

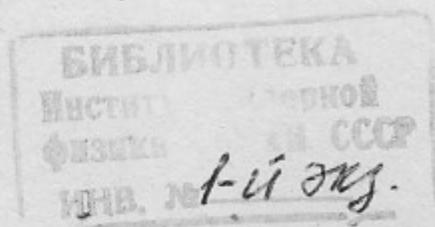
Б.50



ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

Г.П. Берман, Ф.М. Израйлев, А.Р. Коловский

КВАНТОВЫЙ ХАОС
И ОСОБЕННОСТИ ДИФФУЗИИ
В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ВИГНЕРА



ПРЕПРИНТ 87-118



НОВОСИБИРСК

Г.П. Берман^{*)}, Ф.М. Израйлев, А.Р. Коловский^{*)}

Институт ядерной физики
630090, Новосибирск 90, СССР

АННОТАЦИЯ

В представлении Вигнера исследованы особенности диффузии энергии в известной модели квантового ротатора, возбуждаемого внешним периодическим во времени δ -образным полем. Показано, что в квазиклассической области параметров процесс квантовой диффузии может быть приближенно описан с помощью дискретных классических отображений. При этом удается описать как явление квантового ограничения классической диффузии, так и квантовый резонанс — квадратичный закон роста средней энергии во времени.

^{*)} Институт физики СО АН СССР, Красноярск, 660036.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы значительный интерес связан с изучением свойств квантовых систем, стохастических в классическом пределе [1—12]. Это обусловлено прежде всего тем обстоятельством, что при классическом рассмотрении ($\hbar=0$) возникновение хаоса является типичным явлением в нелинейных динамических системах уже с небольшим числом степеней свободы, и развитие квантовомеханических методов для анализа таких систем является важной и актуальной задачей. Исследование квантового хаоса на простых моделях [1, 3, 11] показало, что даже в области глубокой квазиклассики квантовые эффекты могут играть существенную роль. Так, например, они могут приводить к ограничению классической диффузии, что представляет значительный интерес в связи с проблемой возбуждения атома водорода в ридберговской области с помощью внешних когерентных источников (см., например, [13, 14]), обменом энергии при взаимодействии межмодовых резонансов в молекулах [15] и т. д.

Настоящая работа посвящена исследованию особенностей диффузии в интенсивно изучаемой в последнее время модели квантовой стохастичности — квантового ротатора, возбуждаемого периодической последовательностью δ -импульсов:

$$\hat{H} = \frac{\gamma \hbar^2 \hat{n}^2}{2} + \varepsilon f(\theta) \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - Tt); \quad \hat{n} = -i \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (1.1)$$

— Система (1.1) отражает характерные особенности динамического поведения квантовых систем, обладающих свойством стохастичности в классическом пределе. Такая модель приближенно описывает реальную физическую систему с неэквидистантным спектром и с большим числом гармоник внешней силы. В (1.1) θ — угловая переменная, $\hat{f} = \hbar \hat{n}$ — оператор момента импульса, γ^{-1} — момент инерции, ε — возмущение, T — период следования толчков, $f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$ и предполагается $|f(\theta)| \sim 1$.

Впервые система (1.1) с $f(\theta) = \cos \theta$ была численно исследована в [3]. Основным результатом [3] состоит в обнаружении существенных отличий в поведении квантовой системы по сравнению с классической в случае, когда классическое движение является стохастическим с характерным линейным ростом средней энергии системы. В частности, скорость роста средней энергии ротатора E_t совпадает с классической лишь на конечном времени t^* , зависящем от параметров системы, а затем резко падает. Дальнейшее изучение особенностей динамики системы (1.1) было продолжено в [4], где было аналитически показано, что при рациональном значении параметра ζ ($\zeta = 2$ соответствует «основному» резонансу в [3, 4]):

$$\zeta = \frac{\gamma \hbar T}{4\pi}, \quad (1.2)$$

асимптотика E_t является квадратичной $E_t \sim t^2$ ($t \rightarrow \infty$). К настоящему времени результаты численных исследований по изучению закона роста средней энергии для квантового ротатора можно сформулировать следующим образом. При значении параметра ζ , равном «хорошему» рациональному числу $\zeta = r/q$ (r и q не слишком велики), закон роста средней энергии ротатора имеет ярко выраженный квадратичный характер. По мере «ухудшения» рациональности числа ζ ($r, q \rightarrow \infty$; $r/q \approx \text{const}$, чему соответствует переход к иррациональному значению ζ) закон роста средней энергии ротатора, по крайней мере на конечных временах счета, проявляет характерное ограничение диффузии [11]. Следует оговориться, что мы употребляем понятие «плохого» рационального числа вместо понятия иррационального, поскольку речь идет о численном эксперименте, где все числа представимы лишь в виде конечных десятичных дробей. Однако можно показать [5], что волновые функции для двух близких значений параметра ζ отличаются на малую величину $\sim \delta\zeta = |\zeta_1 - \zeta_2|$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta |\psi_{\zeta_1}(\theta, t) - \psi_{\zeta_2}(\theta, t)|^2 < \kappa^2 t^3 \delta\zeta; \quad \kappa = \varepsilon/\hbar. \quad (1.3)$$

Поэтому на конечных временах можно ограничиться анализом системы (1.1) лишь для рациональных значений ζ . Случай рациональных значений величины ζ (1.2) может представлять также и самостоятельный интерес, — это соответствует резонансам

$$\omega_n \equiv \frac{E_{n+1} - E_n}{\hbar} = \frac{(2n+1)r\Omega}{q}; \quad (E_n = \gamma \hbar^2 n^2/2; \quad \Omega = 2\pi/T)$$

между гармониками частоты невозмущенной системы и гармониками частоты внешней силы.

К настоящему времени в литературе имеется большое количество работ, посвященных объяснению с различных позиций указанных выше особенностей динамики квантового ротатора (см., например, [5—12]). Данная работа посвящена исследованию системы (1.1) на основе формализма функции Вигнера. Преимущество вигнеровской формулировки квантовой механики состоит в том, что эволюция систем происходит, аналогично классическому случаю, на фазовой плоскости (см., например, обзор [16]). Поэтому для целей сравнения классической и квантовой динамики системы представление Вигнера является наиболее подходящим и позволяет, на наш взгляд, объяснить характерные особенности динамики квантового ротатора на полуклассическом языке. Структура настоящей работы такова. В следующем параграфе приведены основные формулы и положения, касающиеся представления Вигнера для квантового ротатора и частично содержащиеся в [11]. Показано, что представление Вигнера естественным образом приводит к «классической модели квантовой стохастичности», которая была феноменологически введена в [10] для учета влияния дискретности фазового пространства на динамику системы. Аналитические и численные исследования свойств «классической модели квантовой стохастичности» содержатся в § 3. В заключении (§ 4) проведено сравнение численных результатов по закону роста средней энергии системы (1.1) с соответствующей зависимостью для «классической модели квантовой стохастичности».

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВИГНЕРА ДЛЯ КВАНТОВОГО РОТАТОРА

Пусть имеется произвольный оператор \hat{A} , который является функцией угловой переменной и оператора $\hat{n} = -i\partial/\partial\theta$: $\hat{A} \equiv A(\theta, \hat{n}) = A(\theta + 2\pi, \hat{n})$. Тогда можно определить взаимнооднозначное преобразование оператора \hat{A} в c -числовую функцию, которую в дальнейшем будем называть образом оператора \hat{A} :

$$A(\theta, \hat{n}) \leftrightarrow a(\varphi, p); \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \quad p = 0, \pm 1, \dots \quad (2.1)$$

Формула для свертки от произведения двух операторов имеет вид:

$$\text{Tr}[A(\theta, \hat{n})B(\theta, \hat{n})] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi a(\varphi, p) \cdot b(\varphi, p). \quad (2.2)$$

Эволюцию квантового ротатора будем описывать матрицей плотности $\hat{\rho}$ в момент времени непосредственно перед t -ым толчком. Используя (2.1) и явный вид гамильтониана (1.1), можно получить уравнение для эволюции функции Вигнера (образа матрицы плотности) за один период следования толчков. Наиболее простой аналитический вид отображение имеет в случае выбора $f(\theta) = \cos 2\theta$, который мы и будем анализировать в дальнейшем,

$$\rho_{t+1}(\varphi, p) = \sum_{p'=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} d\varphi' \delta(\varphi' + 2\pi\zeta p - \varphi) J_{p-p'}(2\kappa \sin 2\varphi') \rho_t(\varphi', p'), \quad (2.3)$$

где ζ и κ определены в (1.2), (1.3); $J_p(z)$ — функция Бесселя; δ — периодическая дельта-функция с периодом 2π . В качестве начального условия будем выбирать состояние ротатора с определенным значением p , чему соответствует

$$\rho_0(\varphi, p) = (1/2\pi) \delta_{p, p_0}.$$

Отметим два обстоятельства, которые следуют непосредственно из (2.3). Во-первых, отображение функции Вигнера является локальным по фазе и нелокальным по действию. Во-вторых, вследствие дискретности фазового пространства по действию $I = \hbar p$ в квантовом случае, можно выделить инвариантные счетные множества

$$\varphi_n = (\varphi_0 + 2\pi\zeta n)_{2\pi}; \quad n = 0, \pm 1, \dots, \quad (2.4)$$

где $\{\dots\}_{2\pi}$ означает дробную часть по модулю 2π , а φ_0 — произвольная начальная фаза (см. рис. 1). Эволюция функции Вигнера $\rho_t(\varphi, p)$ на множестве $\{\varphi_n\}$ не зависит от значений $\rho_t(\varphi, p)$ в остальной части фазового пространства, мера которой равна единице. В случае, когда ζ рациональное, $\zeta = r/q$, последовательность фаз $\{\varphi_n\}$ в (2.4) конечная ($0 \leq n < q$). В случае, когда ζ иррациональное, последовательность $\{\varphi_n\}$ бесконечная и плотно покрывает отрезок $0 \leq \varphi < 2\pi$. Это отличие приводит к различным выражениям для квантовомеханических средних от произвольного оператора $\langle A(t) \rangle = \text{Tr}[\hat{A}\hat{\rho}_t]$. В частности, для $\zeta = r/q$ из (2.2) имеем

$$\langle A(t) \rangle = \frac{q}{2\pi} \int_0^{2\pi/q} d\varphi_0 \left[\sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{q-1} a(\varphi_n, p) \rho_t^{(\varphi_0)}(\varphi_n, p) \right]. \quad (2.5)$$

Здесь $a(\varphi, p)$ — образ оператора \hat{A} , верхний индекс (φ_0) указывает явную зависимость функции Вигнера от фазы φ_0 .

Для наших дальнейших целей удобно перейти от соотношений (2.3) к динамическим уравнениям движения для p и φ . Введем формально следующие преобразования:

$$\begin{aligned} p_{t+1} &= p_t + [2\kappa \sin 2\varphi_t]_{nt} + \Delta p_t; \\ \varphi_{t+1} &= [\varphi_t + 2\pi\zeta p_{t+1}]_{2\pi}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где p_t — безразмерное квантовое действие, принимающее целые значения; операция $[\dots]_{nt}$ означает взятие целой части; Δp_t — дискретная целочисленная величина, распределенная по специфическому закону $W(\Delta p_t)$. Наличие операции $[\dots]_{nt}$ в (2.6) диктуется требованием дискретности значений действия, а введение дополнительного квазислучайного слагаемого является отражением факта нелокальности отображения (2.3) по действию. Нетрудно видеть, что для того, чтобы отображение (2.6) приводило к закону эволюции (2.3), необходимо выбрать функцию распределения $W(\Delta p_t)$ в виде

$$\begin{aligned} W(\Delta p_t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\xi \exp \{-i\xi \Delta p_t - i\xi [2\kappa \sin 2\varphi_t]_{nt} + \\ &\quad + i2\kappa \sin 2\varphi_t \cdot \sin \xi\}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ограничимся для простоты случаем $\kappa \gg 1$. Тогда

$$W(\Delta p_t) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\xi \exp[-i\xi\Delta p_t - 2i\kappa(\xi - \sin \xi) \cdot \sin 2\varphi_t] \equiv \tilde{W}(\Delta p_t).$$

Функция $\tilde{W}(\Delta p_t)$ обладает следующими свойствами:

$$\sum_{\Delta p} \tilde{W}(\Delta p) = 1; \quad \sum_{\Delta p} \Delta p \tilde{W}(\Delta p) = 0; \quad \sum_{\Delta p} (\Delta p)^2 \tilde{W}(\Delta p) = 0. \quad (2.8)$$

Последние из приведенных равенств позволяют предположить, что при $\kappa \gg 1$ вклад от слагаемого Δp_t в (2.6) при описании диффузии системы по действию можно считать малым, и характерный закон изменения энергии ротатора определяется преобразованием

$$\begin{aligned} p_{t+1} &= p_t + [2\kappa \sin 2\varphi_t]_{nt}, \\ \varphi_{t+1} &= (\varphi_t + 2\pi\zeta p_{t+1})_{2\pi}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Как отмечалось выше, модель типа (2.9) была феноменологически введена в [10] для учета влияния дискретности фазового пространства на хаотические свойства динамики системы. Численный анализ, выполненный в [10], показал, что модель (2.9) способна качественно описывать «ограничение квантовой диффузии». Далее, следуя [10], будем ссылаться на (2.9) как на классическую модель квантовой стохастичности.

Учет влияния нелокальности (слагаемое Δp_t в (2.6)) можно провести следующим образом. Представим ядро преобразования в (2.3) в виде суммы двух членов $K_Q = K_{cq} + K_V$, где

$$K_{cq}(\varphi p | \varphi', p') = \tilde{\delta}(\varphi' + 2\pi\zeta p - \varphi) \delta_{p, p' + [2\kappa \sin 2\varphi']_{nt}} \quad (2.10)$$

обеспечивает эволюцию функции Вигнера согласно классической модели квантовой стохастичности (2.9), а $K_V = K_Q - K_{cq}$ ответствен за нелокальность преобразования функция Вигнера (2.3). Во введенных обозначениях закон эволюции Вигнера имеет вид

$$\rho_t = (\hat{K}_{cq} + \hat{K}_V)^t \rho_0; \quad \rho_0 = (1/2\pi) \delta_{p,0}, \quad (2.11)$$

где формальная запись $\hat{K}_{cq, V} \rho$ понимается в смысле

$$\hat{K}_{cq, V} \rho = \int_0^{2\pi} d\varphi' \sum_{p'} K_{cq, V}(p, \varphi | p', \varphi') \rho(p', \varphi').$$

Расписывая произведение в (2.11), мы получим 2^t членов, содер-

жащих в различных комбинациях произведения операторов \hat{K}_{cq} и \hat{K}_V . При вычислении средней энергии системы их удобно расположить в следующем порядке:

$$\begin{aligned} E_t &= \frac{1}{2\pi} \int d\varphi \sum_p \frac{p^2}{2} [\hat{K}_{cq}^t + \hat{K}_{cq}^{t-1} \hat{K}_V + \\ &+ \hat{K}_{cq}^{t-2} (\hat{K}_V^2 + \hat{K}_V \hat{K}_{cq}) + \dots + \hat{K}_V(\dots)] \rho_0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Используя (2.8), можно показать, что при $\kappa \gg 1$ члены, заканчивающиеся оператором \hat{K}_V , относительно малы. Расположение остальных членов соответствует упорядочению по величине вклада в среднюю энергию. Следует отметить, что только первый член в (2.12) дает положительный вклад. Остальные члены могут иметь произвольные знаки. В качестве проверки сделанных утверждений был проведен численный расчет средней энергии системы на основе формулы (2.12) с параметрами $2\kappa = 10.2$, $\zeta = 1/16$ для первых четырех шагов ($t = 1, \dots, 4$). Численный анализ показывает, что относительный вклад в среднюю энергию членов, соответствующих различным комбинациям операторов \hat{K}_{cq} и \hat{K}_V , хорошо согласуется с порядком их расположения в выражении (2.12). В частности, отношение вкладов последнего и первого членов в (2.12) имеет порядок 1%.

3. КЛАССИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КВАНТОВОЙ СТОХАСТИЧНОСТИ

Из результатов предыдущего параграфа следует, что при $\kappa \gg 1$ закон роста энергии для квантового ротатора в существенной степени определяется свойствами отображения \hat{K}_{cq} . Перейдем к анализу классической модели квантовой стохастичности (2.9). В дальнейшем будем исследовать поведение системы (1.1) при рациональных значениях $\zeta = r/q$. Случай иррационального ζ будем рассматривать как предельный переход $r, q \rightarrow \infty$. При рациональном значении ζ , как было отмечено в § 2, траектория частицы, описываемая преобразованиями (2.9), лежит на инвариантном множестве (см. рис. 1), состоящем из q точек вдоль оси φ . Поскольку все значения фазы φ пронумерованы, удобно переписать отображение (2.9) в виде

$$p_{t+1} = p_t + \left[2\kappa \sin 2\left(\varphi_0 + 2\pi \frac{r}{q} n_t \right) \right]_{int},$$

$$n_{t+1} = [n_t + p_{t+1}]_q. \quad (3.1)$$

В (3.1) p_t — номер фазы ($0 \leq n_t < q$) на t -ом шаге преобразования, $[...]_q$ — целая часть по модулю q . Нетрудно видеть, что отображения (3.1) являются инвариантными относительно замены $n \rightarrow n + q$ и $p \rightarrow p + q$. Таким образом, движение «частицы» можно рассматривать на торе, состоящем из $N = q \times q$ точек, и любая траектория может быть охарактеризована двумя параметрами: периодом M — числом шагов до замыкания (поскольку число точек на торе конечно, то любая траектория за $M \leq N$ шагов замкнется), и числом оборотов J вокруг тора вдоль оси действия, которое совершила траектория до замыкания. В качестве примера на рис. 1 представлены две замкнутые на торе траектории с числом оборотов, равным 1 и 0.

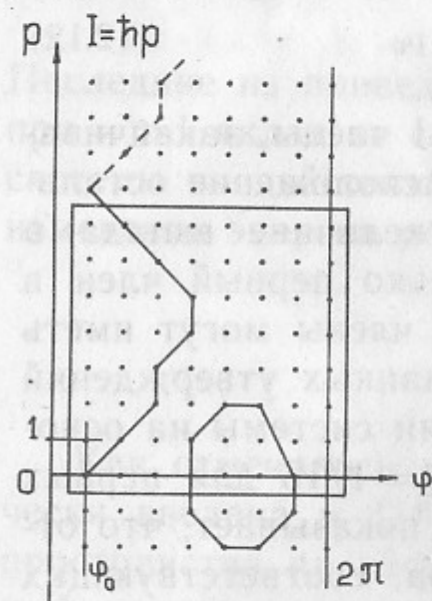


Рис. 1. Инвариантное множество (обозначено точками) при значении параметра $\zeta = 1/8$. В качестве примера приведены две замкнутые на торе траектории, задаваемые преобразованиями типа (2.9) с числом оборотов J , равным 1 и 0.

Оценим характерные значения параметров M и J . Возможны два предельных случая: а) $2\kappa \geq q$ и б) $2\kappa \ll q$. В случае (а) частице на каждом шаге доступна любая точка тора. Предполагая, что частица случайным образом перемещается по точкам, нетрудно оценить вероятность события, что траектория не замкнется за M шагов:

$$P(M) \approx \exp(-M^2/2N); \quad M/N \ll 1. \quad (3.2)$$

Полагая $P(M) \approx 0.5$, имеем характерный период траекторий

$$M^* = \sqrt{N} = q. \quad (3.3)$$

Естественно ожидать, что в этом случае обязательно найдутся траектории с ненулевым числом оборотов J , причем понятно, что относительное число таких траекторий будет достаточно большим.

Предположим теперь, что мы осуществляем переход к иррацио-

нальному значению ζ , увеличивая значения r и q . Тогда будет реализовываться второй предельный случай: $2\kappa \ll q$, при этом частице на каждом шаге преобразования доступна не вся область тора. Полагая, что вдоль оси действия происходит классическая диффузия, имеем следующую эффективную область фазового пространства, на котором происходит движение системы к моменту времени t : $\tilde{N} \approx \kappa q \sqrt{2t}$. Вводя время замыкания $M_t^* \sim \sqrt{\tilde{N}}$, имеем

$$M_t^* \sim (\kappa q)^{2/3}. \quad (3.4)$$

Полученная оценка (3.4) по существу является некоторой верхней оценкой, поскольку ее вывод основан на допущении о доступности рассматриваемой области фазового пространства на каждом шаге преобразования. В этом случае увеличивается (по сравнению со случаем (а)) вероятность события, когда траектория замкнется, не сделав ни одного оборота вокруг тора. Действительно, условие на реализацию упомянутого события можно представить в виде $\kappa \sqrt{2M_t^*} < q$. Подставляя значение M_t^* из (3.4), находим критическое соотношение параметров

$$2\kappa^2 < q. \quad (3.5)$$

При выполнении этого соотношения большинство траекторий замыкается на торе, не сделав ни одного оборота ($J=0$).

Существование критического соотношения (3.5) на параметры κ и q проиллюстрировано на рис. 2 (а—с), где представлены траектории $q=101$ частиц на торе с начальным распределением $p_0=0$. Значение параметра ζ равно 10/101. В случае рис. 2,а ($2\kappa=5.0$) ни одна из рассмотренных траекторий не совершила оборотов на торе вдоль оси действия. Рис. 2,б соответствует значению $2\kappa=10.0$: шесть траекторий совершили один оборот. В случае рис. 2,с, $2\kappa=20.0$, четыре траектории имеют значение $J = \pm 1$, четырнадцать — $J = \pm 2$, две — $J = \pm 3$.

Перейдем к анализу закона роста средней энергии системы (2.9). Рассмотрим ансамбль частиц, равномерно распределенных на интервале $[0, 2\pi]$. Выберем произвольную точку из этого ансамбля. В силу того, что член $[2\kappa \sin 2\varphi_t]_{int}$ представляет собой ступенчатую функцию, а замыкание траектории на торе происходит через конечное число шагов, мы можем окружить выбранную точку некоторой малой (но конечной) окрестностью $\Delta\varphi$, любая точка из которой эволюционирует по тому же закону. Таким образом, закон роста средней энергии системы $E_t = \langle p_t^2 \rangle / 2$ может быть

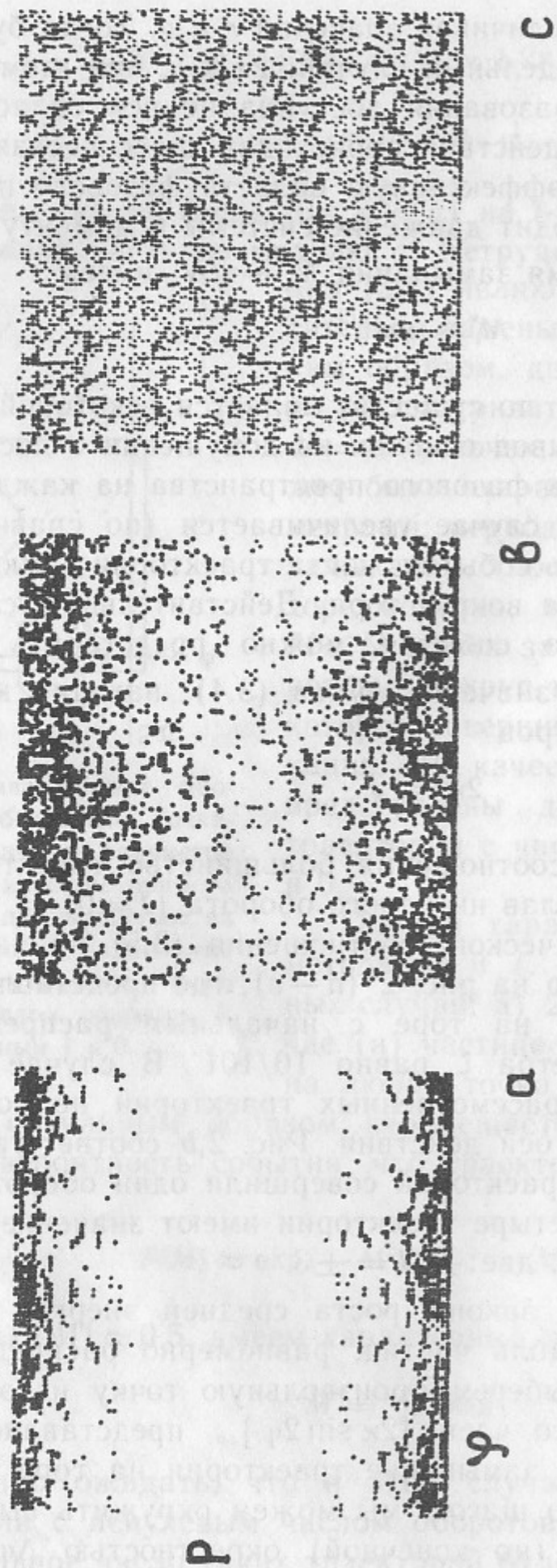


Рис. 2. Численный эксперимент для преобразования (3.1). На рисунках представлены траектории на торе $q=101$ частиц, «стартовавших» с нижней строки. Значения параметров: $\zeta=10/101$, $\varphi_0=0.0$; а) $2\kappa=5.0$, б) $2\kappa=10.0$, в) $2\kappa=20.0$. В случае (а) все траектории имеют значение $J=0$ (J —число оборотов вокруг тора вдоль оси действия), в случае (б) 6 частиц имеют $J=\pm 1$, в случае (в) 4 частицы имеют $J=\pm 1$, 14 имеют $J=\pm 2$, 2 имеют $J=\pm 3$.

представлен в виде

$$E_t = \frac{1}{4\pi} \sum_k \Delta\varphi_k \left[J_k q \frac{t}{M_k} + f_k(t) \right]^2; \quad \sum_k \Delta\varphi_k = 2\pi, \quad (3.7)$$

где J_k число оборотов, M_k —период траектории, $f_k(t)$ —некоторая периодическая функция с периодом M_k . Отметим, что в численном эксперименте наличие блоков $\Delta\varphi_k$ хорошо наблюдается.

Из (3.7) следует, что если мера траекторий с ненулевыми значениями J_k мала, то поведение E_t на конечных временах будет близким к квазипериодическому. В противном случае закон роста будет иметь ярко выраженный квадратичный характер. В свою очередь мера точек с ненулевыми значениями J_k будет, очевидно, зависеть от соотношения между параметрами системы (3.5). На рис. 3 представлены графики роста средней энергии системы вплоть до времен $t=200$ для значений параметров $2\kappa=10.0$ и $2\kappa=20.0$ и различных значений параметра ζ (кривые В). Значения $\zeta=r/q$ выбраны пропорциональными членами ряда «золотого сечения»; таким образом, ζ стремится к $(\sqrt{5}-1)/20$ при увеличении r, q . Усреднение проводилось по ансамблю равномерно распределенных на отрезке $[0, 2\pi]$ точек, состоящем из 2000 частиц. В качестве контроля мы увеличивали ансамбль усреднения до 4000 частиц. На рассматриваемых временах это практически не отражалось на поведении кривых. Числа на рисунке соответствуют масштабу графиков вдоль оси действия. Из рисунка видно, что имеет место смена режима с квадратичного на режим «ограничения диффузии».

Остановимся на вопросе о характерном времени ограничения диффузии t_d (время, начиная с которого закон роста энергии системы существенно уменьшается по сравнению с классическим законом). Как отмечалось, время t_d имеет смысл времени ограничения диффузии для исходной системы (1.1) только когда ζ —иррациональное число. Тем не менее, для численного определения t_d можно воспользоваться резонансным случаем $\zeta=r/q$ при достаточно больших r и q . Действительно, как видно на рис. 3, графики E_t для $\zeta=377/6100$ и $\zeta=1597/25340$ практически не отличаются на рассматриваемых временах, что говорит о сходимости $E_t(\zeta_r)$ к $E_t(\zeta_{ir})$ при $\zeta_r=r/q \rightarrow \zeta_{ir}$ (существование такой сходимости для квантового ротатора (1.1) гарантируется оценкой (1.3)). Очевидно, что время t_d связано с характерными временами замыкания траекторий. Исчерпывающую информацию о периоде замыкания

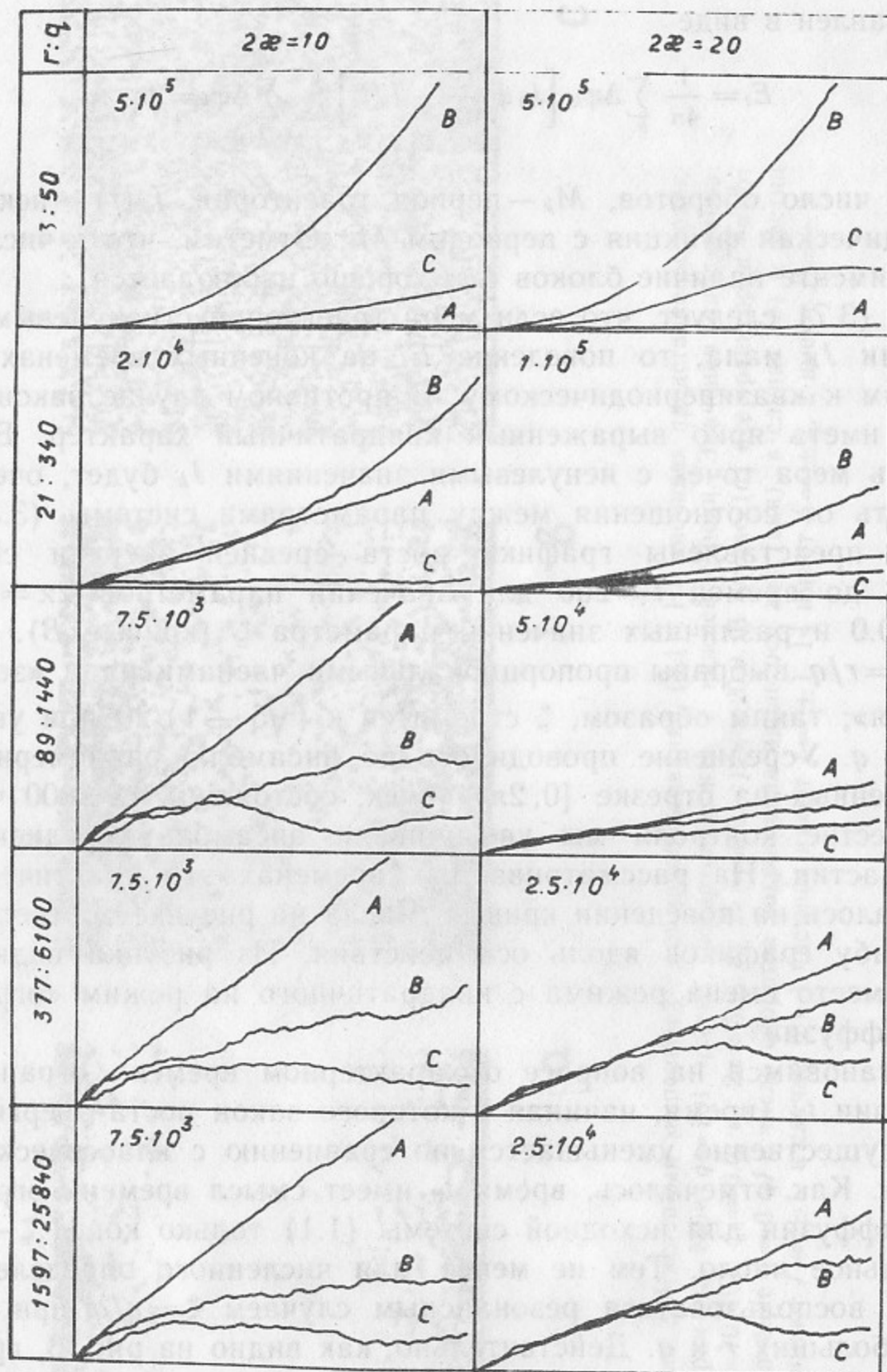


Рис. 3. Графики роста средней энергии вплоть до времен $t=200$ для классического ротатора (кривые A), классической модели квантовой стохастичности (кривые B), квантового ротатора (кривые C). Числа на рисунке соответствуют масштабу графиков оси ординат.

траекторий можно извлечь из функции $P(M)$, представляющей собой вероятность незамыкания траектории за время M . В численном эксперименте функция $P(M)$ вычислялась как отношение числа незамкнувшихся к моменту времени M траекторий к их общему числу. Характерный вид начального, вплоть до $M=400$, участка $P(M)$ представлен на рис. 4. Как показал численный эксперимент, вид начального участка $P(M)$ не меняется при увеличении r/q ($r/q \rightarrow \zeta_{ir}$), т. е. при заданном значении ζ является функцией только κ . Зная зависимость $P(M)$, нетрудно получить верхнюю оценку для закона роста E_t . Предполагая, что рост энергии отдельной частицы на временах $t < M$ (M — период замыкания) определяется диффузионным законом и, учитывая, что после времени $t > M$ рассматриваемая частица не даст вклад в рост E_t , имеем

$$E_t < \kappa^2 \int_0^t P(M) dM. \quad (3.8)$$

Таким образом, E_t будет испытывать отклонение от классического линейного закона диффузии, и можно ввести, аналогично квантовому случаю, понятие времени ограничения диффузии t_d . Как видно из рис. 4, функция вероятности $P(M)$, помимо характерного времени M_1^* (3.4) (которое практически соответствует длине «хвоста» функции $P(M)$) обладает некоторым иным характерным временем M_2^* , определяющим резкий начальный участок падения функции $P(M)$. Время M_2^* не зависит от q и определяет, согласно (3.8), время ограничения диффузии t_d в классической модели квантовой стохастичности.

Грубую оценку для времени M_2^* можно получить, положив число доступных точек по фазе φ порядка $\kappa\sqrt{2M_2^*}$, равным числу доступных точек по p . В этом случае имеем для эффективного размера фазового пространства $N_2 \sim (\kappa\sqrt{2M_2^*})^2$, что при условии $M_2^* \sim \sqrt{N_2}$ дает

$$M_2^* \sim 2\kappa^2. \quad (3.9)$$

Оценка (3.9) согласуется с оценкой времени ограничения диффузии t_d для модели квантового ротатора [10]. В заключение параграфа отметим, что неравенство (3.5) может быть получено из условия $M_1^* < M_2^*$.

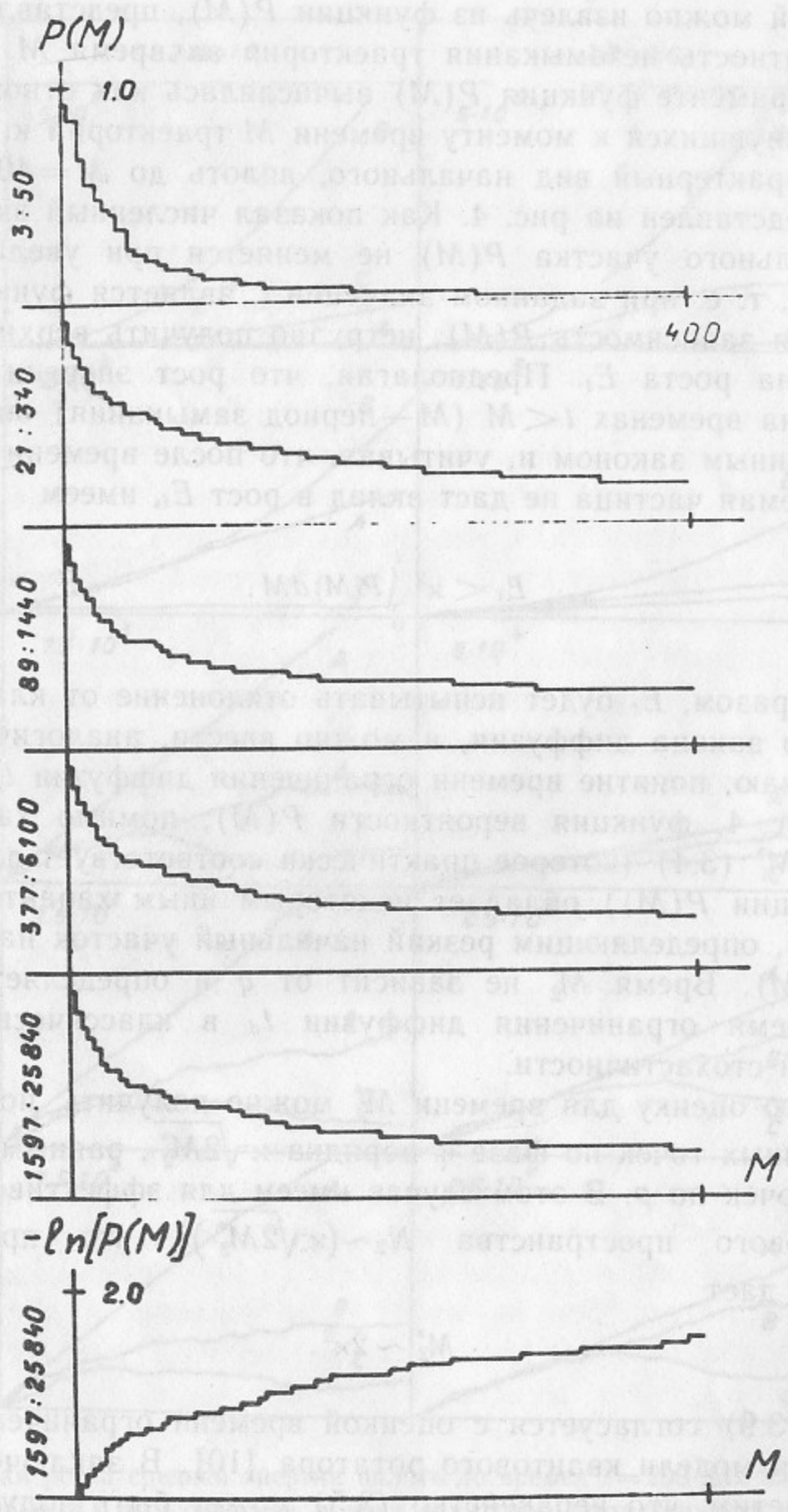


Рис. 4. Вид начального участка функции $P(M)$, представляющей собой вероятность незамыкания траектории за время M . Значение параметра 2χ равно 10.0.

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Приведем численные результаты по сравнению роста средней энергии для классической модели квантовой стохастичности (3.1) и модели квантового ротатора (1.1), для которой средняя энергия вычислялась по формуле

$$E_t = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \psi^*(\theta, t) \left(-\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \psi(\theta, t) d\theta; \quad \psi(\theta, 0) = e^{ip_0\theta}.$$

Из рис. 3 (кривые B и C) видно, что классическая модель квантовой стохастичности в целом описывает особенности диффузии энергии в исходной квантовой системе (1.1). При стремлении ζ к иррациональному числу ($r, q \rightarrow \infty$) и выполнении условия $2\chi^2 \ll q$ система (3.1) проявляет характерное ограничение диффузии энергии, аналогично квантовой модели (1.1). При этом для обеих моделей время ограничения диффузии совпадает по порядку величины. Заслуживает внимания тот факт, что модель (3.1) описывает также чисто квантовое явление, названное в [3, 10] квантовым резонансом, при котором средняя энергия имеет характерную асимптотику t^2 . На рис. 3 такой режим движения на рассматриваемых временах $t \leq 200$ наблюдается при $q = 50$ и 340 . Тем не менее, как видно из рис. 3, кривые B с течением времени идут выше кривых C . Такое поведение объясняется структурой ряда в (2.13) для средней энергии квантового ротатора. Как показывают численные расчеты, члены ряда, содержащие оператор \hat{K}_V и ответственные за нелокальность квантового отображения, суммарно дают отрицательный вклад в среднюю энергию. На рис. 3 (кривые A) приведены также численные данные для диффузии энергии в системе классического ротатора, чему соответствует отображение (2.9) с непрерывным изменением действия p (без операции $[...]_{int}$).

Нами были проведены численные эксперименты при тех же значениях параметров, что и на рис. 3, и при начальном заселении первого уровня системы ($p_0 = 1$). Значение энергии E_t по сравнению с начальным заселением нулевого уровня на рассматриваемых временах отличаются не более, чем в два раза, при этом качественное поведение кривых остается прежним. По-видимому, для сравнения диффузии в моделях (1.1) и (3.4) имеет смысл выбирать начальное заселение в виде пакета уровней—это позволит в какой-то степени исключить эффекты, связанные с выбором начальных условий.

В заключение отметим, что развитый выше подход к изучению динамики квантового ротатора (1.1) является фактически новым вариантом квазиклассического приближения для случая, когда в классическом пределе ($\hbar=0$) имеет место стохастизация движения ($\kappa=\varepsilon/\hbar \gg 1$; $K=8\pi\kappa\zeta \gg 1$; $\zeta \ll 1$). При таком подходе в качестве исходных выбираются не классические траектории движения частицы, а траектории, определяемые уравнениями (2.9) (или (3.1)). Тем самым учитывается свойство дискретности квантового фазового пространства по действию, что позволяет описать такое важное свойство системы, как ограничение диффузии. Дальнейшее построение теории возмущений в квазиклассической области параметров связано с учетом членов ряда в (2.13), содержащих операторы \hat{K}_V .

Выражаем глубокую благодарность Б.В. Чирикову за постоянное внимание к работе и полезные советы, а также Д.Л. Шепелянскому за обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.
2. Zaslavsky G.M. Physics Reports, 1981, v.80, p.157.
3. Casati G., Chirikov B.V., Izrailev F.M., Ford J. Lecture Notes in Physics, 1979, v.93, p.334.
4. Израйлев Ф.М., Шепелянский Д.Л. ТМФ, 1980, т.43, с.417.
5. Berman G.P., Kolovsky A.R. Physica, 1983, v.8D, p.117.
6. Шепелянский Д.Л. ТМФ, 1981, т.49, с.117.
7. Fishman S., Grepel D.R., Prange R.E. Phys. Rev., 1984, v.29A, p.639.
8. Dorizzi B., Grammaticos B., Pomeau Y. J. Stat. Phys., 1984, v.37, p.93.
9. Чириков Б.В., Шепелянский Д.Л. Препринт ИЯФ 85-29. Новосибирск, 1985.
10. Chirikov B.V., Izrailev F.M., Shepelyansky D.L. Sov. Reviews, 1981, v.2C, p.209.
11. Berman G.P., Kolovsky A.R. Physica, 1985, v.17D, p.183.
12. Израйлев Ф.М. Препринт ИЯФ 86-180. Новосибирск, 1986.
13. Делоне Н.Б., Крайнов В.П., Шепелянский Д.Л. УФН, 1983, т.140, с.355.
14. Bayfield J.E., Koch P.M. Phys. Rev. Lett., 1974, v.33, p.258.
15. Должиков Ю.С., Летохов В.С., Макаров А.А., Малиновский А.Л., Рябов Е.А. ЖЭТФ, 1986, т.90, с.1982.
16. Татарский В.И. УФН, 1983, т.139, с.587.

Г.П. Берман, Ф.М. Израйлев, А.Р. Коловский

Квантовый хаос и особенности диффузии в представлении Вигнера

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 28 мая 1987 г.
Подписано в печать 20.08. 1987 г. МН 00460
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1,7 печ.л., 1,4 уч.-изд.л.
Тираж 280 экз. Бесплатно. Заказ № 118

Набрано в автоматизированной системе на базе фото-
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и
отпечатано на ротапинтере Института ядерной физики
СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.