



53  
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

А.Л. ГЕРАСИМОВ

ТЕПЛОВОЕ РАВНОВЕСИЕ ОСЦИЛЛЯТОРА  
ПРИ ВОЗБУЖДЕНИИ ИЗОЛИРОВАННЫХ  
НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗОНАНСОВ

ПРЕПРИНТ 87-100



НОВОСИБИРСК

Тепловое равновесие осциллятора  
при возбуждении изолированных  
нелинейных резонансов

*А.Л. Герасимов*

Институт ядерной физики  
630090, Новосибирск 90, СССР

## АННОТАЦИЯ

Излагаются существующие методы вычисления равновесной функции распределения в гамильтоновых системах с изолированными нелинейными резонансами при наличии диссипации и внешнего шума. Предлагается новый метод рассмотрения такой системы, основанный на применении асимптотики слабого шума. Показывается, что в многомерном случае влияние изолированного резонанса на равновесную функцию распределения почти не зависит от ширины сепаратрисы и может быть весьма значительным. Это принципиально отличает многомерную задачу от изученной ранее одномерной.

## ГЛАВА 1. ВСТУПЛЕНИЕ

Стохастические дифференциальные уравнения, то есть дифференциальные уравнения со случайно меняющимися параметрами продолжают привлекать большое внимание как математиков (см., например [1, 2]), так и физиков (например, [3, 4]), хотя первые работы на эту тему появились достаточно давно (см. [5, 6, 7, 8]). Актуальность этих исследований обусловлена тем, что множество объектов как в технике (см. [9]), так и в физике описывается дифференциальными уравнениями с флуктуирующими правыми частями. Простейшей системой такого рода является броуновская частица во внешнем силовом поле [6].

Одним из наиболее просто описываемых и представляющих большой практический интерес является случай аддитивного шума с малым (по сравнению с характерным временем изменения динамических переменных в невозмущенной шумом системе) временем корреляции. Тогда процесс изменения динамических переменных в системе с шумом близок к марковскому (см., например, [1, 9]) и совместная плотность вероятности однозначно определяется плотностью вероятности начальных значений и переходной вероятностью (см. [4, 6, 9]). Переходная вероятность, так же, как и плотность распределения частиц в системе, является решением линейного уравнения в частных производных параболического типа — уравнения Фоккер—Планка (см. [3, 4, 6, 10]). Важная во многих приложениях задача о нахождении вероятности выхода частицы за границы заданной области может быть представлена в виде некоторых граничных задач для «сопряженного» линейного уравнения (эллиптического или — для консервативных задач — параболического типа, см. [1, 2, 6, 9]). В настоящей работе нас будет интересовать вычисление именно таких величин — стационарной (для не зависящей от времени динамики) функции распределения (с.ф.р.) и вероятности выхода за границы заданной области. Для зависящей от времени динамики вместо с.ф.р. мы будем рассматривать «равновесную» функцию распределения (р.ф.р.), устанавливающуюся при больших временах.

Наиболее простой из всех статистических задач для систем рассматриваемого типа является вычисление с.ф.р. (или р.ф.р.) — решение (стационарного) уравнения Фоккер—Планка. Одним из важных вопросов,

изучаемых с помощью р.ф.р., является зависимость структуры аттрактора (числа максимумов р.ф.р.) от уровня шумов в системе (см. [12]). Однако точное решение даже этой задачи можно получить только для очень немногих систем. Так, точно решаемым является одномерный консервативный случай (см. [6, 9, 10]). Для многомерных же задач практически единственным точно решаемым случаем является многомерный нелинейный осциллятор с изотропным трением и изотропной не зависящей от координат диффузией.

Одним из наиболее эффективных и широко применяемых приближенных методов, позволяющих понижать размерность исходной задачи и в некоторых случаях получать явные решения, является метод «статистического» или «теплого» усреднения. Так, при разделении правой части исходной динамической системы на трение и гамильтонову часть и требовании малости «тепловых» слагаемых: трения и шума, можно эффективно использовать эти малости и проводить усреднение «тепловых» слагаемых вдоль траекторий гамильтоновой системы по методу типа Боголюбова—Крылова. Во многих случаях это позволяет получать явные аналитические формулы для р.ф.р. (см., например, [9]). Этот метод широко используется с работы Крамерса [8] (много ссылок содержится в [3]), хотя, как указано в [11], строгое обоснование его применимости к многомерным либо к неконсервативным системам наталкивается на определенные трудности (явление «теплого резонанса», см. также § 2.2).

Другим важным подходом к исследованию свойств стохастических дифференциальных уравнений является исследование асимптотики слабого шума—т. е. при асимптотически малых шумовых слагаемых и фиксированной исходной динамической системе (с трением). В этом случае общее представление вероятности перехода в виде континуального интеграла (аналогичное такому же представлению в квантовой механике, см. [13]) сводится к квазиклассическому приближению, когда из всего многообразия траекторий вклад в интеграл дают только некоторые, наиболее вероятные. Эти наиболее вероятные траектории перехода могут быть найдены в квазиклассическом приближении как экстремали стандартного функционала действия классической механики с лагранжианом, получающимся из правых частей исходной динамической системы (с трением) с помощью известных преобразований [14]. Р.ф.р. в ведущем порядке по малости шумов всегда может быть найдена в квадратурах после решения системы уравнений классической механики для экстремалей. Математически строгое изложение такой теории содержится в [2]. Одной из наиболее важных (и удобных) особенностей этой асимптотики является независимость переходной вероятности от положения поглощающих границ (названная Кацем [15] «принципом неощущаемости границ»). Это позволяет находить время выхода за границы заданной области, зная только р.ф.р., найденную без учета наличия границ (оно определяется минимумом р.ф.р. на границе и зависит от начального условия только очень близко от границы [2, 16]).

Достаточно часто физические системы описываются «почти интегрируемыми» уравнениями, когда гамильтониан системы состоит из точно интегрируемой части и малого периодического возмущения. Физические явления, происходящие в таких системах, были достаточно подробно изучены (см. обзор [17]). Все основные особенности движения связаны с наличием в системе нелинейных резонансов, которые при достаточно малом возмущении являются изолированными и динамика в этом случае хорошо известна [17]. В настоящей работе будут описаны статистические характеристики такой системы (р.ф.р. и вычисляемое из нее время выхода за границы заданной области) при наличии диссипации и внешнего асимптотически слабого шума. В реальных физических системах шум и диссипация всегда присутствуют при учете конечной температуры, а предел слабого шума соответствует малым температурам (см. [6]).

Влияние изолированного нелинейного резонанса на р.ф.р. в одномерном (двумерное фазовое пространство) случае в настоящее время хорошо изучено (см. [11, 18]). В работе [11] эта задача возникает при описании взаимодействия встречных пучков в электрон-позитронном накопителе, а в работе [18]—при описании возбуждения примесных молекул в газовой смеси с помощью лазерного излучения. В обоих этих работах решение получается с помощью процедуры «теплого» усреднения. Другой подход, связанный с учетом влияния нелинейных резонансов в виде добавок к коэффициенту диффузии и силе трения (перенормированное уравнение Фоккер—Планка), предложен в работе [19]. Основной особенностью полученной р.ф.р. (более подробно см. § 2.3) является наличие дополнительного максимума ф.р. в центре резонанса. Вдали от резонанса (над ним) р.ф.р. отличается от невозмущенной только умножением на константу, определяемую шириной резонанса. Таким образом, можно сказать, что влияние нелинейного резонанса на р.ф.р. в одномерном случае определяется его шириной.

Для размерности, большей единицы, применение «теплого усреднения» к задаче об изолированном нелинейном резонансе не позволяет получить решение в аналитическом виде. В настоящей работе мы предлагаем регулярную процедуру построения р.ф.р. многомерного осциллятора с изолированными нелинейными резонансами в асимптотике слабого шума. Предполагается, что динамика осциллятора в отсутствие резонансов достаточно проста (в основном рассматривается случай не связанных степеней свободы), и его с.ф.р. легко находится. Приближение слабого шума предполагает большую ширину резонанса по сравнению с характерным масштабом изменения с.ф.р., что безусловно является существенным ограничением предлагаемой теории. С другой стороны, именно в случае выполнения этого условия резонанс наиболее сильно влияет на р.ф.р., так что рассмотрение этой асимптотики наиболее важно.

При достаточно слабом трении резонанс целиком компенсирует составляющую трения вдоль вектора резонансных колебаний. Вследствие этого в многомерном случае частица с начальными данными внутри сепар-

растрисы резонанса будет двигаться под действием трения вдоль резонансной поверхности. Существенно, что при достаточно слабом шуме процесс установления равновесного распределения вдоль резонансной поверхности не зависит от условий во внесепаратрисной области, и р.ф.р. уменьшается вдоль резонансной поверхности гораздо медленнее, чем в отсутствие резонанса.

В рассматриваемой асимптотике слабого шума р.ф.р. в ведущем порядке по малости шума  $\eta$  имеет вид  $\exp(-\Phi/\eta)$ , где  $\Phi$  — функция фазовых переменных. Уравнение для  $\Phi$  уже не содержит параметра  $\eta$ . В настоящей работе мы вычисляли величину  $\Phi$ , пренебрегая вкладами, пропорциональными ширине резонанса  $\Delta I_r$ , поскольку предполагали малость ширины резонанса  $\Delta I_r$  по сравнению с характерными  $I_r$  (что является стандартным предположением при «универсальном» описании нелинейного резонанса, см. [17]). Однако для справедливости теории необходимо, чтобы величина  $|\Delta I_r|/\eta$  была много больше единицы, что соответствует, таким образом, логарифмической точности вычисления р.ф.р.  $\rho = \exp(-\Phi/\eta)$ . Существенно, что в многомерном случае, в отличие от изученного ранее одномерного, ненулевые возмущения  $\Phi$  появляются уже в нулевом порядке по  $\Delta I_r$ .

В асимптотике слабого шума можно найти наиболее вероятные траектории (экстремали), ведущие из притягивающего центра в рассматриваемую точку. Возможность явного вычисления таких траекторий имеет большое значение, поскольку позволяет, например, указать наиболее «опасный» путь, по которому уходят частицы при наличии поглощающих границ. При возбуждении резонансов эти траектории могут, во многих случаях, проходить отдельными частями по резонансным поверхностям, так как внутри резонансов трение частично скомпенсировано и частицам там «легче» двигаться против трения чем снаружи. Направление движения по экстремали вдоль резонансной поверхности не связано впрямую с направлением движения частиц вдоль этой поверхности под действием трения в исходной невозмущенной шумом системе. Так, в двумерном случае на более конкретном примере указаны условия, (см. § 3.2), при которых эти направления совпадают, и условия, при которых они противоположны.

В рамках той же логарифмической точности по ширине резонанса  $\Delta I_r$  получено описание р.ф.р. для немалого трения. Оказывается, что и «подавленный» достаточно сильным трением резонанс может значительно возмущать р.ф.р., хотя и не так сильно, как в случае малого трения. Для каждой точки на резонансной поверхности найдено пороговое значение силы трения  $\alpha$ , начиная с которого величина  $\alpha$  начинает, вообще говоря, влиять на градиенты функции  $\Phi_0 = \Phi/\alpha$ . При трении  $\alpha$ , меньшем порогового, градиенты  $\Phi_0$  не зависят от  $\alpha$ . Показано, что возможно два пороговых значения  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  в зависимости от типа решения для р.ф.р.

В главе 2 дается изложение предлагаемого нового подхода к вычислению р.ф.р. многомерного осциллятора с нелинейными резонансами в общем случае с использованием асимптотики слабого шума (§ 2.4, 2.5). От-

дельно излагаются известные методы «теплового» усреднения (§ 2.2) и их применение к одномерному резонансу (§ 2.3). Эта глава носит обзорно-справочный характер и может быть опущена при чтении.

В главе 3 с помощью предлагаемого метода дается более конкретное рассмотрение р.ф.р. двумерного осциллятора с нелинейными резонансами, когда в исходном осцилляторе степени свободы не связаны между собой и движение почти гармоническое (хотя и нелинейное). Этот частный случай соответствует задаче о поперечном движении частиц в электрон-позитронных накопителях при учете встречного взаимодействия пучков. Излагаемый подход дополняет существующие методики вычисления статистических характеристик взаимодействующих пучков с помощью «теплового усреднения» в одномерном случае [11], «перенормировки» уравнения Фоккер—Планка [19], и в многомерном случае с помощью теории возмущений по параметру интенсивности взаимодействия пучков [20].

## ГЛАВА 2. РАВНОВЕСНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

### § 2.1. Уравнение Фоккер—Планка

Рассмотрим гамильтонову систему в тепловом резервуаре, т. е. систему, динамика которой определяется гамильтоновыми уравнениями с добавлением вязкого трения и внешних случайных сил:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}} &= \frac{\partial H(x, p, t)}{\partial p} - \hat{\alpha}_1 \vec{x} + \hat{\lambda}_1 \vec{\xi}_1, \\ \dot{\vec{p}} &= - \frac{\partial H}{\partial \vec{x}}(x, p, t) - \hat{\alpha}_2 \vec{p} + \hat{\lambda}_2 \vec{\xi}_2.\end{aligned}\quad (2.1)$$

Здесь  $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$  — диагональные матрицы «силы трения»;  $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$  — диагональные матрицы интенсивности шумов. От векторных случайных процессов  $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2$  мы потребуем, чтобы они были гауссовскими и чтобы времена корреляции были много меньшими характерных времен изменения координат и импульсов  $\vec{x}, \vec{p}$  в исходной «чисто динамической системе» (2.1) при  $\hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_2 = 0$ . Тогда без ограничения общности можно считать  $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2$  процессами «белого шума»:

$$\begin{aligned}\langle \xi_{1i}(t) \xi_{1j}(t+\tau) \rangle &= \delta_{ij} \delta(\tau), \\ \langle \xi_{1i}(t) \xi_{2j}(t+\tau) \rangle &= 0, \\ \langle \xi_{2i}(t) \xi_{2j}(t+\tau) \rangle &= \delta_{ij} \delta(\tau).\end{aligned}\quad (2.2)$$

Отметим, что при  $H = \vec{p}^2/2m + U(\vec{x}, t)$  и  $\hat{\alpha}_1 = 0, \hat{\lambda}_1 = 0$  система (2.1) является уравнениями Ланжевена для броуновского движения частицы во внешнем нестационарном силовом поле  $U(x, t)$  [6]. Этот же случай соответствует уравнениям динамики частиц идеального газа во внешнем сило-

вом поле, находящегося в равновесии с излучением абсолютно черного тела [6].

Уравнение Фоккер—Планка, описывающее эволюцию функции распределения частиц, каждая из которых движется согласно (2.1) ( $\xi_1, \xi_2$  для разных частиц статистически независимы), имеет следующий вид (см. [6]):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \bar{p}} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{p}} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \hat{\alpha}_1 \bar{x} \rho + \frac{1}{2} \hat{\lambda}_1^2 \frac{\partial \rho}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{p}} \left( \hat{\alpha}_2 \bar{p} \rho + \frac{1}{2} \hat{\lambda}_2^2 \frac{\partial \rho}{\partial \bar{p}} \right). \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) без правой части является уравнением Лиувилля для функции распределения соответствующей гамильтоновой системы. Отметим также, что при  $H = \bar{p}^2/2m + U(\bar{x})$  и  $\hat{\lambda}_1 = \hat{\alpha}_1 = 0$ ,  $\alpha_{2ik} = \alpha_{dik}$ ,  $\lambda_{2ik} = \lambda_{dik}$ , стационарное распределение в системе (существующее при условии  $U(x) \rightarrow \infty$  если  $|x| \rightarrow \infty$ ) может быть найдено в явном виде:

$$\rho(\bar{x}, \bar{p}) = Q \exp \left[ -\frac{2\alpha}{m\lambda^2} \left( \frac{\bar{p}^2}{2m} + U(\bar{x}) \right) \right], \quad (2.4)$$

где  $Q$  — нормировочный множитель. Распределение (2.4) является максвелл — больцмановским с температурой  $kT = \frac{\lambda^2 m}{2\alpha}$  [6].

## § 2.2. Тепловое усреднение

Распространенным приемом решения уравнений Фоккер—Планка типа (2.3) является предположение малости «тепловых» слагаемых, т. е. малости коэффициентов  $\alpha_{ii}$   $\lambda_i^2$  [7, 9, 11]. Тогда в первом приближении должно выполняться уравнение (2.3) без правой части, т. е. уравнение Лиувилля:

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \bar{p}} \frac{\partial \rho_0}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \rho_0}{\partial \bar{p}} = 0. \quad (2.5)$$

Если гамильтониан  $H(x, p, t)$  допускает точный или приближенный переход к переменным действие-фаза,

$$\bar{J} = \text{const}, \quad (2.6a)$$

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}_0 + t \frac{\partial H(\bar{J})}{\partial \bar{J}}, \quad (2.6b)$$

то общее решение уравнения (2.5) может быть представлено в форме:

$$\rho_0 = f \left( \bar{J}, \bar{\psi} - \frac{\partial H}{\partial \bar{J}} t \right), \quad (2.7)$$

где гамильтониан  $H$  выражен через переменные действия  $\bar{J}$ . Стандартным предположением о виде р.ф.р. (см. [7, 9, 11]) является «анзац»

$$\rho(\bar{x}, \bar{p}, t) = \rho_0(\bar{J}). \quad (2.8)$$

Это предположение основывается на том, что при достаточно слабых трении и шуме частица, двигаясь согласно (2.6), успеет почти полностью «замести» (при отсутствии соизмеримых частот) поверхность тора  $\bar{J} = \text{const}$ , прежде чем успеет сдвинуться по  $\bar{J}$  под действием трения и шума на заметное расстояние. Поэтому естественно предположить, что р.ф.р. постоянна на поверхности тора  $\bar{J} = \text{const}$ . Вопрос о том, всегда ли можно в качестве правильного нулевого приближения функции распределения  $\rho$  выбирать решение уравнения (2.5) в форме (2.8), является довольно сложным и, несмотря на специально предпринятые исследования (см. [11]), до конца не решен. Ситуация осложняется возможностью наличия в системе соизмеримых частот вида

$$\bar{I} \bar{\omega} = 0 \quad (2.9a)$$

либо

$$\bar{I} \bar{\omega} = n\Omega, \quad (2.9b)$$

где второй случай реализуется при периодической зависимости гамильтониана  $H(x, p, t)$  от времени с частотой  $\Omega$ , а  $\bar{\omega}$  обозначает частоту собственных колебаний  $\bar{\omega} = \frac{\partial H}{\partial \bar{J}}$ . Возможность влияния такого «резонансного» случая на отклонения р.ф.р. от «анзаца» (2.8) названа Шенфельдом [11] «тепловым резонансом». Термин «тепловой» отражает тот факт, что наличие соотношений типа (2.9) никак не сказывается на динамике с гамильтонианом  $H$ , переменные действие-фаза для которого известны. Возможность же влияния «теплого резонанса» на р.ф.р. следует из рассуждений, приведенных ниже.

При малых трении и шуме — коэффициентах  $\alpha_{ii}$  и  $\lambda_{ii}^2$  — в эволюции функции распределения  $\rho$  есть два масштаба времени. Первый из них (малый) соответствует быстрым изменениям  $\rho$  под действием только гамильтоновой части динамики (т. е. согласно уравнению (2.5)), а второй (большие времена) — медленным изменениям  $\rho$  под действием трения и шума, малых слагаемых в правой части уравнения (2.3). Можно предположить, как это обычно делается, что для накапливающихся за большие времена изменений  $\rho$  быстрые квазипериодические колебания (2.6) несущественны и по ним можно усреднить. Зададим начальную функцию распределения  $\rho$  как функцию  $f$  аргументов  $\bar{J}$ ,  $\bar{\psi}$  и усредним зависимость  $\rho$  от

времени:

$$\langle \rho \rangle = \left\langle f\left(\bar{J}, \bar{\psi} - t \frac{\partial H}{\partial \bar{J}}\right) \right\rangle. \quad (2.10)$$

Достаточно очевидно, что при отсутствии «резонансов» вида (2.9) средние от всех гармоник разложения Фурье распределения (2.7) равны нулю, и среднее по времени от распределения  $\rho$  (2.7) не зависит от фаз  $\psi$ . Если бы можно было избежать выполнения условий (2.9) для всех  $J$  (как в случае одномерной консервативной системы), то мы сразу пришли бы к выводу о независимости р.ф.р.  $\rho$  от фаз  $\psi$ . Поскольку, однако, в многомерном или в одномерном неконсервативном случаях условие (2.9) дает всюду плотную сеть «тепловых» резонансов, то такая простая аргументация не является исчерпывающей.

Приведенные выше рассуждения никак не учитывают «взаимодействия» диффузии и чистой динамики между собой. Хотя формализм «теплового усреднения», излагаемый ниже, следует именно такой логике, можно надеяться, что это взаимодействие будет приводить к «размыванию» тепловых резонансов и усреднению зависимости  $\rho$  от фаз  $\psi$ . Один из возможных механизмов такого «размывания», реализуемый только при определенном соотношении коэффициента диффузии  $D \sim \lambda^2$  и времени затухания  $\tau_\alpha \sim 1/\alpha$  будет рассмотрен ниже.

Рассмотрим эволюцию распределения  $\rho$  в слое малой толщины вокруг тора  $J = \text{const}$ . Даже если начальное распределение  $\rho_0$  медленно зависит от  $J$  и на ширине  $\Delta J$  почти не меняется, но зависимость от фаз довольно сильная, то через достаточно большое время распределение начнет сильно зависеть от  $J$  на ширине  $\Delta J$ . Это видно из того, что по прошествии времени  $T$  каждая гармоника функции распределения  $e^{i\bar{\psi}}$  переходит в гармонику

$$\rho_l \sim \exp[i(\bar{I}\bar{\psi} - \bar{I}\bar{\omega}T)] \quad (2.11)$$

и при больших  $T$  является быстроосциллирующей функцией  $J$ . Частые осцилляции функции распределения сильно сглаживаются наличием диффузии в направлении  $J$ , так что зависимость  $\rho$  от  $\psi$  быстро усредняется.

Для того, чтобы р.ф.р. слабо зависела от  $\psi$ , необходимо потребовать, чтобы описанное выше «сглаживание» по  $\psi$  шло быстрее, чем изменение ф.р. под прямым воздействием тепловых слагаемых (2.3). Скорость такого «сглаживания» при совместном влиянии диффузии по  $J$  с коэффициентом диффузии  $D$  и сноса фазы  $\psi$  (2.6б) определяется, как показано в [19], выражением:

$$\rho(J, t) = \rho_{j0}(J) \cdot \exp(-(t/\tau_1)^3), \quad (2.12)$$

где

$$\tau_1 \sim (\varepsilon^2 D)^{-1/3}, \quad \varepsilon = \left| \frac{\partial(\bar{\omega}, \bar{I})}{\partial \bar{J}} \right|. \quad (2.13)$$

Для того, чтобы прямое воздействие шума за время  $\tau_1$  было малым, необходимо потребовать  $\tau_1 \ll \tau_d$  ( $\tau_d$  — время затухания), так как при этом расстояния, проходимые частицами под действием шума за время  $\tau_1$  ( $\sim \sqrt{D\tau_1}$ ) будут много меньше характерного масштаба изменения р.ф.р.  $\sigma_I$  ( $\sigma_I \sim \sqrt{D\tau_d}$ ). Это приводит к условию

$$D \gg \frac{1}{\tau_d^3 \varepsilon^2}. \quad (2.14)$$

При рассмотрении прямого воздействия трения следует различать два случая: а) описание «ядра» распределения, когда  $I_0 \sim \sigma_I$  и б) описание «хвостов» распределения, когда  $I_0 \sim 1$ . В случае (а) требование малости расстояния, проходимого частицами под воздействием трения за время  $\tau_1$ , по сравнению с  $\sigma_I$  приводит к тому же условию (2.14). В случае же (б) следует потребовать малости того же расстояния как по сравнению с  $\sigma_I$ , так и по сравнению с  $I_0$ , т. е. с единицей, что даст:

$$\varepsilon \gg D \gg \tau_d^{-9/5} \varepsilon^{-4/3}, \quad (2.15)$$

где правая часть неравенства соответствует первому условию, а левая — второму. К этим условиям надо добавить (для обоих случаев) требование  $\tau \ll 1/\omega_i$ , где  $\omega_i$  — частоты движения (2.6). Полагая величины  $\varepsilon$ ,  $\omega_i \sim 1$  и собирая все требования вместе, для «ядра» распределения (случай а) и для его «хвостов» (случай б) получим:

$$1 \gg D \gg \tau_d^{-3}, \quad (2.16a)$$

$$1 \gg D \gg \tau_d^{-9/5}. \quad (2.16b)$$

Подчеркнем, что условия (2.16) являются только достаточными, а не необходимыми для возможности теплового усреднения. В настоящей работе мы будем считать, что при достаточно малых  $D$ ,  $\alpha = 1/\tau_d$  (не обязательно удовлетворяющих условиям (2.16)) р.ф.р. всегда имеет вид (2.8), хотя это и не следует непосредственно из излагаемого ниже рассмотрения.

Для получения уравнения, определяющего зависимость  $\rho_0(J)$ , выделим, следуя Шенфельду [12], общую малость коэффициентов  $\alpha_{ii}, \lambda_{ii}^2 \sim \alpha$  и запишем точное решение уравнения (2.3) в виде разложения по степеням  $\alpha$ :

$$\rho(J, \psi, \alpha) = \rho_0(J) + \alpha \rho_1(J, \psi) + \dots \quad (2.17)$$

Подставляя разложение (2.17) в исходное уравнение (2.3) и выделяя члены, не содержащие  $\alpha$ , для  $\rho_0$  получим уравнение (2.5). Собирая линейные по  $\alpha$  члены, получим уравнение, связывающее  $\rho_1$  и  $\rho_0$ :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \bar{p}} \frac{\partial \rho_1}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \rho_1}{\partial \bar{p}} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\hat{\alpha}_1}{\alpha} \bar{x} \rho_0 + \frac{1}{2} \frac{\hat{\lambda}_1^2}{\alpha} \frac{\partial \rho_0}{\partial \bar{x}} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \bar{p}} \left( \frac{\hat{\alpha}_2}{\alpha} \bar{p} \rho_0 + \frac{1}{2} \frac{\hat{\lambda}_2^2}{\alpha} \frac{\partial \rho_0}{\partial \bar{p}} \right). \quad (2.18)$$

Уравнение (2.18) позволяет нам, не находя  $\rho_1$ , найти не определенную до сих пор функцию  $\rho_0(J)$ . Для этого заметим, что если интерпретировать величины  $\bar{x}$ ,  $\bar{p}$  в уравнении (2.18) не как свободные фазовые переменные, а как координаты  $\bar{x}(t)$ ,  $\bar{p}(t)$  траектории гамильтоновой системы с гамильтонианом  $H$ , то левая часть уравнения (2.18) представляет собой полную (лагранжеву) производную функции  $\rho_1$  вдоль траектории  $x(t)$ ,  $p(t)$ . Поскольку мы предполагаем зависимости  $x(t)$ ,  $p(t)$  квазипериодическими, а функцию  $\rho_1(x, p, t)$  ограниченной, то среднее по времени от левой части уравнения (2.18) (при такой интерпретации  $x$ ,  $p$ ) равно нулю, и мы приходим к уравнению, получающемуся усреднением правой части (2.18) вдоль траекторий (2.6) гамильтониана  $H$ . Так как, по нашему предположению, функция  $\rho_0$  зависит только от  $J$ , то уравнение (2.18) можно представить в виде (см. [11]):

$$\begin{aligned} & \left( \text{Sp} \frac{\hat{\alpha}_1}{\alpha} + \text{Sp} \frac{\hat{\alpha}_2}{\alpha} \right) \rho_0 + \left[ \frac{\alpha_{1il}}{\alpha} \langle x_i \frac{\partial J_k}{\partial x_i} \rangle + \frac{\alpha_{2il}}{\alpha} \langle p_i \frac{\partial J_k}{\partial p_i} \rangle + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{(\lambda_1^2)_{il}}{\alpha} \langle \frac{\partial^2 J_k}{\partial x_i \partial x_i} \rangle + \frac{1}{2} \frac{(\lambda_2^2)_{il}}{\alpha} \langle \frac{\partial^2 J_k}{\partial p_i \partial p_i} \rangle \right] \frac{\partial \rho_0}{\partial J_k} + \\ & + \frac{1}{2} \left[ \frac{(\lambda_1^2)_{il}}{\alpha} \langle \frac{\partial J_k}{\partial x_i} \frac{\partial J_l}{\partial x_i} \rangle + \frac{(\lambda_2^2)_{il}}{\alpha} \langle \frac{\partial J_k}{\partial p_i} \frac{\partial J_l}{\partial p_i} \rangle \right] \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial J_k \partial J_l} = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

где средние  $\langle \dots \rangle$  означают усреднение по времени вдоль траекторий. При пренебрежении возможностью «теплового резонанса» (2.9) усреднение по времени равносильно усреднению по всем фазам  $\psi$  (2.6б) и затем по времени  $t$  (см. [11, 21]), так как в случае периодической зависимости  $H$  от времени функции  $x(J, \psi, T)$ ,  $\frac{\partial J}{\partial x}(J, \psi, t)$  и другие, входящие в средние в (2.19), будут также периодически зависеть от  $t$ . Таким образом, коэффициенты в (2.19) не зависят от фаз  $\psi$ , что в свою очередь оправдывает предположение (2.8).

Структура коэффициентов в уравнении (2.19) такова, что ему можно придать дивергентную форму, которая была у уравнения (2.3) до усреднения. Действительно, используя соотношения (см. [11, 21]):

$$\frac{\partial}{\partial J_k} \langle x_i \frac{\partial J_k}{\partial x_i} \rangle \Big|_{i=l} \equiv \frac{\partial}{\partial J_k} \langle p_i \frac{\partial J_k}{\partial p_i} \rangle \Big|_{i=l} \equiv 1, \quad (2.20a)$$

$$\langle \frac{\partial^2 J_k}{\partial x_i \partial x_i} \rangle \Big|_{i=l} \equiv \frac{\partial}{\partial J_l} \langle \frac{\partial J_k}{\partial x_i} \frac{\partial J_l}{\partial x_i} \rangle \Big|_{i=l}, \quad (2.20б)$$

$$+ \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial J_k} \frac{\partial J_l}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho_0}{\partial J_l} \frac{\partial J_k}{\partial x_i} \right) \Big|_{i=l} = \frac{\partial \rho_0}{\partial J_k} \frac{\partial J_l}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho_0}{\partial J_l} \frac{\partial J_k}{\partial x_i} \Big|_{i=l} \quad (2.13)$$

$$\langle \frac{\partial^2 J_k}{\partial p_i \partial p_i} \rangle \Big|_{i=l} \equiv \frac{\partial}{\partial J_l} \langle \frac{\partial J_k}{\partial p_i} \frac{\partial J_l}{\partial p_i} \rangle \Big|_{i=l}, \quad (2.20в)$$

можно привести уравнение (2.19) к виду (см. [21]):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial J_k} \left[ \rho_0 \left\{ \frac{\alpha_{1il}}{\alpha} \langle x_i \frac{\partial J_k}{\partial x_i} \rangle + \frac{\alpha_{2il}}{\alpha} \langle p_i \frac{\partial J_k}{\partial p_i} \rangle \right\} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \rho_0}{\partial J_l} \left\{ \frac{1}{2} \frac{(\lambda_1^2)_{il}}{\alpha} \langle \frac{\partial J_k}{\partial x_i} \frac{\partial J_l}{\partial x_i} \rangle + \frac{1}{2} \frac{(\lambda_2^2)_{il}}{\alpha} \langle \frac{\partial J_k}{\partial p_i} \frac{\partial J_l}{\partial p_i} \rangle \right\} \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Для одномерных задач уравнение (2.21) является обыкновенным дифференциальным уравнением, и при задании граничных условий может быть решено в квадратурах. Так, при «естественных» граничных условиях (нуль на бесконечности) ток (выражение в квадратных скобках в (2.21)) равен нулю, и решение  $\rho_0$  можно записать в виде

$$\rho_0 = \exp \left\{ - \int dJ \frac{\alpha_1 \langle x \frac{\partial J}{\partial x} \rangle + \alpha_2 \langle p \frac{\partial J}{\partial p} \rangle}{\frac{1}{2} \lambda_1^2 \langle \left( \frac{\partial J}{\partial x} \right)^2 \rangle + \frac{1}{2} \lambda_2^2 \langle \left( \frac{\partial J}{\partial p} \right)^2 \rangle} \right\}. \quad (2.22)$$

В случае размерности, большей единицы, уравнение (2.21) не может быть решено в общем виде, хотя его размерность вдвое меньше размерности уравнения (2.3).

На рис. 1 приведены, для иллюстрации, результаты численного расчета р.ф.р. для системы, аналогичной стандартному отображению Чирикова—Тэйлора (см. [17]) с диссипацией и внешним шумом. Параметры отображения таковы, что оно является с высокой точностью интегрируемым и на фазовой плоскости заметен только один резонанс. Траектории частиц в той же системе без шума и трения показаны на рис. 2. Видно, что линии уровня р.ф.р. на рис. 1 с хорошей точностью совпадают с траекториями на рис. 2. Это является подтверждением независимости р.ф.р. от точных фаз  $\psi$ , т. е. правильности «анзаца» (2.8).

### § 2.3. Одномерный осциллятор с нелинейным резонансом

В этом параграфе мы покажем характерные особенности метода теплового усреднения на примере одномерной системы с изолированным нелинейным резонансом. Для этого мы рассмотрим уравнение Фоккер—Планка вида

$$\varepsilon(I) \sin \varphi \frac{\partial \rho}{\partial I} + \left( \omega(I) + \frac{d\varepsilon}{dI} \cos \varphi \right) \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial I} \left[ \alpha I \rho + \eta I \frac{\partial \rho}{\partial I} \right]. \quad (2.23)$$

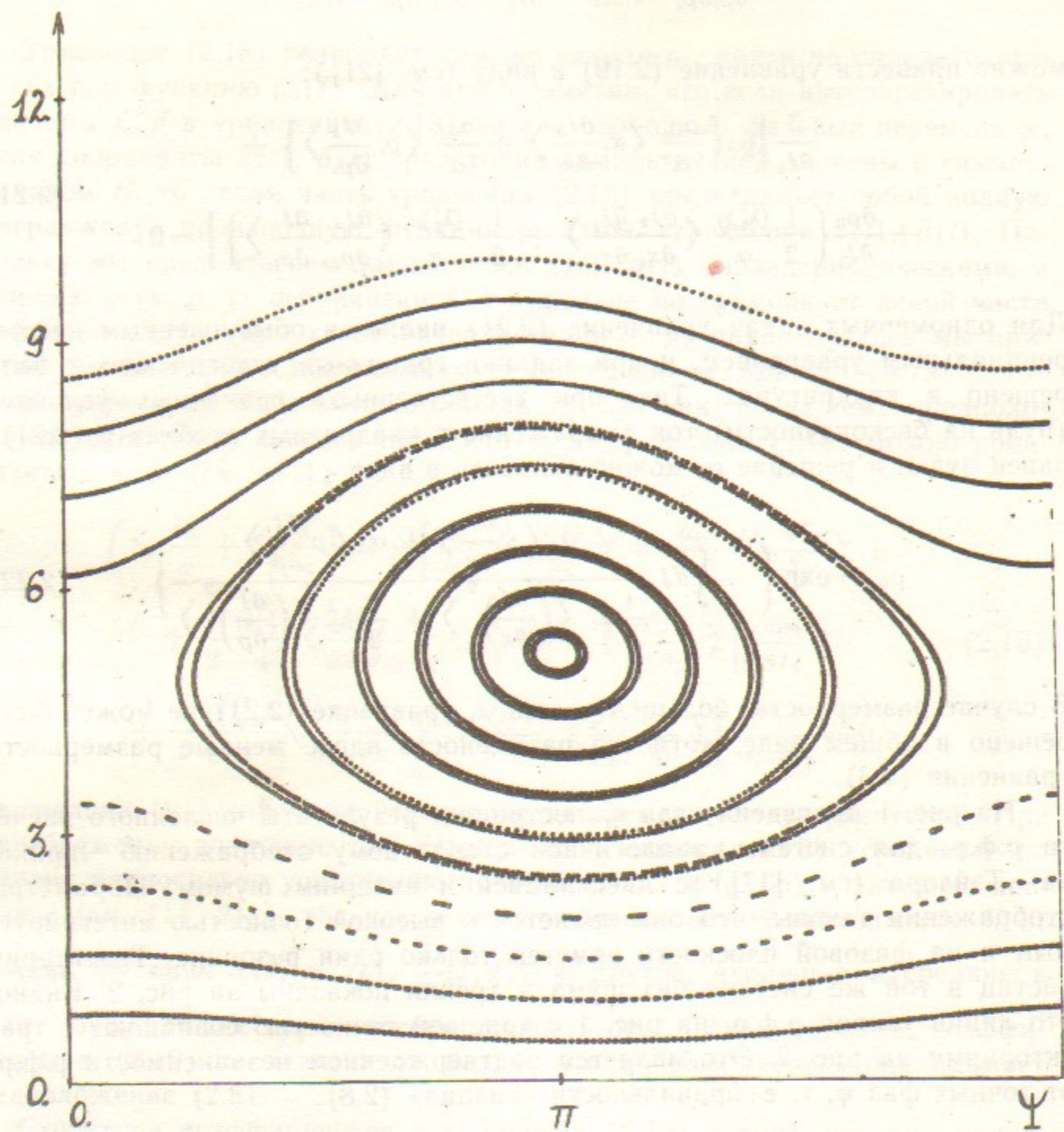


Рис. 1. Семейство траекторий отображения:  $\bar{x} = x \cos \mu + p \sin \mu$ ,  $\bar{p} = p \cos \mu - x \sin \mu + \epsilon V$ , где  $\mu = \mu(x, p) = 2\pi(v_0 + \epsilon(x^2 + p^2))$ . На рисунке показана плоскость переменных  $A, \psi$ :  $A = \sqrt{x^2 + p^2}$ ,  $\psi = \text{atan}(x/p)$ . Параметры  $v_0, \epsilon, V$  имеют значения:  $v_0 = 0.9, \epsilon = 0.02, V = 4.47$ .

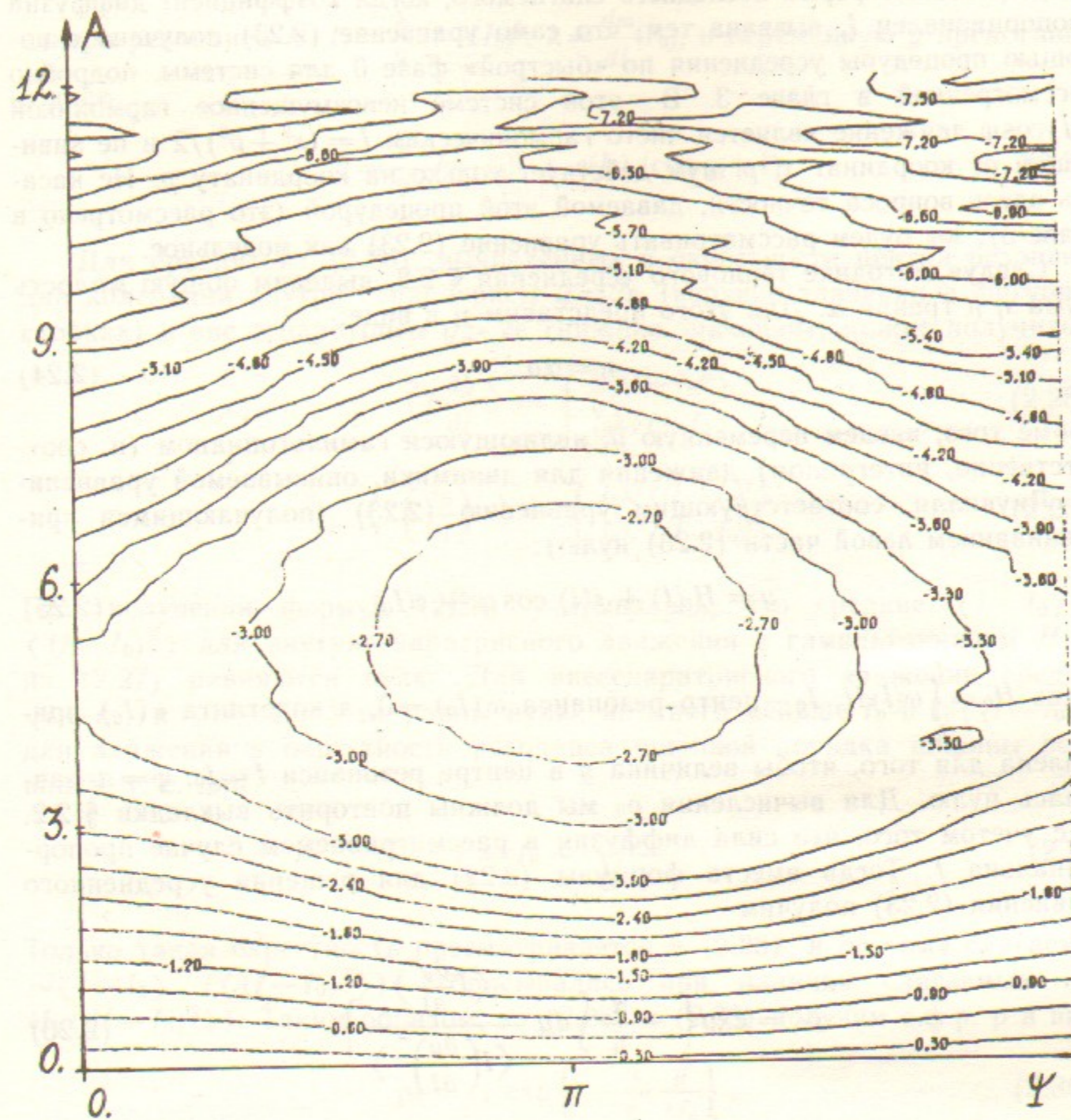


Рис. 2. Линии уровня равновесной функции распределения в той же, что и на рис. 1 системе, с добавлением трения и шума:

$$\bar{x} = (x \cos \mu + p \sin \mu)(1 - 2\lambda\alpha) + \sqrt{\lambda\alpha}(0.5 - R_1);$$

$$\bar{p} = (p \cos \mu - x \sin \mu)(1 - 2\lambda\alpha) + \epsilon V + \sqrt{\lambda\alpha}(0.5 - R_2),$$

где  $\mu = 2\pi(v_0 + \epsilon(x^2 + p^2))$  и параметры  $v_0, \epsilon, V$  те же, что и на рис. 1. Линии уровня показаны в плоскости  $A, \psi$ :  $A = \sqrt{x^2 + p^2}$ ,  $\psi = \text{atan}(x/p)$ . Декремент затухания  $\alpha = 1 \cdot 10^{-4}$ ;  $R_1, R_2$  — случайные числа в диапазоне от 0 до 1, полное число отображений, по которым строится функция распределения,  $N = 1.8 \cdot 10^6$ .



Специфическая форма последнего слагаемого, когда коэффициент диффузии пропорционален  $I$ , вызвана тем, что само уравнение (2.23) получено с помощью процедуры усреднения по «быстрой» фазе  $\theta$  для системы, подробно рассмотренной в главе 3. В этой системе невозмущенное гармоникой  $\varepsilon(I) \cos \varphi$  движение является чисто гармоническим  $I = (x^2 + p^2)/2$  и не зависящий от координат  $x, p$  шум действует только на координату  $p$ . Не касаясь здесь вопроса точности, даваемой этой процедурой (это рассмотрено в главе 3), мы будем рассматривать уравнение (2.23) как модельное.

Следуя методике теплового усреднения § 2.2, выделим общую малость шума  $\eta$  и трения  $\alpha$ . Для этого представим  $\eta$  в виде:

$$\eta = \alpha \sigma. \quad (2.24)$$

Кроме того, введем переменную  $y$ , являющуюся гамильтонианом (и, соответственно, интегралом) движения для динамики, описываемой уравнением Лиувилля, соответствующим уравнению (2.23) (получающимся приравниванием левой части (2.23) нулю):

$$y = H_0(I) + \varepsilon(I) \cos \varphi + \varepsilon(I_0). \quad (2.25)$$

Здесь  $H_0 = \int_{I_0}^I \omega(I) dI$ ,  $I_0$  — центр резонанса  $\omega(I_0) = 0$ , а константа  $\varepsilon(I_0)$  прибавлена для того, чтобы величина  $y$  в центре резонанса  $I = I_0$ ,  $\varphi = \pi$  равнялась нулю. Для вычисления  $\rho_0$  мы должны повторить выкладки § 2.2, но с учетом того, что сила диффузии в рассматриваемом случае пропорциональна  $I$ . Тогда вместо формулы (2.22) для решения усредненного уравнения (2.23) получим

$$\rho_0 = \exp \left\{ -\frac{\alpha}{\eta} \int dy \frac{\langle I \frac{\partial y}{\partial I} \rangle}{\langle I \left( \frac{\partial y}{\partial I} \right)^2 \rangle} \right\}. \quad (2.26)$$

В решении (2.26), в отличие от (2.22), аргументом является переменная энергии  $y$ , а не переменная действия  $J$ . Отметим, что функция  $\rho_0$  (2.26), хотя и выражена через переменную  $y$ , но показывает плотность распределения частиц в фазовой плоскости  $I, \varphi$ , или, что то же самое, число частиц на единичный интервал  $J$  (поскольку переход  $I, \varphi \rightarrow J, \psi$  сохраняет фазовую площадь). Для нахождения числа частиц на единичный интервал  $y$  мы должны домножить функцию  $\rho_0$  (2.26) на  $dJ(y)/dy$ .

Для вычисления средних, входящих в (2.26), в ведущем порядке по малости  $\varepsilon$ , можно описывать траектории гамильтоновой системы (2.25), вдоль которых производится усреднение, в приближении маятника, используемом при «универсальном» описании изолированного резонанса (см. [17]). Величину  $H_0(I)$  при этом следует разложить в окрестности

центра резонанса  $H_0(I) = \frac{\lambda}{2}(I - I_0)^2$ ;  $\lambda = \frac{d\omega}{dI}(I_0)$ , и переменную  $y$  представить в виде

$$y = \frac{\lambda}{2}(I - I_0)^2 + \varepsilon(I_0) (\cos \varphi + 1). \quad (2.27)$$

Для средних из (2.26), вычисленных в окрестности центра резонанса для колебаний внутри сепаратрисы  $y < 2\varepsilon$  (верхние значения в фигурных скобках) и вне сепаратрисы  $y > 2\varepsilon$  (нижние значения), можно получить:

$$\langle I \frac{\partial y}{\partial I} \rangle = \begin{cases} \lambda \langle (I - I_0)^2 \rangle \\ I_0 \lambda \langle (I - I_0) \rangle \end{cases} \quad (2.28a)$$

$$\langle I \left( \frac{\partial y}{\partial I} \right)^2 \rangle = \begin{cases} I_0 \lambda^2 \langle (I - I_0)^2 \rangle \\ I_0 \lambda^2 \langle (I - I_0)^2 \rangle \end{cases}. \quad (2.28b)$$

При получении формул (2.28) учитывалось, что средние  $\langle I - I_0 \rangle$  и  $\langle (I - I_0)^2 \rangle$  для внутрисепаратрисного движения с гамильтонианом  $H = y$  из (2.27) равняются нулю. Для внесепаратрисного движения средние  $\langle I - I_0 \rangle$  и  $\langle (I - I_0)^3 \rangle$  не равны нулю, но много меньше  $I_0$  и  $I_0 \langle (I - I_0)^2 \rangle$  для движения в окрестности резонанса шириной порядка ширины резонанса, т. е. для

$$I = I_0 \sim \sqrt{\frac{\varepsilon}{\lambda}}. \quad (2.29)$$

Только такая окрестность рассматривается в (2.28), и поэтому слагаемые  $\sim \langle I - I_0 \rangle$  ( $\langle (I - I_0)^3 \rangle$ ) отбрасывались при наличии слагаемых  $\sim I_0$  ( $I_0 \langle (I - I_0)^2 \rangle$ ). Таким образом, из (2.26) и (2.28) получим с.ф.р.  $\rho$  в виде

$$\rho_0 = c_1 \exp \left\{ -\frac{\alpha}{\eta} \frac{y}{\lambda I_0} \right\}, \quad (2.30a)$$

$$\rho_0 = c_2 \exp \left\{ -\frac{\alpha}{\eta} \int_0^y \frac{\langle I - I_0 \rangle}{\lambda \langle (I - I_0)^2 \rangle} dy \right\}, \quad (2.30b)$$

Выражение (2.30a) относится к внутри-, а выражение (2.30b) — вне-сепаратрисным колебаниям. Константы  $c_1, c_2$  находятся из непрерывности  $\rho_0$ , т. е. из равенства выражений (2.30a) и (2.30b) на сепаратрисе, при  $y = 2\varepsilon$  и из условий нормировки. Средние  $\langle I - I_0 \rangle$  и  $\langle (I - I_0)^2 \rangle$  могут быть легко найдены (см. [11]), так как движение маятника (2.27) точно описывается в эллиптических функциях, так что

$$\langle I - I_0 \rangle = \frac{\pi \sqrt{2\lambda y}}{K\left(\sqrt{\frac{2\epsilon}{y}}\right)}, \quad (2.31a)$$

$$\langle (I - I_0)^2 \rangle = 2 \sqrt{\frac{y}{\lambda}} \frac{E\left(\sqrt{\frac{2\epsilon}{y}}\right)}{K\left(\sqrt{\frac{2\epsilon}{y}}\right)}. \quad (2.31b)$$

где  $K, E$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Тогда функция распределения вне сепаратрисы (2.30б) может быть записана в виде:

$$\rho_0 = c_2 \exp \left\{ -\frac{\alpha}{\eta} \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^y \frac{dy}{E\left(\sqrt{\frac{2\epsilon}{y}}\right)} \right\}. \quad (2.32)$$

#### § 2.4. Приближение слабого шума

Асимптотическое описание воздействия слабого шума на консервативную (не зависящую от времени) динамическую систему (с диссипацией) было рассмотрено в [2, 8, 14, 16]. Достаточно очевидно, что в этом случае основная часть с.ф.р. сосредотачивается вокруг притягивающих неподвижных точек и предельных циклов исходной детерминистской системы (более сложных аттракторов мы не рассматриваем). Записывая уравнения движения в форме (в произведении  $q_v \xi_v$  суммирование по  $v$  не производится)

$$\dot{q}_v = k_v(q) + g_v(q)\xi_v, \quad (2.33a)$$

$$\langle \xi_i(t) \xi_j(t+\tau) \rangle = \delta_{ij} \delta(\tau), \quad (2.33b)$$

получим уравнение Фоккер — Планка в виде

$$-\frac{\partial}{\partial q_v} k_v \rho + \frac{\eta}{2} Q_{\mu\nu} \frac{\partial^2 \rho}{\partial q_\mu \partial q_\nu} = \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (2.34)$$

где мы выделили в виде явного множителя малость шума  $\eta$ :

$$\eta Q_{\mu\nu} = q_\mu q_\nu. \quad (2.35)$$

Утверждается (см. [2, 14]), что при  $\eta \rightarrow 0$  стационарное решение уравнения (2.34) имеет вид:

$$\rho = N(\eta) z(q) \exp \left\{ -\frac{\Phi(q)}{\eta} + \alpha(\eta) \right\}, \quad (2.36)$$

что при подстановке в (2.34) дает

$$k_v \frac{\partial \Phi}{\partial q_v} + \frac{1}{2} Q_{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial q_\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial q_\nu} = 0, \quad (2.37a)$$

$$\left( k_v + Q_{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial q_\mu} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial q_\nu} + \left[ \frac{\partial k_v}{\partial q_\nu} + \frac{1}{2} Q_{\mu\nu} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_\mu \partial q_\nu} \right] z = 0. \quad (2.37b)$$

Величина  $N(\eta)$  в (2.36) является нормировочным множителем и в дальнейшем будет опускаться.

Функция  $\Phi$ , определяющая ведущий экспоненциальный множитель в асимптотике (2.36) и называемая в математической литературе [2] квази-потенциалом поля  $k_v$ , определяется только уравнением (2.37a), являющимся уравнением Гамильтона — Якоби (уравнением эйконала). Единственная (с точностью до константы) функция  $\Phi$  должна иметь максимумы в притягивающих точках равновесия системы  $\dot{q}_v = k_v$ , минимумы в отталкивающих точках и седла в седловых точках [22].

Аналогичным образом может быть найдена вероятность перехода  $P(q_0, q_1, T)$  из точки  $q_0$  в точку  $q_1$  за время  $T$ . Эта вероятность, в пределе  $\eta \rightarrow 0$ , определяется ведущим членом разложения континуального интеграла [13] около критической точки [23] и имеет вид:

$$P(q_0, q_1, T) = \exp \left\{ -\frac{1}{\eta} \Delta \Phi(q_0, q_1, T) \right\}, \quad (2.38a)$$

$$\Delta \Phi(q_0, q_1, T) = \min_{\substack{q(t) \\ q(0)=q_0 \\ q(T)=q_1}} G(q(t), T), \quad (2.38b)$$

$$G(q(t), T) = \int_0^T \frac{\alpha_{\mu\nu}}{2} (\dot{q}_\mu - k_\mu) (\dot{q}_\nu - k_\nu) dt, \quad (2.38b)$$

где  $\alpha_{\mu\nu}$  — тензор, обратный к  $Q_{\mu\nu}$ .

При наличии только одной притягивающей точки  $\tilde{q}$  функция  $\Phi$ , являющаяся решением уравнения (2.37a), может быть представлена в аналогичном (2.38б, в) виде:

$$\Phi = \min_{q(-\infty)=\tilde{q}} G(q(t)), \quad (2.39a)$$

$$G(q(t)) = \int_{-\infty}^0 \frac{\alpha_{\mu\nu}}{2} (\dot{q}_\mu - k_\mu) (\dot{q}_\nu - k_\nu) dt. \quad (2.39b)$$

Функции  $q(t)$ , минимизирующие функционалы (2.38б) и (2.39б), называются экстремалами и являются решениями стандартных вариационных уравнений Эйлера — Лагранжа. Экстремалы являются наиболее вероятными траекториями частиц, начальное и конечное положение которых зада-

но. Наибольшее значение имеют экстремали, обеспечивающие минимум функционала (2.39), так как они определяют, каким путем приходят частицы в каждую точку пространства  $q_v$  из положения равновесия  $\tilde{q}_v$ , где они проводят основную часть времени. Следует различать направление движения по такой экстремали в данной точке (наиболее вероятной траектории прихода в эту точку) от наиболее вероятного направления движения в этой точке, которое совпадает с направлением невозмущенного шумом движения  $\dot{q}_v = k_v$ . В гамильтоновой форме уравнения Эйлера—Лагранжа для экстремалей могут быть представлены, исходя из уравнения Гамильтона—Якоби (2.37а):

$$\tilde{H}(p_v, q_v) = k_v(q)p_v + \frac{1}{2} Q_{\mu\nu}(q) p_\mu p_\nu, \quad (2.40)$$

где

$$p_v = \frac{\partial \Phi}{\partial q_v}. \quad (2.41)$$

Исходя из (2.40), экстремали из (2.39в) (соединяющие точку  $\tilde{q}$  с любой заданной  $q_1$ ) при заданном распределении  $\Phi$  можно найти из уравнений:

$$\dot{q}_v = k_v + Q_{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial q_\nu}. \quad (2.42)$$

Уравнение (2.37б) для предэкспоненциального множителя  $z(q)$  является уравнением переноса (с теми же характеристиками, что и в уравнении (2.37а)), и может быть решено после решения уравнения (2.37а). В настоящей работе мы не будем искать этот предэкспоненциальный множитель, так как при достаточно малых  $\eta$  он является малой поправкой к р.ф.р.

Время выхода частицы за границы заданной области не зависит в асимптотике слабого шума от начальных условий и определяется, при наличии только одной притягивающей точки внутри этой области, минимумом обратной величины р.ф.р. (задаваемой функцией  $\Phi$  (2.38)) на границе.

Рассмотрим теперь приближение слабого шума для гамильтоновых систем с диссипацией. Р.ф.р.  $\rho$ , являющаяся решением уравнения (2.3), может быть представлена в пределе  $(\lambda^2)_{ii} \sim \eta \rightarrow 0$  в аналогичном (2.36) виде:

$$\rho = z(x, p, t) \exp \left\{ -\frac{\Phi(x, p, t)}{\eta} \right\}. \quad (2.43)$$

Для  $\Phi$  вместо (2.37а) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{p}} - \frac{\partial H}{\partial \bar{p}} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}} &= (\hat{\alpha}_1, \bar{x}) \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}} + (\hat{\alpha}_2 \bar{p}) \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{p}} - \\ &- \frac{1}{2} \left( \frac{\hat{\lambda}_1^2}{\eta} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}} - \frac{1}{2} \left( \frac{\hat{\lambda}_2^2}{\eta} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{p}} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{p}}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

В этом уравнении предполагается, что элементы матриц  $\frac{\hat{\lambda}_1^2}{\eta}$ ,  $\frac{\hat{\lambda}_2^2}{\eta}$  являются величинами порядка единицы. Предположим теперь, что трение  $\alpha$  мало:

$$|\hat{\alpha}_1 \bar{x}| \ll \left| \frac{\partial H}{\partial \bar{p}} \right|, \quad (2.45)$$

$$|\hat{\alpha}_2 \bar{p}| \ll \left| \frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \right|,$$

Тогда функцию  $\Phi$  можно разложить в ряд по степеням  $\alpha$  (где  $\alpha$ —общий показатель малости матриц  $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$ ):

$$\Phi = \alpha \Phi_0 + \alpha^2 \Phi_1 + \dots \quad (2.46)$$

Отметим, что в отличие от разложения (2.17), в сумме (2.46) для любых конечных  $\alpha$  и  $\eta$  имеет смысл удерживать только конечное число слагаемых  $n$  до  $\alpha^n \sim \eta$ , потому что уравнение (2.44) получено в предположении  $\Phi \gg \eta$ .

Главный член разложения  $\Phi_0$  удовлетворяет уравнению Лиувилля, появляющегося при выделении линейных по  $\alpha$  слагаемых в (2.44):

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \bar{p}} - \frac{\partial H}{\partial \bar{p}} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \bar{x}} = 0. \quad (2.47)$$

Так же, как и в случае теплового усреднения, мы предполагаем, что из всех решений уравнения (2.47) достаточно рассматривать только  $\Phi_0 = \Phi_0(J)$ , где  $J, \psi$ —точные переменные действие-фаза для гамильтониана  $H$ . Для нахождения зависимости  $\Phi_0(J)$  следует рассмотреть связь между  $\Phi_0$  и  $\Phi_1$ , получающуюся из уравнения (2.44) для квадратичных по  $\alpha$  слагаемых:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \bar{p}} - \frac{\partial H}{\partial \bar{p}} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \bar{x}} &= \left( \frac{\hat{\alpha}_1}{\alpha} \bar{x} \right) \frac{\partial \Phi_0}{\partial \bar{x}} + \left( \frac{\hat{\alpha}_2}{\alpha} \bar{p} \right) \frac{\partial \Phi_0}{\partial \bar{p}} - \\ &- \frac{1}{2} \left( \frac{\hat{\lambda}_1^2}{\eta} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \bar{x}} \right) \frac{\partial \Phi_0}{\partial \bar{x}} - \frac{1}{2} \left( \frac{\hat{\lambda}_2^2}{\eta} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \bar{p}} \right) \frac{\partial \Phi_0}{\partial \bar{p}}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Усредняя, аналогично методу теплового усреднения, обе части (2.48) вдоль траекторий исходной гамильтоновой системы  $H(x, p, t)$  и используя равенство среднего от левой части нулю, приходим к уравнению для  $\Phi_0(J)$ :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\alpha_{1il}}{\alpha} \langle x_i \frac{\partial J_k}{\partial x_i} \rangle + \frac{\alpha_{2il}}{\alpha} \langle p_i \frac{\partial J_k}{\partial p_i} \rangle \right] \frac{\partial \Phi_0}{\partial J_k} - \\ - \frac{1}{2} \left[ \frac{(\lambda_1^2)_{il}}{\eta} \langle \frac{\partial J_k}{\partial x_i} \frac{\partial J_l}{\partial x_i} \rangle + \frac{(\lambda_2^2)_{il}}{\eta} \langle \frac{\partial J_k}{\partial p_i} \frac{\partial J_l}{\partial p_i} \rangle \right] \frac{\partial \Phi_0}{\partial J_k} \frac{\partial \Phi_0}{\partial J_l} = 0. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Так же, как и в случае теплового усреднения § 2.2, мы предполагаем, что операция усреднения вдоль траекторий в (2.49) равносильна усреднению по всем точным фазам  $\psi$  и времени  $t$ .

Интересно заметить, что р.ф.р.

$$\rho = \exp(-\Phi/\eta) \quad (2.50)$$

при учете только одного члена разложения (2.46) может быть получена из «усредненного» уравнения (2.21) предельным переходом  $\hat{\lambda}^2 \sim \eta \rightarrow 0$ . Другими словами, операция усреднения вдоль траекторий и взятие асимптотического предела  $\eta \rightarrow 0$  перестановочны в ведущем порядке по  $\alpha$  (с логарифмической точностью). Высшие по  $\alpha$  поправки к  $\Phi$  (2.46) не могут быть получены из теплового усреднения, так как там поправки к  $\rho$  носят степенной характер (2.17).

### § 2.5. Нелинейные резонансы и слабый шум

Рассмотрим теперь влияние слабого периодического возмущения на равновесное распределение в нелинейном осцилляторе с трением и шумом (находящимся в тепловом резервуаре). «Слабость» возмущения предполагается по отношению к гамильтоновой динамике невозмущенного осциллятора. Это позволяет считать, что гамильтоново движение (без трения и шумов) возмущенного осциллятора является интегрируемым или почти интегрируемым, и может быть описано в рамках рассмотрения изолированных нелинейных резонансов (см. [17]). Возможность нарушения интегрируемости в малых объемах фазового пространства и образования «узких» стохастических областей [17] нами не рассматривается, поскольку присутствующий в системе внешний шум «замажет» эти эффекты, если они достаточно слабы. Шум и трение, вносимые тепловым резервуаром, предполагаются достаточно малыми. Именно, шум считается асимптотически малым (самым малым параметром из всех, входящих в задачу), а трение должно быть малым по сравнению с невозмущенной динамикой. В настоящем параграфе предполагается также малость трения по сравнению с возмущением (нелинейными резонансами), но в принципе это ограничение несущественно, и в главе 3 на более конкретном примере рассмотрен случай «подавленных» трением резонансов.

Таким образом, пусть возмущенный гамильтониан  $H$  имеет вид

$$H = H_0(\bar{x}, \bar{p}) + V_\Omega(\bar{x}, \bar{p}, t), \quad (2.51)$$

где движение с гамильтонианом  $H_0$  является точно интегрируемым (допускает точный переход к переменным действие-фаза), а возмущение  $V_\Omega$  — периодическое по времени с частотой  $\Omega$  и имеет достаточно малую величину. Тогда при переходе к переменным действие-фаза невозмущенного движения  $\bar{I}(\bar{x}, \bar{p})$ ,  $\bar{\theta}(\bar{x}, \bar{p})$  гамильтониан  $H$  (2.51) можно представить в

форме

$$H = H_0(\bar{I}) + \sum_K V_K \exp(i\varphi_K) \quad (2.52)$$

где фазы  $\varphi_K$  разложения Фурье возмущения  $V_\Omega$  определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} \varphi_K &= \bar{m}\bar{\theta} + n\Omega t, \\ \bar{K} &= (\bar{m}, n). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Далее мы ограничиваемся рассмотрением случая, когда движение в системе (2.51), (2.52) может быть описано в рамках понятия изолированного нелинейного резонанса, что всегда может быть сделано (при указанных выше оговорках) при достаточно малых  $V_\Omega$ .

Уравнения движения для произвольной гамильтоновой системы при воздействии трения и шума и следующее из них уравнение Фоккер—Планка (2.3) даются в § 2.1. Асимптотика слабого шума для этого уравнения и последующее разложение функции  $\Phi$  по степеням  $\alpha$  было рассмотрено в § 2.4. Мы будем рассматривать только ведущий член разложения  $\Phi_0$  (поскольку предполагаем выполнение условий малости трения (2.45)), т. е. будем решать уравнение (2.49). Для вычисления средних в (2.49) вдоль траекторий гамильтониана (2.51), (2.52) рассмотрим движение с гамильтонианом (2.52) в окрестности изолированного нелинейного резонанса, создаваемого гармоникой  $V_K$ . Тогда влиянием остальных гармоник можно пренебречь, и гамильтониан, вместо (2.52), имеет вид

$$H = H_0(\bar{I}) + V_K \exp(i\varphi_K). \quad (2.54)$$

Следуя [17, 21], в окрестности резонанса  $\bar{I} = \bar{I}_r$  введем новые канонические переменные  $(\bar{J}_1 \dots \bar{J}_n)$ ,  $(\bar{\psi}_1 \dots \bar{\psi}_n)$  согласно соотношениям:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_1 &= \varphi_K = \bar{m}\bar{\theta} + n\Omega t = \mu_{1l}\theta_l + n\Omega t; \\ \bar{\psi}_k &= \mu_{kl}\theta_l = \theta_k, \quad k \neq 1; \end{aligned} \quad (2.55)$$

и

$$\begin{aligned} I_k &= \mu_{ik}\bar{J}_l, \\ \bar{J}_1 &= \frac{I_1}{m_1}; \quad \bar{J}_k = I_k - \frac{m_k}{m_1} I_1, \quad k \neq 1; \end{aligned} \quad (2.56)$$

где матрица постоянных коэффициентов  $\mu_{kl}$  определяется выражениями

$$\mu_{1l} = m_l; \quad \mu_{kl} = \delta_{kl}, \quad k \neq 1. \quad (2.57)$$

В таких переменных гамильтониан (2.54) приобретает вид:

$$\tilde{H} = \frac{\lambda}{2} (\tilde{J}_1 - \tilde{J}_1)^2 + V_{K0} \cos \tilde{\psi}_1, \quad (2.58)$$

где

$$\lambda = \left. \frac{\partial^2 H_0}{\partial \tilde{J}_1} \right|_{\tilde{J}_2 \dots \tilde{J}_n = \text{const}} (\tilde{I}_r), \quad (2.59a)$$

$$V_{K0} = V_K(\tilde{I}_r). \quad (2.59b)$$

Точки на резонансной поверхности  $\tilde{I} = \tilde{I}_r$  определяются резонансным условием

$$\bar{m} \frac{\partial H_0}{\partial \tilde{I}} + n\Omega = 0. \quad (2.60)$$

Максимальная амплитуда колебаний  $I$  на резонансе (при движении по сепаратрисе) дается выражением

$$I_l - I_{rl} = 2m_l \sqrt{\left| \frac{V_{K0}}{\lambda} \right|}. \quad (2.61)$$

Движение маятника (2.58) является интегрируемым с переменными действие-фаза

$$J_1 = J_1(\tilde{H}); \quad \psi_1 = \psi_1(\tilde{J}_1; \tilde{\psi}_1), \quad (2.62)$$

где функции  $J_1(\tilde{H})$ ,  $\psi_1(\tilde{J}_1, \tilde{\psi}_1)$  выражаются через эллиптические функции (см. [11, 21]). Таким образом, для возмущенного движения (2.51) в окрестности резонанса выделенной гармоники получим приближенные переменные действие-фаза  $J, \psi$ :

$$\begin{aligned} J_1 &= J_1(\tilde{H}), & J_n &= \tilde{J}_n, \\ \psi_1 &= \psi_1(\tilde{J}_1, \tilde{\psi}_1), & \psi_n &= \tilde{\psi}_n, \end{aligned} \quad n \neq 1. \quad (2.63)$$

Вместо переменных  $J_1 \dots J_n$  введем теперь в уравнении (2.49) переменные  $y, J_2 \dots J_n$ , где  $y = \tilde{H} + V_{K0}$  ( $y=0$  в центре резонанса  $\tilde{H} = -V_{K0}$ ), и выразим функцию  $\Phi_0$  через эти переменные:

$$\Phi_0 = \Phi_0(y, J_2 \dots J_n). \quad (2.64)$$

Подставляя (2.64) в (2.48) и проводя усреднение аналогично переходу от (2.48) к (2.49), получим:

$$\begin{aligned} & \left( g_{1ik} \left\langle x_i \frac{\partial y}{\partial x_k} \right\rangle + g_{2ik} \left\langle p_i \frac{\partial y}{\partial p_k} \right\rangle \right) \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \left( g_{1ik} \left\langle x_i \frac{\partial J_l}{\partial x_k} \right\rangle + \right. \\ & \left. + g_{2ik} \left\langle p_i \frac{\partial J_l}{\partial p_k} \right\rangle \right) \frac{\partial \Phi_0}{\partial J_l} - \frac{1}{2} G_{1ik} \left\langle \left( \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial J_l} \frac{\partial J_l}{\partial x_i} \right) \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left( \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x_k} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial J_l} \frac{\partial J_l}{\partial x_k} \right) \rangle - \frac{1}{2} G_{2ik} \left\langle \left( \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial p_i} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial J_l} \frac{\partial J_l}{\partial p_i} \right) \times \right. \\ & \left. \times \left( \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial p_k} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial J_l} \frac{\partial J_l}{\partial p_k} \right) \right\rangle = 0, \end{aligned} \quad (2.65)$$

где

$$g_{1ik} = \frac{\alpha_{1ik}}{\alpha}; \quad g_{2ik} = \frac{\alpha_{2ik}}{\alpha};$$

$$G_{1ik} = \frac{(\alpha_1^2)_{ik}}{\eta}; \quad G_{2ik} = \frac{(\alpha_2^2)_{ik}}{\eta}; \quad (2.66)$$

а индексы переменных  $J_l$  пробегает значения  $l=2 \dots n$ . Все фигурирующие в уравнении (2.65) средние по точным фазам  $\psi$  и времени  $t$ , обозначаемые  $\langle \dots \rangle$ , появляются также при тепловом усреднении § 2.2 в случае многомерного резонанса (см. [21]) аналогично тому, как это было сделано в § 2.3 для одномерного резонанса. Заметим также, что в отсутствие резонанса ( $V_K=0$ ) функция  $\Phi_0$  определяется уравнением (2.49).

Функция  $\Phi_0$  в (2.64), хотя и выражена через переменные  $y, J_2 \dots J_n$ , определяет, вообще говоря, плотность частиц (по формуле (2.50)) в пространстве  $J_1 \dots J_n$ , а не в пространстве  $y, J_2 \dots J_n$ . Это связано с тем, что переход  $J_1 \dots J_n \rightarrow y, J_2 \dots J_n$  не сохраняет фазовый объем. Для получения плотности распределения в пространстве  $y, J_2 \dots J_n$  мы должны умножить р.ф.р.  $\rho$  (2.50) на величину  $dJ_1/dy$ , но поскольку эта величина не содержит экспоненциальных множителей, то это не приводит к какому-либо изменению  $\Phi_0$ .

В Приложении А показано, что уравнение (2.65) можно представить для движения внутри сепаратрисы в виде (см. (A11))

$$\begin{aligned} & A_l \frac{\partial \Phi_0}{\partial J_l} + B_{lm} \frac{\partial \Phi_0}{\partial J_l} \frac{\partial \Phi_0}{\partial J_m} + f(y) \left[ (D + g(y) \bar{D}) \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} + \right. \\ & \left. + \bar{A}_l \frac{\partial \Phi_0}{\partial J_l} + \bar{B}_{lm} \frac{\partial \Phi_0}{\partial J_l} \frac{\partial \Phi_0}{\partial J_m} + (C_m + g(y) \bar{C}_m) \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \frac{\partial \Phi_0}{\partial J_m} + E \left( \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \right)^2 \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.67)$$

где функции  $f, g$  (A10) зависят только от  $y$ , а все остальные коэффициенты зависят только от  $J_l$  ( $l=2 \dots n$ ). Следует напомнить, что в уравнениях (2.65), (2.67) изменение переменных  $J_l$  ( $l=2 \dots n$ ) при  $y=0$  соответствует перемещениям вдоль резонансной поверхности, а изменение  $y$  при постоянных  $J_l$  соответствует перемещению вдоль направления резонансных колебаний.

При рассмотрении нелинейного резонанса мы предполагали достаточную малость величины  $V$  (а вместе с ней и  $V_{K0}$ ), что позволяло нам оставлять только одну гармонику в сумме (2.52) и описывать движение с гамильтонианом (2.54) в приближении маятника (2.58). Таким образом, в таком приближении величина резонансных колебаний  $\Delta I_r$  много меньше

самих  $I_r$ :  $|\Delta I_r|/|I_r| \sim \sqrt{V_{K0}} \ll 1$ . Используя эту малость, можно ограничиться такой точностью при нахождении  $\Phi_0$ .

Общим принципом построения «неравновесного потенциала»  $\Phi_0$  [14] является минимизация функционала (2.39). При построении функции  $\Phi_0$  с точностью  $|\Delta I_r|/|I_r| \sim \sqrt{V_{K0}} \ll 1$ , мы можем не рассматривать отрезки экстремалей в окрестности резонансной поверхности длиной порядка ширины резонанса, так как «затрата» функционала (2.39) на этих отрезках также пропорциональна  $\Delta I_r$ .

Для нахождения изменения  $\Phi_0$  вдоль резонансной поверхности в случае, когда экстремали (в рассматриваемой точке) идут вдоль поверхности мы предположим, что  $\partial\Phi_0/\partial y \rightarrow \text{const}$  при  $y \rightarrow 0$ . Это предположение связано с гладким поведением  $\Phi_0$  как функции переменных  $\bar{I}, \bar{\theta}$  (или  $\bar{x}, \bar{p}$ ) и следует из предполагаемого нами гладкого поведения экстремалей в окрестности центра резонанса  $y=0$ . Тогда, изменение  $\Phi_0$  вдоль резонансной поверхности определяется уравнением:

$$A_l \frac{\partial\Phi_0}{\partial I_l} + B_{lm} \frac{\partial\Phi_0}{\partial I_l} \frac{\partial\Phi_0}{\partial I_m} = 0. \quad (2.68)$$

Отметим, что тот же результат (2.68) можно получить с помощью подстановки в функционал (2.39) экстремалей, идущих вдоль резонансной поверхности (см. § 3.4). Существенно, что при вычислении  $\Phi_0$  с рассматриваемой точностью все остальное пространство можно считать невозмущенным, и экстремали в нем находятся с помощью уравнения Гамильтона—Якоби (2.49), а резонансная поверхность имеет нулевую ширину и экстремали, идущие вдоль этой поверхности, находятся с помощью уравнения Гамильтона—Якоби (2.68). Поскольку мы пренебрегаем изменением  $\Phi_0$  на расстояниях  $\sim \Delta I_r$ , то соединение участков экстремалей, проходящих по резонансной поверхности, и по «невозмущенному» пространству, должно проводиться без требования гладкости. Построение «полных» экстремалей, ведущих из притягивающего центра в каждую точку пространства, проводится исходя только из минимальности функционала (2.39), причем отдельные отрезки этих экстремалей могут проходить по резонансной поверхности. Экстремали могут пересекать резонансную поверхность также и поперек, тогда влияние резонанса в этом месте никак не проявляется, экстремаль «не замечает» резонанса. Подробное рассмотрение особенностей такой системы на более конкретном примере дано в Главе 3.

Следует заметить, что при построении  $\Phi_0$  во всем пространстве производные  $\partial\Phi_0/\partial I_l$  на некоторых поверхностях могут претерпевать разрыв. Наличие этих разрывов никак не связано с приближенным характером вычисления  $\Phi_0$  (такие разрывы есть и в точном решении), и определяется тем, что на разные стороны поверхности разрыва экстремали приходят с разных сторон. Возможность таких разрывов впервые была отмечена в [24].

Из нашего рассмотрения следует, что основной особенностью влияния нелинейного резонанса на функцию распределения в многомерном случае в асимптотике слабого шума,  $\eta \rightarrow 0$  является то, что р.ф.р. возмущается, независимо от ширины резонанса на расстояниях порядка тех, на которых лежит резонансная поверхность. Этот механизм принципиально отличается от одномерного случая, когда влияние резонанса на р.ф.р. определяется только его шириной [11, 18].

### ГЛАВА 3. ПРИБЛИЖЕНИЕ СЛАБОГО ШУМА

#### ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С НЕЛИНЕЙНЫМИ РЕЗОНАНСАМИ

В качестве примера применения формализма § 2.5, а также для более подробного рассмотрения ряда вопросов, рассмотрим задачу о р.ф.р. (или о среднем времени выхода за границы заданной области) для поперечного движения частиц в электрон-позитронном накопителе при учете изолированных нелинейных резонансов, возбуждаемых полем встречного пучка. Трение в уравнениях движения для поперечных степеней свободы возникает из-за наличия радиационного излучения, а внешний шум — из-за квантовых флуктуаций этого излучения (см. [25]). Одномерный случай был рассмотрен Шенфельдом [11] с помощью «теплового усреднения», мы же будем учитывать обе степени свободы. В настоящей работе мы не будем рассматривать особенностей нелинейных резонансов в данной системе (некоторые сведения содержатся в [26, 27]), также мы не будем касаться вопроса о применимости приближения слабого шума в такой системе (это будет сделано в последующих работах). Таким образом, отличие этого примера от общего случая § 2.5 заключается в том, что рассматривается 2-мерная система (четырёхмерное фазовое пространство), невозмущенный гамильтониан которой имеет достаточно простой вид. Настоящую главу можно читать отдельно, поскольку она практически не связана с предыдущей, за исключением § 2.4, в котором излагаются общие методы асимптотического описания систем со слабым шумом и который является вводным.

#### § 3.1. Равновесное распределение

В теории ускорителей [25] рассматривается влияние флуктуаций излучения на динамику поперечных степеней свободы. Мы не будем рассматривать изменение поперечных координат частицы вдоль орбиты, а введем эквивалентные уравнения движения для поперечных координат в месте встречи. Следуя Шенфельду [11], рассмотрим динамику двух поперечных степеней свободы  $x, z$  в месте встречи с учетом радиационного затухания и квантовых флуктуаций излучения:

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_x^2 x + \frac{\partial}{\partial x} U(x, z) \delta_T(t) = \sigma_{x0} \omega_x (2\alpha)^{1/2} \xi_x(t), \quad (3.1a)$$

$$\ddot{z} + \alpha \dot{z} + \omega_z^2 z + \frac{\partial}{\partial z} U(x, z) \delta_T(t) = \sigma_{z0} \omega_z (2\alpha)^{1/2} \xi_z(t). \quad (3.16)$$

В этих формулах  $\omega_x, \omega_z$  обозначают невозмущенные бетатронные частоты,  $\alpha$  является декрементом затухания, а величина  $U(x, z)$  является потенциалом встречного взаимодействия. Мы считаем, что взаимодействие со встречным пучком может быть описано в приближении «тонкой линзы» (см. [28]), что соответствует  $\delta$ -образным толчкам с периодом  $T$ . Величины  $\xi_x(t), \xi_z(t)$  являются нормированными (некоррелированными) случайными процессами, которые могут считаться (см. § 2.1) процессами белого шума:

$$\langle \xi_x(t) \xi_x(t+\tau) \rangle = \langle \xi_z(t) \xi_z(t+\tau) \rangle = \delta(\tau), \quad \langle \xi_x(t) \xi_z(t+\tau) \rangle = 0. \quad (3.2)$$

Нормировка шумовых слагаемых определяется тем, что при  $U=0$  в системе (3.1) устанавливается стационарное распределение со среднеквадратичными отклонениями:

$$\langle x^2 \rangle = \sigma_{x0}^2, \quad (3.3a)$$

$$\langle z^2 \rangle = \sigma_{z0}^2. \quad (3.3b)$$

Аналогично переходу от уравнения (2.1) к уравнению (2.3) (см. также [11]), уравнение Фоккер-Планка для (3.1) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + p_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + p_z \frac{\partial \rho}{\partial z} - \left( \omega_x^2 x + \frac{\partial}{\partial x} U(x, z) \delta_T(t) \right) \frac{\partial \rho}{\partial p_x} - \left( \omega_z^2 z + \frac{\partial}{\partial z} U(x, z) \delta_T(t) \right) \times \\ \times \frac{\partial \rho}{\partial p_z} = \alpha \frac{\partial}{\partial p_x} \left( p_x \rho + \omega_x^2 \sigma_{x0}^2 \frac{\partial \rho}{\partial p_x} \right) + \alpha \frac{\partial}{\partial p_z} \left( p_z \rho + \omega_z^2 \sigma_{z0}^2 \frac{\partial \rho}{\partial p_z} \right), \quad (3.4) \end{aligned}$$

где  $p_x = \dot{x}, p_z = \dot{z}$ . Существенно заметить, что при  $U=0$  в системе имеется стационарное распределение

$$\rho = \exp \left\{ - \frac{(p_x^2 + \omega_x^2 x^2)}{2\sigma_{x0}^2 \omega_x^2} - \frac{(p_z^2 + \omega_z^2 z^2)}{2\sigma_{z0}^2 \omega_z^2} \right\}. \quad (3.5)$$

Далее от переменных  $x, z, p_x, p_z$  мы перейдем к переменным действие-фаза невозмущенной системы ( $U=0$ ):

$$I_x = \frac{1}{2\omega_x} (p_x^2 + \omega_x^2 x^2); \quad I_z = \frac{1}{2\omega_z} (p_z^2 + \omega_z^2 z^2); \quad (3.6a)$$

$$\theta_x = -\text{atan} \left( \frac{p_x}{\omega_x x} \right); \quad \theta_z = -\text{atan} \left( \frac{p_z}{\omega_z z} \right). \quad (3.6b)$$

Динамику в уравнении (3.1) при  $\alpha=0$ , мы будем описывать стандартным образом (см., например, [26, 27]). Для этого гамильтониан системы,

имеющий вид

$$H = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_z^2}{2} + \frac{\omega_x^2}{2} x^2 + \frac{\omega_z^2}{2} z^2 + U(x, z) \delta_T(t), \quad (3.7)$$

представим в переменных (3.6) с одновременным разложением в ряд Фурье функции  $U$  по циклическим переменным  $\theta_x, \theta_z$ , а функции  $\delta_T(t)$  по времени  $t$ , что даст

$$H = I_x \omega_x + I_z \omega_z + \sum_{l, m = -\infty}^{\infty} V_{lm}(I_x, I_z) e^{i(l\theta_x + m\theta_z)} \sum_{n = -\infty}^{\infty} e^{in\Omega t}, \quad (3.8)$$

где  $\Omega = 2\pi/T$ , а  $V_{lm} = (1/T) U_{lm}$ . В окрестности нелинейного резонанса с индексами  $l, m, n$  можно отбросить все слагаемые в суммах (3.8), кроме резонансной гармоники  $V_{lm}$  и нулевой гармоники  $V_{00}$ , приводящей к стабилизации раскочки амплитуд при резонансе (см. [29]). Тогда вместо гамильтониана (3.8) получим:

$$H = I_x \omega_x + I_z \omega_z + V_{00}(I_x, I_z) + V_{lm}(I_x, I_z) e^{i(l\theta_x + m\theta_z + n\Omega t)}. \quad (3.9)$$

При рассмотрении движения в окрестности резонансной линии  $I_{xr}, I_{zr}$ , определяемой уравнениями

$$l \omega'_x + m \omega'_z + n \Omega = 0, \quad (3.10a)$$

$$\omega'_x(I_x, I_z) = \omega_x + \frac{\partial V_{00}}{\partial I_x}, \quad \omega'_z = \omega_z + \frac{\partial V_{00}}{\partial I_z}, \quad (3.10b)$$

гамильтониан, при введении резонансной фазы

$$\varphi = l \theta_x + m \theta_z + n \Omega t \quad (3.11)$$

принимает вид

$$\bar{H} = \frac{\lambda(I_{xr}, I_{zr})}{2} (\bar{J}_1 - \bar{J}_{10})^2 + V_{lm}(I_{xr}, I_{zr}) \cos \varphi, \quad (3.12)$$

где, аналогично (2.56), введены переменные:

$$\bar{J}_1 = \frac{I_z}{m}; \quad \bar{J}_2 = -I_x + \frac{l}{m} I_z; \quad (3.13a)$$

$$I_x = -\bar{J}_2 + l \bar{J}_1; \quad I_z = m \bar{J}_1. \quad (3.13b)$$

Нелинейность  $\lambda$  (не путать с матрицей интенсивности шумов  $\lambda_{ik}^2$  Главы 2) определяется выражением

$$\lambda = \frac{\partial^2 V_{00}}{\partial \bar{J}_1^2} \Big|_{I_z = \text{const}} = \frac{l^2}{m} \frac{\partial^2 V_{00}}{\partial I_x^2} + \frac{2l}{m} \frac{\partial^2 V_{00}}{\partial I_x \partial I_z} + \frac{\partial^2 V_{00}}{\partial I_z^2} \quad (3.14)$$

Для описания динамики величины  $\lambda$ ,  $V_{lm}$ ,  $\bar{J}_{10}$  могут считаться константами, хотя на самом деле они зависят от  $J_2 = \bar{J}_2$  (являющимся интегралом движения). Зависимость этих величин от  $J_2$  существенна, однако, для вычисления коэффициентов в «усредненном» уравнении Гамильтона—Якоби (см. ниже).

Перейдем теперь к пределу слабого шума в уравнении (3.4). Вводя параметр малости шума  $\eta$  по формулам  $\eta\sigma_x^2 = \sigma_{x0}^2$ ,  $\eta\sigma_z^2 = \sigma_{z0}^2$  и используя, аналогично § 2.5, асимптотический вид (2.36), для квазипотенциала  $\Phi$  получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial t} + p_x \frac{\partial\Phi}{\partial x} + p_z \frac{\partial\Phi}{\partial z} - \left( \omega_x^2 x + \frac{\partial}{\partial x} U(x, z) \delta_T(t) \right) \frac{\partial\Phi}{\partial p_x} - \\ - \left( \omega_z^2 z + \frac{\partial}{\partial z} U(x, z) \delta_T(t) \right) \frac{\partial\Phi}{\partial p_z} = \alpha \left( p_x \frac{\partial\Phi}{\partial p_x} - \omega_x^2 \sigma_x^2 \left( \frac{\partial\Phi}{\partial p_x} \right)^2 \right) + \\ + \alpha \left( p_z \frac{\partial\Phi}{\partial p_z} - \omega_z^2 \sigma_z^2 \left( \frac{\partial\Phi}{\partial p_z} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

При описании динамики в окрестности резонанса с помощью гамильтониана (3.12) уравнение (3.15) переходит в

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial I_x} l V_{lm} \sin\varphi + \frac{\partial\Phi}{\partial I_z} m V_{lm} \sin\varphi + \omega'_x \frac{\partial\Phi}{\partial \theta_x} + \omega'_z \frac{\partial\Phi}{\partial \theta_z} + \frac{\partial V_{lm}}{\partial I_x} \cos\varphi \frac{\partial\Phi}{\partial \theta_x} + \\ + \frac{\partial V_{lm}}{\partial I_z} \cos\varphi \frac{\partial\Phi}{\partial \theta_z} = \alpha \left[ 2I_x \cos^2\theta_x \frac{\partial\Phi}{\partial I_x} + 2I_z \cos^2\theta_z \frac{\partial\Phi}{\partial I_z} - \sin\theta_x \cos\theta_x \frac{\partial\Phi}{\partial \theta_x} - \right. \\ \left. - \sin\theta_z \cos\theta_z \frac{\partial\Phi}{\partial \theta_z} - \omega_x \sigma_x^2 \left( 2I_x \cos^2\theta_x \left( \frac{\partial\Phi}{\partial I_x} \right)^2 - 2\sin\theta_x \cos\theta_x \frac{\partial\Phi}{\partial I_x} \frac{\partial\Phi}{\partial \theta_x} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\sin^2\theta_x}{2I_x} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial \theta_x} \right)^2 \right) - \omega_z \sigma_z^2 \left( 2I_z \cos^2\theta_z \left( \frac{\partial\Phi}{\partial I_z} \right)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - 2\sin\theta_z \cos\theta_z \frac{\partial\Phi}{\partial I_z} \frac{\partial\Phi}{\partial \theta_z} + \frac{\sin^2\theta_z}{2I_z} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial \theta_z} \right)^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Основной идеей предлагаемого подхода к описанию р.ф.р. является именно использование асимптотики  $\eta \rightarrow 0$ , в которой р.ф.р.  $\rho$  имеет вид (2.36), что позволяет перейти от уравнения Фоккер—Планка (3.4) к уравнению для  $\Phi$  (3.15). Для решения уравнений типа (3.15), (3.16) существует развитый формализм, изложенный в общих чертах в § 2.4. Для получения наглядной картины явления мы сделаем еще некоторые упрощающие предположения о коэффициентах в уравнении (3.16). Так, рассмотрим сначала случай малого трения  $\alpha$ . «Малость» должна обеспечиваться как по отношению к невозмущенным колебаниям, так и по отношению к резонансному воздействию:

$$\alpha \ll \omega, \quad (3.17a)$$

$$\alpha \ll \omega \frac{V_{lm}}{|I_r|}. \quad (3.17b)$$

Случай, когда неравенство (3.17b) не выполняется, будет рассмотрен в § 3.4. Метод решения уравнений типа (3.16) изложен в § 2.4. Разница состоит лишь в том, что в настоящей главе параметр  $\eta$  определен так, что перед квадратичными по производным  $\Phi$  слагаемыми в (3.16) стоит множитель  $\alpha$ . Поэтому вместо (2.46) представим  $\Phi$  в виде:

$$\Phi = \Phi_0 + \alpha\Phi_1 + \dots \quad (3.18)$$

Получая для величин  $\Phi_0, \Phi_1, \dots$  цепочку «зацепленных» уравнений и последовательно решая ее с помощью регулярной процедуры § 2.4, приходим к уравнению для  $\Phi_0$ :

$$\begin{aligned} \left( \left\langle p_x \frac{\partial J_1}{\partial p_x} \right\rangle + \left\langle p_z \frac{\partial J_1}{\partial p_z} \right\rangle \right) \frac{\partial\Phi_0}{\partial I_1} + \left( \left\langle p_x \frac{\partial J_2}{\partial p_x} \right\rangle + \left\langle p_z \frac{\partial J_2}{\partial p_z} \right\rangle \right) \frac{\partial\Phi_0}{\partial I_2} - \\ - \omega_x^2 \sigma_x^2 \left[ \left\langle \left( \frac{\partial J_1}{\partial p_x} \right)^2 \right\rangle \left( \frac{\partial\Phi_0}{\partial I_1} \right)^2 + 2 \left\langle \frac{\partial J_1}{\partial p_x} \frac{\partial J_2}{\partial p_x} \right\rangle \frac{\partial\Phi_0}{\partial I_1} \frac{\partial\Phi_0}{\partial I_2} + \left\langle \left( \frac{\partial J_2}{\partial p_x} \right)^2 \right\rangle \left( \frac{\partial\Phi_0}{\partial I_2} \right)^2 \right] - \\ - \omega_z^2 \sigma_z^2 \left[ \left\langle \left( \frac{\partial J_1}{\partial p_z} \right)^2 \right\rangle \left( \frac{\partial\Phi_0}{\partial I_1} \right)^2 + 2 \left\langle \frac{\partial J_1}{\partial p_z} \frac{\partial J_2}{\partial p_z} \right\rangle \frac{\partial\Phi_0}{\partial I_1} \frac{\partial\Phi_0}{\partial I_2} + \right. \\ \left. + \left\langle \left( \frac{\partial J_2}{\partial p_z} \right)^2 \right\rangle \left( \frac{\partial\Phi_0}{\partial I_2} \right)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

где  $\Phi_0$  является функцией «точных» действий  $J_1, J_2$  для гамильтониана (3.12). В этом уравнении символ  $\langle \dots \rangle$  означает среднее по точным фазам  $\psi_1, \psi_2$  и по времени  $t$ , т. е.  $\frac{1}{(2\pi)^2 T} \int_0^{2\pi} \int_0^T d\psi_1 d\psi_2 \int_0^T dt$ . Для отсутствия возмущения  $U=0$  переменные  $J_1, J_2$  совпадают с  $I_x, I_z$ , и вместо (3.19) получим

$$I_x \frac{\partial\Phi_0}{\partial I_x} + I_z \frac{\partial\Phi_0}{\partial I_z} - \omega_x \sigma_x^2 I_x \left( \frac{\partial\Phi_0}{\partial I_x} \right)^2 - \omega_z \sigma_z^2 I_z \left( \frac{\partial\Phi_0}{\partial I_z} \right)^2 = 0 \quad (3.20)$$

Заметим, что уравнение (3.20) может быть получено в асимптотике слабого шума из усредненного по фазам  $\theta_x, \theta_z$  уравнения (3.16) при отсутствии возмущения  $U=0$ , которое может быть записано в виде уравнения непрерывности:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial I_x} + \frac{\partial j_z}{\partial I_z} = 0, \quad (3.21)$$

где токи  $j_x, j_z$  определяются соотношениями:



$$j_x = -\alpha \left( I_x \rho + \omega_x \sigma_{x0}^2 I_x \frac{\partial \rho}{\partial I_x} \right),$$

$$j_z = -\alpha \left( I_z \rho + \omega_z \sigma_{z0}^2 I_z \frac{\partial \rho}{\partial I_z} \right). \quad (3.22)$$

При неравной нулю гармонике  $V_{00}=0$  и отсутствии резонансной гармоники  $V_{lm}=0$  мы будем также полагать  $J_1=I_x, J_2=I_z$ . Уравнение (3.19) при этом, вообще говоря, не совпадает с (3.20), так как коэффициенты при  $\frac{\partial \Phi_0}{\partial I_x}, \frac{\partial \Phi_0}{\partial I_z}, \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial I_x}\right)^2, \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial I_z}\right)^2$  будут отличаться от значений в (3.20) на величины, пропорциональные  $V_{00}$ . Однако, поскольку в реальных накопителях величина  $V_{00}$  всегда бывает достаточно мала (так, всегда выполняется условие  $\Delta\omega_{x,z} = \frac{\partial V_{00}}{\partial I_{x,z}} \ll 1$ , см. [29]), то отличие уравнения (3.19) при  $V_{lm}=0$  от уравнения (3.20), и, соответственно, их решений, будет малым и в этой главе мы им будем пренебрегать. В принципе применение этого приближения является необязательным и его легко заменить точным рассмотрением. Отметим, что точность такого приближения ( $\sim V_{00}$ ) может быть как хуже, так и лучше точности используемого ниже приближения малости ширины резонанса (с точностью  $\sim \Delta I_r \sim \sqrt{\frac{V_{lm}}{V_{00}}}$ ). Отметим, что стационарное решение (3.20), имеющее вид

$$\Phi_0 = \frac{I_x}{\omega_x \sigma_x^2} + \frac{I_z}{\omega_z \sigma_z^2}, \quad (3.23)$$

дает точное выражение для стационарного распределения при  $U=0$  (3.5). Существенно, что в уравнении (3.19) вместо переменных  $J_1, J_2$  можно использовать любые функции от них, т. е. любые интегралы движения. В качестве таких интегралов движения, следуя § 2.5, мы выберем величину  $y = \tilde{H} + V_{lm}$  с  $\tilde{H}$  из (3.12) и величину действия  $\tilde{J}_2$  (3.13a):

$$J_2 = \tilde{J}_2 = -I_x + \frac{l}{m} I_z. \quad (3.24)$$

Напомним (см. § 2.5), что несохранение фазового объема при переходе от  $J_1, J_2$  к  $y, J_2$  несущественно для  $\Phi_0$ . Так же, как в § 2.5 мы будем рассматривать уравнение (3.19) и, соответственно, проводить усреднение только в области внутри сепаратрисы нелинейного резонанса. Как было показано в § 2.5 для общего случая и как будет показано для нашего конкретного примера далее, для нахождения функции  $\Phi$  во всем пространстве с точностью до поправок порядка ширины резонанса достаточно уметь решать невозмущенное уравнение (3.20) с произвольными граничными условиями и уравнение (3.19) вблизи центра резонанса (резонансной линии).

В Приложении В вычислены все средние, входящие в уравнение (3.19) с точностью до поправок порядка  $|\Delta I_r|/|I_r| \ll 1$ . Показано, что уравнение (3.19) с этой точностью для движения внутри сепаратрисы принимает вид (см. (B12))

$$a(J_2) \frac{\partial \Phi_0}{\partial J_2} + b(J_2) \left( \frac{\partial \Phi_0}{\partial J_2} \right)^2 + f(y) \left[ (a_0(J_2) + g(y) b_0(J_2)) \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} + a_1(J_2) \left( \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \right)^2 + (a_2(J_2) + g(y) b_2(J_2)) \frac{\partial \Phi_0}{\partial J_2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \right] = 0. \quad (3.25)$$

Для полного решения задачи мы должны найти такое решение  $\Phi_0$  уравнения (3.16) для внутри- и внесепаратрисной области в окрестности резонанса, которое: 1) непрерывно на сепаратрисной поверхности, и 2) при удалении от резонанса во внесепаратрисной области переходит в такое решение невозмущенного уравнения (3.20), все экстремали которого, вычисленные из (2.42), начинаются либо в притягивающем центре  $I_x, I_z=0$ , либо приходят с резонансной линии. Однако даже для тех простых частных случаев, которые мы рассматриваем ниже, сделать это в аналитическом виде для произвольных зависимостей  $\lambda(J_2), V_{lm}(J_2)$  не представляется возможным. Поэтому мы не будем решать полную задачу, а ограничимся, так же, как и в § 2.5, нахождением  $\Phi_0$  с точностью до поправок  $\sim |\Delta I_r| \ll |I_r|$ . Тогда мы можем не рассматривать поведение экстремалей на масштабах  $\sim \Delta I_r$ , так как это приводит к «затрате» функционала (2.39), также пропорциональной  $\Delta I_r$ . Резонансы при такой точности вычисления будут представлять собой линии нулевой ширины, а в пространстве между ними движение будет невозмущенным. Экстремали могут пересекать резонансные линии поперек, а могут проходить отдельными своими участками вдоль этих линий. В случае, когда экстремали в каком-то месте пересекают резонансную линию, этот отрезок линии никак не учитывается. Когда экстремали идут вдоль резонансной линии, то, аналогично § 2.5, можно предположить, что  $\frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \rightarrow \text{const}$  при  $y \rightarrow 0$ , и для изменения  $\Phi_0 = u$  вдоль резонансной линии получим

$$a(J_2) \frac{du}{dJ_2} + b(J_2) \left( \frac{du}{dJ_2} \right)^2 = 0. \quad (3.26)$$

То же уравнение (3.26), не делая никаких дополнительных предположений, можно получить с помощью подстановки в функционал (2.39) экстремалей, идущих вдоль резонансной линии (см. § 3.4).

Уравнение (3.26) имеет два решения:

$$u_1(J_2) = \text{const}, \quad (3.27a)$$

$$u_2(J_2) = - \int \frac{a(J_2)}{b(J_2)} dJ_2 = - \int \frac{J_2 dJ_2}{\omega_x \sigma_x^2 (-J_2 + \bar{I}_{10}) + \omega_z \sigma_z^2 (l^2/m) \bar{I}_{10}}, \quad (3.276)$$

где использованы значения  $a, b$  (В13).

Выражение (3.276) может быть преобразовано к виду интеграла по  $I_x$  от функции аргумента  $I_x$ . Для этого, записывая

$$\left. \frac{\partial J_2}{\partial I_x} \right|_{y=0} = \frac{d\left(-I_x + \frac{l}{m} I_{z0}(I_x)\right)}{dI_x} = -1 + \frac{l}{m} \frac{dI_{z0}}{dI_x}, \quad (3.28)$$

получим, вместо (3.276), следующее выражение для  $u_2(I_x)$ :

$$u_2(I_x) = \int \frac{\left(-I_x + \frac{l}{m} I_{z0}(I_x)\right) \left(-1 + \frac{l}{m} \frac{dI_{z0}}{dI_x}\right)}{\omega_x \sigma_x^2 I_x + \omega_z \sigma_z^2 \frac{l^2}{m^2} I_{z0}(I_x)} dI_x. \quad (3.29)$$

Различие между двумя типами решений (3.27а,б) определяется различным направлением экстремалей, т. е. наиболее вероятных траекторий, по которым частицы приходят из центра в данную точку резонансной линии (в данной точке экстремали идут вдоль резонансной линии). Действительно, записывая уравнения для экстремалей (2.42) для одномерной системы (3.26) с  $\Phi_0 = u_2$  (3.29) (используя также  $\Phi = \Phi_0$ ), получим, что в случае (3.27а) экстремали на резонансной линии совпадают с траекториями исходной системы с трением (без шума):

$$J_2 = -\alpha a(J_2) = -\alpha J_2. \quad (3.30)$$

В случае (3.27б) для экстремалей получим уравнение:

$$J_2 = \alpha a(J_2) = \alpha J_2, \quad (3.31)$$

что означает, что в этом случае экстремали идут «против» трения. Подытоживая все вышесказанное, можно сказать, что возможны всего три типа изменения функции  $\Phi_0$  вдоль резонансной линии:

$$\frac{\partial \Phi_{01}}{\partial J_2} = 0, \quad (3.32а)$$

$$\frac{\partial \Phi_{02}}{\partial J_2} = \frac{du_2(J_2)}{dJ_2}, \quad (3.32б)$$

$$\frac{\partial \Phi_{03}}{\partial J_2} = \frac{d\bar{u}(J_2)}{dJ_2}, \quad (3.32в)$$

где каждый тип решения соответствует своему направлению экстремали. Функция  $u_2(J_2)$  дается выражениями (3.276), а функция  $\bar{u}(J_2)$  определя-

ется внешними по отношению к рассматриваемой точке на резонансной линии условиями, и резонанс (в этой точке) никак не влияет на  $\bar{u}(J_2)$ . В случае (3.32а) экстремали идут вдоль резонансной линии по направлению трения, в случае (3.32б) — против трения, а в случае (3.32в) пересекают резонансную линию поперек.

Отметим, что поскольку мы пренебрегаем изменением  $\Phi_0$  на расстояниях  $\sim \Delta I$ , то соединение участков экстремалей, проходящих по резонансной линии и по «пустому» пространству проводится без требования гладкости, а исходя только из минимальности функционала (2.39). Иными словами, участок резонансной линии, по которому проходит экстремаль (и изменение  $\Phi_0$  на котором дается (3.27)), является граничным условием для нахождения  $\Phi_0$  во внешнем невозмущенном пространстве исходя из уравнения (3.20). Решение таких граничных задач методом характеристик (которые и являются экстремальями) должно проводиться с требованием, что характеристика (экстремаль) должна приходить в каждую точку не из бесконечности, а либо с линии, на которой задано граничное условие, либо из притягивающего центра  $I_x, I_z = 0$ .

Функция  $\Phi_0$  должна быть непрерывной и дифференцируемой, но может иметь изломы. Наличие таких изломов определяется тем, что с одной стороны линии излома экстремали приходят из одного источника, например, с одного отрезка резонансной линии, а с другой стороны линии излома экстремали приходят с другого источника, например, с другого отрезка (возможно, другой) резонансной линии или из притягивающего центра. Возможность образования таких изломов была отмечена в [24]. Противоречие с требованием дважды дифференцируемости решения  $\Phi_0$  исходного уравнения Фоккер—Планка (3.4) устраняется тем, что на самом деле излом является «размытым» на расстояниях, пропорциональных силе шума  $\eta$ , что не учитывается нашим асимптотическим решением (2.50). Наглядный пример такого излома и механизма его «размывания» дан в § 3.2, 3.3. В Приложении С найдена экстремаль, соединяющая две заданные точки при невозмущенном движении, а также «расход» функционала  $\Delta \Phi_0$  (2.38б) на переход по этой экстремали, определяющий вероятность перехода (2.38). Наличие явных выражений для величины  $\Delta \Phi$  для невозмущенного движения и формул (3.32а,б) для изменения  $\Phi_0$  вдоль резонансных линий в случае, когда экстремали тоже идут вдоль этих линий, позволяет проводить (например, численно) минимизацию (2.39) и решать задачу о р.ф.р. при наличии нескольких резонансных линий.

### § 3.2 «Одномерный» резонанс $l=0$

Рассмотрим частный случай системы § 3.1 при наличии в плоскости  $I_x, I_z$  только одного «одномерного» резонанса  $l=0$ . Несмотря на такую «одномерность», уравнение Фоккер—Планка (3.4) не может быть сведено к одномерному случаю, и в системе проявляются все характерные особенности многомерных систем, описанные выше. Мы будем предполагать для

простоты, что резонансная линия  $I_{z0}(I_x)$ , определяемая посредством условия (3.10), имеет достаточно простую форму, так что экстремали, «отходящие» от резонансной линии, нигде больше не пересекают эту линию. При этом условии экстремаль может пересекать резонансную линию, только если она выходит непосредственно из центра координат  $I_x, I_z=0$ . Тогда для нахождения изменения функции  $\Phi_0$  вдоль резонансной линии мы должны выбрать наименьшее из трех возможных решений (3.32). Заметим, что функция  $u_2(I_x)$  в нашем частном случае ( $l=0$ ) принимает вид

$$u_2(I_x) = \frac{I_x}{\omega_x \sigma_x^2}. \quad (3.33)$$

Простая физическая интерпретация решения (3.33) заключается в том, что поскольку резонанс возбуждает колебания только  $I_z$  ( $l=0$ ), то внутри резонанса компенсируется трение по оси  $I_z$ , и в (3.33) отсутствует второе слагаемое в невозмущенном решении (3.23). Функция  $\bar{u}(I_x)$  должна быть найдена из условия, что  $\Phi_{03}$  — невозмущенная функция (3.23), так как мы предположили, что экстремали для случая (3.32в) приходят непосредственно из центра. Тогда

$$\frac{d\bar{u}}{dI_x} = \frac{\partial \Phi_{03}}{\partial I_x} \Big|_{I_z=I_{z0}(I_x)} = \frac{1}{\omega_x \sigma_x^2} + \frac{1}{\omega_z \sigma_z^2} \frac{dI_{z0}}{dI_x}. \quad (3.34)$$

Уравнения для экстремалей в случаях (3.32а) и (3.32б) получаются, соответственно, из (3.30), (3.31):

$$I_x = -\alpha I_x, \quad (3.35а)$$

$$I_x = \alpha I_x. \quad (3.35б)$$

Величина  $I_z$  на экстремали определяется значением  $I_x$ :  $I_z = I_{z0}(I_x)$ . Из уравнений (3.35) видно, что изменение  $I_x$  на экстремали в случае (3.35а) совпадает с невозмущенным, а экстремаль (3.35б) направлена в противоположную сторону.

Для произвольной зависимости  $I_{z0}(I_x)$ , т. е. произвольной резонансной линии, сделанное нами предположение о том, что экстремаль, отходящая от резонансной линии, больше не пересекает эту линию, не выполняется. Тогда изменение  $\Phi_0$  на каждом участке резонансной линии зависит, вообще говоря, от поведения  $I_{z0}(I_x)$  на всех остальных участках и распределение  $\Phi_0$  в плоскости  $I_x, I_z$  не может быть найдено в общем виде. Для иллюстрации возможностей реализации решений (3.32) мы рассмотрим частные случаи «устройства» резонансных линий. Эти частные случаи определяются тем, что наклон резонансной линии  $\varphi = \frac{dI_{z0}}{dI_x}$  должен лежать в пределах:

$$\varphi \in [-\infty, \varphi_0], \quad (3.36а)$$

$$\varphi \in [0, +\infty], \quad (3.36б)$$

$$\varphi \in [\varphi_0, 0]. \quad (3.36в)$$

Наклон  $\varphi_0$  определяется тем, что невозмущенное распределение (3.23) постоянно вдоль прямых  $\varphi = \varphi_0$ , что дает  $\varphi_0 = -\frac{\omega_z \sigma_z^2}{\omega_x \sigma_x^2}$ . Мы утверждаем, что изменение  $\Phi_0$  вдоль резонансной линии в случаях (3.36) определяется, соответственно, формулами (3.32) с  $u_2(I_x)$  из (3.33) и  $\bar{u}(I_x)$  из (3.34). Это легко показать, рассматривая «затрату» функционала (2.39) для различных траекторий, соединяющих центр  $I_x, I_z=0$  с произвольной точкой на резонансной линии. Следует рассматривать три типа траекторий: идущих «напрямую» в рассматриваемую точку (и дающих невозмущенное значение  $\Phi_0$  в этой точке); идущих «напрямую» до левого конца резонансной линии и вдоль линии до рассматриваемой точки; идущих «напрямую» до правого конца резонансной линии и вдоль линии до рассматриваемой точки. Все эти типы экстремалей показаны на рис. 3, 4, 5. Следует отметить также, что для случая (3.36б) (рис. 4,а,б), когда экстремаль идет по резонансной линии «против трения», изгибы на этой линии «срезать» по невозмущенной области невыгодно, так как затрата  $\Delta\Phi$  при этом всегда больше, поскольку (см. (С14)) при  $\Delta I_x, \Delta I_z > 0$  выполняется неравенство

$$\Delta\Phi(I_x, I_z; I_x + \Delta I_x, I_z + \Delta I_z) \geq \frac{\Delta I_x}{\omega_x \sigma_x^2} + \frac{\Delta I_z}{\omega_z \sigma_z^2}. \quad (3.37)$$

После того, как мы нашли распределение  $\Phi_0$  вдоль резонансной линии для каждого из случаев (3.36), мы можем найти распределение  $\Phi_0$  во всем пространстве. Рассмотрим сначала случай (3.36а). Распределение  $\Phi_0$  в этом случае показано на рис. 3; в области I функция  $\Phi_0$  совпадает с невозмущенной (3.23), и экстремали в этой области также совпадают с невозмущенными. В области II, лежащей между прямой

$$\frac{I_x}{\omega_x \sigma_x^2} + \frac{I_z}{\omega_z \sigma_z^2} = \frac{I_{x00}}{\omega_x \sigma_x^2} \quad (3.38)$$

(где  $I_{x00}$  — координата правого конца резонансной линии) и резонансной линией, функция  $\Phi_0$  постоянна и равняется невозмущенному значению в точке  $I_z=0, I_x=I_{x00}$ . Экстремали, приходящие в каждую точку этой области, состоят из трех отрезков (см. рис. 3): первый является отрезком невозмущенной экстремали, второй идет по резонансной линии, а третий является участком невозмущенного движения с трением, который соединяет резонансную линию с рассматриваемой точкой области II. На прямой (3.38) производные  $\Phi_0$  испытывают разрыв. Обсуждение «размытия» этого раз-

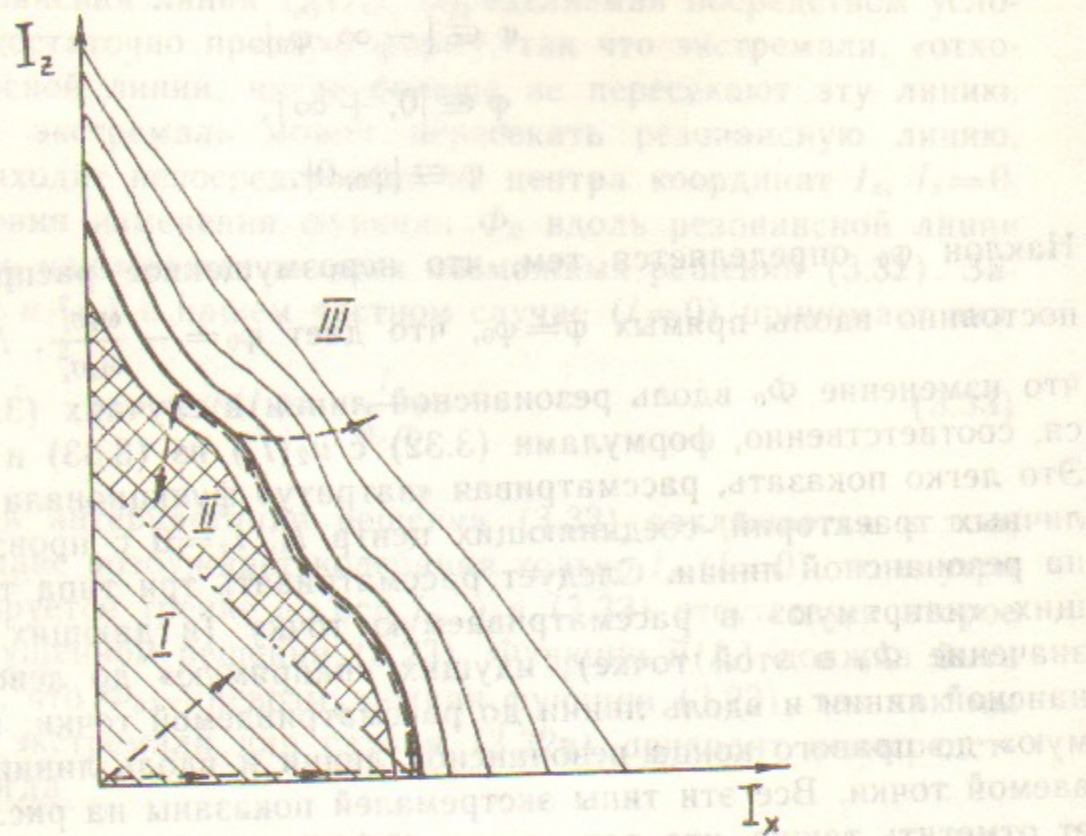


Рис. 3. Линии уровня функции  $\Phi_0$  в плоскости  $I_x, I_z$  для резонанса с чисто вертикальными колебаниями  $I$ . Центр резонанса и сепаратриса показаны более жирными линиями. Штриховой линией показаны экстремали, ведущие из центра  $I_x, I_z=0$  в различные точки областей I, II, III. В области I функция  $\Phi_0$  остается невозмущенной  $\Phi_0 = \frac{I_x}{\omega_x \sigma_x^2} + \frac{I_z}{\omega_z \sigma_z^2}$ , в области II  $\Phi_0 = \text{const}$ .

$$\Phi_0 = \frac{I_x}{\omega_x \sigma_x^2} + \frac{I_z}{\omega_z \sigma_z^2}, \text{ в области II } \Phi_0 = \text{const}.$$

рыва при учете конечной величины  $\eta$  будет дано несколько ниже. В области III распределение  $\Phi_0$  не может быть выписано в явном виде, так как оно зависит от формы резонансной линии и определяется минимумом значения величины  $\Delta\Phi$  (С13) для перехода от точек на резонансной линии до рассматриваемой точки области II. Отрезок экстремали в области III, ведущий в данную точку, определяется, после нахождения точки на резонансной линии, обеспечивающей минимум  $\Delta\Phi$ , формулами Приложения С.

Для случая (3.36б) распределение  $\Phi_0$  показано на рис. 4, а, 4, б. В области I функция  $\Phi_0$  и соответствующие экстремали являются невозмущенными. В области II функция  $\Phi_0$  зависит только от  $I_x$ :

$$\Phi_0 = \tilde{\Phi}_0 + \frac{I_x - I_{x00}}{\omega_x \sigma_x^2}, \quad (3.39)$$

где  $\tilde{\Phi}_0$  — значение  $\Phi_0$  на левом конце резонансной линии (невозмущенное):

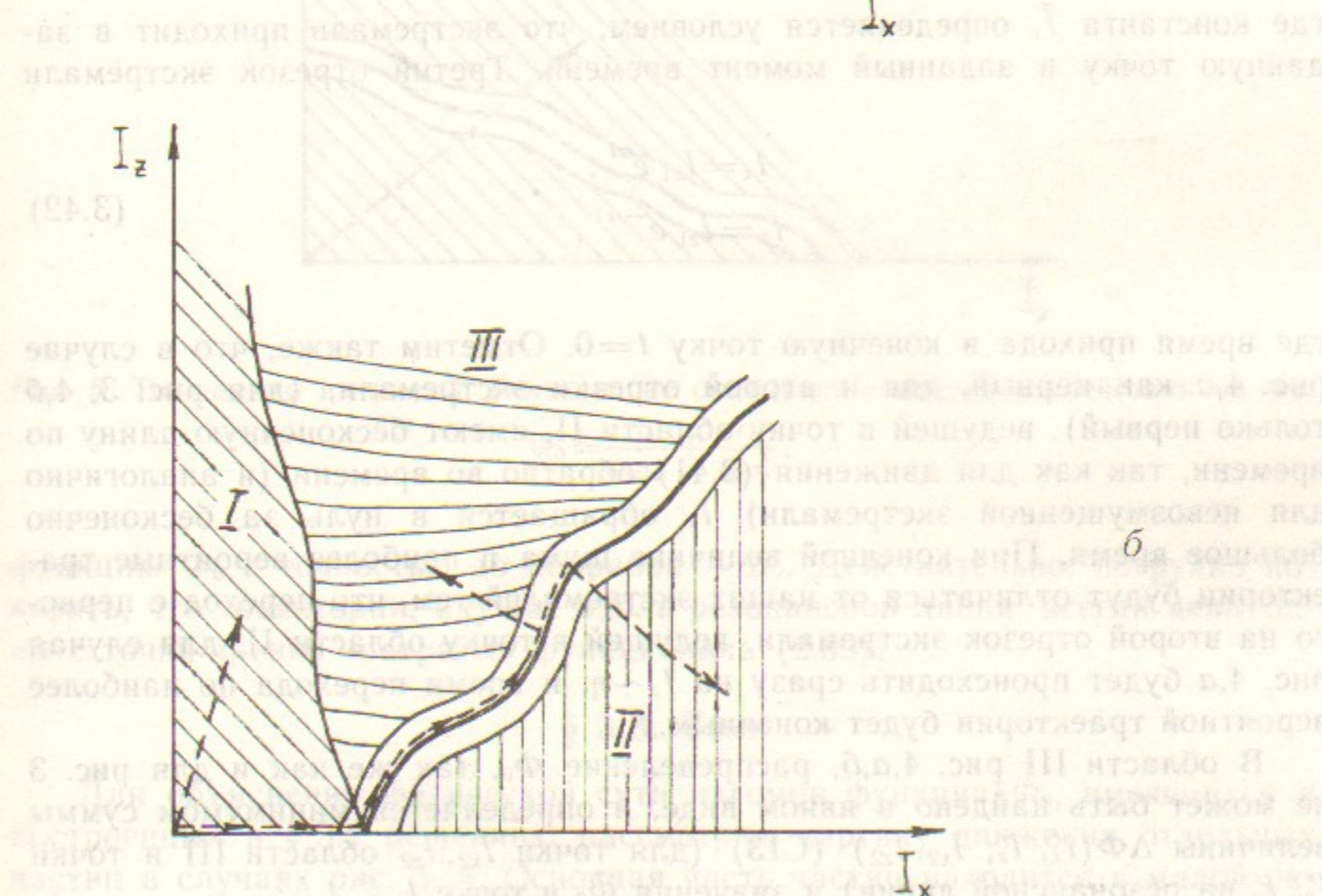
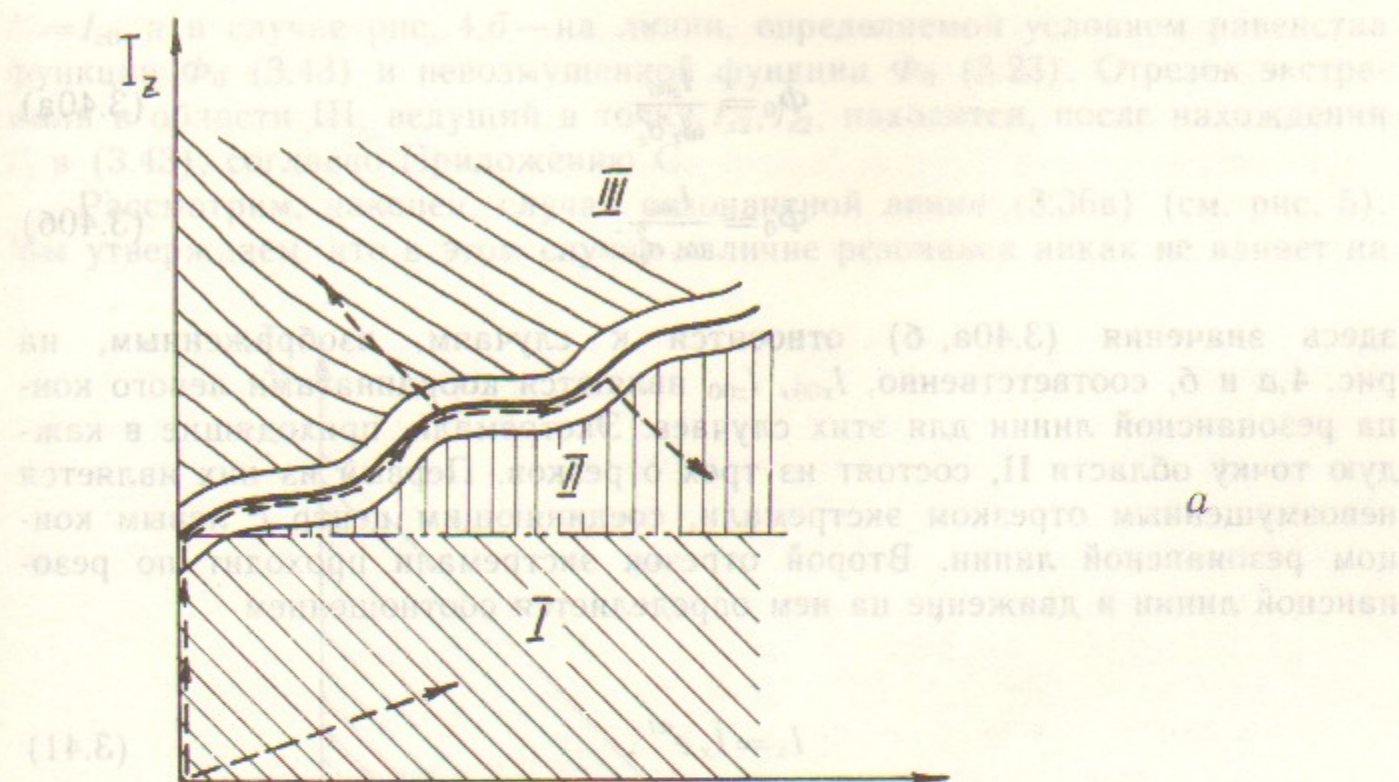


Рис. 4. То же, что и на рис. 3. В области I функции  $\Phi_0$  остается невозмущенной:

$$\Phi_0 = \frac{I_x}{\omega_x \sigma_x^2} + \frac{I_z}{\omega_z \sigma_z^2}, \text{ в области II } \Phi_0 \text{ не зависит от } I_z; \Phi_0 = \frac{I_x}{\omega_x \sigma_x^2}.$$

$$\tilde{\Phi}_0 = \frac{I_{z00}}{\omega_z \sigma_z^2}, \quad (3.40a)$$

$$\tilde{\Phi}_0 = \frac{I_{x00}}{\omega_x \sigma_x^2}. \quad (3.40b)$$

здесь значения (3.40а, б) относятся к случаям, изображенным, на рис. 4,а и б, соответственно,  $I_{x00}$ ,  $I_{z00}$  являются координатами левого конца резонансной линии для этих случаев. Экстремали, приходящие в каждую точку области II, состоят из трех отрезков. Первый из них является невозмущенным отрезком экстремали, соединяющим центр с левым концом резонансной линии. Второй отрезок экстремали проходит по резонансной линии и движение на нем определяется соотношением

$$I_x = \tilde{I}_x e^{\alpha t}, \quad (3.41)$$

где константа  $\tilde{I}_x$  определяется условием, что экстремаль приходит в заданную точку в заданный момент времени. Третий отрезок экстремали

$$\begin{aligned} I_x &= I_{x1} e^{\alpha t}, \\ I_z &= I_{z1} e^{-\alpha t}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

где время прихода в конечную точку  $t=0$ . Отметим также, что в случае рис. 4,а как первый, так и второй отрезки экстремали, (для рис. 3, 4,б только первый), ведущей в точку области II, имеют бесконечную длину по времени, так как для движения (3.41) обратно во времени (и аналогично для невозмущенной экстремали)  $I_x$  обращается в нуль за бесконечно большое время. При конечной величине шума  $\eta$  наиболее вероятные траектории будут отличаться от наших экстремалей тем, что переход с первого на второй отрезок экстремали, ведущей в точку области II, для случая рис. 4,а будет происходить сразу на  $I_x \sim \eta$ , и время перехода по наиболее вероятной траектории будет конечным.

В области III рис. 4,а,б, распределение  $\Phi_0$ , так же как и для рис. 3 не может быть найдено в явном виде, и определяется минимумом суммы величины  $\Delta\Phi(I'_x, I'_z; I_{x2}, I_{z2})$  (С13) (для точки  $I_{x2}, I_{z2}$  области III и точки  $I'_x, I'_z$  на резонансной линии) и значения  $\tilde{\Phi}_0$  в точке  $I_{x00}, I_{z00}$ :

$$\Phi_0(I_{x2}, I_{z2}) = \tilde{\Phi}_0 + \min_{I'_x, I'_z} \left[ \frac{I'_x - I_{x00}}{\omega_x \sigma_x^2} + \Delta\Phi_0(I'_x, I_{z00}; I_{x2}, I_{z2}) \right]. \quad (3.43)$$

Заметим также, что в случае рис. 4,а функция  $\Phi_0$  имеет излом на линии

$I_z = I_{z0}$  а в случае рис. 4,б — на линии, определяемой условием равенства функции  $\Phi_0$  (3.43) и невозмущенной функции  $\Phi_0$  (3.23). Отрезок экстремали в области III, ведущий в точку  $I_{x2}, I_{z2}$ , находится, после нахождения  $I'_x$  в (3.43), согласно Приложению С.

Рассмотрим, наконец, случай резонансной линии (3.36в) (см. рис. 5). Мы утверждаем, что в этом случае наличие резонанса никак не влияет на

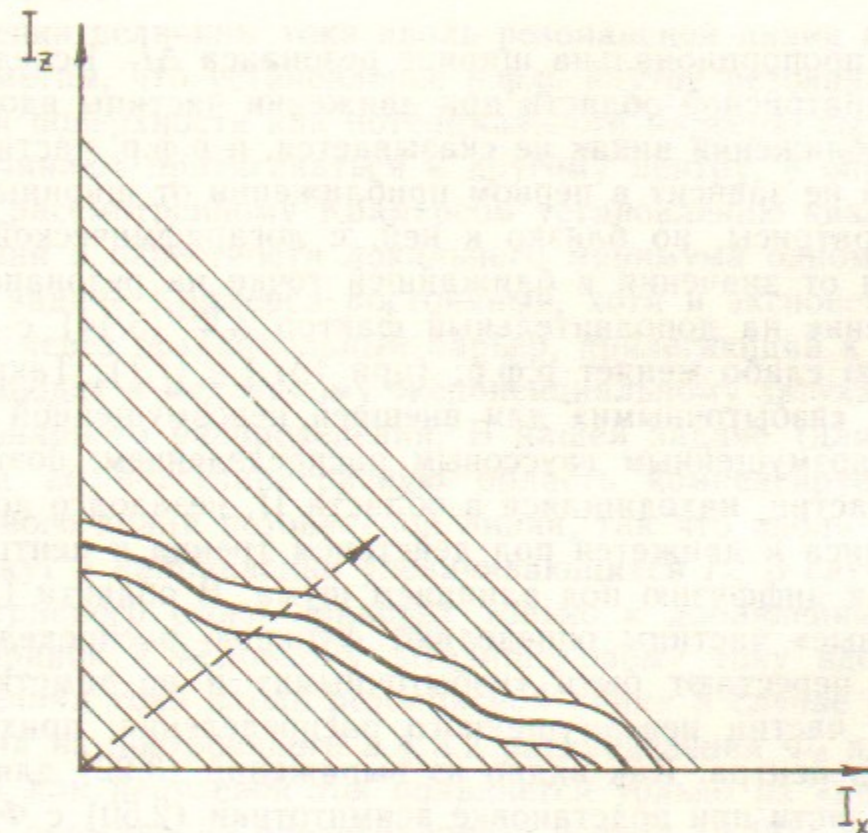


Рис. 5. То же, что на рис. 3. Резонанс не оказывает никакого воздействия на  $\Phi_0$ :

$$\Phi_0 = \frac{I_x}{\omega_x \sigma_x} + \frac{I_z}{\omega_z \sigma_z^2},$$

функцию  $\Phi_0$  с точностью до поправок  $\sim \Delta I_r$ . Действительно, нетрудно показать, что траектории, идущие вдоль резонансной линии, всегда невыгодны с точки зрения «затраты» функционала (2.39).

### § 3.3. Токи

Для объяснения физической сути изломов функции  $\Phi_0$ , имеющих в построенных в § 3.2 решениях, рассмотрим картину движения отдельных частиц в случаях рис. 3, 4. Основная часть частиц находится в малой окрестности притягивающего центра  $I_x, I_z = 0$ . Под действием шума частицы могут попадать, хотя и с малой вероятностью, внутрь резонанса. Наиболее вероятно попадание в какую-то одну точку на резонансной линии (правый конец резонансной линии на рис. 3 и левый конец на рис. 4). Установление равновесного распределения внутри резонанса происходит за счет движения частиц вдоль резонанса, так как часть трения (вертикаль-

ное) компенсирована резонансом и частицам двигаться вдоль резонансной линии «легче», чем по невозмущенным областям. Внутри резонанса частицы притягиваются к резонансной линии, и вероятность отойти от этой линии и достичь сепаратрисы экспоненциально мала:

$$\Delta W \sim \exp\left(-\frac{C}{\eta}\right), \quad (3.44)$$

где величина  $C$  пропорциональна ширине резонанса  $\Delta I_r$ . Вследствие этого наличие внесепаратрисной области при движении частицы вдоль резонанса в первом приближении никак не сказывается, и р.ф.р. частиц вдоль резонансной линии не зависит в первом приближении от ширины резонанса. Р.ф.р. вне сепаратрисы, но близко к ней, с логарифмической точностью мало отличается от значения в ближайшей точке на резонансной линии, так как умножение на дополнительный фактор  $\Delta W$  (3.44) с логарифмической точностью слабо меняет р.ф.р. (при  $|\Delta I_r| \ll |I_r|$ ). Такие значения р.ф.р. являются «избыточными» для внешней невозмущенной области по сравнению с невозмущенным гауссовым распределением, поэтому подавляющая часть частиц, находящаяся в области II, незадолго до этого «выпала» из резонанса и движется под действием трения к центру, одновременно испытывая диффузию под влиянием шума. В области II рис. 3 и 4 такие «избыточные» частицы определяют функцию распределения, в области же I они перестают быть «избыточными» и не заметны на фоне большего числа частиц невозмущенного распределения, приходящих непосредственно из центра. Как видно из выражений (3.22) для тока в невозмущенной области при подстановке асимптотики (2.50) с  $\Phi$ , найденными выше, токи в области II рис. 3 и 4 имеют ненулевые значения, а в области I равняются нулю (см. ниже). Разрывность тока связана именно с тем, что асимптотика (2.43) не учитывает малых добавок, обеспечивающих непрерывность тока.

Из записи уравнения Фоккер—Планка в виде уравнения непрерывности (3.21) следует, что линии тока должны образовывать замкнутые линии. Поскольку линии тока в невозмущенной области начинаются на резонансной линии (см. рис. 6, 7), то вдоль резонанса тоже должен течь ток. Существенно, что в случае рис. 3 величина тока вдоль резонансной линии гораздо больше (по абсолютной величине, хотя и мало отличается с логарифмической точностью), чем требуемая по условию непрерывности с токами в области II, и может быть получена непосредственно из решения (3.32а). Действительно, при реализации постоянной функции  $\Phi_0$  (3.32а) почти все траектории идут вдоль резонансной линии так, как двигались бы частицы только под действием трения (эффект «каналирования» вдоль резонанса—streaming'a—см. [30, 31]), так что плотность тока  $j$  вдоль этой линии может быть получена умножением плотности частиц на скорость их «каналирования» вдоль резонанса. Наличие флуктуаций приводит лишь к тому, что только малая часть частиц (пропорцио-

нальная  $\Delta W$  (3.44)) из входящих в единицу времени в правый конец резонансной линии на рис. 3 выходит через сепаратрисную поверхность наружу в промежуточной точке между началом и концом резонансной линии. Следует подчеркнуть, однако, что именно эти «выпавшие» частицы и приводят к ненулевым токам во внешней области. Основная часть частиц доходит до левого конца резонансной линии и только оттуда выходит во внешнюю область.

Для оценки величины тока вдоль резонансной линии в случае (3.32б) (рис. 4) заметим, что установление р.ф.р. внутри резонанса при учете сепаратрисной поверхности как потенциального барьера, выходя за который частицы начинают притягиваться к другому центру, в определенной мере аналогично рассмотренному Крамерсом установлению квазистационарного распределения в окрестности локального минимума одномерного потенциала [8]. В задаче Крамерса постоянный, хотя и экспоненциально малый сток частиц через потенциальный барьер, прилегающий к локальному минимуму, приводит к медленному экспоненциальному затуханию найденного квазистационарного распределения. В нашей задаче (для случая рис. 4) сток частиц во внесепаратрисную область компенсируется «подтоком» частиц с левого конца резонансной линии, так что вдоль резонансной линии токи текут в направлении увеличивающихся  $I_x$ . В случае рис. 3 наличие сепаратрисного стока приводит только к добавлению малых ( $\sim \Delta W$  (3.44)) поправок к основному streaming'овому току вдоль резонансной линии. Величина тока вдоль резонансной линии в случае рис. 4 не может быть найдена из построенного в § 3.2 распределения  $\Phi_0$  вдоль этой линии (3.32б), так как ненулевой ток появляется только из «неквазиклассической» (когда решение не представляется в виде (2.43)) поправки к полученному распределению  $\rho$ . Такая поправка может быть вычислена в принципе по методу построения квазистационарного (наиболее медленно затухающего) решения для многомерных задач с поглощающими границами при асимптотически слабом шуме [16]. В этом методе влияние поглощающих границ (роль которой в нашем случае играет сепаратрисная поверхность) рассматривается только в непосредственной близости к ним, так как вдали от этих границ их влияние экспоненциально мало. Мы не будем проводить таких расчетов, а ограничимся рассмотрением р.ф.р. во внесепаратрисной (невозмущенной) области с учетом «выпавших» из резонанса частиц, которые не учитываются квазиклассическим решением в форме (2.43). Относительно же тока вдоль резонансной линии в этом случае можно сказать, что он будет в  $\sim \Delta W$  раз меньше streaming'ового (т. е. полученного без учета диффузионных слагаемых) и противоположен ему по направлению. Подчеркнем, что такая ситуация не противоречит явлению streaming'a, так как это явление относится к движению индивидуальных частиц, а в нашем случае речь идет об установившихся потоках в равновесном распределении.

Основным примером, по аналогии с которым мы будем проводить такое рассмотрение, будет задача Крамерса (одномерная) о квазистацио-

нарном распределении при наличии потенциального барьера или поглощающей стенки [8] (см. также [4]).

Рассмотрим, для примера, нашу невозмущенную систему (3.21) в одномерном случае:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \alpha \frac{\partial}{\partial I_x} \left( \rho + \eta \omega_x \sigma_x^2 \frac{\partial \rho}{\partial I_x} \right) = 0. \quad (3.45)$$

Покажем, как строится квазистационарное распределение при наличии поглощающей стенки при  $I_x = I_{x0}$ , в случае малых  $\eta$ . Уравнение для функции  $\Phi$ , определяющей с.ф.р.  $\rho = z \exp(-\Phi/\eta)$ , имеет вид:

$$-\frac{d\Phi}{dI_x} + \omega_x \sigma_x^2 \left( \frac{d\Phi}{dI_x} \right)^2 = 0. \quad (3.46)$$

Два решения этого уравнения определяются формулами

$$\Phi_1 = \text{const}, \quad (3.47a)$$

$$\Phi_2 = \frac{I_x}{\omega_x \sigma_x^2}. \quad (3.47b)$$

Решая уравнение (2.376) для предэкспоненциального множителя  $z(I_x)$ , найдем соответствующие функциям  $\Phi_1, \Phi_2$  (3.47) множители  $z_1, z_2$ :

$$z_1 = \frac{\text{const}}{I_x}, \quad (3.48a)$$

$$z_2 = \text{const}. \quad (3.48b)$$

Решение задачи дает функция (при соответствующей нормировке)

$$\rho = \exp\left(-\frac{I_x}{\eta \omega_x \sigma_x^2}\right) - \frac{I_{x0}}{I_x} \exp\left(-\frac{I_{x0}}{\eta \omega_x \sigma_x^2}\right). \quad (3.49)$$

Первое слагаемое в (3.49) является стационарным решением при отсутствии поглощающей стенки, а второе слагаемое является экспоненциально малой поправкой, учитывающей наличие стенки посредством выполнения нулевых граничных условий при  $I_x = I_{x0}$ .

Рассмотренная выше задача Крамерса вполне аналогична квазиклассической задаче квантовой механики о невозбужденном состоянии при наличии бесконечного потенциального барьера в классически недоступной области, где и возможно квазиклассическое описание. Затухающая и растущая экспоненты квазиклассики соответствуют двум слагаемым в решении (3.49). Эта аналогия является полной, поскольку в одномерном случае любое уравнение Фоккер—Планка может быть приведено с помощью канонического преобразования к эквивалентному уравнению Шредингера

[32], и квазиклассическое приближение для этого уравнения Шредингера является приближением слабого шума для исходного уравнения Фоккер—Планка. Наше уравнение (3.45) переходит при таком преобразовании и введении координаты  $A_x = \sqrt{I_x}$  в уравнение Шредингера для гармонического осциллятора.

Возвращаясь к нашей задаче, заметим, что для внешних невозмущенных областей резонансная линия является (самосогласованным) источником и поглотителем частиц. Самосогласованность этих источников и стоков проявляется в том, что их интенсивность зависит от функции распределения. Так, в случае рис. 4 левый конец резонансной линии является поглотителем частиц, а вся сепаратрисная поверхность испускает частицы. В случае рис. 3 поглотителем является правый конец резонансной линии, затем наибольшая часть поглощенных частиц испускается левым концом резонансной линии, и малая часть частиц ( $\sim \Delta W$  (3.44)) испускается сепаратрисной поверхностью на всем ее протяжении.

Все испущенные частицы с подавляющей вероятностью возвращаются в центр, и процесс поглощения идет так же, как если бы частицы испускались из центра. Влияние распределенного потока частиц, испускаемого сепаратрисной поверхностью, на р.ф.р. может быть описано в нашем «квазиклассическом» приближении аналогично задаче Крамерса (см. ниже). Наличие же точечных источников и поглотителей не может быть описано в рамках квазиклассического приближения. Можно лишь сказать, что наличие таких источников/поглотителей заметно возмущает р.ф.р. только в полосе шириной  $\sim \eta$  вокруг отрезка прямой, соединяющего центр с точкой источника/поглотителя. Основная часть испускаемых/поглощаемых частиц протекает по этой полосе по направлению к центру/от центра.

Распределение тока от частиц, испускаемых сепаратрисной поверхностью, может быть найдено (с логарифмической точностью) непосредственно из построенных в § 3.2 решений. Используя выражение для токов в невозмущенной области (3.22) и решение  $\Phi_0$  из § 3.2, найдем токи в области II для случаев рис. 3 и 4. Для рис. 3, где в области II  $\Phi_0 = \Phi_{00} = \text{const}$ , получим:

$$\begin{aligned} j_x &= -\alpha I_x z_1 \rho_{00}, \\ j_z &= -\alpha I_z z_1 \rho_{00}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

где  $\rho_{00} = \exp\left(-\frac{\Phi_{00}}{\eta}\right)$ , а  $z_1$  — предэкспоненциальный множитель для р.ф.р.  $\rho$  в области II. Напомним, что выражение (3.50) имеет логарифмическую точность, так как величина  $\Phi_{00}$  постоянна и равняется невозмущенному значению  $\Phi_0$  на правом конце резонансной линии только с точностью до поправок  $\sim \Delta I_x$ . Вследствие этого удержание предэкспоненциальных множителей в (3.50), а также во всех нижеследующих формулах для токов явля-

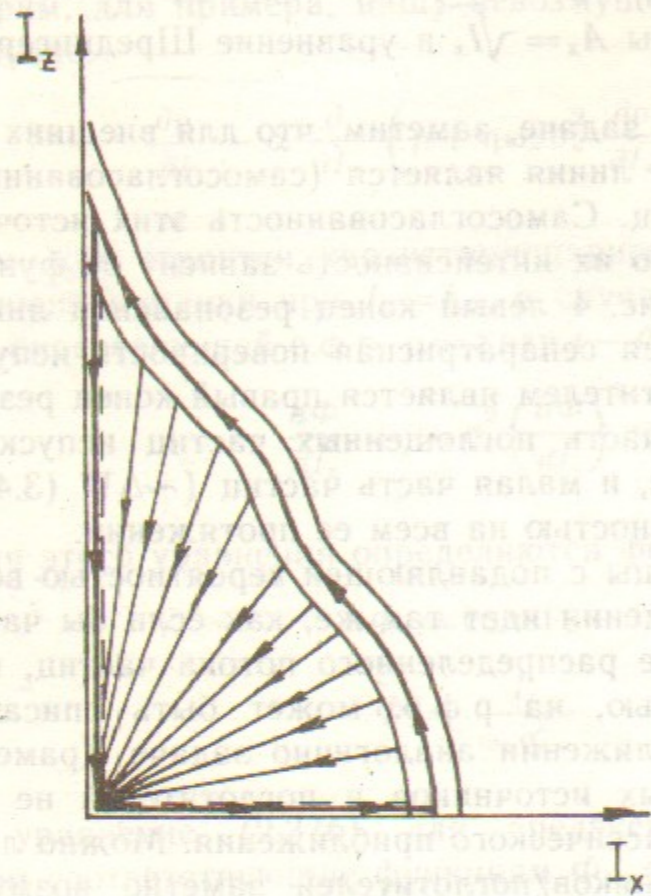


Рис. 6.

Рис. 6, 7. Распределение токов в плоскости  $I_x, I_z$ . Жирными стрелками вдоль резонансной линии показано направление тока вдоль резонансной линии. Штриховой линией показаны узкие слои шириной  $\sim \eta$ , токи внутри которых указаны жирной линией. Токи в областях над резонансом имеют ненулевые значения, но не показаны на рисунках.

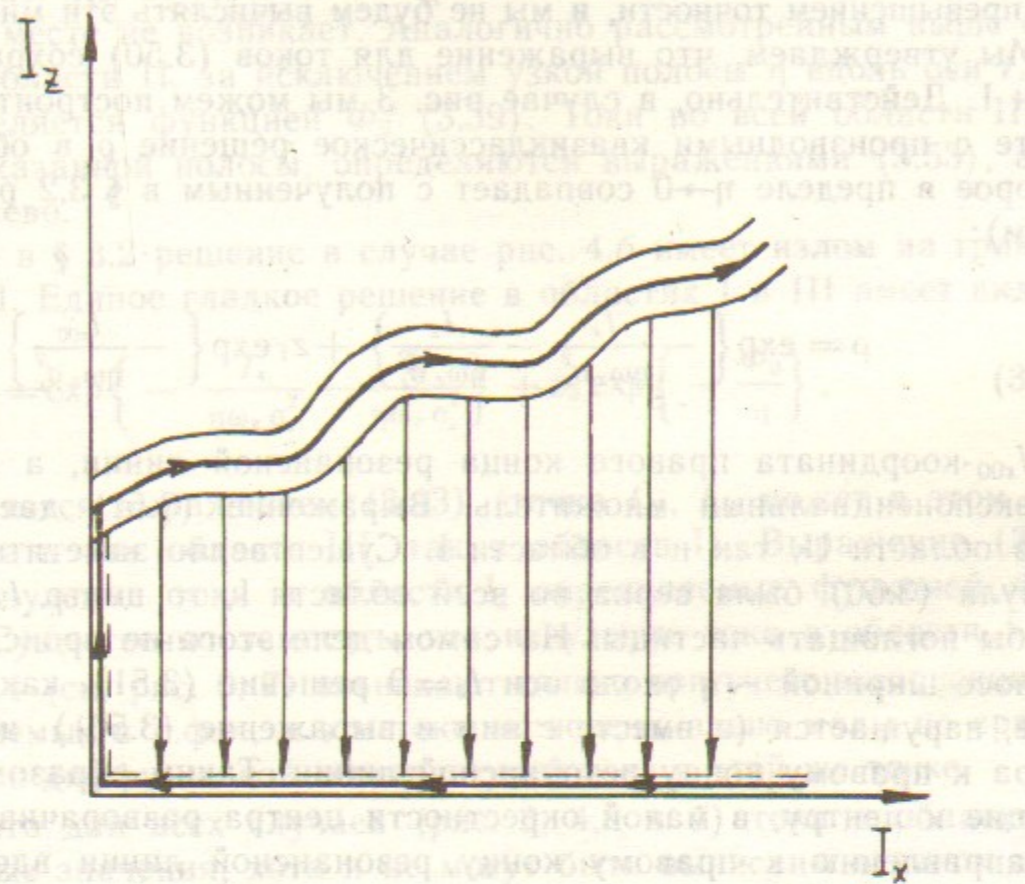


Рис. 7,а

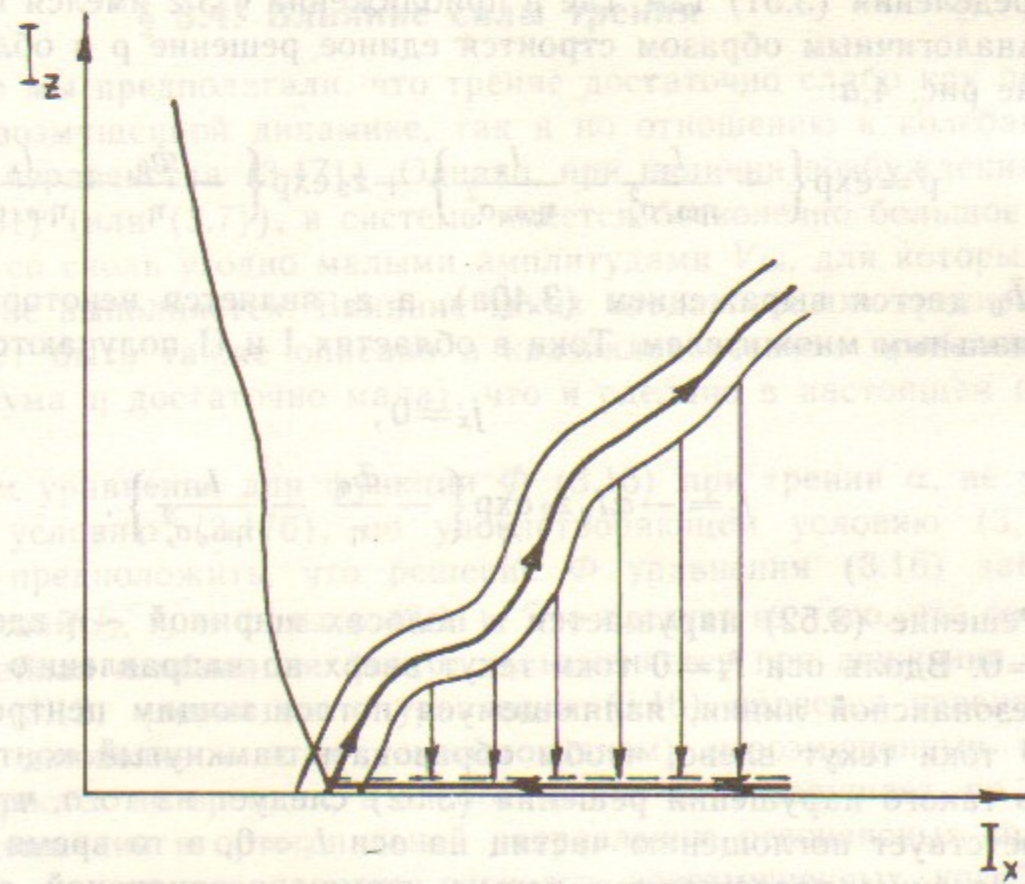


Рис. 7,б



ется превышением точности, и мы не будем вычислять эти множители.

Мы утверждаем, что выражение для токов (3.50) сохранится и в области I. Действительно, в случае рис. 3 мы можем построить непрерывное вместе с производными квазиклассическое решение  $\rho$  в областях I и II (которое в пределе  $\eta \rightarrow 0$  совпадает с полученным в § 3.2 решением с изломом):

$$\rho = \exp \left\{ -\frac{I_x}{\eta \omega_x \sigma_x^2} - \frac{I_z}{\eta \omega_z \sigma_z^2} \right\} + z_1 \exp \left\{ -\frac{I_{x00}}{\eta \omega_x \sigma_x^2} \right\}, \quad (3.51)$$

где  $I_{x00}$ -координата правого конца резонансной линии, а  $z_1$ —некоторый предэкспоненциальный множитель. Выражение (3.51) дает токи (3.50) как в области II, так и в области I. Существенно заметить, что если бы формула (3.50) была верна во всей области I, то центр  $I_x, I_z=0$  должен был бы поглощать частицы. На самом деле этого не происходит, так как в полосе шириной  $\sim \eta$  около оси  $I_z=0$  решение (3.51), как было указано ранее, нарушается (а вместе с ним и выражение (3.50)), и токи текут от центра к правому концу резонансной линии. Таким образом, токи (3.50), текущие к центру, в малой окрестности центра разворачиваются и текут по направлению к правому концу резонансной линии вдоль оси  $I_z=0$ . К этим токам надо добавить токи, текущие к центру по оси  $I_x=0$  (описанные выше). Полная картина токов дана на рис. 6. Важным обстоятельством является также явно построенное гладкое поведение функции распределения (3.51) там, где в приближении § 3.2 имелся излом.

Аналогичным образом строится единое решение  $\rho$  в областях I и II в случае рис. 4,а:

$$\rho = \exp \left\{ -\frac{I_x}{\eta \omega_x \sigma_x^2} - \frac{I_z}{\eta \omega_z \sigma_z^2} \right\} + z_2 \exp \left\{ -\frac{\tilde{\Phi}_0}{\eta} - \frac{I_x}{\eta \omega_x \sigma_x^2} \right\}, \quad (3.52)$$

где  $\tilde{\Phi}_0$  дается выражением (3.40а), а  $z_2$  является некоторым предэкспоненциальным множителем. Токи в областях I и II получаются из (3.52):

$$j_x = 0, \\ j_z = -\alpha I_z z_2 \exp \left\{ -\frac{\tilde{\Phi}_0}{\eta} - \frac{I_x}{\eta \omega_x \sigma_x^2} \right\}. \quad (3.53)$$

Решение (3.52) нарушается в полосах шириной  $\sim \eta$  вдоль осей  $I_x=0$  и  $I_z=0$ . Вдоль оси  $I_x=0$  токи текут вверх по направлению к левому концу резонансной линии, являющемуся поглощающим центром. Вдоль оси  $I_z=0$  токи текут влево, чтобы образовать замкнутый контур. Необходимость такого нарушения решения (3.52) следует из того, что это решение соответствует поглощению частиц на оси  $I_z=0$ , в то время как на самом деле частицы поглощаются левым концом резонансной линии. Полная картина токов для случая рис. 4,а дана на рис. 7,а.

В случае рис. 4,б область II не граничит с областью I, и проблемы сшивки в этом месте не возникает. Аналогично рассмотренным выше случаям, во всей области II, за исключением узкой полосы  $\eta$  вдоль оси  $I_z=0$  решение определяется функцией  $\Phi_0$  (3.39). Токи во всей области II, за исключением указанной полосы, определяются выражениями (3.53), а по полосе текут влево.

Полученное в § 3.2 решение в случае рис. 4,б имеет излом на границе областей I и III. Единое гладкое решение в областях I и III имеет вид:

$$\rho = \exp \left\{ -\frac{I_x}{\eta \omega_x \sigma_x^2} - \frac{I_z}{\eta \omega_z \sigma_z^2} \right\} + z_3 \exp \left\{ -\frac{\Phi'_0}{\eta} \right\}, \quad (3.54)$$

где  $\Phi'_0$  определяется выражением (3.43) (точка  $I_{x2}, I_{z2}$  может в этом случае принадлежать как области III, так и области I). Выражение (3.54) дает также ненулевые токи в области I, определяемые функцией  $\Phi'_0$  в этой области. Существенно заметить, что ненулевые токи в области I для случаев рис. 3, 4 (см. рис. 6, 7) возникают только при учете экспоненциально малых слагаемых в р.ф.р., и эти токи экспоненциально малы по сравнению, например, с диффузионной составляющей тока в этой же точке.

Отметим, что для всех случаев (рис. 3, 4,а и б) токи в области III имеют ненулевые значения, хотя и не могут быть выписаны в явном виде, так как функция  $\Phi_0$  в этой области определяется неявными формулами типа (3.43). На рис. 6, 7,а и б, токи в этих областях не изображены.

### § 3.4. Влияние силы трения

До сих пор мы предполагали, что трение достаточно слабо как по отношению к невозмущенной динамике, так и по отношению к колебаниям на резонансе (неравенства (3.17)). Однако, при наличии возбуждения общего вида (2.51) (или (3.7)), в системе имеется бесконечно большое число резонансов со сколь угодно малыми амплитудами  $V_{lm}$ , для которых условие (3.17б) не выполняется. Влияние таких «подавленных» трением резонансов может быть также описано в квазиклассическом приближении (когда сила шума  $\eta$  достаточно мала), что и сделано в настоящем параграфе.

Рассмотрим уравнение для функции  $\Phi$  (3.16) при трении  $\alpha$ , не удовлетворяющем условию (3.17б), но удовлетворяющем условию (3.17а). Тогда можно предположить, что решение  $\Phi$  уравнения (3.16) зависит только от действий  $I_x, I_z$  и фазы  $\varphi$  (3.11). Это следует из того, что ортогональная  $\varphi$  линейная комбинация фаз  $\theta_x, \theta_z$  изменяется при движении с гамильтонианом (3.12) (левая часть уравнения (3.16) является уравнением Лиувилля для движения с этим гамильтонианом) невозмущенным образом—линейно растет во времени, а слабое трение  $\alpha$  не нарушает, по условию (3.17а), движения в ортогональном направлении резонансных колебаний плоскости за времена порядка периодов невозмущенных колебаний ( $2\pi/\omega_x, 2\pi/\omega_z$ ). Тогда, в соответствии с логикой § 3.2, мы можем ус-

реднить обе части уравнения (3.16) по «быстрым» фазам  $\theta_x, \theta_z$ , подставляя в него «анзац»

$$\Phi = \Phi(I_x, I_z, \varphi) \quad (3.60)$$

и считая фазы  $\theta_x, \theta_z, \varphi$  независимыми переменными. Это даст уравнение

$$\begin{aligned} lV_{lm} \sin \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial I_x} + mV_{lm} \sin \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial I_z} + \delta\omega \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \\ = \alpha \left[ I_x \frac{\partial \Phi}{\partial I_x} + I_z \frac{\partial \Phi}{\partial I_z} - \omega_x \sigma_x^2 \left( I_x \left( \frac{\partial \Phi}{\partial I_x} \right)^2 + \frac{1}{4I_x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right)^2 \right) - \right. \\ \left. - \omega_z \sigma_z^2 \left( I_z \left( \frac{\partial \Phi}{\partial I_z} \right)^2 + \frac{1}{4I_z} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right)^2 \right) \right], \quad (3.61) \end{aligned}$$

где мы ввели «расстройку»  $\delta\omega$ :

$$\delta\omega(I_x, I_z) = l\omega'_x(I_x, I_z) + m\omega'_z(I_x, I_z) + n. \quad (3.62)$$

Введем также, аналогично § 3.1, переменные  $\tilde{J}_1, \tilde{J}_2$  (3.13) в уравнении (3.61):

$$\begin{aligned} V_{lm} \sin \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{J}_1} + \delta\omega \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \alpha \left[ \tilde{J}_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{J}_1} + \tilde{J}_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{J}_2} - \omega_x \sigma_x^2 (-\tilde{J}_2 + l\tilde{J}_1) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{J}_2} \right)^2 - \right. \\ \left. - \omega_z \sigma_z^2 m \tilde{J}_1 \left( \frac{1}{m} \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{J}_1} + \frac{l}{m} \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{J}_2} \right)^2 - \left( \frac{\omega_x \sigma_x^2}{4(-\tilde{J}_2 + l\tilde{J}_1)} + \frac{\omega_z \sigma_z^2}{4m\tilde{J}_1} \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right)^2 \right]. \quad (3.63) \end{aligned}$$

Величина расстройки  $\delta\omega$  может быть представлена в окрестности резонансной линии в виде

$$\delta\omega \approx \lambda(I_{xr}, I_{zr})(\tilde{J}_1 - \tilde{J}_{10}(I_{xr}, I_{zr})) = \lambda(\tilde{J}_2)(\tilde{J}_1 - \tilde{J}_{10}(\tilde{J}_2)), \quad (3.64)$$

где  $\lambda$  — величина нелинейности (3.14).

Некоторые особенности решения уравнения (3.63) определяются свойствами динамики частиц исходной системы без шума, т. е. особенностями движения частиц в окрестности резонанса при наличии трения. Соответствующие уравнения движения, при усреднении по фазам  $\theta_x, \theta_z$  так же, как это сделано при переходе к уравнению (3.63), имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{J}}_1 &= V_{lm} \sin \varphi - \alpha \tilde{J}_1, \\ \dot{\tilde{J}}_2 &= -\alpha \tilde{J}_2, \\ \dot{\varphi} &= \lambda(\tilde{J}_1 - \tilde{J}_{10}). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Движение частиц в системе (3.65) будет качественно различным в следующих диапазонах изменения силы трения  $\alpha$  (сами диапазоны различны

для разных точек на резонансной линии  $\tilde{J}_2$ ):

$$\alpha | -\kappa \tilde{J}_2 + \tilde{J}_{10} | < |V_{lm}|, \quad (3.66a)$$

$$\alpha | -\kappa \tilde{J}_2 + \tilde{J}_{10} | > |V_{lm}|, \quad (3.66b)$$

где  $\kappa$  — параметр наклона резонансной линии:

$$\kappa = \frac{d\tilde{J}_{10}}{d\tilde{J}_2} = \frac{\varphi}{-m + l\varphi} \quad (3.67)$$

Последнее равенство взято из (B11). Условие (3.66a) соответствует неразрушенному трением резонансному центру, когда частица под действием трения движется вдоль резонансной линии. Случай (3.66b) соответствует разрушенному трением резонансному центру, когда частица под действием трения выходит из сепаратрисной области.

Так же, как и во всем предыдущем изложении, мы будем искать распределение  $\Phi$  в фазовом пространстве с точностью  $\frac{|\Delta I_r|}{|I_r|} \ll 1$ . В соответствии с этим мы будем находить распределение  $\Phi$  вдоль резонансной линии, а во всем остальном пространстве функция  $\Phi$  будет получаться из решения невозмущенного уравнения (3.20) посредством «сшивки» вдоль резонансной линии. Мы утверждаем, что несмотря на то, что резонанс «подавлен» трением, экстремали, обеспечивающие минимум функционала (2.39), в некоторых случаях могут проходить по резонансной линии. Чтобы показать это, надо продемонстрировать, что значение  $\Phi$ , получаемое из функционала (2.39) при таких экстремальных, меньше, чем при экстремальных, проходящих по невозмущенной области. Физическим соображением в пользу выгодности таких экстремалей является то, что вблизи центра резонанса трение хотя и не полностью, но частично компенсируется влиянием резонанса.

Таким образом, рассмотрим изменение  $\Phi$  вдоль резонансной линии при экстремали, проходящей по этой линии. Распределение  $\Phi$  дается общим выражением (2.39), куда мы должны подставить «детерминистские сносы»  $K_\nu$  и обратный тензор диффузии  $a_{\mu\nu}$  из уравнения (3.63) (представляя его в виде (2.37a)). Симметричный тензор диффузии из (3.63) имеет вид:

$$Q_{11} = 2\alpha\omega_z\sigma_z^2 \frac{\tilde{J}_1}{m},$$

$$Q_{12} = Q_{21} = 2\alpha\omega_z\sigma_z^2 \frac{l}{m} \tilde{J}_1,$$

$$Q_{22} = 2\alpha\omega_x\sigma_x^2 (-\tilde{J}_2 + l\tilde{J}_1) + 2\alpha\omega_z\sigma_z^2 \frac{l^2}{m} \tilde{J}_1, \quad (3.68)$$

$$Q_{13} = Q_{31} = Q_{23} = Q_{32} = 0,$$

$$Q_{33} = \frac{\alpha\omega_z\sigma_z^2}{2(-\tilde{J}_2 + l\tilde{J}_1)} + \frac{\alpha\omega_z\sigma_z^2}{2m\tilde{J}_1},$$

где индексы 1, 2, 3 относятся к переменным  $\tilde{J}_1, \tilde{J}_2, \varphi$ . Тензор  $a_{\mu\nu}$ , обратный к  $Q_{\mu\nu}$ , имеет вид:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\omega_x\sigma_x^2(-\tilde{J}_2 + l\tilde{J}_1) + \omega_z\sigma_z^2\frac{l^2}{m}\tilde{J}_1}{2\alpha\omega_z\sigma_z^2\frac{\tilde{J}_1}{m}\omega_x\sigma_x^2(-\tilde{J}_2 + l\tilde{J}_1)}, \\ a_{12} = a_{21} &= \frac{-l}{2\alpha\omega_x\sigma_x^2(-\tilde{J}_2 + l\tilde{J}_1)}, \\ a_{22} &= \frac{1}{2\alpha\omega_x\sigma_x^2(-\tilde{J}_2 + l\tilde{J}_1)}, \\ a_{i3} = a_{31} = a_{23} = a_{32} &= 0, \\ a_{33} &= \frac{1}{\frac{\alpha\omega_x\sigma_x^2}{2(-\tilde{J}_2 + l\tilde{J}_1)} + \frac{\alpha\omega_z\sigma_z^2}{2m\tilde{J}_1}}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Таким образом, для изменения  $\Phi$  вдоль резонансной линии  $\Delta\Phi$  получим

$$\begin{aligned} \Delta\Phi = \min_{\substack{\tilde{J}_2(t) \\ \varphi(t)}} \frac{1}{2} \int_0^T dt [a_{11}(\dot{\tilde{J}}_1 + \alpha\tilde{J}_1 - V_{lm} \sin \varphi)^2 + \\ + 2a_{21}(\dot{\tilde{J}}_1 + \alpha\tilde{J}_1 - V_{lm} \sin \varphi)(\dot{\tilde{J}}_2 + \alpha\tilde{J}_2) + \\ + a_{22}(\dot{\tilde{J}}_2 + \alpha\tilde{J}_2)^2 + a_{33}(\dot{\varphi} - \lambda(\tilde{J}_1 - \tilde{J}_{10}))^2]. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Используем в (3.70) условие прохождения экстремали по резонансной линии  $\tilde{J}_1 = \tilde{J}_{10}$ . Существенно, что при достаточно малой величине  $|V_{lm}|$  фаза  $\varphi$  на такой экстремали принимает значение  $\varphi = 3\pi/2$  (или  $\pi/2$ ), так как это соответствует минимуму выражения в квадратных скобках в (3.70). Условия малости  $|V_{lm}|$  будут получены ниже. Тогда вместо (3.70) получим

$$\begin{aligned} \Delta\Phi = \min_{\tilde{J}_2(t)} \frac{1}{2} \int_0^T dt [a_{11}(\kappa\dot{\tilde{J}}_2 + \alpha\tilde{J}_{10} + sV_{lm})^2 + 2a_{21}(\kappa\dot{\tilde{J}}_2 + \alpha\tilde{J}_{10} + sV_{lm})(\dot{\tilde{J}}_2 + \alpha\tilde{J}_2) + \\ + a_{22}(\dot{\tilde{J}}_2 + \alpha\tilde{J}_2)^2]. \end{aligned} \quad (3.71)$$

где  $s = \pm 1$  (выбирается так, чтобы выражение в квадратных скобках в (3.71) было меньше). Следуя методике § 2.4, для зависимости  $\Delta\Phi$ , полу-

чающейся минимизацией интеграла в (3.71) по всем  $T$  и по всем возможным траекториям  $\tilde{J}_2(t)$ , заканчивающимся в рассматриваемой точке  $\tilde{J}_2(T) = \tilde{J}'_2$ , мы можем получить «укороченное» уравнение Гамильтона—Якоби:

$$\bar{H}(\tilde{J}'_2, \frac{\partial\Delta\Phi}{\partial\tilde{J}'_2}) = 0, \quad (3.72)$$

где гамильтониан  $\bar{H}$  получается из лагранжиана в (3.71) (лагранжианом является подынтегральное выражение) с помощью стандартного преобразования

$$\begin{aligned} \bar{H}(\tilde{J}_2, p) &= \dot{\tilde{J}}_2 \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{J}}_2} - L, \\ p &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{J}}_2} \end{aligned} \quad (3.73)$$

и имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{H} = \frac{[p - (\alpha\tilde{J}_{10} + sV_{lm})(\kappa a_{11} + a_{21}) - \alpha\tilde{J}_2(\kappa a_{21} + a_{22})]^2}{2(\kappa^2 a_{11} + 2\kappa a_{21} + a_{22})} - \\ - \frac{a_{11}(\alpha\tilde{J}_{10} + sV_{lm})^2 - 2a_{21}\alpha\tilde{J}_2(\alpha\tilde{J}_{10} + sV_{lm})^2 - a_{22}\alpha^2\tilde{J}_2^2}{2}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Приравняв  $\bar{H}$  из (3.74) нулю, можно получить выражение для  $p$ :

$$\begin{aligned} p = \frac{\partial\Delta\Phi}{\partial\tilde{J}'_2} = \kappa a_{11}(\alpha\tilde{J}_{10} + sV_{lm}) + a_{21}(\kappa\alpha\tilde{J}_2 + \alpha\tilde{J}_{10} + sV_{lm}) + a_{22}\alpha\tilde{J}_2 \pm \\ \pm \sqrt{(a_{11}\kappa^2 + 2a_{21}\kappa + a_{22})(a_{11}(\alpha\tilde{J}_{10} + sV_{lm})^2 + 2a_{21}\alpha\tilde{J}_2(\alpha\tilde{J}_{10} + sV_{lm}) + a_{22}\alpha^2\tilde{J}_2^2)}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Функция  $\Phi(\tilde{J}_2)$  на отрезках изменения  $\tilde{J}_2$ , где реализуются решения (3.75), дается выражениями

$$\Phi(\tilde{J}_2) = \int d\tilde{J}_2 p_-(\tilde{J}_2), \quad (3.76a)$$

$$\Phi(\tilde{J}_2) = \int d\tilde{J}_2 p_+(\tilde{J}_2), \quad (3.76b)$$

где  $p_-, p_+$  для  $J_2 > 0$  являются значениями  $p$  (3.75) при знаках «—» и «+», соответственно, а при  $J_2 < 0$  при знаках «+» и «—», соответственно. Такой выбор решений (3.76) определяется требованием перехода решений (3.76) в решения (3.27) при достаточно слабом трении. Поскольку решения (3.27) определяются различным направлением экстремалей:  $\tilde{J}_2 = -\alpha\tilde{J}_2$  для (3.27a) и  $\tilde{J}_2 = \alpha\tilde{J}_2$  для (3.27b), а в нашем случае направление экстремали—знак величины  $\dot{\tilde{J}}_2$ —совпадает со знаком радикала в (3.75) (это следует из уравнения для экстремали  $\dot{\tilde{J}}_2 = \frac{\partial\bar{H}}{\partial p}$ ), то такое требование приводит к указанному выбору знаков. Выражения (3.75), (3.76) являются аналогами формул (3.27) для случая немалого трения.

Рассмотрим теперь случай не слишком малых  $|V_{lm}|$ , когда минимум подинтегрального выражения в (3.70) не определяется значением  $\varphi = 3\pi/2$  (или  $\varphi = \pi/2$ ). Для нахождения экстремали  $\tilde{J}_1(t)$ ,  $\tilde{J}_2(t)$ ,  $\varphi(t)$ , обеспечивающей минимум в  $\Delta\Phi$  (3.70), мы предположим сразу, что  $\tilde{J}_1 - \tilde{J}_{10} \sim \alpha$ , причем так, что  $\dot{\varphi} - \lambda(\tilde{J}_1 - \tilde{J}_{10}) \sim \alpha^2$ . Такое предположение делается по аналогии с траекторией динамической системы с трением (3.65), траектории которой при начальных данных на центре резонанса устроены именно таким образом. Тогда последнее слагаемое в квадратных скобках в (3.70) имеет порядок  $\alpha^3$ , и его можно отбросить, так как остальные слагаемые имеют порядок  $\alpha$  (величина  $\alpha$  предполагается малой (3.17а)). Пренебрежение слагаемыми с более высокими степенями  $\alpha$  означает, что так же, как и в § 3.1, вместо  $\Phi$  мы вычисляем величину  $\Phi_0$  (см. (3.18)). Значение  $\varphi(t)$  на экстремали находится из условия минимума первых двух слагаемых по  $\varphi$  при подстановке (пренебрегая слагаемыми степени выше  $\alpha$ ) значения  $\tilde{J}_1 \approx \tilde{J}_{10}$ , и определяется уравнением

$$a_{11}(\kappa\dot{\tilde{J}}_2 + \alpha\tilde{J}_{10} - V_{lm} \sin \varphi) + a_{21}(\dot{\tilde{J}}_2 + \alpha\tilde{J}_2) = 0. \quad (3.77)$$

$\varphi(t)$  находится из (3.77) в виде

$$\varphi = \arcsin \left\{ \frac{\kappa\dot{\tilde{J}}_2 + \alpha\tilde{J}_{10} + \frac{a_{21}}{a_{11}}(\dot{\tilde{J}}_2 + \alpha\tilde{J}_2)}{V_{lm}} \right\}. \quad (3.78)$$

Подставляя (3.77) в (3.70) и отбрасывая последнее слагаемое, получим

$$\Delta\Phi_0 = \min_{\tilde{J}_2(t)} \int_0^T dt \left( -\frac{a_{21}^2}{a_{11}} + a_{22} \right) \frac{(\dot{\tilde{J}}_2 + \alpha\tilde{J}_2)^2}{2}. \quad (3.79)$$

Приравняв гамильтониан (3.73), полученный из лагранжиана (подинтегрального выражения) в (3.79), нулю, найдем значения  $p = \frac{\partial \Delta\Phi_0}{\partial \tilde{J}_2}$ :

$$p = 0, \quad (3.80a)$$

$$p = 2\alpha \left( a_{22} - \frac{a_{21}^2}{a_{11}} \right) \tilde{J}_2. \quad (3.80b)$$

При подстановке  $a_{11}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$  из (3.69) нетрудно видеть, что решения (3.80) совпадают с распределениями  $\Phi_0$  (3.27) для малого (удовлетворяющего обоим условиям (3.17а), (3.17б)) трения  $\alpha$ . Это означает, что при превышении величиной  $|V_{lm}|$  некоторого порога (или, соответственно, при  $\alpha$ , меньшей некоторого порога, см. ниже), распределение  $\Phi_0$  вдоль резонанса при экстремали, идущих вдоль резонанса, дается формулами (3.27) даже в том случае, когда сильное неравенство (3.17б) не выполняется (формализм § 3.1 опирался на это неравенство).

Найдем теперь критические значения амплитуды  $V_{lm}$  (или, соответственно, силы трения  $\alpha$ ), при которых еще могут быть реализованы решения (3.80). Для этого в уравнение (3.77), определяющее значение  $\varphi(t)$  на экстремали, мы должны подставить значения  $\tilde{J}_2$  на экстремали в режимах (3.80) и посмотреть, при каких  $|V_{lm}|$  оно еще имеет решение (3.78). Значения  $\tilde{J}_2$  на экстремали в случае реализации решений (3.27) (то же, что и (3.80)) были получены в § 3.1 и даются выражениями (3.30), (3.31). Таким образом, подставляя  $\tilde{J}_2$  из (3.30), (3.31) в (3.77), для критических значений  $(|V_{lm}|)_{1,2}$  получим:

$$(|V_{lm}|)_1 = \alpha |\tilde{J}_{10}(\tilde{J}_2) - \kappa\tilde{J}_2|, \quad (3.81a)$$

$$(|V_{lm}|)_2 = \alpha \left| \tilde{J}_{10}(\tilde{J}_2) + \left( \kappa + 2 \frac{a_{21}}{a_{11}} \right) \tilde{J}_2 \right|. \quad (3.81b)$$

При  $|V_{lm}| > (|V_{lm}|)_1$  возможна реализация решения (3.27а) (то же, что и (3.80а)), а при  $|V_{lm}| > (|V_{lm}|)_2$  возможна реализация решения (3.27б) (то же, что и (3.80б)). При подстановке критических значений  $(|V_{lm}|)_{1,2}$  в (3.76а,б) (выбирая знак  $s$  так, что  $sV_{lm} + \alpha\tilde{J}_{10} = \kappa\alpha\tilde{J}_2$ ), можно увидеть, что решения (3.76а,б) переходят, соответственно, в решения (3.80а,б). Таким образом, если при  $|V_{lm}| > (|V_{lm}|)_1$  и экстремали, идущих по направлению движения частиц под действием трения,  $\Phi_0$  оставалась постоянной, то при понижении  $|V_{lm}|$  (или соответственном повышении  $\alpha$ ) ниже  $(|V_{lm}|)_1$  изменение  $\Phi$  будет определяться соотношением (3.76а). Аналогичным образом решение (3.80б) при  $|V_{lm}| < (|V_{lm}|)_2$  переходит в решение (3.76б). Общий алгоритм построения  $\Phi_0$  во всем пространстве вполне соответствует изложенному в § 3.1 с тем лишь отличием, что в зависимости от величины  $|V_{lm}|$  в каждой точке резонансной линии следует брать изменение  $\Phi_0$  вдоль линии в этой точке либо из формул (3.80), либо из формул (3.76).

Существенно, что переход от решений (3.80а), (3.80б), когда изменение  $\Phi_0$  вдоль резонансной линии, и, соответственно, во всем пространстве, не зависит от  $V_{lm}$ , к решениям (3.76а), (3.76б), когда изменение  $\Phi_0$  вдоль резонансной линии, и, соответственно, во всем пространстве, существенным образом зависит от  $V_{lm}$ , происходит при различных пороговых значениях  $(|V_{lm}|)_1$  и  $(|V_{lm}|)_2$  (3.81). Для решения (3.80а), когда экстремаль (3.30) совпадает с траекторией исходной системы (3.65), порог  $(|V_{lm}|)_1$  совпадает с порогом (3.66) «выпадения» частицы из резонанса под действием трения. В этом случае пороговое значение  $|V_{lm}|$  не зависит от структуры тензора диффузии  $Q_{\mu\nu}$ , и определяется только «детерминистской» динамикой (3.65). Для решения (3.80б) экстремаль (3.31) идет «против трения», и пороговое значение  $|V_{lm}|$  зависит от тензора диффузии  $Q_{\mu\nu}$  (от коэффициентов  $a_{ik}$  в (3.81б)). Какой из порогов  $(|V_{lm}|)_1$ ,  $(|V_{lm}|)_2$  является нижним, зависит от параметров задачи.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Основным содержанием настоящей работы является рассмотрение равновесной функции распределения в многомерной системе с изолированными нелинейными резонансами в асимптотике слабого шума. Главным отличием такой системы от одномерной является наличие ненулевых возмущений р.ф.р. уже в нулевом (логарифмическом) приближении по размеру сепаратрисы резонанса  $\Delta I_r$  (т. е. при пренебрежении вкладами, пропорциональными  $\Delta I_r$  в функцию  $\Phi$ , определяющую р.ф.р.  $\rho = \exp(-\Phi/\eta)$ ), при достаточно слабом трении. В соответствии с этим и характерный масштаб расстояний в фазовом пространстве, на которых возмущается р.ф.р., также не зависит от размеров сепаратрисы резонанса. При силе трения, превышающей некоторый порог, р.ф.р. зависит от размеров сепаратрисы резонанса уже в нулевом логарифмическом приближении, хотя характерный масштаб расстояний, на которых возмущается р.ф.р., по-прежнему может быть много больше размеров сепаратрисы. Можно надеяться, что такие явления могут наблюдаться для реальных физических систем. Так, например, при измерении среднего времени  $t_0$  переброса колебаний из одного режима в другой под влиянием тепловых флуктуаций в многомерной нелинейной колебательной системе с несколькими положениями равновесия, находящейся в тепловом контакте с термостатом достаточно низкой температуры  $T$ , при наличии внешнего периодического возмущения, должна наблюдаться сильная зависимость фактора  $G$ , определяющего время  $t_0 = \exp(-G/T)$ , от силы возмущения  $V$  только при превышении величиной  $V$ , некоторого критического значения.

Важной особенностью таких систем рассматриваемого типа является наличие в равновесном состоянии токов частиц, циркулирующих по замкнутым контурам. Вдоль резонансной поверхности в общем случае также текут токи, причем они не всегда связаны с известным явлением streaming'a — движения частиц под действием трения вдоль резонансной поверхности. Так, в двумерной системе, когда резонансы представляют собой линии в плоскости действий, эти токи во многих случаях текут в направлении, противоположном движению частиц под действием трения.

В заключение автор хотел бы выразить искреннюю благодарность Б.Н. Брейзману за ряд ценных замечаний.

В этом Приложении мы вычислим все средние, входящие в уравнение (2.65) для движения внутри сепаратрисы. Поскольку величины  $x_i, p_i, \frac{\partial J_l}{\partial x_i}, \frac{\partial J_l}{\partial p_i}$ , являются функциями только  $\bar{I}, \bar{\theta}$ , то для средних, не содержащих  $y$ , введем обозначения:  $\langle \dots \rangle_1$  — для усреднения по фазам  $\theta_1 \dots \theta_n$  (считая  $I_1 \dots I_n$  постоянными),  $\langle \dots \rangle_2$  — для усреднения по времени с учетом резонансных колебаний, после чего получим:

$$\begin{aligned} \langle x_i \frac{\partial J_l}{\partial x_k} \rangle &= \langle \langle x_i \frac{\partial J_l}{\partial x_k} \rangle_1 \rangle_2 = d_{1ikl} + \langle (\bar{J}_1 - \bar{J}_{10})^2 \rangle_2 f_{1ikl}, \\ \langle p_i \frac{\partial J_l}{\partial p_k} \rangle &= \langle \langle p_i \frac{\partial J_l}{\partial p_k} \rangle_1 \rangle_2 = d_{2ikl} + \langle (\bar{J}_1 - \bar{J}_{10})^2 \rangle_2 f_{2ikl}, \\ \langle \frac{\partial J_l}{\partial x_i} \frac{\partial J_m}{\partial x_k} \rangle &= \langle \langle \frac{\partial J_l}{\partial x_i} \frac{\partial J_m}{\partial x_k} \rangle_1 \rangle_2 = b_{1iklm} + \langle (\bar{J}_1 - \bar{J}_{10})^2 \rangle_2 h_{1iklm}, \\ \langle \frac{\partial J_l}{\partial p_i} \frac{\partial J_m}{\partial p_k} \rangle &= \langle \langle \frac{\partial J_l}{\partial p_i} \frac{\partial J_m}{\partial p_k} \rangle_1 \rangle_2 = b_{2iklm} + \langle (\bar{J}_1 - \bar{J}_{10})^2 \rangle_2 h_{2iklm}, \end{aligned} \tag{A1}$$

где

$$\begin{aligned} d_{1ikl} &= \langle x_i \frac{\partial J_l}{\partial x_k} \rangle_1 \Big|_{\bar{I}=\bar{I}}, \\ d_{2ikl} &= \langle p_i \frac{\partial J_l}{\partial p_k} \rangle_1 \Big|_{\bar{I}=\bar{I}}, \\ b_{1iklm} &= \langle \frac{\partial J_l}{\partial x_i} \frac{\partial J_m}{\partial x_k} \rangle_1 \Big|_{\bar{I}=\bar{I}}, \\ b_{2iklm} &= \langle \frac{\partial J_l}{\partial p_i} \frac{\partial J_m}{\partial p_k} \rangle_1 \Big|_{\bar{I}=\bar{I}}, \end{aligned} \tag{A2}$$

и

$$\begin{aligned} f_{1ikl} &= \left( \frac{\partial^2}{\partial \bar{J}_1^2} \langle x_i \frac{\partial J_l}{\partial x_k} \rangle_1 \right) \Big|_{\bar{I}=\bar{I}}, \\ f_{2ikl} &= \left( \frac{\partial^2}{\partial \bar{J}_1^2} \langle p_i \frac{\partial J_l}{\partial p_k} \rangle_1 \right) \Big|_{\bar{I}=\bar{I}}, \\ h_{1iklm} &= \left( \frac{\partial^2}{\partial \bar{J}_1^2} \langle \frac{\partial J_l}{\partial x_i} \frac{\partial J_m}{\partial x_k} \rangle_1 \right) \Big|_{\bar{I}=\bar{I}}, \\ h_{2iklm} &= \left( \frac{\partial^2}{\partial \bar{J}_1^2} \langle \frac{\partial J_l}{\partial p_i} \frac{\partial J_m}{\partial p_k} \rangle_1 \right) \Big|_{\bar{I}=\bar{I}}. \end{aligned} \tag{A3}$$

При вычислении средних (A1) мы ограничились точностью  $\sim (\bar{J}_1 - \bar{J}_{10})^2 \sim V_{K0}$ , т. е. пренебрегли слагаемыми  $\sim V_{K0}^2$ . Была также использована медленность колебаний на резонансе (с частотой  $\sim \sqrt{V_{K0}}$ ) по сравнению с невозмущенными колебаниями (с частотами  $\sim 1$ ), что позволяет разделить, с той же точностью, усреднение по точным фазам  $\psi$  на последовательное усреднение по малым временам ( $\sim 1$ ) и по большим временам ( $\sim 1/\sqrt{V_{K0}}$ ). Среднее  $\langle \bar{J}_1 - \bar{J}_{10} \rangle_2$  при вычислении средних (A1) полагалось равным нулю, что верно для приближения маятника

(2.58). В формулах (A3) функции  $\langle x_i \frac{\partial J_l}{\partial x_k} \rangle_1$ ,  $\langle \frac{\partial J_l}{\partial x_i} \frac{\partial J_m}{\partial x_k} \rangle_1$  и т. д. выражены через переменные  $\bar{J}_1, \bar{J}_2, \dots, \bar{J}_n$  (2.56), и производные по  $\bar{J}_1$  берутся при постоянных  $\bar{J}_2, \dots, \bar{J}_n$ . Напомним также, что в формулах (A2), (A3) индекс  $l$  у  $J_l$  пробегает значения  $2 \dots n$  и что мы рассматриваем только внутрисепаратрисное движение.

Дифференцируя выражение для  $y = \tilde{H} + V_{K0}$  с  $\tilde{H}$  из (2.58), можно вычислять и средние, содержащие  $y$ . Так, можно получить:

$$\begin{aligned} \langle x_i \frac{\partial y}{\partial x_k} \rangle &= \langle \langle x_i \frac{\partial \bar{J}_1}{\partial x_k} \rangle_1 \frac{\partial y}{\partial \bar{J}_1} + \langle x_i \frac{\partial J_l}{\partial x_k} \rangle_1 \frac{\partial y}{\partial \bar{J}_l} + \langle x_i \frac{\partial \varphi_K}{\partial x_k} \rangle_1 \frac{\partial y}{\partial \varphi_K} \rangle_2 \approx \\ &\approx \lambda \langle (\bar{J}_1 - \bar{J}_{10})^2 \rangle_2 \left( c_{1ik} - \frac{\partial \bar{J}_{10}}{\partial J_l} \bar{c}_{1ikl} + \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial J_l} d_{1ikl} \right) + \frac{\partial V_{K0}}{\partial J_l} d_{1ikl} \langle \cos \varphi_K + 1 \rangle_2 \end{aligned} \quad (A4)$$

$$\begin{aligned} \langle p_i \frac{\partial y}{\partial p_k} \rangle &= \langle \langle p_i \frac{\partial \bar{J}_1}{\partial p_k} \rangle_1 \frac{\partial y}{\partial \bar{J}_1} + \langle p_i \frac{\partial J_l}{\partial p_k} \rangle_1 \frac{\partial y}{\partial \bar{J}_l} + \langle p_i \frac{\partial \varphi_K}{\partial p_k} \rangle_1 \frac{\partial y}{\partial \varphi_K} \rangle_2 \approx \\ &\approx \lambda \langle (\bar{J}_1 - \bar{J}_{10})^2 \rangle_2 \left( c_{2ik} - \frac{\partial \bar{J}_{10}}{\partial J_l} \bar{c}_{2ikl} + \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial J_l} d_{2ikl} \right) + \frac{\partial V_{K0}}{\partial J_l} d_{2ikl} \langle \cos \varphi_K + 1 \rangle_2, \end{aligned}$$

где приблизительное равенство означает отбрасывание слагаемых  $\sim V_{K0}^2$ , и где введены обозначения:

$$\begin{aligned} c_{1ik} &= \left( \frac{\partial}{\partial \bar{J}_1} \langle x_i \frac{\partial \bar{J}_1}{\partial x_k} \rangle_1 \right) \Big|_{I=I}, \\ c_{2ik} &= \left( \frac{\partial}{\partial \bar{J}_1} \langle p_i \frac{\partial \bar{J}_1}{\partial p_k} \rangle_1 \right) \Big|_{I=I}, \\ \bar{c}_{1ikl} &= \left( \frac{\partial}{\partial \bar{J}_1} \langle x_i \frac{\partial J_l}{\partial x_k} \rangle_1 \right) \Big|_{I=I}, \\ \bar{c}_{2ikl} &= \left( \frac{\partial}{\partial \bar{J}_1} \langle p_i \frac{\partial J_l}{\partial p_k} \rangle_1 \right) \Big|_{I=I}, \end{aligned} \quad (A5)$$

Аналогичным образом вычисляются остальные средние:

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial J_m}{\partial x_k} \rangle &\approx \lambda \langle (\bar{J}_1 - \bar{J}_{10})^2 \rangle_2 \left( \rho_{1ikm} - \frac{\partial \bar{J}_{10}}{\partial J_l} \bar{\rho}_{1iklm} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial J_l} b_{1iklm} \right) + \frac{\partial V_{K0}}{\partial J_l} b_{1iklm} \langle \cos \varphi_K + 1 \rangle_2, \end{aligned} \quad (A6)$$

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial y}{\partial p_i} \frac{\partial J_m}{\partial p_k} \rangle &\approx \lambda \langle (\bar{J}_1 - \bar{J}_{10})^2 \rangle_2 \left( \rho_{2ikm} - \frac{\partial \bar{J}_{10}}{\partial J_l} \bar{\rho}_{2iklm} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial J_l} b_{2iklm} \right) + \frac{\partial V_{K0}}{\partial J_l} b_{2iklm} \langle \cos \varphi_K + 1 \rangle_2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \rho_{1ikm} &= \left( \frac{\partial}{\partial \bar{J}_1} \langle \frac{\partial \bar{J}_1}{\partial x_i} \frac{\partial J_m}{\partial x_k} \rangle_1 \right) \Big|_{I=I}, \\ \rho_{2ikm} &= \left( \frac{\partial}{\partial \bar{J}_1} \langle \frac{\partial \bar{J}_1}{\partial p_i} \frac{\partial J_m}{\partial p_k} \rangle_1 \right) \Big|_{I=I}, \\ \bar{\rho}_{1iklm} &= \left( \frac{\partial}{\partial \bar{J}_1} \langle \frac{\partial J_l}{\partial x_i} \frac{\partial J_m}{\partial x_k} \rangle_1 \right) \Big|_{I=I}, \\ \bar{\rho}_{2iklm} &= \left( \frac{\partial}{\partial \bar{J}_1} \langle \frac{\partial J_l}{\partial p_i} \frac{\partial J_m}{\partial p_k} \rangle_1 \right) \Big|_{I=I}, \end{aligned} \quad (A7)$$

$$\begin{aligned} t_{1ikm} &= \langle \frac{\partial \bar{J}_1}{\partial x_i} \frac{\partial J_m}{\partial x_k} \rangle_1 \Big|_{I=I}, \\ t_{2ikm} &= \langle \frac{\partial \bar{J}_1}{\partial p_i} \frac{\partial J_m}{\partial p_k} \rangle_1 \Big|_{I=I}, \end{aligned} \quad (A7i)$$

Заметим, что индекс у  $\varphi_K$ ,  $V_{K0}$  не является тензорным и суммирование по нему не производится. Далее, получим:

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial y}{\partial x_k} \rangle &\approx \lambda^2 \langle (\bar{J}_1 - \bar{J}_{10})^2 \rangle_2 \left( s_{1ik} - \frac{\partial \bar{J}_{10}}{\partial J_m} (t_{1ikm} + t_{1kim}) + \frac{\partial \bar{J}_{10}}{\partial J_l} \frac{\partial \bar{J}_{10}}{\partial J_m} b_{1iklm} \right), \\ \langle \frac{\partial y}{\partial p_i} \frac{\partial y}{\partial p_k} \rangle &\approx \lambda^2 \langle (\bar{J}_1 - \bar{J}_{10})^2 \rangle_2 \left( s_{2ik} - \frac{\partial \bar{J}_{10}}{\partial J_m} (t_{2ikm} + t_{2kim}) + \frac{\partial \bar{J}_{10}}{\partial J_l} \frac{\partial \bar{J}_{10}}{\partial J_m} b_{2iklm} \right), \end{aligned} \quad (A8)$$

где

$$\begin{aligned} s_{1ik} &= \langle \frac{\partial \bar{J}_1}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{J}_1}{\partial x_k} \rangle_1 \Big|_{I=I}, \\ s_{2ik} &= \langle \frac{\partial \bar{J}_1}{\partial p_i} \frac{\partial \bar{J}_1}{\partial p_k} \rangle_1 \Big|_{I=I}, \end{aligned} \quad (A9)$$

Фигурирующие в вычисленных средних величины  $\langle (\bar{J}_1 - \bar{J}_{10})^2 \rangle_2$  и

$\langle \cos \varphi_K + 1 \rangle$  для движения с гамильтонианом  $\bar{H}$  (2.58) являются некоторыми функциями  $y$ , которые выражаются через эллиптические интегралы (см. [11]), и для которых мы введем обозначения

$$\lambda \langle (\bar{J}_1 - \bar{J}_{10})^2 \rangle_2 = f(y), \quad (A10)$$

$$\langle \cos \varphi_K + 1 \rangle_2 = f(y) g(y).$$

Собирая все вычисленные средние, вместо (2.65) получим

$$A_l \frac{\partial \Phi_0}{\partial J_l} + B_{lm} \frac{\partial \Phi_0}{\partial J_l} \frac{\partial \Phi_0}{\partial J_m} + f(y) \left[ (D + g(y) \bar{D}) \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} + \right. \\ \left. + \bar{A}_l \frac{\partial \Phi_0}{\partial J_l} + \bar{B}_{lm} \frac{\partial \Phi_0}{\partial J_l} \frac{\partial \Phi_0}{\partial J_m} + (c_m + g(y) \bar{c}_m) \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \frac{\partial \Phi_0}{\partial J_l} + E \left( \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \right)^2 \right] = 0, \quad (A11)$$

где

$$A_l = g_{1ik} d_{1ikl} + g_{2ik} d_{2ikl},$$

$$B_{lm} = -\frac{1}{2} (G_{1ik} b_{1iklm} + G_{2ik} b_{2iklm}),$$

$$\bar{A}_l = g_{1ik} \bar{f}_{1ikl} + g_{2ik} \bar{f}_{2ikl},$$

$$\bar{B}_{lm} = -\frac{1}{2} (G_{1ik} h_{1iklm} + G_{2ik} h_{2iklm}),$$

$$D = g_{1ik} \left( c_{1ik} - \frac{\partial \bar{J}_{10}}{\partial J_l} \bar{c}_{1ikl} + \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial J_l} d_{1ikl} \right) + \\ + g_{2ik} \left( c_{2ik} - \frac{\partial \bar{J}_{10}}{\partial J_l} \bar{c}_{2ikl} + \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial J_l} d_{2ikl} \right), \quad (A12)$$

$$\bar{D} = \frac{\partial V_{K0}}{\partial J_l} (g_{1ik} d_{1ikl} + g_{2ik} d_{2ikl}),$$

$$c_m = -G_{1ik} p_{1ikm} - G_{2ik} p_{2ikm} + \frac{\partial \bar{J}_{10}}{\partial J_l} (G_{1ik} \bar{p}_{1iklm} + \\ + G_{2ik} \bar{p}_{2iklm}) - \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial J_l} (G_{1ik} b_{1iklm} + G_{2ik} b_{2iklm}),$$

$$\bar{c}_m = -\frac{\partial V_{K0}}{\partial J_l} (G_{1ik} b_{1iklm} + G_{2ik} b_{2iklm}),$$

$$E = -\frac{1}{2\lambda} \left\{ G_{1ik} s_{1ik} + G_{2ik} s_{2ik} - 2 \frac{\partial \bar{J}_{10}}{\partial J_m} (G_{1ik} t_{1ikm} + G_{2ik} t_{2ikm}) + \right. \\ \left. + \frac{\partial \bar{J}_{10}}{\partial J_l} \frac{\partial \bar{J}_{10}}{\partial J_m} (G_{1ik} b_{1iklm} + G_{2ik} b_{2iklm}) \right\},$$

Заметим также, что для колебаний вблизи центра резонанса (гармонических) функции  $f, g$  легко вычисляются

$$f(y) = y + O(y^2/V_{K0}^2), \\ g(y) = \frac{1}{2} + O(y/V_{K0}), \quad (A13)$$

## Приложение В

В этом Приложении мы вычислим все средние, входящие в уравнение (3.19) для движения внутри сепаратрисы. Рассмотрение будет полностью аналогично Приложению А. Вместо переменных  $J_1, J_2$  мы введем в уравнении (3.19) переменные  $y, J_2$ . Величина  $y$ , которая может быть записана в виде

$$y = \frac{\lambda}{2} (\bar{J}_1 - \bar{J}_{10})^2 + V_{lm} (\cos \varphi + 1), \quad (B1)$$

равняется нулю в центре резонанса и  $y = 2V_{lm}$  на сепаратрисе. Рассмотрим сначала два первых средних:

$$\langle p_x \frac{\partial y}{\partial p_x} \rangle = \langle \langle p_x \frac{\partial I_x}{\partial p_x} \rangle_1 \frac{\partial y}{\partial I_x} \rangle_2 + \langle \langle p_x \frac{\partial \theta_x}{\partial p_x} \rangle_1 \frac{\partial y}{\partial \theta_x} \rangle_2, \\ \langle p_z \frac{\partial y}{\partial p_z} \rangle = \langle \langle p_z \frac{\partial I_z}{\partial p_z} \rangle_1 \frac{\partial y}{\partial I_z} \rangle_2 + \langle \langle p_z \frac{\partial \theta_z}{\partial p_z} \rangle_1 \frac{\partial y}{\partial \theta_z} \rangle_2. \quad (B2)$$

Так же, как и в Приложении А, мы разделяем усреднение по точным фазам  $\psi_1, \psi_2$ , обозначаемое  $\langle \dots \rangle$ , на усреднение по фазам  $\theta_x, \theta_z$  невозмущенного движения при постоянных  $I_x, I_z$ , обозначаемое  $\langle \dots \rangle_1$ , и на усреднение по времени с учетом медленных колебаний  $I_x, I_y$ , обозначаемое  $\langle \dots \rangle_2$ . Вторые слагаемые в (B2) равняются нулю, так как для невозмущенного движения  $\langle p_x \frac{\partial \theta_x}{\partial p_x} \rangle_1 = \langle p_z \frac{\partial \theta_z}{\partial p_z} \rangle_2 = 0$ . Учитывая, что  $\langle p_x \frac{\partial I_x}{\partial p_x} \rangle_1 = I_x$  и  $\langle p_z \frac{\partial I_z}{\partial p_z} \rangle_1 = I_z$ , средние (B2) могут быть представлены в виде:

$$\langle p_x \frac{\partial y}{\partial p_x} \rangle = \langle I_x \frac{\partial y}{\partial I_x} \rangle_2 = \langle I_x \left( \frac{\partial y}{\partial \bar{J}_1} \frac{\partial \bar{J}_1}{\partial I_x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{J}_2} \frac{\partial \bar{J}_2}{\partial I_x} \right) \rangle_2 = \\ = \langle I_x \left[ -\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{J}_2} \frac{(\bar{J}_1 - \bar{J}_{10})^2}{2} + \lambda (\bar{J}_1 - \bar{J}_{10}) \frac{\partial \bar{J}_{10}}{\partial \bar{J}_2} - \frac{\partial V_{lm}}{\partial \bar{J}_2} (\cos \varphi + 1) \right] \rangle_2,$$

$$\begin{aligned} \langle p_z \frac{\partial y}{\partial p_z} \rangle &= \langle I_z \frac{\partial y}{\partial I_z} \rangle_2 = \langle I_z \left( \frac{\partial y}{\partial \tilde{J}_1} \frac{\partial \tilde{J}_1}{\partial I_z} + \frac{\partial y}{\partial \tilde{J}_2} \frac{\partial \tilde{J}_2}{\partial I_z} \right) \rangle_2 = \\ &= \langle I_z \left[ \frac{1}{m} \lambda (\tilde{J}_1 - \tilde{J}_{10}) + \frac{l}{m} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \tilde{J}_2} \frac{(\tilde{J}_1 - \tilde{J}_{10})^2}{2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \lambda (\tilde{J}_1 - \tilde{J}_{10}) \frac{\partial \tilde{J}_{10}}{\partial \tilde{J}_2} + \frac{\partial V_{lm}}{\partial \tilde{J}_2} (\cos \varphi + 1) \right) \right] \rangle_2. \end{aligned} \quad (B3)$$

При получении равенств (B3) использовалось равенство  $\frac{\partial \tilde{J}_1}{\partial I_x} = 0$  (см. (3.13)), а также учитывалась зависимость нелинейности  $\lambda$ , амплитуды гармоники  $V_{lm}$  и положения центра резонанса  $\tilde{J}_{10}$  от переменной  $\tilde{J}_2$ . Представляя величины  $I_x, I_z$  в виде

$$\begin{aligned} I_x &= -\tilde{J}_2 + l\tilde{J}_1 = -\tilde{J}_2 + l\tilde{J}_{10} + l(\tilde{J}_1 - \tilde{J}_{10}), \\ I_z &= m\tilde{J}_1 = m\tilde{J}_{10} + m(\tilde{J}_1 - \tilde{J}_{10}) \end{aligned} \quad (B4)$$

и учитывая, что в приближении маятника (3.12) среднее  $\langle \tilde{J}_1 - \tilde{J}_{10} \rangle_2$  для движения внутри сепаратрисы равно нулю, вместо (B3) получим

$$\begin{aligned} \langle p_x \frac{\partial y}{\partial p_x} \rangle &= -\frac{\partial \lambda}{\partial \tilde{J}_2} \frac{I_{x0}}{2} \langle (\tilde{J}_1 - \tilde{J}_{10})^2 \rangle_2 + \lambda l \frac{\partial \tilde{J}_{10}}{\partial \tilde{J}_2} \langle (\tilde{J}_1 - \tilde{J}_{10})^2 \rangle_2 - \\ &\quad - \frac{I_{x0}}{V_{lm}} \frac{\partial V_{lm}}{\partial \tilde{J}_2} \left( y - \frac{\lambda}{2} \langle (\tilde{J}_1 - \tilde{J}_{10})^2 \rangle_2 \right), \\ \langle p_z \frac{\partial y}{\partial p_z} \rangle &= \lambda \langle (\tilde{J}_1 - \tilde{J}_{10})^2 \rangle_2 + \frac{l}{m} \frac{I_{z0}}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial \tilde{J}_2} \langle (\tilde{J}_1 - \tilde{J}_{10})^2 \rangle_2 - \\ &\quad - l \lambda \frac{\partial \tilde{J}_{10}}{\partial \tilde{J}_2} \langle (\tilde{J}_1 - \tilde{J}_{10})^2 \rangle_2 + \frac{l}{m} \frac{I_{z0}}{V_{lm}} \frac{\partial V_{lm}}{\partial \tilde{J}_2} \left( y - \frac{\lambda}{2} \langle (\tilde{J}_1 - \tilde{J}_{10})^2 \rangle_2 \right), \end{aligned} \quad (B5)$$

где  $I_{x0}, I_{z0}$  — центр резонанса, а среднее  $\langle \cos \varphi + 1 \rangle_2$  вычислялось с помощью усреднения определения величины  $y$  (B1) (которая постоянна):

$$y = \frac{\lambda}{2} \langle (\tilde{J}_1 - \tilde{J}_{10})^2 \rangle_2 + V_{lm} \langle \cos \varphi + 1 \rangle_2. \quad (B6)$$

Аналогичным образом вычисляются средние

$$\begin{aligned} \langle p_x \frac{\partial \tilde{J}_2}{\partial p_x} \rangle &= -\langle I_x \rangle_2 = -I_{x0}, \\ \langle p_z \frac{\partial \tilde{J}_2}{\partial p_z} \rangle &= \frac{l}{m} \langle I_z \rangle_2 = \frac{l}{m} I_{z0}. \end{aligned} \quad (B7)$$

Для вычисления  $\langle \left( \frac{\partial y}{\partial p_x} \right)^2 \rangle$  сначала преобразуем это выражение к виду:

$$\begin{aligned} \langle \left( \frac{\partial y}{\partial p_x} \right)^2 \rangle &= \langle \left( \frac{\partial y}{\partial I_x} \frac{\partial I_x}{\partial p_x} + \frac{\partial y}{\partial \theta_x} \frac{\partial \theta_x}{\partial p_x} \right)^2 \rangle = \\ &= \langle \left( \frac{\partial y}{\partial I_x} \right)^2 \frac{I_x}{\omega_x} \rangle_2 + \langle \left( \frac{\partial y}{\partial \theta_x} \right)^2 \langle \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial p_x} \right)^2 \rangle_1 \rangle_2. \end{aligned} \quad (B8)$$

Второе слагаемое в (B8) можно опустить, так как оно пропорционально  $V_{lm}^2$  (в первом слагаемом будут члены, пропорциональные  $V_{lm}$ ). Расписывая производную  $\frac{\partial y}{\partial I_x}$  (так же, как и в (B3)) и опуская слагаемые с более высокими степенями  $V_{lm}$  и  $(\tilde{J}_1 - \tilde{J}_{10})$ , получим

$$\begin{aligned} \langle \left( \frac{\partial y}{\partial p_x} \right)^2 \rangle &\approx \langle \frac{I_x}{\omega_x} \left[ -\frac{\partial \lambda}{\partial \tilde{J}_2} \frac{(\tilde{J}_1 - \tilde{J}_{10})^2}{2} + \lambda (\tilde{J}_1 - \tilde{J}_{10}) \frac{\partial \tilde{J}_{10}}{\partial \tilde{J}_2} - \frac{\partial V_{lm}}{\partial \tilde{J}_2} (\cos \varphi + 1) \right]^2 \rangle_2 \\ &\approx \langle \frac{I_x}{\omega_x} \lambda^2 (\tilde{J}_1 - \tilde{J}_{10})^2 \left( \frac{\partial \tilde{J}_{10}}{\partial \tilde{J}_2} \right)^2 \rangle_2 = \frac{I_{x0}}{\omega_x} \lambda^2 \left( \frac{\partial \tilde{J}_{10}}{\partial \tilde{J}_2} \right)^2 \langle (\tilde{J}_1 - \tilde{J}_{10})^2 \rangle_2. \end{aligned} \quad (B9)$$

Аналогичным образом вычислим остальные средние:

$$\begin{aligned} \langle \left( \frac{\partial y}{\partial p_z} \right)^2 \rangle &\approx \langle \frac{I_z}{\omega_z} \left( \frac{\partial y}{\partial I_z} \right)^2 \rangle_2 = \langle \frac{I_z}{\omega_z} \left[ \frac{\lambda}{m} (\tilde{J}_1 - \tilde{J}_{10}) + \frac{l}{m} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \tilde{J}_2} \frac{(\tilde{J}_1 - \tilde{J}_{10})^2}{2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \lambda (\tilde{J}_1 - \tilde{J}_{10}) \frac{\partial \tilde{J}_{10}}{\partial \tilde{J}_2} + \frac{\partial V_{lm}}{\partial \tilde{J}_2} (\cos \varphi + 1) \right) \right]^2 \rangle_2 \approx \frac{I_{z0}}{\omega_z} \frac{\lambda^2}{m^2} \left( 1 - l \frac{\partial \tilde{J}_{10}}{\partial \tilde{J}_2} \right)^2 \langle (\tilde{J}_1 - \tilde{J}_{10})^2 \rangle_2, \\ \langle \frac{\partial y}{\partial p_x} \frac{\partial \tilde{J}_2}{\partial p_x} \rangle &= \langle -\frac{\partial y}{\partial I_x} \langle \left( \frac{\partial I_x}{\partial p_x} \right)^2 \rangle_1 - \frac{\partial y}{\partial \theta_x} \langle \frac{\partial I_x}{\partial p_x} \frac{\partial \theta_x}{\partial p_x} \rangle_1 \rangle_2 \approx \\ &\approx -\langle \frac{I_x}{\omega_x} \frac{\partial y}{\partial I_x} \rangle = -\frac{1}{\omega_x} \langle p_x \frac{\partial y}{\partial p_x} \rangle, \end{aligned} \quad (B10)$$

$$\langle \frac{\partial y}{\partial p_z} \frac{\partial \tilde{J}_2}{\partial p_z} \rangle \approx \frac{l}{m} \langle \frac{I_z}{\omega_z} \frac{\partial y}{\partial I_z} \rangle_2 = \frac{l}{m \omega_z} \langle p_z \frac{\partial y}{\partial p_z} \rangle,$$

$$\langle \left( \frac{\partial \tilde{J}_2}{\partial p_x} \right)^2 \rangle = \langle \langle \left( \frac{\partial I_x}{\partial p_x} \right)^2 \rangle_1 \rangle_2 = \frac{I_{x0}}{\omega_x},$$

$$\langle \left( \frac{\partial \tilde{J}_2}{\partial p_z} \right)^2 \rangle = \langle \frac{l^2}{m^2} \langle \left( \frac{\partial I_z}{\partial p_z} \right)^2 \rangle_1 \rangle_2 = \frac{l^2}{m^2 \omega_z} I_{z0}.$$

Отметим, что входящие в (B10) производные  $\frac{\partial \tilde{J}_{10}}{\partial \tilde{J}_2}$ ,  $\frac{\partial V_{lm}}{\partial \tilde{J}_2}$  и  $\frac{\partial \lambda}{\partial \tilde{J}_2}$  могут быть представлены в виде



$$\frac{\partial \bar{J}_{10}}{\partial \bar{J}_2} = \frac{1}{m} \frac{\frac{dI_{z0}}{dI_x}}{\left(-1 + \frac{l}{m} \frac{dI_{z0}}{dI_x}\right)} = \frac{\varphi}{-m + l\varphi} = -\frac{\varphi_1}{m},$$

$$\frac{\partial V_{lm}}{\partial \bar{J}_2} = \frac{\frac{\partial V_{lm}}{\partial I_x} + \varphi \frac{\partial V_{lm}}{\partial I_z}}{-1 + \frac{l}{m} \varphi} = -\frac{1}{m} V'_{lm},$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{J}_2} = \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial I_x} + \varphi \frac{\partial \lambda}{\partial I_z}}{-1 + \frac{l}{m} \varphi} = -\frac{1}{m} \lambda',$$

где  $\varphi(I_x)$  — наклон резонансной линии в плоскости  $I_x, I_z$ :  $\varphi = \frac{dI_{z0}}{dI_x}$ . Собирая все вычисленные средние, вместо уравнения (3.19) получим:

$$a(J_2) \frac{\partial \Phi_0}{\partial J_2} + b(J_2) \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial J_2}\right)^2 + f(y) \left[ (a_0(J_2) + g(y)b_0(J_2)) \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} + a_1(J_2) \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial y}\right)^2 + (a_2(J_2) + g(y)b_2(J_2)) \frac{\partial \Phi_0}{\partial J_2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \right] = 0, \quad (B12)$$

где коэффициенты  $a_i, b_i$  имеют вид:

$$a = -I_{x0} + \frac{l}{m} I_{z0},$$

$$b = -\omega_x \sigma_x^2 I_{x0} - \omega_z \sigma_z^2 \frac{l^2}{m^2} I_{z0} = -\omega_x \sigma_x^2 (-\bar{J}_2 + l\bar{J}_{10}) - \omega_z \sigma_z^2 \frac{l^2}{m} \bar{J}_{10},$$

$$a_0 = 1 - \frac{\lambda'}{2m\lambda} \left(-I_{x0} + \frac{l}{m} I_{z0}\right),$$

$$b_0 = \frac{V'_{lm}}{m V_{lm}} \left(-I_{x0} + \frac{l}{m} I_{z0}\right), \quad (B13)$$

$$a_1 = -\lambda \left( \omega_x \sigma_x^2 \frac{I_{x0}^2}{m^2} + \frac{\omega_z \sigma_z^2 I_{z0}^2}{m^2} \left(1 + \frac{l}{m} \varphi_1\right)^2 \right),$$

$$a_2 = -2 \frac{l}{m} \omega_z \sigma_z^2 + \frac{\lambda'}{m\lambda} \left( \omega_x \sigma_x^2 I_{x0} + \omega_z \sigma_z^2 I_{z0} \frac{l^2}{m^2} \right) - \frac{\varphi_1 l}{m} \left( \omega_x \sigma_x^2 + \frac{l}{m} \omega_z \sigma_z^2 \right),$$

$$b_2 = \frac{1}{m} \frac{V'_{lm}}{V_{lm}} \left( \omega_x I_{x0} \sigma_x^2 + \omega_z I_{z0} \sigma_z^2 \frac{l^2}{m^2} \right).$$

В формулах (B12) введены обозначения

$$f(y) = \lambda \langle (\bar{J}_1 - \bar{J}_{10})^2 \rangle_2,$$

$$g(y) = \frac{y - \frac{j(y)}{2}}{f(y)}. \quad (B14)$$

Заметим также, что для колебаний вблизи центра резонанса (гармонических) функции  $f, g$  легко вычисляются:

$$f(y) = y + O\left(\frac{y^2}{V_{lm}^2}\right),$$

$$g(y) = \frac{1}{2} + O\left(\frac{y}{V_{lm}}\right). \quad (B15)$$

### Приложение С

В настоящем Приложении мы найдем экстремаль, соединяющую две заданные точки плоскости действий  $I_x, I_z$ , а также величину  $\Delta\Phi_0$  (2.39) для этого перехода при невозмущенном движении. Исходя из «укороченного» уравнения Гамильтона — Якоби (3.20) можно получить гамильтониан, траектории которого являются экстремальными функционала (2.39) в невозмущенной резонансами области:

$$\bar{H}(I_x, I_z, q_x, q_z) = I_x(\omega_x \sigma_x^2 q_x^2 - q_x) + I_z(\omega_z \sigma_z^2 q_z^2 - q_z). \quad (C1)$$

Формула (2.38) для нашего случая имеет вид:

$$\Delta\Phi_0 = S = \frac{1}{4} \int_0^T \left[ \frac{(I_x + I_x)^2}{\omega_x \sigma_x^2 I_x} + \frac{(I_z + I_z)^2}{\omega_z \sigma_z^2 I_z} \right] dt. \quad (C2)$$

Из «полного» уравнения Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial T}(I_x, I_x, I_z, I_z, T) + \bar{H}\left(I_x, I_z, \frac{\partial S}{\partial I_x}, \frac{\partial S}{\partial I_z}\right) = 0 \quad (C3)$$

видно, что минимум величины  $S(I_x, I_z, I_x, I_z, T)$  по времени перехода  $T$  определяется условием  $\bar{H} = 0$ . Таким образом, для нахождения экстремалей  $I_x(t), I_z(t)$  для перехода из точки  $I_{x0}, I_{z0}$  в точку  $I_{x1}, I_{z1}$  мы должны найти траекторию гамильтоновой системы (C1) при  $\bar{H} = 0$ , проходящую через обе эти точки. Зависимости  $I_x(t), I_z(t)$  на этой траектории и дадут искомую экстремаль.

Общее решение гамильтоновых уравнений системы (C1) можно записать в виде:

$$I_x = I_{x0} e^{-t} \left( \frac{a_x + e^t}{a_x + 1} \right)^2, \quad (C4)$$

$$I_z = I_{z0} e^{-t} \left( \frac{a_z + e^t}{a_z + 1} \right)^2,$$

где

$$a_x = \frac{1 - \omega_x \sigma_x^2 q_{x0}}{\omega_x \sigma_x^2 q_{x0}}, \quad (C5)$$

$$a_z = \frac{1 - \omega_z \sigma_z^2 q_{z0}}{\omega_z \sigma_z^2 q_{z0}},$$

Величины начальных «импульсов»  $q_{x0}$ ,  $q_{z0}$  находятся из условий

$$I_x(T) = I_{x1} \quad (C6)$$

$$I_z(T) = I_{z1}$$

а время  $T$  — из условия  $\bar{H}(I_{x0}, I_{z0}, q_{x0}, q_{z0}) = 0$ . Из уравнений (C6), подставляя (C4), получим:

$$a_x = \frac{-e^T + \sqrt{\frac{I_{x1}}{I_{x0}} e^T}}{1 - \sqrt{\frac{I_{x1}}{I_{x0}} e^T}}, \quad (C7)$$

$$a_z = \frac{-e^T + \sqrt{\frac{I_{z1}}{I_{z0}} e^T}}{1 - \sqrt{\frac{I_{z1}}{I_{z0}} e^T}},$$

Выражая  $q_{x0}$ ,  $q_{z0}$  через  $a_x$ ,  $a_z$  из (C5) и подставляя  $a_x$ ,  $a_z$  из (C7), запишем уравнение  $\bar{H} = 0$  в виде

$$\bar{H} = \frac{I_{x0}}{\omega_x \sigma_x^2} \frac{(e^T - \sqrt{\frac{I_{x1}}{I_{x0}} e^T})}{(1 - e^T)^2} \left( 1 - \sqrt{\frac{I_{x1}}{I_{x0}} e^T} \right) +$$

$$+ \frac{I_{z0}}{\omega_z \sigma_z^2} \frac{(e^T - \sqrt{\frac{I_{z1}}{I_{z0}} e^T})}{(1 - e^T)^2} \left( 1 - \sqrt{\frac{I_{z1}}{I_{z0}} e^T} \right) = 0, \quad (C8)$$

откуда можно найти время перехода  $T$  или, что то же самое, величину  $y = e^{T/2}$ .

$$y_{1,2} = \frac{1}{2 \left( \frac{I_{x0}}{\omega_x \sigma_x^2} p_x + \frac{I_{z0}}{\omega_z \sigma_z^2} p_z \right)} \left[ \frac{I_{x0}}{\omega_x \sigma_x^2} (1 + p_x^2) + \frac{I_{z0}}{\omega_z \sigma_z^2} (1 + p_z^2) \pm \right.$$

$$\left. \pm \sqrt{\left( \frac{I_{x0}}{\omega_x \sigma_x^2} (1 + p_x)^2 + \frac{I_{z0}}{\omega_z \sigma_z^2} (1 + p_z)^2 \right) \left( \frac{I_{x0}}{\omega_x \sigma_x^2} (1 - p_x)^2 + \frac{I_{z0}}{\omega_z \sigma_z^2} (1 - p_z)^2 \right)} \right], \quad (C9)$$

где  $p_x = \sqrt{\frac{I_{x1}}{I_{x0}}}$  и  $p_z = \sqrt{\frac{I_{z1}}{I_{z0}}}$ . Используя для вычисления величины  $\Delta\Phi(I_{x0}, I_{z0}, I_{x1}, I_{z1}, T)$  формулу (2.41) (которая, как нетрудно показать, при условии  $\bar{H} = 0$  дает тот же результат, что и (C2)), и подставляя величины  $q_x$ ,  $q_z$  из гамильтоновых уравнений

$$q_x = \frac{1}{2\omega_x \sigma_x^2} \left( 1 + \frac{I_x}{I_x} \right), \quad (C10)$$

$$q_z = \frac{1}{2\omega_z \sigma_z^2} \left( 1 + \frac{I_z}{I_z} \right),$$

получим:

$$\Delta\Phi_0 = \frac{I_{x0}(e^T - 1 - a_x T)}{\omega_x \sigma_x^2 (1 + a_x)^2} + \frac{I_{z0}(e^T - 1 - a_z T)}{\omega_z \sigma_z^2 (1 + a_z)^2} \quad (C11)$$

Используя условие  $\bar{H} = 0$  в виде

$$\frac{I_{x0} a_x}{\omega_x \sigma_x^2 (1 + a_x)^2} + \frac{I_{z0} a_z}{\omega_z \sigma_z^2 (1 + a_z)^2} = 0, \quad (C12)$$

выражение (C11) нетрудно преобразовать к виду

$$\Delta\Phi(I_{x0}, I_{z0}; I_{x1}, I_{z1}) =$$

$$= \frac{1}{e^T - 1} \left\{ \frac{I_{x0}}{\omega_x \sigma_x^2} \left( 1 - \sqrt{\frac{I_{x1}}{I_{x0}} e^T} \right)^2 + \frac{I_{z0}}{\omega_z \sigma_z^2} \left( 1 - \sqrt{\frac{I_{z1}}{I_{z0}} e^T} \right)^2 \right\} =$$

$$= \frac{I_{x0}}{\omega_x \sigma_x^2} \left( \sqrt{\frac{I_{x1}}{I_{x0}} e^T} - 1 \right) + \frac{I_{z0}}{\omega_z \sigma_z^2} \left( \sqrt{\frac{I_{z1}}{I_{z0}} e^T} - 1 \right) \quad (C13)$$

Величина  $e^T = y^2$  в (C13) должна быть подставлена из (C9). Из двух значений  $y_{1,2}$  (C9) следует брать то, которое дает меньшее значение  $\Delta\Phi$  (в зависимости от  $I_{x0}$ ,  $I_{z0}$ ,  $I_{x1}$ ,  $I_{z1}$  они могут быть разными). Экстремаль для перехода из точки  $I_{x0}$ ,  $I_{z0}$  в  $I_{x1}$ ,  $I_{z1}$  дается выражениями (C4), куда надо подставить (C7) с тем же значением  $y$  из (C9). Используя простые алгебраические преобразования, можно показать, что выражение (C13) обладает свойством

$$\Delta\Phi_0(I_{x0}, I_{z0}; I_{x0} + \Delta I_x, I_{z0} + \Delta I_z) \geq \frac{\Delta I_x}{\omega_x \sigma_x^2} + \frac{\Delta I_z}{\omega_z \sigma_z^2}; \quad (C14)$$

при  $\Delta I_x, \Delta I_z > 0$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман И., Скороход А. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова думка, 1968.
2. Вентцель А., Фрейдлин М. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений, М.: Наука, 1979.
3. Stochastic Processes—Formalism and Applications. (G.C. Agarwal and S. Dattagupta, Eds), Springer, 1983
4. Stochastic Processes in Nonequilibrium Systems.—Lecture Notes in Physics, 1978, v.84.
5. Андронов А., Понтрягин Л., Витт А. ЖЭТФ, 1933, т.3, 3.
6. Чандрасекар С. Стохастические проблемы физики и астрономии. М.: ИЛ, 1947.
7. Хасьминский Р. ПММ, 1964, т.28, 5.
8. Kramers H.A. Physica (1940), v.7, p.284.
9. Диментберг М. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980.
10. Risken H. The Fokker—Planck Equation. Springer, Berlin, 1983.
11. Shonfeld J. Statistical Mechanics of Colliding Beams.— Fermilab-Pub-83/93-THU.
12. Crutchfield J., Farmer J., Huberman B. Phys. Rep., 1983, v.92, N 2, p.47—82.
13. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям, М.: Мир, 1968.
14. Graham R. in: Fluctuations, Instabilities and Phase Transitions.— T. Riste ed. (Plenum, New York, 1975).
15. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике.— Мир, М.: 1965.
16. Matkovsky B., Shuss Z., Ben-Jacob E.— SIAM J. Appl. Math., 1982, v.42, N 4
17. Chirikov B.V. Phys. Rep., v.52, 1979 p.263.
18. Зацепин С.В. Теор. и мат. физ. 1983, № 1, с.55.
19. Ruggiero F. Annals of Phys. 1984, v.153, p.122—146.
20. Kheifets S. SLAC-PUB-3161; SLAC-PUB-3161; Proc. of the Intern. Conf. on High Energy Accel., Fermilab, 1983.
21. Meller R. Statistical Method for Nonequilibrium Systems with Application to Accelerator Beam Dynamics, Ph. D. Thesis, Cornell, 1986.
22. Graham R., Tel T. J. of St. Phys., 1984, v.35, N 5—6.
23. Erdelyi A. Asymptotic Expansions. Dover, N.Y., 1956.
24. Graham R, Tel T. Phys. Rev., 1985, v.A31, p.1109.
25. Коломенский А., Лебедев А. Теория циклических ускорителей.— М.: Физматгиз, 1962.
26. Gerasimov A., Izrailev F., Tennyson J, Temnykh A. in Proc. of US/CERN Winter School on Accel. Phys., Sardinia, 1985; INP Preprint 86-100. Novosibirsk, 1986.
27. Gerasimov A., Izrailev F., Tennyson J. in Proc. of the Intern. Accel. Conf., Novosibirsk, 1986; INP Preprint 86-186, Novosibirsk, 1986.
28. Sands M. The Physics of Electron Storage Rings.— Report SLAC-121 (1970).
29. Izrailev F. Physica, v.1D, 1980, p.243—266.

30. Tennyson J. Physica, v.5D, 1982, p.123.

31. Lichtenberg A., Lieberman M. Regular and Stochastic Motion, Springer, 1983; (русский перевод (М.: Мир, 1984)).

32. Jona-Lasino G., Martinelli F., Scoppola F. in: New Stochastic Methods in Physics, Phys. Rep., 1981, v.77, N 3.

*А.Л. Герасимов*

**Тепловое равновесие осциллятора  
при возбуждении изолированных  
нелинейных резонансов**

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

---

Работа поступила 30 апреля 1987 г.  
Подписано в печать 24.07. 1987 г. МН 08297  
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 3,4 печ.л., 3,0 уч.-изд.л.  
Тираж 210 экз. Бесплатно. Заказ № 100

---

*Набрано в автоматизированной системе на базе фото-  
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и  
отпечатано на ротапинтере Института ядерной физики  
СО АН СССР,  
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*