изд.л.  
Тираж 200 экз. Бесплатно. Заказ № 87.

---

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90