

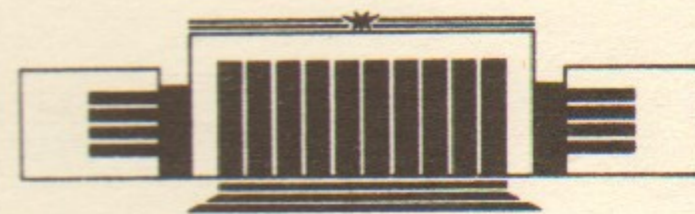


ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

И.А. Котельников, А.И. Щетников

АДИАБАТИЧНОСТЬ ДВИЖЕНИЯ
БЫСТРЫХ ИОНОВ
В ГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ ЛОВУШКЕ

ПРЕПРИНТ 87-10



НОВОСИБИРСК

АННОТАЦИЯ

Исследуется движение в газодинамической ловушке быстрых ионов, возникающих при нагреве плазмы пучком высокоэнергетичных атомов. Предполагается, что быстрые ионы удерживаются в ловушке адиабатически, как в обычном пробкотроне, многократно отражаясь от магнитных пробок. Найдена граница области адиабатического удержания, отделяющая ее от области, где движение быстрых ионов является стохастическим. Показано, что главной причиной разрушения адиабатического инварианта частиц в газодинамической ловушке являются гофрировка магнитного поля, возникающая из-за дискретности расположения катушек, а также наличие участка большой кривизны силовых линий вблизи экваториальной плоскости ловушки. Результаты аналитических вычислений границы области адиабатического удержания сравниваются с результатами численного моделирования движения ионов в реальном магнитном поле для одного из вариантов магнитной системы газодинамической ловушки. Получены оценки величины коэффициента углового рассеяния быстрых ионов в режимах адиабатического и стохастического удержания в зависимости от частоты кулоновских столкновений.

1. ВВЕДЕНИЕ

Для нагрева плазмы в газодинамической ловушке (ГДЛ) [1—3] предполагается использовать инжекцию нейтральных атомов с энергией несколько десятков килоэлектронвольт. Возникающие при перезарядке и ионизации нейтралов быстрые ионы имеют большую длину свободного пробега и в отличие от частиц основной, сравнительно холодной компоненты плазмы, находящейся в сильностолкновительном режиме газодинамического истечения, удерживаются в ГДЛ адиабатически, многократно отражаясь от магнитных пробок. Из-за относительно низкой температуры плазмы быстрые ионы тормозятся быстрее, чем рассеиваются, поэтому их угловое распределение имеет малую ширину. При наклонной инжекции в точке остановки вблизи магнитной пробки образуется пик плотности быстрых ионов, что благоприятным образом отражается на удержании холодной плазмы [4] и стабилизации желобовых возмущений [5, 6], причем высота пика плотности тем больше, чем уже угловое распределение быстрых ионов.

Если энергия быстрых ионов не слишком велика, главным процессом, ведущим к уширению их углового распределения, являются кулоновские столкновения. С увеличением энергии ионов в действие вступает еще один механизм углового рассеяния—стохастическая диффузия. Ее причиной является резонансное взаимодействие ларморовского вращения с продольным движением частицы, приводящее к изменению адиабатического инварианта—магнитно-

го момента частицы, что и означает появление углового рассеяния.

Следует отметить, что исследованию движения частиц в открытых ловушках посвящено много работ (см. библиографию в обзоре [7]). В них выявлены основные факторы, влияющие на сохранение адиабатических инвариантов, и указаны рецепты получения критерия адиабатичности. Однако полученные в этих работах количественные результаты не удастся применить непосредственно к задаче о движении быстрых ионов в ГДЛ. Первая причина этого состоит в том, что в экспериментальной модели ГДЛ [3] ларморовский радиус быстрых ионов сравним с радиусом плазмы. Поэтому, если давление плазмы сравнимо с давлением магнитного поля ($\beta \sim 1$), движение ионов не может быть описано в рамках обычного дрейфового приближения, так как изменение магнитного поля вдоль траектории иона за один ларморовский оборот не мало. Однако в ГДЛ магнитное поле и параметры плазмы плавно меняются вдоль оси, и следовательно, как показано в разделе 2, существует адиабатический инвариант, отличающийся от стандартного магнитного момента μ , но тем не менее гарантирующий длительное удержание быстрых ионов в ловушке. В этом смысле исследование адиабатичности движения быстрых ионов в плазме с большим давлением ($\beta \sim 1$) и в вакуумном магнитном поле ($\beta = 0$) не имеет принципиального различия.

Вторая и более важная причина состоит в том, что кривизна магнитных силовых линий в ГДЛ имеет несколько различных масштабов изменения, и поэтому задача не может быть сведена к рассмотренным ранее моделям с параболическим или синусоидальным профилем магнитного поля на оси ловушки [7, 8]. Простая модель магнитного поля в ГДЛ, в которой учитывается его гофрировка, вызванная дискретным расположением катушек, описана в разделе 3. Критерий адиабатического удержания быстрых ионов получен в разделе 4. Чтобы подтвердить соответствие выбранной модели реальному полю ГДЛ, в разделе 5 проведено сравнение полученного критерия с результатами численного моделирования движения быстрых ионов в магнитном поле для одного из вариантов магнитной системы экспериментальной модели ГДЛ [3]. Наконец, в разделе 6 получены оценки величины коэффициента углового рассеяния быстрых ионов в режимах адиабатического и стохастического удержания в зависимости от частоты кулоновских столкновений.

2. АДИАБАТИЧЕСКИЙ ИНВАРИАНТ БЫСТРЫХ ИОНОВ В ГДЛ

В дрейфовом приближении уравнения движения частицы в электромагнитном поле наряду с точными интегралами движения (энергией и, в рассматриваемом случае аксиальной симметрии поля, обобщенным азимутальным импульсом) также имеют и приближенный интеграл движения или адиабатический инвариант — магнитный момент $\mu = mv_{\perp}^2 / 2\omega$, где $\omega = eV / mc$ — циклотронная частота, а v_{\perp} — компонента скорости частицы, перпендикулярная магнитному полю (см., например, [9]). Если дрейфовая скорость не мала по сравнению с v_{\perp} , то траектория частицы (в плоскости, перпендикулярной магнитному полю) даже приближенно не является замкнутой (рис. 1, а), поэтому теряет смысл определение маг-

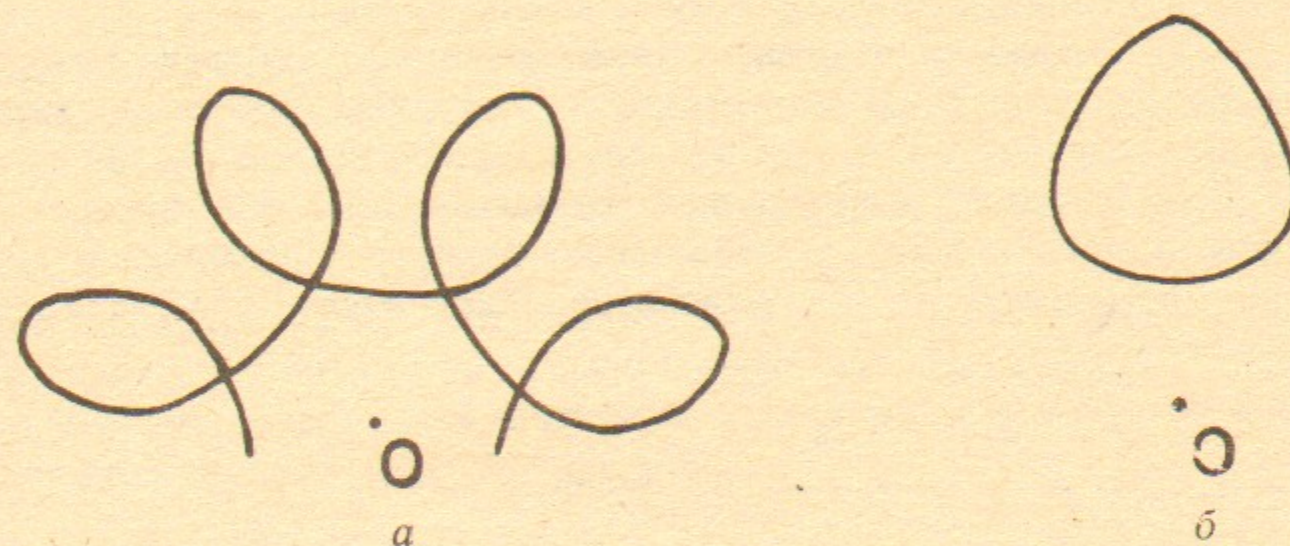


Рис. 1. Проекция траектории иона на плоскость, перпендикулярную оси ловушки, для случая $\beta \sim 1$, $q \sim L_{\perp}$:

а — в неподвижной системе координат; б — в системе координат, вращающейся с частотой Ω .

нитного момента как магнитного потока, охватываемого траекторией частицы, а вместе с определением и конкретное выражение для магнитного момента $\mu = mv_{\perp}^2 / 2\omega$. Разумеется, даже если радиальный масштаб изменения магнитного поля L_{\perp} порядка ларморовского радиуса частиц q и дрейфовое приближение нарушается, но магнитное поле меняется плавно вдоль оси ловушки, т. е. $L_{\parallel} \gg q$, можно указать адиабатический инвариант, соответствующий малости q / L_{\parallel} .

Будем считать, что как магнитное, так и электрическое поля аксиально-симметричны, и введем цилиндрические координаты r, ψ, z . В этих координатах вектор-потенциал \mathbf{A} можно выбрать так, что отличной от нуля будет только его азимутальная компонента $A_\psi(r, z)$. Гамильтониан заряженной частицы

$$H = \frac{1}{2m} \left[p_r^2 + \frac{\left(p_\psi - \frac{e}{c} r A_\psi \right)^2}{r^2} + p_z^2 \right] + e\Phi \quad (1)$$

не зависит от ψ , и, следовательно, сохраняется обобщенный импульс

$$p_\psi = m r^2 \dot{\psi} + \frac{e}{c} r A_\psi(r, z) = \text{const.} \quad (2)$$

Чтобы построить адиабатический инвариант, соответствующий медленному изменению магнитного и электрического полей вдоль ловушки, следует сначала пренебречь зависимостью \mathbf{A}, Φ от z . При этом $p_z = \text{const}$, и движение частицы оказывается двупериодическим, причем периоды колебаний по радиусу и азимуту, вообще говоря, несоизмеримы. Разделяя переменные и вводя эффективный потенциал

$$U(r, p_\psi) = \frac{1}{2m} \left[\frac{\left(p_\psi - \frac{e}{c} r A_\psi \right)^2}{r^2} + p_z^2 \right] + e\Phi, \quad (3)$$

можно найти явную зависимость r и ψ от времени:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \left(\frac{2}{m} (E - U) \right)^{1/2}, \\ \dot{\psi} &= \frac{1}{m r^2} \left(p_\psi - \frac{e}{c} r A_\psi \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где E — полная энергия частицы. Перейдем теперь в систему координат, вращающуюся с частотой

$$\bar{\Omega} = \left[\int_{r_1}^{r_2} \dot{\psi} \frac{dr}{\dot{r}} - \pi \Theta(p_\psi) \right] \left[\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\dot{r}} \right]^{-1}, \quad (5)$$

где $\Theta(p_\psi) = 0$ при $p_\psi > 0$ и $\Theta(p_\psi) = -1$ при $p_\psi < 0$, r_1, r_2 — точки ос-

тановки, в которых $\dot{r} = 0$. В этой системе координат траектория частицы является замкнутой кривой (рис. 1, б). Следовательно (см., например, [10]), интеграл

$$J_\perp = \frac{1}{2\pi} \oint \mathbf{p}_\perp d\mathbf{r}_\perp = \frac{1}{\pi} \int_{r_1}^{r_2} m \dot{r} dr + \pi \Theta(p_\psi) p_\psi \quad (6)$$

является адиабатическим инвариантом, если отказаться от предположения о независимости A_ψ, Φ , от z .

Сохранение адиабатического инварианта J_\perp обеспечивает длительное удержание быстрых ионов в ГДЛ даже при $\beta \sim 1$. В дальнейших расчетах мы перейдем для простоты к пределу $\beta = 0$. Так как энергия быстрых ионов значительно превышает температуру плазмы, то влиянием электрического поля на их движение можно пренебречь. В итоге введенный в этом разделе адиабатический инвариант J_\perp переходит в обычный магнитный момент μ .

3. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ГДЛ

Как показано Д.Д. Рютовым (см. также [11]), наилучшей для стабилизации желобковых возмущений плазмы в ГДЛ является следующая зависимость магнитного поля на оси ловушки в центральной секции:

$$h(z) = \frac{h_0}{1 - \frac{|z|}{L} \frac{K-1}{K}}, \quad (7)$$

где $2L$ — расстояние между магнитными пробками, h_0 — магнитное поле в центре ловушки, K — пробочное отношение. Магнитное поле, создаваемое катушками конечного радиуса, не может в точности следовать зависимости (7), в частности потому, что она имеет излом (скачок производной) в точке $z = 0$. В реальной ситуации этот излом сглажен на расстоянии a , не меньшем, чем радиус ближайших к экваториальной плоскости $z = 0$ катушек. Учитывая, что $K \gg 1$ [1–3], и вводя сглаживающую функцию $g(z)$, сглаженный профиль магнитного поля на оси представим в виде

$$h(z) = \frac{h_0}{1 - \frac{z}{L} g(z)}. \quad (8)$$

Масштаб изменения a сглаживающей функции $g(z)$ мал по сравнению с L и, кроме того,

$$g(0) = 0, \quad g(-z) = -g(z), \quad \lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 1. \quad (9)$$

В дальнейших расчетах будем аппроксимировать функцию $g(z)$, которую в принципе можно найти, вычисляя (или измеряя) реальное поле на оси ловушки, следующим образом:

$$g(z) = \frac{\sqrt{z^2 + a^2} - a}{z}. \quad (10)$$

Очевидно, что функция (10) удовлетворяет условиям (9).

Из-за дискретности катушек на плавное поле (8) накладывается периодическая, или точнее, квазипериодическая составляющая — гофрировка. Будем считать для простоты, что все катушки имеют одинаковый радиус b , расположены на одинаковом расстоянии l друг от друга (причем $b > l$, иначе гофрировка не мала) и различаются только протекающими по ним токами. Полагая, что плавное поле незначительно изменяется на одном периоде гофрировки, и сохраняя в фурье-разложении только первую гармонику, найдем магнитное поле вблизи оси ловушки:

$$\begin{aligned} B_z(r, z) &= h(z) [1 + \delta_0 I_0(kr) \cos kz], \\ B_r(r, z) &= -\frac{r}{2} \frac{dh(z)}{dz} + h(z) \delta_0 I_1(kr) \sin kz. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь

$$\delta_0 = \pm kb K_1(kb) \simeq \pm \sqrt{\frac{\pi kb}{2}} \exp(-kb),$$

$k = 2\pi/l$; $I_0(x)$, $I_1(x)$, $K_1(x)$ — модифицированные функции Бесселя. Знак «плюс» в δ_0 следует выбрать, если катушки расположены в плоскостях $z = 0, \pm l, \dots$, знак «минус» — если $z = \pm l/2, \pm 3l/2, \dots$

4. ГРАНИЦА ОБЛАСТИ АДИАБАТИЧЕСКОГО УДЕРЖАНИЯ

Стандартным методом изучения динамики длительного адиабатического удержания частиц в открытых магнитных ловушках является приведение дифференциальных уравнений движения к дискретному отображению того или иного вида [7]. При этом величи-

на магнитного момента и фаза ларморовского вращения фиксируются через конечные интервалы времени.

В ГДЛ основное изменение магнитного момента иона происходит вблизи медианной плоскости ловушки (рис. 2). Однако в том случае, когда шаг ларморовской спирали в центре ловушки

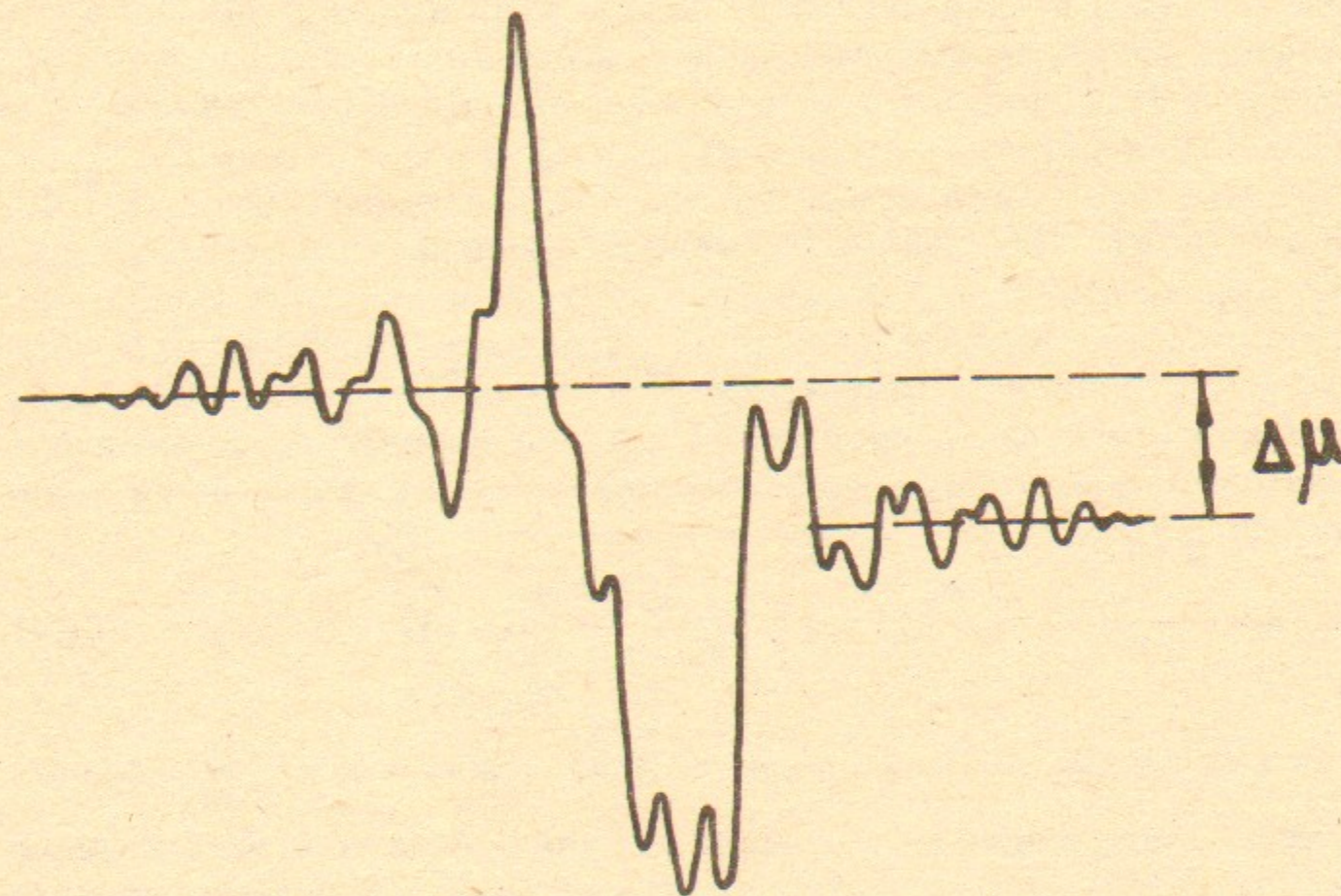


Рис. 2. Результат численного моделирования движения быстрого иона в магнитном поле газодинамической ловушки: изменение магнитного момента иона за один пролет вдоль ловушки.

$2\pi q \cos \theta$ больше расстояния l между соседними катушками магнитной системы, появляются дополнительные участки, где происходит заметное изменение магнитного момента. На этих участках осуществляется резонанс между ларморовским вращением иона и модуляцией его продольного движения осциллирующей составляющей магнитного поля:

$$kq' \cos \theta' = m, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

где $q' = v/\omega'$, θ' — ларморовский радиус (определенный по полной кинетической энергии) и питч-угол иона в точке резонанса (мы отсчитываем питч-угол от направления магнитного поля и полагаем,

что $\theta' < \pi/2$ для частиц двигающихся как вдоль, так и против этого направления). Легко видеть, что имеется n пар таких участков, если

$$n < kq \cos \theta < n+1, \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad (13)$$

где $q = v/\omega_0$, θ — ларморовский радиус и питч-угол в момент пересечения ионом экваториальной плоскости ловушки. Для быстрых ионов в ГДЛ величина n не превышает нескольких единиц. Мы рассмотрим сначала случай $n=0$ и затем $n=1$.

При $n=0$, когда всюду $kq' \cos \theta' < 1$, движение ионов в ГДЛ может быть описано с помощью стандартного отображения [7, 12], наиболее исследованного из всех имеющихся. Чтобы построить это отображение, нужно вычислить приращения магнитного момента $\Delta\mu$ и ларморовской фазы за один пролет иона между точками остановки в пробках. Изменение магнитного момента при движении иона в аксиально-симметричном поле подчиняется уравнению [13]:

$$\dot{\mu} = -\frac{\kappa m v_{\perp}}{2\omega} (2v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2) \cos \gamma + \frac{m v_{\perp} v_{\parallel}^2}{2\omega} \frac{1}{r^2 \omega} \frac{\partial}{\partial s} (r^2 \omega) \cos 2\gamma, \quad (14)$$

где κ — кривизна силовой линии, γ — угол между \vec{x} и \mathbf{v}_{\perp} , $\frac{\partial}{\partial s}$ означает дифференцирование вдоль силовой линии. Значения всех величин в уравнении (14), а также в определении магнитного момента $\mu = m v_{\perp}^2 / 2\omega$ относятся к точке, где находится ион. Последним членом в (14) можно пренебречь, так как в параксиальном приближении $r^2 \omega = \text{const}$ вдоль силовой линии.

Используя (11), найдем кривизну силовой линии в параксиальном приближении:

$$\kappa = r_0 \frac{d^2}{dz^2} \left\{ R^{-1/2} \left(1 - \delta_0 \frac{I_1(kr_0/\sqrt{R})}{kr_0/\sqrt{R}} \cos kz \right) \right\}, \quad (15)$$

где $R = h/h_0$ — пробочное отношение, r_0 — радиус точки пересечения экваториальной плоскости ловушки силовой линией, на которой ион находится в текущий момент времени. Кривизна всюду, за исключением припробочных областей $z = \pm L$, куда быстрые ионы не долетают, примерно в L/a раз больше, чем на коротком, шириной порядка a , участке силовых линий вблизи экваториальной плоскости. Поэтому для вычисления $\Delta\mu$ достаточно использовать разложе-

ние R в области $|z| \ll L$ и удержать в этом разложении только первую поправку:

$$R \simeq 1 + \sqrt{z^2 + a^2} / L. \quad (16)$$

С помощью геометрических соотношений (рис. 3):

$$\begin{aligned} r_0 \cos \gamma &= r_c \sin \varphi, \\ r_0^2 &= r_c^2 + \rho_{\perp}^2 - 2r_c \rho_{\perp} \cos \varphi, \\ \rho_{\perp} &= q \sin \theta \end{aligned} \quad (17)$$

выразим r_c и γ через фазу ларморовского вращения φ и радиус r_c

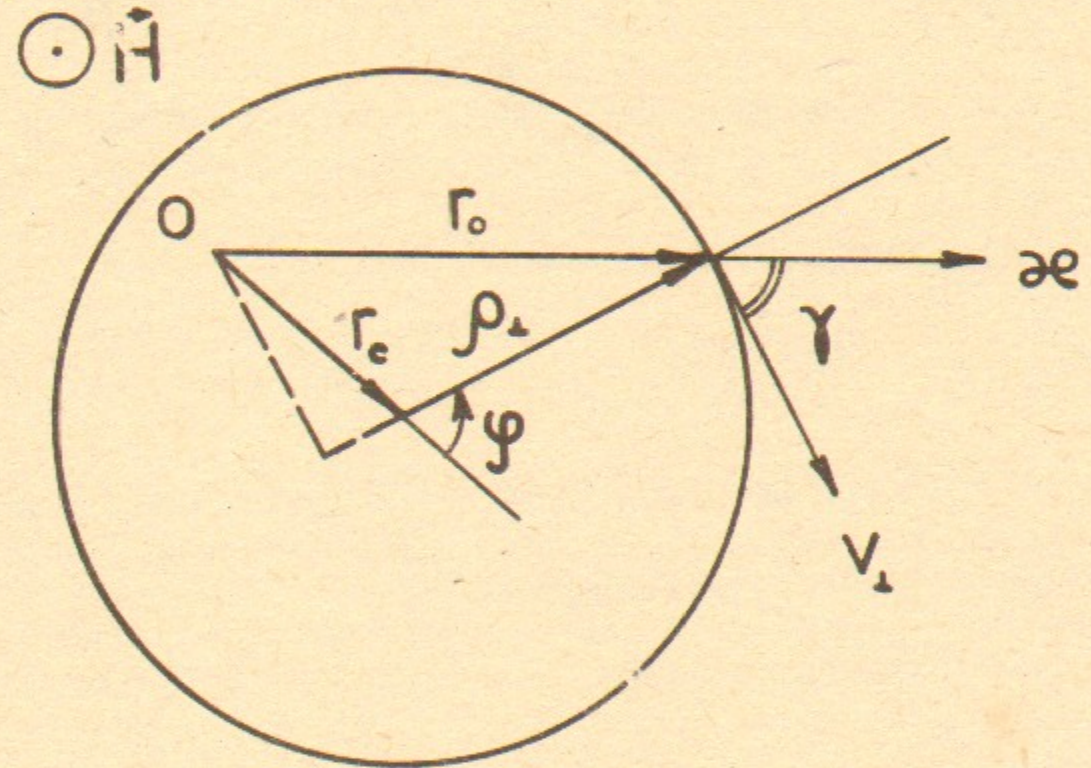


Рис. 3. К выводу соотношений (17): $r_c \sin \varphi = r_0 \cos \gamma$.

точки пересечения экваториальной плоскости силовой линией, по которой движется ведущий центр траектории иона. Используя теперь разложение (16) и формулы [14] 2.15.9.13, 2.15.9.14, найдем гармонику фурье-разложения

$$\kappa \cos \gamma = \sum_{j=1}^{\infty} [\kappa \cos \gamma]_j \sin(j\varphi), \quad (18)$$

пропорциональную $\sin \varphi$:

$$[\chi \cos \gamma]_1 = -r_c \frac{d^2}{dz^2} \left\{ S\delta_0 \cos kz + \frac{\sqrt{z^2+a^2}}{2L} (1 + T\delta_0 \cos kz) \right\}, \quad (19)$$

$$S = [cI_1(c)I_0(d) - dI_1(d)I_0(c) - cI_3(c)I_2(d) + dI_3(d)I_2(c)] / (c^2 - d^2),$$

$$T = S - I_0(c)I_0(d) + I_2(c)I_2(d), \quad d = k\rho_{\perp}, \quad c = kr_c.$$

Приращение магнитного момента $\Delta\mu$ за один пролет иона вдоль ловушки найдем, положив в правой части уравнения (14) $\mu = \text{const}$ и оставив в разложении (18) только первое слагаемое. Учитывая, что $dt = -d\varphi/\omega$, получим

$$\Delta\mu = \mu_0 \frac{1 + \cos^2 \theta}{\sin \theta} \text{Im} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [\chi \cos \gamma]_1 e^{i\varphi} \left(1 - \frac{3 + \sin^2 \theta}{2L} \sqrt{z^2 + a^2} \right) d\varphi, \quad (20)$$

где φ_1 и φ_2 — ларморовские фазы иона в точках остановки в пробках. Связь между z и φ легко найти, используя разложение (16):

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= - \int \frac{\omega}{v_{\parallel}} dz = \\ &= \varphi_0 + \frac{z}{\rho \cos \theta} + \frac{a^2(1 + \cos^2 \theta)}{4L\rho \cos^3 \theta} \left[\frac{z}{a} \sqrt{1 + \frac{z^2}{a^2}} + \ln \left(\frac{z}{a} + \sqrt{1 + \frac{z^2}{a^2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь φ_0 — ларморовская фаза иона при пересечении им экваториальной плоскости ловушки, и для определенности принято, что продольная составляющая скорости

$$v_{\parallel} = \pm v \sqrt{1 - R \sin^2 \theta}. \quad (22)$$

отрицательна.

Обычный способ вычисления интеграла (20) заключается в смещении контура интегрирования с действительной оси в верхнюю половину комплексной плоскости φ (если $v_{\parallel} > 0$, контур нужно сместить в нижнюю полуплоскость). При этом контур «зацепляется» за особенности подынтегрального выражения (рис. 4). Интегралы по вертикальным участкам C_1, C_2 , выходящим из точек φ_1, φ_2 на действительной оси (которые являются пределами интегрирования), составляют квазипериодическую часть изменения магнитного момента. Эти интегралы взаимно сокращаются для соседних контуров, соответствующих последовательным пролетам частицы вдоль ловушки от пробки до пробки. Интеграл по удаленному в бесконечность участку C_4 равен нулю. Искомое приращение маг-

нитного момента, так называемое резонансное $\Delta\mu$ [7], которое может накапливаться от пролета к пролету, есть интеграл по участкам C_3 , охватывающим особые точки подынтегрального выражения.

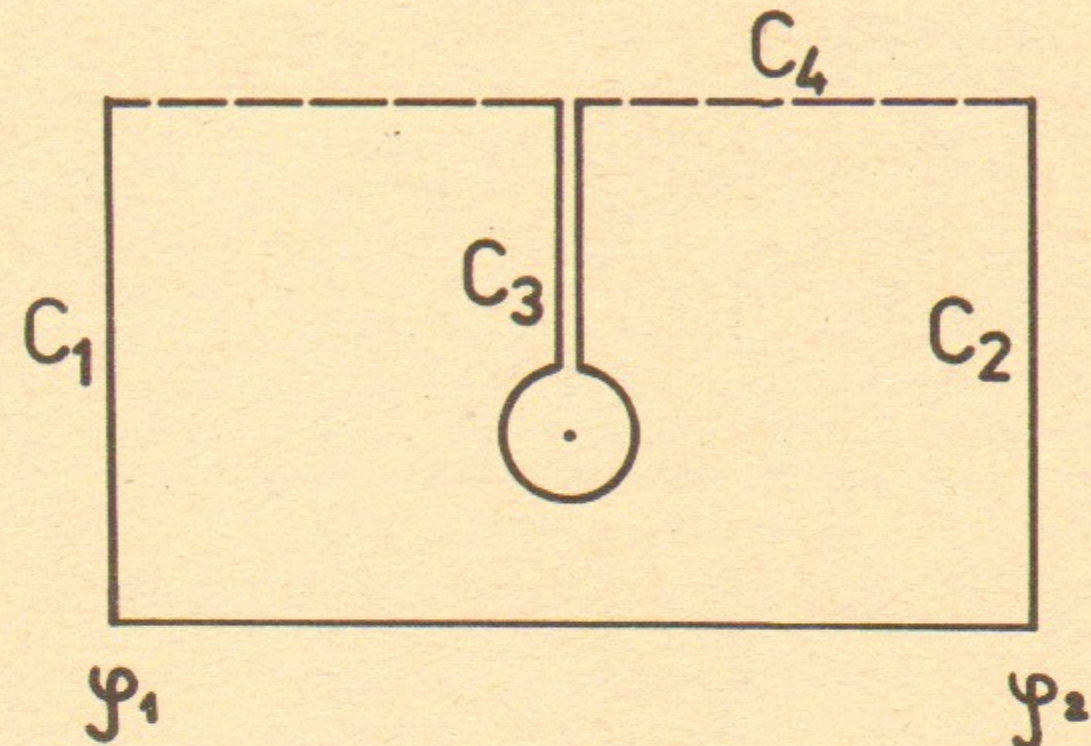


Рис. 4. Контур интегрирования в комплексной плоскости φ .

При вычислении интеграла по контуру C_3 удобно перейти от интегрирования в плоскости φ к интегрированию в плоскости z , при этом контур интегрирования также будет охватывать особую точку $z = ia$ один раз:

$$\begin{aligned} \Delta\mu &= -\mu r_c \frac{(1 + \cos^2 \theta)}{\cos \theta \sin \theta} \times \\ &\times \text{Im} \int_{C_3} e^{i\varphi(z)} \frac{d^2}{dz^2} \left\{ S\delta_0 \cos kz + \frac{\sqrt{z^2+a^2}}{2L} (1 + T\delta_0 \cos kz) \right\} \times \\ &\times \left[1 - \frac{\sqrt{z^2+a^2}}{2L} (1 + \sin^2 \theta - \text{tg}^2 \theta) \right] dz. \end{aligned} \quad (23)$$

При вычислении вклада первого слагаемого в фигурных скобках поправку, пропорциональную $\sqrt{z^2+a^2}/2L$, нужно оставить только в разложении фазы ларморовского вращения (21). Можно показать, что в той области, где вклад в резонансное $\Delta\mu$ от второго слагаемого превышает вклад от первого, во втором слагаемом

нужно дифференцировать только $\sqrt{z^2+a^2}$ и пренебречь поправкой к фазе. Поправку, стоящую в квадратных скобках, нет необходимости учитывать вообще. С учетом всего сказанного находим:

$$\Delta\mu = \mu \frac{r_c}{a} \frac{1 + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \times \left\{ \sqrt{\frac{\pi a}{2q \cos \theta}} \frac{a}{L} - \delta_0 e^{ka} \left[(ka)^2 SG\left(\frac{a}{q \cos \theta} - ka, \frac{1 + \cos^2 \theta}{4 \cos^3 \theta} \frac{a^2}{Lq}\right) - \frac{T}{2} \sqrt{\frac{\pi a}{2q \cos \theta}} \frac{a}{L} \right] \right\} e^{-a/q \cos \theta} \sin \varphi_0, \quad (24)$$

где первое слагаемое в фигурных скобках соответствует приращению магнитного момента за один пролет в «плавном» магнитном поле (8), а следующие два — дополнительному вкладу гофрировки. Функцию

$$G(x, y) = \int_1^\infty d\xi e^{-x(\xi-1)} \sin [y (\xi \sqrt{\xi^2-1} - \ln (\xi + \sqrt{\xi^2-1}))] \quad (25)$$

нетрудно вычислить в пределе больших или малых значений ее аргументов:

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{2y}{x^3}, & y \ll x^2 \ll 1 \\ \sqrt{\frac{\pi}{8y}}, & x^2 \ll y \ll 1 \\ \sqrt{\frac{9\pi}{8}} \frac{y}{x^{5/3}}, & \max(1, y) \ll x^{3/2} \\ \frac{\Gamma(2/3)}{3^{1/2} 2^{1/3} y^{2/3}}, & \max(1, x^{3/2}) \ll y \end{cases}$$

Приращение магнитного момента (24) экспоненциально мало, однако в числителе показателя экспоненты стоит размер сглаживания излома поля a , а не величина порядка длины ловушки L , как в рассматривавшихся ранее моделях с параболическим или синусоидальным профилем магнитного поля. Поскольку показатель малого экспоненциального множителя есть мнимое значение фазы ларморовского вращения в точке $z=ia$ комплексной плоскости z ,

нетрудно видеть, что удержание второй и последующих гармоник фурье-ряда (18) дает экспоненциально малую поправку к вычисленному значению $\Delta\mu$. Второе и третье слагаемые в (24), пропорциональные малой относительной амплитуде гофрировки δ_0 , вообще говоря, не малы по сравнению с первым, так как малость δ_0 компенсируется наличием большого экспоненциального множителя $\exp(ka)$. Таким образом, выясняется, что малость δ_0 еще не является основанием для отбрасывания в разложении магнитного поля (11) гармоник с номером M , выше первого, хотя амплитуда этих гармоник убывает пропорционально δ_0^M . Если $\epsilon \equiv \delta_0 \exp(ka) \ll 1$, учет гармоник квазипериодической компоненты магнитного поля дает поправку к найденной величине $\Delta\mu$, малую по параметру ϵ^M . Однако и в том случае, когда $\epsilon > 1$, достаточно учесть только несколько первых гармоник, а именно гармоники с номером $M < (kq \cos \theta)^{-1}$. Дело в том, что для гармоник с номерами $M > (kq \cos \theta)^{-1}$ имеются участки резонанса $kq' \cos \theta' = m$, и как следует из вычислений $\Delta\mu$ для случая $n=1$ для основной гармоники $j=1$ (см. ниже) их вклад в $\Delta\mu$ пропорционален δ_0^M , а не $\epsilon^M \exp(-a/q \cos \theta)$, как в случае $M < (kq \cos \theta)^{-1}$. Поэтому с точностью до предэкспоненциального множителя полученный результат (24) справедлив как при $\epsilon < 1$, так и при $\epsilon > 1$.

За один пролет вдоль ловушки фаза ларморовского вращения иона увеличивается на

$$\Delta\varphi = \frac{1}{e} \int_{-z_1}^{z_1} \frac{R dz}{\sqrt{1-R \sin^2 \theta}} = \frac{4L}{e} \ln \operatorname{ctg} \theta/2, \quad (26)$$

где z_1 — координата точки остановки иона. Условие $\Delta\varphi = 2\pi j$, где j — целое число, определяет резонансные значения питч-угла, при которых приращение магнитного момента при последовательных пролетах вдоль ловушки накапливается пропорционально числу пролетов (пока питч-угол не изменится настолько, что частица выйдет из резонанса):

$$\theta_j = 2 \operatorname{arctg} \exp \frac{j\pi q}{2L}. \quad (27)$$

Линеаризуя $\Delta\mu$ по разности $\theta - \theta_j$ и вводя переменные

$$\rho = \frac{4L}{q \sin \theta_j} (\theta_j - \theta), \quad \psi = \varphi \{ \text{mod } 2\pi \},$$

построим стандартное отображение

$$\psi_{N+1} = \psi_N + \rho_{N+1}, \quad \rho_{N+1} = \rho_N + A \sin \psi_N, \quad (28)$$

где

$$A = - \frac{2L}{q \cos \theta} \frac{\Delta \mu}{\mu} \Big|_{\theta = \theta_j},$$

а индексы N и $N+1$ указывают, что значения соответствующих величин должны фиксироваться в моменты времени, предшествующие последовательным пересечениям экваториальной плоскости траекторией иона. Как показало изучение свойств этого отображения Б.В. Чириковым [7, 12], условие

$$|A| \ll 1 \quad (29)$$

гарантирует вечное сохранение адиабатического инварианта μ . Это означает, что за сколь угодно большое время (если пренебречь столкновениями частиц) питч-угол иона не сможет измениться на величину, превышающую расстояние $|\theta_{j+1} - \theta_j|$ между соседними резонансами. Уравнение $|A| = 1$ определяет границу между областями адиабатического ($|A| < 1$) и стохастического ($|A| > 1$) удержания быстрых ионов.

Полезно проследить, насколько чувствительно положение границы области адиабатического удержания к выбору сглаживающей функции $g(z)$. Основной характеристикой функции $g(z)$, влияющей на величину параметра адиабатичности A , является положение особых точек аналитического продолжения этой функции в комплексную плоскость, так как расстояние от действительной оси до ближайшей особой точки (рис. 3) определяет величину основного экспоненциального множителя $\exp(-a/q \cos \theta)$ в (24). Восстановление аналитической функции по ее значениям на действительной оси относится к классу некорректных задач^{*} математической физики [15] и наталкивается на серьезные трудности, если значения функции $g(z)$ на действительной оси получены в резуль-

^{*}Построение аналитического продолжения функции с действительной оси в комплексную плоскость становится корректной задачей, если имеется дополнительная информация об аналитических свойствах этой функции, как в случае известных соотношений Крамерса-Кронига для диэлектрической проницаемости [16].

тате измерения (или численного расчета), так как из-за ошибок измерения у восстанавливаемой функции появляются дополнительные особые точки, причем они располагаются тем ближе к действительной оси, чем чаще расположены на оси точки, в которых проводились измерения. По этой причине предпочтительно использовать аппроксимацию измеренной функции $g(z)$, имеющую по возможности меньшее число подгоночных параметров. Этому требованию в полной мере удовлетворяет используемая нами функция (10), зависящая только от одного параметра a .

С помощью специального выбора профиля магнитного поля (подбора функции $g(z)$) можно в принципе значительно уменьшить эффекты нарушения адиабатичности движения быстрых ионов в ГДЛ. Действительно, если выбрать

$$\bar{g}(z) = \text{erf} \left(\frac{z}{a} \right),$$

то резонансное приращение магнитного момента $\Delta \mu$ будет пропорционально $\exp(-a^2/4q^2 \cos^2 \theta)$, а не $\exp(-a/q \cos \theta)$. Однако даже чрезвычайно малое отклонение $g(z)$ от $\bar{g}(z)$ приведет к существенному увеличению $\Delta \mu$. Поэтому указанная возможность уменьшения $\Delta \mu$ не может быть реализована на практике.

Перейдем к случаю $n=1$, когда имеется одна пара участков резонанса, т. е. $1 < kq \cos \theta < 2$. При этом за один пролет вдоль ловушки магнитный момент иона трижды испытывает значительные изменения: при пролете через участок резонанса, экваториальную плоскость и второй участок резонанса. Приращение магнитного момента при пролете через экваториальную плоскость равно первому слагаемому в (24). Для вычисления $\Delta \mu$ на участках резонанса $kq' \cos \theta' = 1$ разложим фазу ларморовского вращения в резонансной точке z_* , учитывая, что там $\frac{d\varphi}{dz} = k$:

$$\Delta \mu = -\mu r_c \frac{S \delta_0 k^2}{2} \frac{1 + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \text{Im} \int \exp \left[i\varphi(z_*) + i\eta \frac{(z-z_*)^2}{2} \right] dz, \quad (30)$$

$$\eta = \frac{d^2 \varphi}{dz^2} \Big|_{z=z_*} \approx \frac{1 + \cos^2 \theta}{2Lq \cos^3 \theta}.$$

Вычислив этот интеграл для случая, когда участки резонанса разделены, т. е. расстояние $|\eta|^{-1/2}$, на котором сходится интеграл (30), меньше чем z_* , получим

$$\Delta\mu = -\mu r_c \frac{S\delta_0 k^2}{2} \frac{(1 + \cos^2 \theta)^{1/2}}{\sin \theta} (2\pi L Q \cos \theta)^{1/2} \sin \left(\varphi_* + \frac{\pi}{4} \right). \quad (31)$$

В пределе $kQ \cos \theta \rightarrow 1$ этот результат с точностью до численного коэффициента $\sqrt{2}$ и фазового множителя $\sin \left(\varphi_* + \frac{\pi}{4} \right)$ совпадает с величиной двух последних слагаемых в (24), описывающих вклад гофрировки в $\Delta\mu$ при $n=0$.

В отличие от случая $n=0$ при $n=1$ для дискретного описания движения иона необходимо построить трехступенчатое отображение (или двухступенчатое отображение Коэна [7, 17], если приращение магнитного момента на участках $kQ' \cos \theta' = 1$ значительно больше, чем вблизи $z=0$). Приближенный критерий адиабатического удержания для такого отображения по аналогии со стандартным отображением запишем в следующем виде [7, 18]:

$$|A| \approx 1, \quad A = - \left. \frac{2L}{Q \cos \theta} \frac{\Delta\mu}{\mu} \right|_{\theta=\theta_0}. \quad (33)$$

5. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ

Магнитное поле в реальной установке весьма приблизительно может быть описано функцией (10). Поэтому полезно сравнить результаты аналитического расчета с данными численного моделирования движения быстрых ионов. Такое сравнение было проведено для одного из вариантов магнитной системы ГДЛ, в котором магнитное поле в центральной секции в минимуме было равно 2,2 кГс, а в пробках было в 75 раз больше. Магнитная система была смоделирована 16 бесконечно тонкими витками, расположенными симметрично относительно экваториальной плоскости. Параметры витков: радиус b , координата z и ток I приведены в таблице.

z , см	28,3	93,3	150	210	264	309	350	350
b , см	59,7	60,65	61,55	60,65	62	32,5	6	15,5
I , кА	91,8	122,4	153	244,8	336,6	397,8	1025,5	1305

Наилучшее соответствие между магнитным полем выбранной системы витков и его аппроксимацией (10) достигается при следу-

ющих значениях параметров, подобранных методом наименьших квадратов:

$$a=70 \text{ см}, \quad b=l=60 \text{ см}, \quad L=370 \text{ см}.$$

Граница области адиабатичности в плоскости (ϱ, θ) , предсказываемая аналитическим расчетом, изображена на рис. 5 для случая $r_c=10$ см. Область стохастического удержания $|A| > 1$ на этом рисунке лежит выше сплошной линии. Эта же область в пределе $\delta_0=0$ заштрихована; она значительно меньше, поэтому уменьшение гофрировки (сокращение расстояния между катушками) позволило бы значительно расширить область адиабатического удержания ионов. Заметим, что линия $kQ \cos \theta = 1$, изображенная на рисунке пунктиром, лежит в области стохастичности. Следовательно, на границе области адиабатического удержания энергия и питч-угол иона таковы, что участки резонанса ларморовского вращения с гофрировкой отсутствуют. Существенно, что не все ионы, находящиеся в стохастическом режиме, могут вылететь из ловушки через пробки. Этому препятствует наличие в аксиально-симметричной системе дополнительного интеграла движения

$$p_\psi \approx \frac{m\omega_0}{2} (r_c^2 - \varrho^2 \sin^2 \theta). \quad (34)$$

По этой причине магнитный момент иона, траектория которого охватывает ось ловушки, может изменяться только в ограниченных пределах [19]. Действительно, так как для таких ионов $p_\psi < 0$ из условия $p_\psi = \text{const}$ находим, что

$$\frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta_0} \geq 1 - \left(\frac{r_c}{\varrho \sin \theta_0} \right)^2 > 0, \quad (35)$$

где θ_0 и r_{c0} — начальные значения θ и r_c . Ион не попадает в конус потерь $\sin^2 \theta < 1/K$ если

$$\sin^2 \theta_0 > \frac{1}{K} + \left(\frac{r_{c0}}{\varrho} \right)^2. \quad (36)$$

Граница области абсолютного удержания (36) показана на рис. 5 штрих-пунктирной линией.

Численное интегрирование уравнений движения иона проводилось по схеме Адамса четвертого порядка [20]. Шаг интегрирования по времени обычно составлял $0,005 \omega_0^{-1} \sin^2 \theta_0$. Точность счета

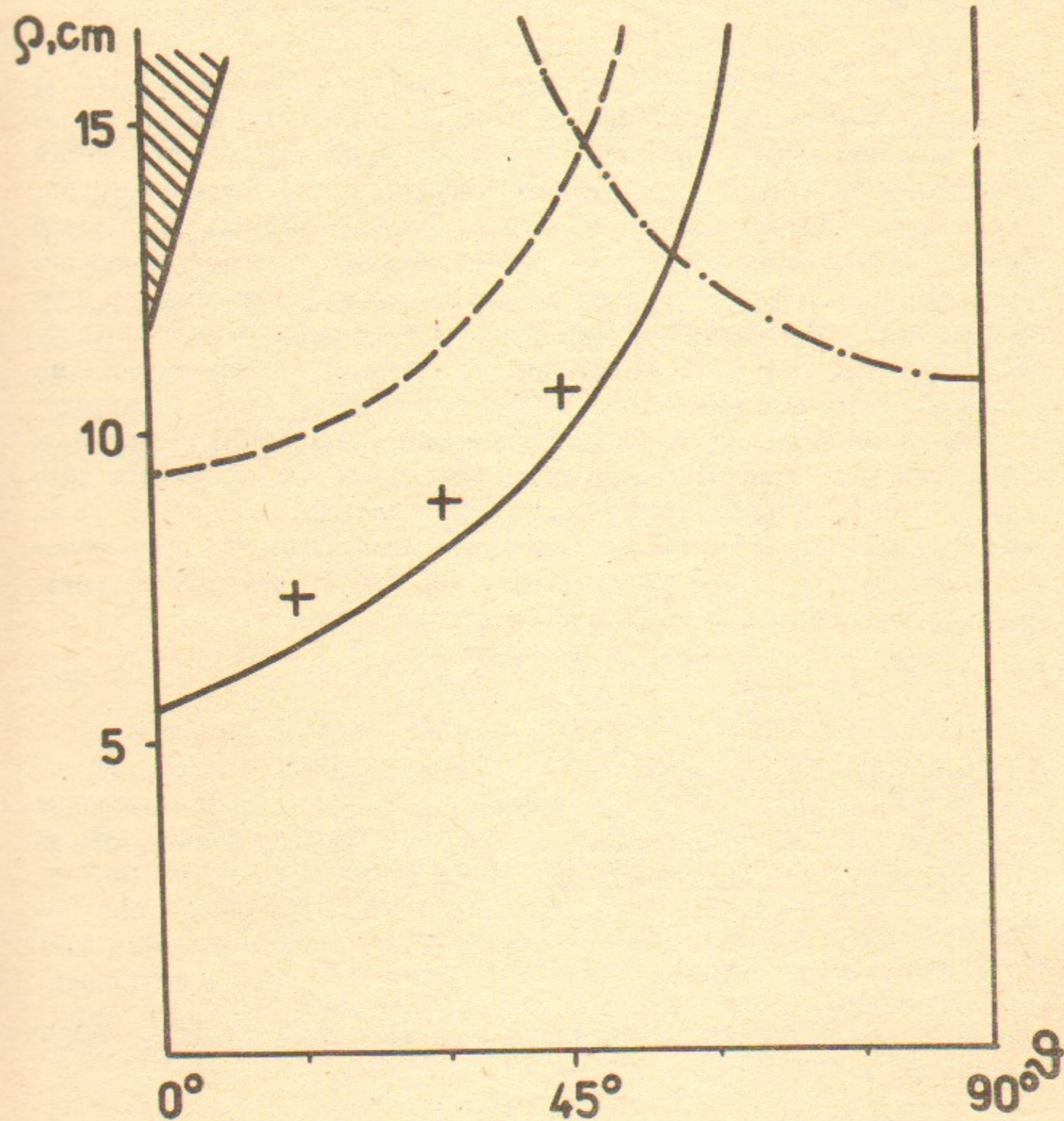


Рис. 5. Область адиабатического удержания быстрых ионов в ГДЛ: область адиабатичности ($|A| < 1$) лежит ниже сплошной линии, область стохастического движения ($|A| > 1$) — выше сплошной линии, заштрихована область стохастичности в пределе малой гофрировки; область абсолютного удержания (35) — выше штрих-пунктирной линии; штриховая линия — график уравнения $k\rho \cos \theta = 1$; крестиками отмечены точки на границе области адиабатичности, построенные по результатам численного счета.

контролировалась по точности сохранения энергии и обобщенного импульса p_ψ . Их изменение не превышало 10^{-5} за $4 \cdot 10^4$ шагов, что при $\theta_0 = 45^\circ$ и $\rho = 10$ см соответствовало пяти пролетам ловушки. Критерием стохастизации движения служила скорость расфазировки ларморовского вращения частиц с одинаковыми начальными параметрами r_{c_0} , ρ , θ_0 и разными начальными фазами ларморовского вращения, причем начальная разность фаз была мала: $\Delta\varphi_0 \ll 1$. Для определения границы области адиабатического удержания использовалось то обстоятельство, что в режиме сильной стохастизации движения, т. е. при $|A| \gg 1$ расфазировка ларморовского вращения происходит по закону [7]

$$\Delta\varphi_N = \Delta\varphi_0 \exp\left(\frac{|A|N}{2}\right), \quad (37)$$

где N — число пролетов центра ловушки. По результатам численного счета в области $|A| > 1$ строилась зависимость

$$|A(\rho)| = \frac{2}{N} \ln \frac{\Delta\varphi_N}{\Delta\varphi_0}, \quad (38)$$

которая затем экстраполировалась в область $|A| \approx 1$ для различных значений r_{c_0} , θ_0 . На рис. 6 эта кривая изображена для значений $r_{c_0} = 10$ см, $\theta_0 = 45^\circ$. Значения параметров ρ и θ , соответствующие пересечению кривой $|A|(\rho)$ горизонтальной линией $|A| = 1$ на рис. 6, изображены на рис. 5 крестиками.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

К каким же последствиям приводит нарушение адиабатичности движения быстрых ионов в ГДЛ? Прежде всего следует отметить, что стохастизация движения не должна приводить к существенному уменьшению нагрева плазмы быстрыми ионами, так как из-за относительно большой величины пробочного отношения ($K \approx 10^2$) они практически не теряются из ловушки. Удержанию быстрых ионов в ГДЛ способствует также их торможение на частицах холодной плазмы, вследствие которого инжектированные ионы быстро теряют энергию и переходят из стохастического режима $|A| > 1$ (если они первоначально находились в нем) в адиабатический режим удержания $|A| < 1$. Однако даже при $|A| < 1$ эффекты, связанные с нарушением адиабатичности движения, могут усиливать угловое рас-

сеяние быстрых ионов. Коэффициент угловой диффузии

$$D_\theta = \frac{\langle \theta_{N+1} - \theta_N \rangle^2}{2\tau} \quad (39)$$

(где τ — время пролета иона от пробки до пробки) можно оценить, рассматривая отображение (ср. [8])

$$\begin{aligned} \psi_{N+1} &= \psi_N + \rho_{N+1} + \xi_N, \\ \rho_{N+1} &= \rho_N + A \sin \psi_N + \zeta_N, \end{aligned} \quad (40)$$

которое отличается от стандартного отображения (28) наличием дополнительных слагаемых ξ_N, ζ_N , моделирующих случайные кулоновские столкновения. Среднеквадратичные значения этих слагаемых по порядку величины равны

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_N &\sim \Delta\varphi (\nu\tau)^{1/2}, \\ \bar{\zeta}_N &\sim \frac{d\Delta\varphi}{d\mu} \Delta\mu (\nu\tau)^{1/2}, \end{aligned} \quad (41)$$

где ν — частота кулоновского углового рассеяния быстрых ионов, причем $\nu\tau \ll 1$, так как за счет кулоновских столкновений за один пролет вдоль ловушки быстрые ионы, разумеется, рассеиваются на малый угол.

В стохастическом режиме ($|A| > 1$) коэффициент угловой диффузии

$$D_\theta \sim \left(\frac{q}{L}\right)^2 \cdot \frac{|A|^2}{\tau} \quad (42)$$

(см. [8]) при $\nu\tau \ll (q/L)^2$ значительно превышает частоту углового рассеяния ν . В адиабатическом режиме ($|A| < 1$) результат зависит от величины сбой ларморовской фазы ξ_N , обусловленного кулоновскими столкновениями. Если $\bar{\xi}_N \gg 1$, то оценка (42) оказывается верной вплоть до значений $|A| \sim (\nu\tau)^{1/2} (L/q)$, а при $|A| < (\nu\tau)^{1/2} (L/q)$ эффекты неадиабатичности незначительны и

$$D_\theta \sim \nu. \quad (43)$$

Если же сбой ларморовской фазы мал, то есть $\bar{\xi}_N \ll 1$, оценки (42) и (43) становятся справедливыми соответственно при $|A| > 1$ и $|A| < (\Delta\varphi)^{-1}$. В промежуточной области $(\Delta\varphi)^{-1} < |A| < 1$, как можно показать [8],

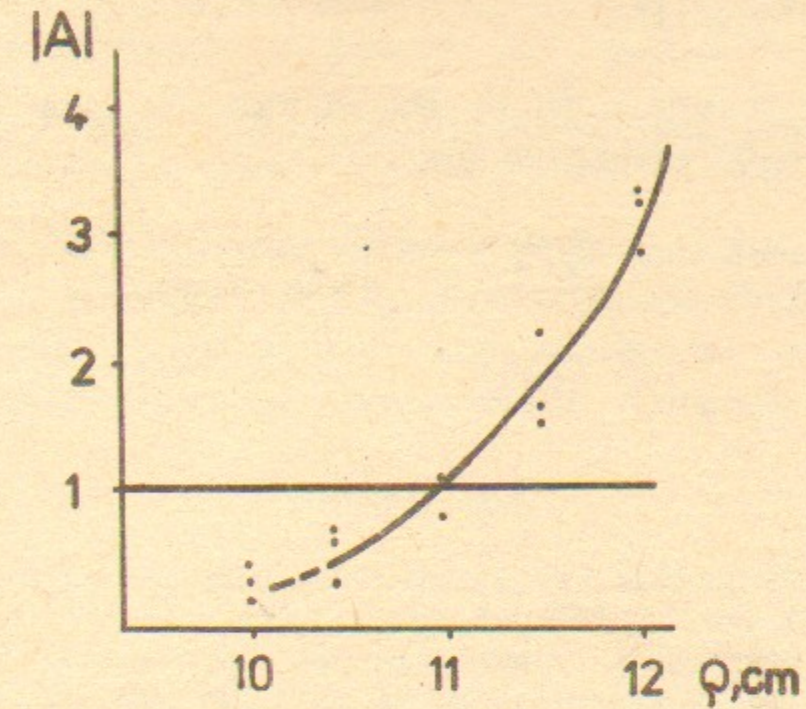


Рис. 6. Построение кривой $|A|(q)$ по результатам численного моделирования движения иона. Точками обозначена величина $|A|$, вычисленная для траекторий с разными начальными значениями фазы ларморовского вращения.

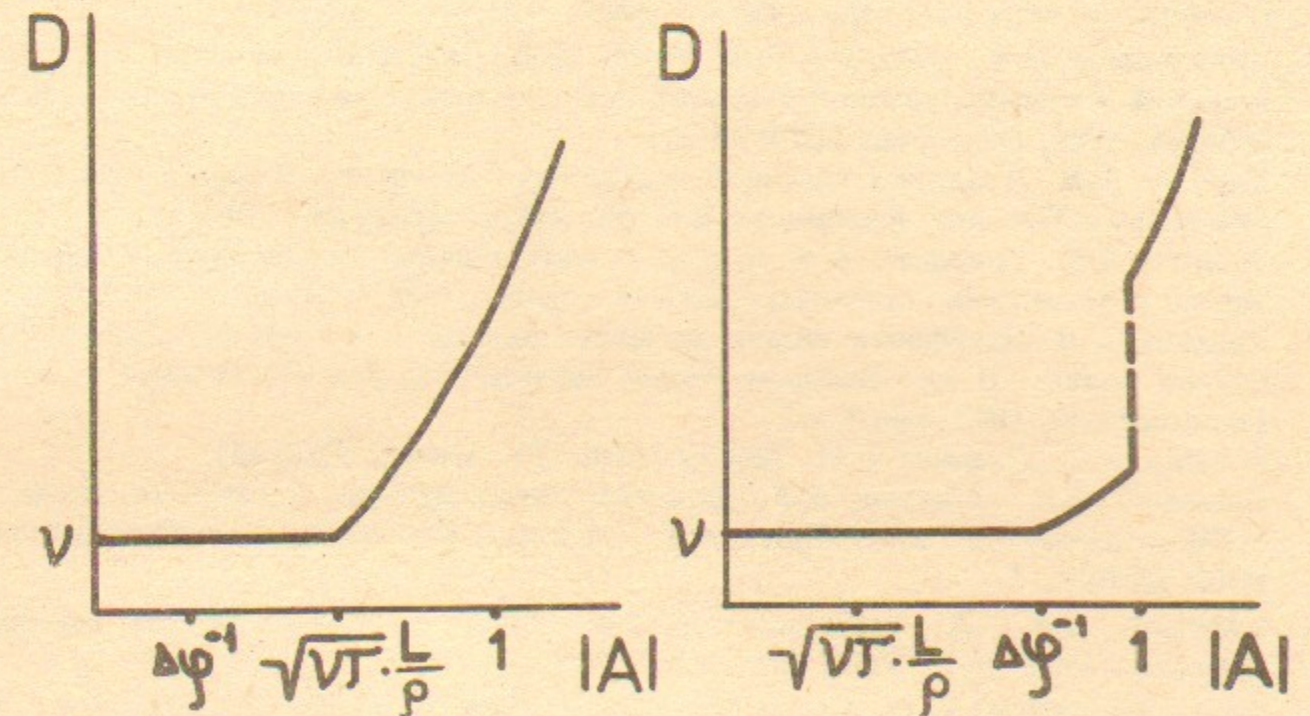


Рис. 7. Зависимость коэффициента угловой диффузии от параметра адиабатичности a — при $(\nu\tau)^{1/2} (L/q) \gg \Delta\varphi^{-1}$; b — при $(\nu\tau)^{1/2} (L/q) \ll \Delta\varphi^{-1}$.

$$D_0 \sim (|A| \Delta \varphi)^2 v (e/L)^2. \quad (44)$$

Примерная зависимость D_0 от параметра $|A|$ для обоих случаев $\xi_N \ll 1$ и $\xi_N \gg 1$ изображена на рис. 7.

Авторы благодарны Д.Д. Рютову за постановку задачи и многочисленные обсуждения, а также В.М. Малкину, Г.В. Рослякову и Б.В. Чирикову за ценные замечания, которые улучшили понимание некоторых аспектов теории адиабатических инвариантов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мирнов В.В., Рютов Д.Д. Газодинамическая линейная ловушка для удержания плазмы.—ЖТФ. Письма, 1979, т.5, вып.11, с.678.
2. Мирнов В.В., Рютов Д.Д. Газодинамическая ловушка.—Вопросы атомной науки и техники: сер. Термоядерный синтез, 1980, вып 1(5), с.57.
3. Давыденко В.И., Иванов А.А., Козьминых Ю.Л. и др. Экспериментальная модель газодинамической ловушки.—Новосибирск, 1986. (Препринт ИЯФ 86-104).
4. Котельников И.А., Рютов Д.Д. Эффекты амбиполярного потенциала в двухкомпонентной газодинамической ловушке.—Физика плазмы, 1985, т.11, вып.10, с.1155.
5. Hinton F.L., Rosenbluth M.N. Stabilization of axisymmetric mirror plasmas by energetic ion injection.—Nucl. Fusion, 1982, v.22, N 12, p.1547.
6. Котельников И.А., Росляков Г.В., Рютов Д.Д. Стабилизация желобковых возмущений в осесимметричной открытой ловушке с плещущимися ионами.—Новосибирск, 1986. (Препринт ИЯФ 86-31).
7. Чириков Б.В. Динамика частиц в магнитных ловушках.—В кн.: Вопросы теории плазмы/Под ред. Кадомцева Б.Б. М.: Энергоатомиздат, 1984, вып.13, с.3.
8. Звонков А.В., Тимофеев А.В. К теории адиабатичности движения заряженных частиц в магнитных ловушках.—Физика плазмы, 1984, т.11, вып.3, с.320.
9. Сивухин Д.В. Дрейфовая теория движения заряженной частицы в электромагнитных полях.—В кн.: Вопросы теории плазмы/Под ред. Леонтовича М.А. М.: Госатомиздат, 1963, вып.3, с.7.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля.—М.: Наука, 1973, §21.
11. Бушкова О.А., Мирнов В.В. Влияние конфигурации магнитного поля на МГД-устойчивость газодинамической ловушки.—Новосибирск, 1985. (Препринт ИЯФ 85-103).
12. Chirikov V.V. A universal instability of many-dimensional oscillator systems.—Phys. Rep., 1979, v.52, N 5, p.263
13. Hastie R.J., Hobbs G.D., Taylor J.B. Nonadiabatic behaviour of particles in inhomogeneous magnetic fields. Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. IAEA, Vienna, 1969, v.1, p.389.
14. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции.—М.: Наука, 1983.
15. Арсенин В.Я. Уравнения математической физики и специальные функции.—М.: Наука, 1984, с.224.
16. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред.—М.: Наука, 1982, § 82.
17. Cohen R.H. Stochastic motion of particles in mirror machines.—In: Intrinsic stochasticity in plasmas/Ed. by Laval G. and Gresillon D. Orsay, Edition de Physique, 1979.
18. Путвинский С.В., Шурыгин Р.В. Циклотронное взаимодействие α -частиц с гофрированным магнитным полем в токамаке. Физика плазмы, 1984, т.10, вып.5, с.933
19. Морозов А.И., Соловьев Л.С. Движение заряженных частиц в электромагнитных полях.—В кн.: Вопросы теории плазмы/Под ред. Леонтовича М.А.—М.: Госатомиздат, 1963, вып.2, с.177.
20. Калиткин Н.Н. Численные методы.—М.: Наука, 1978.

И.А. Котельников, А.И. Щетников

**Адиабатичность движения быстрых ионов
в газодинамической ловушке**

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 26 ноября 1986 г.
Подписано в печать 2.02.1987 г. МН 08615
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1,8 печ.л., 1,5 уч.-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно. Заказ № 10

*Набрано в автоматизированной системе на базе фото-
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и
отпечатано на ротапинтере Института ядерной физики
СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*