ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

Э.А. Кураев, Н.П. Меренков, В.С. Фадин

ВЫЧИСЛЕНИЕ РАДИАЦИОННЫХ ПОПРАВОК К СЕЧЕНИЮ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ НА ЯДРАХ МЕТОДОМ СТРУКТУРНЫХ ФУНКЦИЙ

ПРЕПРИНТ 87-101

НОВОСИБИРСК

Вычисление радиационных поправок
к сечению рассеяния электронов на ядрах
методом структурных функций

Э.А. Кураев, Н.П. Меренков, В.С. Фадин

Институт ядерной физики
630090, Новосибирск 90, СССР

АННОТАЦИЯ

Сечение процесса глубоко неупругого $e-A$-рассеяния с учетом радиационных поправок во всех порядках теории возмущений представлено в виде свертки электронных структурных функций с жесткой частью сечения. Проведено явное вычисление жесткой части сечения в низших порядках теории возмущений. Полученные формулы обеспечивают точность лучше 1% даже в тех случаях, когда поправки первого порядка по α велики ($\sim$100%).

1. ВВЕДЕНИЕ

Эксперименты по рассеянию электронов на нуклонах и ядрах являются основным методом исследования структуры этих объектов. На ранней стадии экспериментов основное внимание уделялось упругому рассеянию с целью определения формфакторов мишени. В настоящее время наибольший интерес представляют опыты по глубоко неупругому рассеянию (ГНР) электронов и мюонов больших энергий. В таких опытах изучаются структурные функции нуклонов и ядер.

Извлечение из экспериментальных данных формфакторов и структурных функций мишени требует знания радиационных поправок (РП) электромагнитного происхождения. Вычислению их посвящено много работ, начиная с известной работы Ю. Швингера 1949 г. [1]. Если в первые декады после этой работы вычислялись, в основном, РП к сечениям процессов упругого рассеяния (см., например, [2, 3]), то в конце 60-х годов (см. [3, 4]) акцент сместился на процессы ГНР. Точность измерения сечений в проводимых в настоящее время и планируемых экспериментах требует учета РП в высших порядках теории возмущений (ТВ). Особенно необходим такой учет в случаях, когда поправки первого порядка велики (см., например, [4]).

Для мягких фотонов метод учета высших поправок ТВ известен и широко применяется. Он состоит в экспоненциировании дважды логарифмического инфракрасного вклада в РП низшего порядка ТВ [5]. Гораздо сложнее ситуация с жесткими фотонами.

Здесь продвижение связано с использованием аппарата ренормгруппы (РГ). При этом требуется известная аккуратность; некритическое применение РГ для вычисления РП [6] приводит к ошибкам, как было показано в работе [7]. В этой же работе было обращено внимание на возможность вычисления сечений с учетом РП основанным на РГ методом структурных функций, широко применяемым в квантовой хромодинамике (КХД). В работе [7] этот метод использовался для вычисления РП к сечению однофотонной аннигиляции e^+e^--пары. В аналогичной ситуации в области энергий Z-бозона этот метод применялся впоследствии в работе [8].

Метод структурных функций может быть использован для вычисления РП к широкому кругу так называемых «жестких» процессов. Здесь мы рассмотрим его применение к процессу рассеяния электрона на нуклоне или ядре в инклюзивной постановке — для вычисления сечения, дифференциального по углу и энергии конечного электрона. Мерой «жесткости» процесса является величина переданного мишени импульса, большая по сравнению с массой электрона. Сразу оговоримся, что хотя мы будем рассматривать только лептонные РП (именно они дают основной вклад), метод может быть использован и для вычисления РП, связанных с адронами.

План работы следующий. В разделе 2 мы представляем сечение с учетом РП через свертку структурных функций $D(x, Q^2)$ с жестким сечением (формула (3)), приводим выражения для функции $D(x, Q^2)$ (формулы (5) — (8)) и жесткого сечения в борновском приближении (формула (11)), в разделе 3 приводим жесткое сечение с учетом поправки $\sim\alpha$ (формула 15). В Заключении анализируются полученные результаты. В Приложении дается вывод формулы (15).

2. РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ В ПРИБЛИЖЕНИИ ГЛАВНЫХ ЛОГАРИФМОВ

В дальнейшем используются следующие обозначения: p_1 (p_2) — импульс начального (конечного) электрона, P — импульс мишени,

$$q = p_1 - p_2, \quad V = 2Pp_1 \quad x = \frac{-q^2}{2Pq}, \quad y = \frac{2Pq}{V}, \quad \tau = \frac{M^2}{V}, \quad Q^2 = Vxy; \qquad (1)$$

$m(M)$ — масса электрона (мишени).

Общая формула для инклюзивного сечения рассеяния электрона имеет следующий вид (см. рис. 1):

$$\frac{\varepsilon_2 d^3\sigma(p_1, p_2)}{d^3 p_2} = \int^1 dz_1 \int^1 dz_2 \cdot z_2^{-2} \sum_{A, A'} D_e^A(z_1, Q^2)\, \bar{D}_{A'}^e(z_2, Q^2) \times$$
$$\times \frac{\tilde{\varepsilon}_2 d^3\sigma_{AA'}^{(hard)}(z_1 p_1, \tilde{p}_2)}{d^3\tilde{p}_2}\bigg|_{\tilde{p}_2 = p_2/z_2}, \qquad (2)$$

где $D_e^A(z, Q^2)$ — структурная функция, дающая распределение по доле энергии z-партонов сорта A с виртуальностью до Q^2 в электроне; $\bar{D}_A^e(z, Q^2)$ — функция фрагментации партона сорта A с виртуальностью до Q^2 в электрон с долей энергии z; $\sigma_{AA'}^{(hard)}$ — жесткое сечение рассеяния партона сорта A, с превращением его в партон сорта A'. В квантовой электродинамике (КЭД) в роли партонов выступают электроны, позитроны и фотоны. Нижние пределы интегралов по $z_{1,2}$ в (2) определяются из условий возможности партонного процесса.

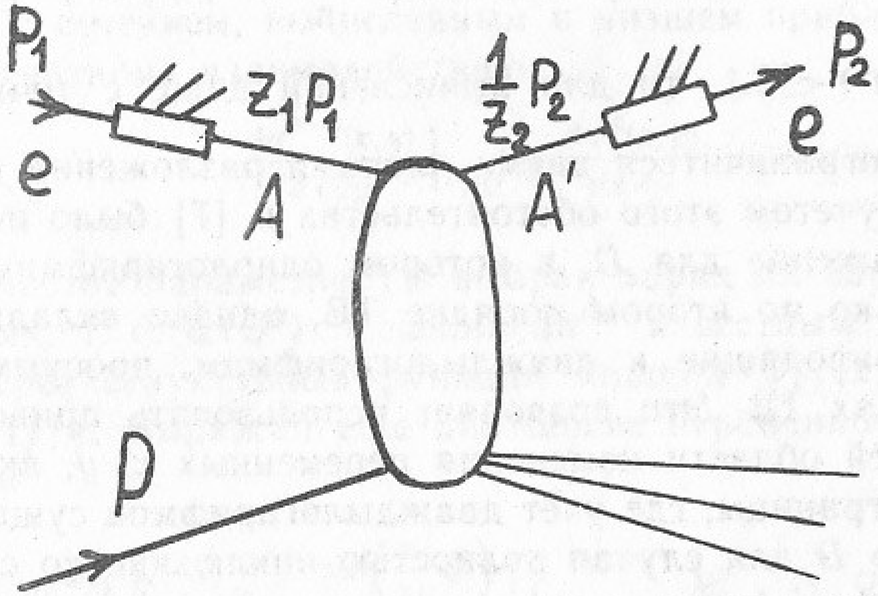

Рис. 1

В главнологарифмическом приближении (ГЛП), когда в РП суммируются только члены, содержащие на каждую степень α множитель $\ln(Q^2/m^2)$, в (2) следует положить $A = A' = e$, в качестве $\sigma_{AA'}^{(hard)}$ взять сечение в борновском по электромагнитному взаимодействию приближении и использовать соотношение Грибова — Липатова [9] $D_e^A(z, Q^2) = \bar{D}_A^e(z, Q^2)$. Переходя к переменным x, y и обозначая $D_e^e \equiv D$, получаем из (2)

$$\frac{d\sigma(x,y)}{dx\,dy}=\int\limits^{1}\int\limits^{1}\frac{dz_1\,dz_2\,D(z_1,Q^2)\,D(z_2,Q^2)}{z_2^2\,z_1}\cdot\frac{y\,d\sigma^{(hard)}(\tilde{x},\tilde{y})}{\tilde{y}\,d\tilde{x}\,d\tilde{y}} \tag{3}$$

где переменные с тильдой — соответствующие переменные партонного процесса:

$$\tilde{x}=\frac{z_1yx}{z_1z_2+y-1},\quad \tilde{y}=\frac{z_1z_2+y-1}{z_1z_2},\quad \tilde{Q}^2=\frac{z_1}{z_2}Q^2,\quad Q^2=Vxy. \tag{4}$$

Структурные функции $D(x,\ Q^2)$ удовлетворяют уравнениям эволюции Липатова [10]. Замкнутого выражения для них не существует. Но поскольку параметр $\frac{\alpha}{\pi}\ln\ (Q^2/m^2)$ реально мал, $\frac{\alpha}{\pi}\ln\ (Q^2/m^2)<0.1$, то для вычислений даже с точностью 0.1% достаточно ограничиться двумя членами разложения по этому параметру. С учетом этого обстоятельства в [7] было получено замкнутое выражение для D, в котором однологарифмические члены учтены только во втором порядке ТВ, однако вклады от мягких фотонов, приводящие к дваждылогарифмам, просуммированы во всех порядках ТВ. Это позволяет использовать приводимые формулы во всей области изменения переменных x, y, включая кинематические границы, где учет дваждылогарифмов существен.

Функцию D для случая полностью инклюзивного сечения можно представить в виде

$$D=D^{\gamma}+D^{e^+e^-}. \tag{5}$$

В постановке эксперимента, когда события с образованием дополнительной e^+e^--пары не принимаются во внимание:

$$D=D^{\gamma}. \tag{6}$$

При этом [7]:

$$D^{\gamma}(x,Q^2)=\frac{1}{2}\beta(1-x)^{\beta/2-1}\left[1+\frac{3}{8}\beta-\frac{1}{48}\beta^2\left(\frac{1}{3}L+\pi^2-\frac{47}{8}\right)\right]-\frac{1}{4}\beta(1+x)+$$
$$+\frac{1}{32}\beta^2\left[4(1+x)\ln\frac{1}{1-x}+\frac{1+3x^2}{1-x}\ln\frac{1}{x}-5-x\right]; \tag{7}$$

$$D^{e^+e^-}(x,Q^2)=\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2\left[\frac{1}{12}(1-x)^{-1}\left(1-x-\frac{2m}{\varepsilon}\right)^{\beta/2}\times\right.$$

$$\times\left(\mathscr{L}-\frac{5}{3}\right)^2\left(1+x^2+\frac{1}{6}\beta\left(\mathscr{L}-\frac{5}{3}\right)\right)+\frac{1}{4}L^2\times$$
$$\left.\times\left(\frac{2}{3}\frac{(1-x^3)}{x}+\frac{1}{2}(1-x)-(1+x)\ln\frac{1}{x}\right)\right]\theta\left(1-x-\frac{2m}{\varepsilon}\right), \tag{8}$$

$$\mathscr{L}=\ln\frac{Q^2(1-x)^2}{m^2}.$$

Здесь и далее

$$\beta=\frac{2\alpha}{\pi}(L-1),\quad L=\ln\frac{Q^2}{m^2}. \tag{9}$$

Входящее в формулу (3) жесткое сечение процесса в ГЛП совпадает с сечением, вычисленным в низшем приближении ТВ по электромагнитному взаимодействию

$$\left.\frac{d\sigma^{(hard)}(x,y)}{dx\,dy}\right|_{\text{ГЛП}}=\frac{d\sigma^{(0)}(x,y)}{dx\,dy}, \tag{10}$$

если в качестве параметра ТВ выбран заряд на характерных виртуальностях, т. е. $\alpha(Q^2)$. Сечение $d\sigma^{(0)}$ известным образом выражается через структурные функции мишени $W_{1,2}(x,\ Q^2)$ (см., например, [11]). Выражая еще партонные переменные $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ через x, y, получим

$$\frac{d\sigma^{(0)}(\tilde{x},\tilde{y})}{\tilde{y}\,d\tilde{x}\,d\tilde{y}}=\frac{z_2}{z_1}\cdot\frac{4\pi\alpha^2\left(\frac{z_1}{z_2}Q^2\right)}{Q^2xy^2}\left[\left(1-y-\frac{M^2}{Q^2}x^2y^2\right)\frac{Q^2}{2Mx}\times\right.$$
$$\left.\times W_2\left(\frac{xz_1y}{z_1z_2+y-1},\ \frac{z_1}{z_2}Q^2\right)+xy^2MW_1\left(\frac{xz_1y}{z_1z_2+y-1},\ \frac{z_1}{z_2}Q^2\right)\right]. \tag{11}$$

При этом $\alpha(Q^2)=\alpha/|1-\Pi(q^2)|$, $\Pi(q^2)$ — поляризационный оператор фотона.

Нижние пределы интегрирования по z_1 и z_2 в формуле (3) определяются из условия существования партонного сечения $d\sigma^{(hard)}$. Можно выделить два вклада в интеграл (3): собственно неупругий вклад, начинающийся с $(P+\tilde{q})^2=M_{th}^2$, M_{th} — порог неупругости ($M_{th}=M+m_\pi$), и радиационный хвост упругого пика (УРХ), для которого $(P+\tilde{q})^2=M^2$. Используя (1) и (3), получаем, что для первого вклада область интегрирования по z_1, z_2 ограничена неравенством

$$z_1 z_2 + y - 1 - xyz_1 \geqslant z_1\delta\,, \qquad \delta = \frac{M_{th}^2 - M^2}{V}. \tag{12}$$

С учетом условий $z_{1,2} \leqslant 1$ получаем заштрихованную область на рис. 2. Область интегрирования для УРХ вырождается в кривую, которая получается из (12) отбрасыванием неравенства и обращением δ в нуль (см. рис. 2). Вклад кривой в двукратный интеграл отличен от нуля благодаря тому, что $W_{1,2}$ содержат δ-функции, соответствующие упругому процессу; так, для рассеяния на протоне или нейтроне

$$MW_1(x, Q^2) = \frac{1}{2}\,\delta(x-1)\,(F_1(q^2) + F_2(q^2))^2\,,$$

$$\frac{1}{M}\,W_2(x, Q^2) = \frac{2}{Q^2}\,\delta(x-1)\left(F_1^2(q^2) + \frac{Q^2}{4M^2}\,F_2^2(q^2)\right), \tag{13}$$

где F_i — паулиевские формфакторы.

На важность вклада УРХ в РП для ГНР обращалось внимание еще в [3]. Возможна такая постановка эксперимента, при которой отбираются только события без изменения структуры мишени. В этом случае УРХ представляет самостоятельный интерес.

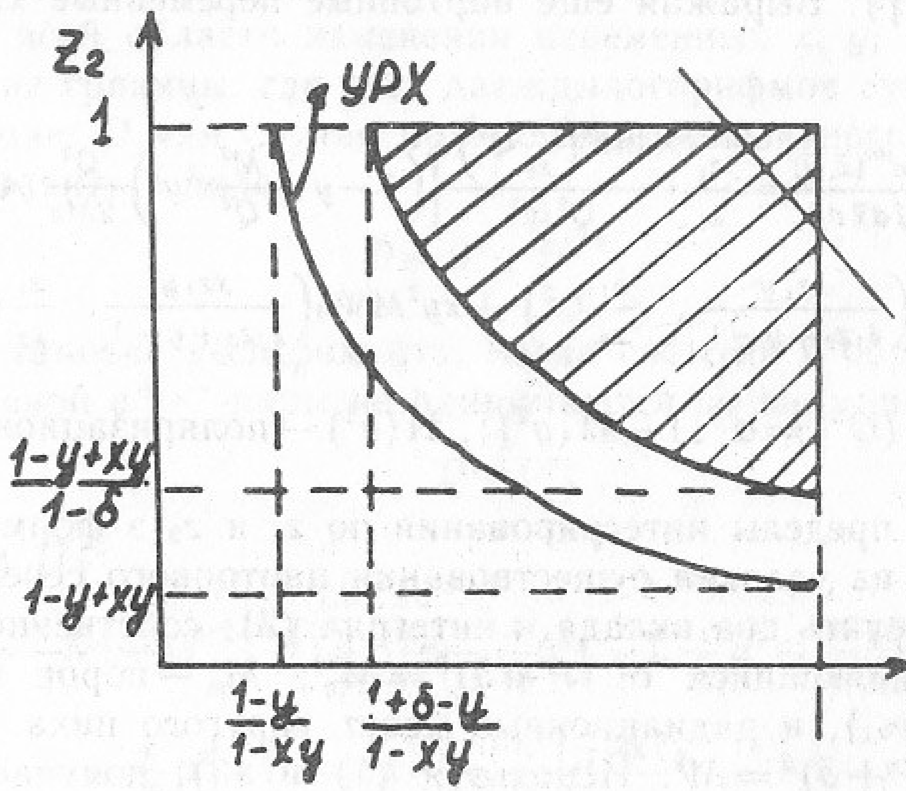

Рис. 2

3. ВЫХОД ЗА РАМКИ ГЛП

Как известно, в КХД решается задача учета всех поправок типа $\alpha\ (\alpha L)^n$. Она требует модификации как структурных функций $D(x,\ Q^2)$, так и жесткого сечения $d\sigma^{(hard)}$. В рамках же КЭД в силу малости параметра (αL) нет необходимости суммирования всех членов типа $\alpha(\alpha L)^n$, достаточно из них удержать только член $\sim\alpha$. Поэтому можно по-прежнему пользоваться формулой (3) с функциями $D(x,\ Q^2)$, определенными в (5) — (8), и только уточнить выражение для $d\sigma^{(hard)}$: в отличие от формулы (10) мы имеем теперь

$$\frac{d\sigma^{(hard)}(x, y)}{dx\,dy} = \frac{d\sigma^{(0)}(x, y)}{dx\,dy} + \frac{d\,\sigma^{(1)}(x, y)}{dx\,dy}\,, \tag{14}$$

где $d\sigma^{(1)}$ — жесткая поправка к $d\sigma^{(0)}$ относительного порядка α. Для того, чтобы получить эту поправку, нужно найти $d\sigma(x,\ y)/dx\ dy$ в α^3-порядке ТВ по электромагнитному взаимодействию и вычесть из него вычисленную в том же порядке правую часть формулы (3) с $d\sigma^{(hard)} = d\sigma^{(0)}$. Детали вычислений приведены в Приложении. Окончательный ответ имеет вид (см. также (15а)):

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma^{(hard)}(x, y)}{dx\,dy} &= \frac{d\sigma^{(0)}(x, y)}{dx\,dy}\Bigg(1 - \frac{\alpha}{\pi}\left[\frac{1}{2}\ln^2\!\left(\frac{1-z_+}{1-xy}\right) + \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{6} + \right.\\
&\left.+ f\left(\frac{1-y-xy\tau}{(1-xy)(1-z_+)}\right)\right]\Bigg) + \frac{\alpha}{Vx}\int\limits_0^{z_+}\frac{dz}{z_+-z}\Bigg\{\left[\left(1+\frac{1}{r_2^2}\right)\ln\frac{(1-z_+)^2}{xy(z_++\tau)} + \right.\\
&\left. + \left(\frac{z_+-z}{1-z}\right)^2\right] G(z, r_2) + \left[\left(1+\frac{1}{r_1^2}\right)\ln\frac{(1-xy)^2}{xy(z_++\tau)} + \left(\frac{z_+-z}{1-y+z}\right)^2\right] G(z, r_1) + \\
&+ \int\limits_{r_-(z)}^{r_+(z)} dr\,(z_+-z)\Bigg[\frac{2G(z, r)}{r^2\sqrt{y^2+4\tau xy}} - \frac{1}{(1-z_+)\,|r-r_2|}\left(\frac{(1+r^2)G(z, r)}{r^2(1-r)} - \right.\\
&\left. - \frac{(1+r_2^2)G(z, r_2)}{r_2^2(1-r_2)}\right) + \frac{1}{(1-xy)|r-r_1|}\left(\frac{(1+r^2)G(z, r)}{r^2(1-r)} - \frac{(1+r_1^2)G(z, r_1)}{r_1^2(1-r_1)}\right) + \\
&+ \frac{V\alpha^2(Q'^2)W_2(x', Q'^2)}{M\,xyr^2(1-r)}\Bigg(-\frac{2(1-y)(1-r)}{\sqrt{y^2+4\tau xy}} - \frac{(1-y-r)(r-r_2)}{|r-r_2|} + \\
&+ \frac{(1-r(1-y))(r-r_1)}{|r-r_1|}\Bigg)\Bigg]\Bigg\}\,.
\end{aligned} \tag{15}$$

В (15) использованы следующие обозначениия:

$$f(t)=\int\limits_0^t \frac{dz}{z}\ln(1-z),$$

$$G(z,r)=\alpha^2(Q'^2)\left[2M\mathbb{W}_1(x',Q'^2)+\frac{V}{M}\mathbb{W}_2(x',Q'^2)\left(\frac{1-y}{xy}-\tau\right)\right],$$

$$x'=\frac{xyr}{xyr+z},\qquad Q'^2=Q^2r,\qquad r_1=\frac{1-y+z}{1-xy},\tag{16}$$

$$r_2=\frac{1-z}{1-z_+},\qquad z_+=y(1-x),$$

$$r_\pm(z)=\frac{1}{2xy(\tau+z_+)}\left[2xy(\tau+z)+(z_+-z)\left(y\pm\sqrt{y^2+4\tau xy}\right)\right].$$

В формуле (15) пределы интегрирования по z проставлены несколько условно. Здесь, также как и в (3), существуют два вклада в интеграл. Один из них — собственно неупругий; для него

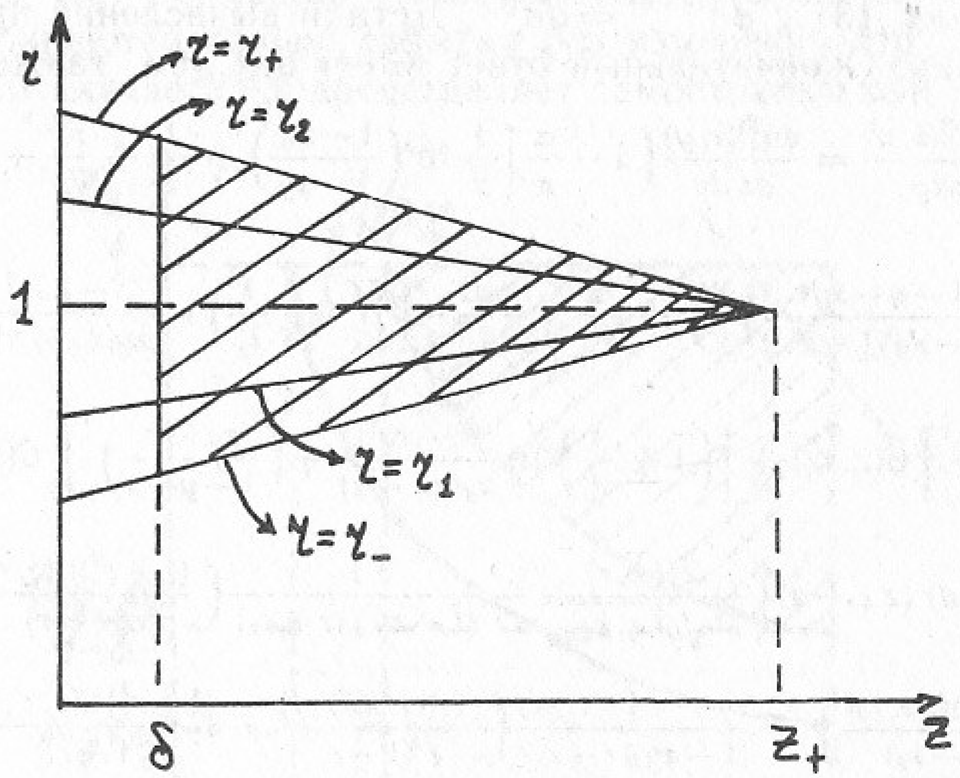

Рис. 3

область интегрирования по переменным r, z представлена на рис. 3 заштрихованным треугольником, интегрирование по z для этого вклада ведется от $\delta=(M_{th}^2-M^2)/V$ до $z_+=y(1-x)$. Второй

вклад, связанный с УРХ, дает отрезок $z=0$, $r_-(0)\leqslant r\leqslant r_+(0)$; для вычисления этого вклада нужно в формулах (15), (16) использовать значения $\mathbb{W}_{1,2}$ в упругом пределе, см. (13).

Заметим, что физический смысл переменных интегрирования таков: $z=(M_x^2-M^2)/V$, $r=Q'^2/Q^2$, где M_x — инвариантная масса системы адронов, рождающейся при столкновении фотона, имеющего виртуальность Q'^2, с мишенью.

Подчеркнем, что жесткое сечение в формуле (3) не содержит ни коллинеарных, ни инфракрасных сингулярностей — все они содержатся в структурных функциях $D(z, Q^2)$. В формуле (15) отдельные члены имеют сингулярности при $r=r_2$, $r=r_1$, $z=z_+$, $r=1$. Сингулярности в первых двух точках коллинеарные, в третьей — инфракрасные, и в четвертой — не физические, возникшие при интегрировании. Нетрудно убедиться, что все эти сингулярности сокращаются между собой, так что все точки являются не особыми.

Подынтегральное выражение в (15) можно переписать в виде, не содержащем явных инфракрасных расходимостей. Проводя для этой цели преобразования вида

$$G(z,r_1)\left(1+\frac{1}{r_1^2}\right)\ln\frac{(1-xy)^2}{xy(\tau+z_+)}+$$

$$+\int\limits_{r_-}^{r_+}dr\,\frac{z_+-z}{(1-xy)|r-r_1|}\left[\left(1+\frac{1}{r^2}\right)\frac{G(z,r)}{1-r}-\left(1+\frac{1}{r_1^2}\right)\frac{G(z,r_1)}{1-r_1}\right]=$$

$$=\frac{z_+-z}{1-xy}\,\mathscr{P}\int\limits_{r_-}^{r_+}\frac{dr}{(1-r)|r-r_1|}\left[\left(1+\frac{1}{r^2}\right)G(z,r)-\left(1+\frac{1}{r_1^2}\right)G(z,r_1)\right],$$

где символ $\mathscr{P}$ означает интегрирование особенности при $r=1$ в смысле главного значения, представим выражение (15) в эквивалентном виде:

$$\frac{d\sigma^{(hard)}(x,y)}{dx\,dy}=\frac{d\sigma^{(0)}(x,y)}{dx\,dy}\times$$

$$\times\left[1-\frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{1-xy}{1-z_+}\right)+\frac{1}{2}+\frac{\pi^2}{6}+f\left(\frac{1-y-\tau xy}{(1-xy)(1-z_+)}\right)\right]+$$

$$+\frac{\alpha}{Vx}\int\limits_0^{z_+}dz\int\limits_{r_-}^{r_+}dr\left\{\frac{xy(\tau+z_+)}{\sqrt{y^2+4\tau xy}}\times\right.$$

$$\times\left[\frac{G(z,r_2)}{(1-z)^2}+\frac{G(z,r_1)}{(1-y+z)^2}+\frac{2G(z,r)}{xyr^2(\tau+z_+)}\right]+\frac{\mathscr{P}}{(1-r)}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{(1-xy)|r-r_1|}\left(\left(1+\frac{1}{r^2}\right)G(z,r)-\left(1+\frac{1}{r_1^2}\right)G(z,r_1)\right)-\frac{1}{(1-z_+)|r-r_2|}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\left(1+\frac{1}{r^2}\right)G(z,r)-\left(1+\frac{1}{r_2^2}\right)G(z,r_2)\right)\right]+\frac{\alpha^2(Q'^2)\cdot MW_2(x',Q'^2)}{r_2(1-r)\,xy\tau}\times$$

$$\times\left[\frac{-2(1-r)(1-y)}{\sqrt{y^2+4\tau xy}}+\frac{(1-y-r)(r_2-r)}{|r_2-r|}-\frac{(1-r(1-y))(r_1-r)}{|r_1-r|}\right]\Bigg\}. \qquad (15а)$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

До сих пор все наши рассуждения велись так, будто в задаче есть только параметры α и $L=\ln(Q^2/m^2)$. Отсюда очевидно вытекало, что в данном порядке по α самая «выгодная» кинематика — та, в которой набирается «большой логарифм» L.

Как известно (см., например, [3, 12]), это не всегда так. Причиной неприменимости так называемой пиковой аппроксимации, основанной на выделении логарифмических вкладов, является резкая зависимость функции W_i от своих аргументов. В тех кинематических областях, где разрешено излучение жестких фотонов, может оказаться выгодным его излучение не в коллинеарной кинематике. При этом проигрыш в вероятности излучения (потеря L) компенсируется выигрышем в величине партонного сечения.

Следует поэтому среди поправок данного по α порядка отличать те, которые вводят в игру новые области изменения аргументов функций W_i, от тех, которые этого не делают. Для поправок 2-го типа классификация их по α и L остается справедливой, но для поправок 1-го типа она не работает.

Улучшение точности формулы (3) по сравнению с ГЛП требует вычисления поправок к D и поправок к $\sigma^{(hard)}$. Очевидно, что поправки к D относятся ко 2-му типу; первая, вычисленная нами поправка к $\sigma^{(hard)}$, очевидно, является поправкой 1-го типа; однако поправки высшего порядка к $\sigma^{(hard)}$, как и поправки к D, будут принадлежать ко 2-му типу.

В силу сказанного точность формулы (3) с функциями D из (5) — (8) и $\sigma^{(hard)}$ из (15) такова, что отброшенные члены имеют порядок $\frac{\alpha}{\pi}\cdot\delta_1$, где δ_1 — поправка в 1-ом приближении ТВ. Это

значит, что даже в тех случаях, когда поправка 1-го приближения ТВ достигает величины $\sim 100\%$ (исследованию высших поправок в таких ситуациях посвящен ряд работ, см., например, [13] и ссылки там), упомянутая точность не хуже 1%.

В работе авторов [15] приведены результаты расчета поправок 2-го типа в двухпетлевом приближении.

Конечно, мы рассматривали только те передачи Q^2, где можно пренебречь вкладом нейтральных слабых токов. Но от этого ограничения легко избавиться — достаточно использовать известную формулу для $d\sigma^{(0)}$ с учетом этого вклада.

Приложение

Поскольку поляризация вакуума включена в $\frac{d\sigma_0(x,y)}{dx\,dy}$, виртуальные лептонные РП первого порядка даются формфактором электрона и равны

$$\frac{d\sigma_{virt}}{dx\,dy}=\frac{d\sigma^{(0)}}{dx\,dy}\cdot\frac{2\alpha}{\pi}\left[\ln\frac{\lambda}{m}(L-1)-\frac{1}{4}L^2+\frac{3}{4}L+\frac{\pi^2}{12}-1\right]. \qquad (П1)$$

Суммируя их с РП за счет излучения мягких фотонов с частотой $\omega<\Delta\varepsilon$ (см. [13], формулы (43), (44)), получаем

$$\frac{d\sigma_{virt}}{dx\,dy}+\frac{d\sigma_{soft}}{dx\,dy}=\frac{d\sigma_0}{dx\,dy}\cdot\frac{\alpha}{\pi}\times$$

$$\times\left[(L-1)\ln\frac{(\Delta\varepsilon)^2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}+\frac{3}{2}L-\frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)-\frac{\pi^2}{6}-2-f\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\right], \qquad (П2)$$

где $\varepsilon_{1,2}$ — энергии начального и конечного электронов; θ — угол между их импульсами.

Сечение излучения фотонов с частотой $\omega>\Delta\varepsilon$ можно представить в виде

$$d\sigma^{(\gamma)}=\frac{\alpha\cdot\alpha^2(Q'^2)}{(2\pi)^3\,Q'^4}\,\frac{B_{\mu\nu}\,K^{\mu\nu}}{p_1P}\,\frac{d^3k}{\omega}\,\frac{d^3p_2}{\varepsilon_2}. \qquad (П3)$$

Здесь $Q'^2=-q'^2$, $q'=p_1-p_2-k$, $K_{\mu\nu}$ — тензор ГНР (см. [11], стр.170):

$$\frac{M}{\pi}K_{\mu\nu}=4W_2\left(\frac{Q'^2}{2Pq'},\ Q'^2\right)\left(P_\mu-q'_\mu\frac{(q'P)}{q'^2}\right)\left(P_\nu-q'_\nu\frac{(q'P)}{q'^2}\right)-$$

$$-4\,W_1\left(\frac{Q'^2}{2Pq'},\ Q'^2\right)\cdot M^2\left(g_{\mu\nu}-\frac{q'_\mu q'_\nu}{q'^2}\right), \tag{П4}$$

а $B_{\mu\nu}$ — лептонный комптоновский тензор (см., например, [14], формулы (11) — (14)):

$$B_{\mu\nu}=\left[-\frac{1}{\chi_1\chi_2}(Q^4+Q'^4)-2+2m^2Q'^2\left(\frac{1}{\chi_1^2}+\frac{1}{\chi_2^2}\right)\right]\times$$
$$\times\left(g_{\mu\nu}-\frac{q'_\mu q'_\nu}{q'^2}\right)+\left(\frac{4Q'^2}{\chi_1\chi_2}-\frac{8m^2}{\chi_2^2}\right)\left(p_{1\mu}-q'_\mu\,\frac{(q'p_1)}{q'^2}\right)\left(p_{1\nu}-q'_\nu\,\frac{(q'p_1)}{q'^2}\right)+$$
$$+\left(\frac{4Q'^2}{\chi_1\chi_2}-\frac{8m^2}{\chi_1^2}\right)\left(p_{2\mu}-q'_\mu\,\frac{(q'p_2)}{q'^2}\right)\left(p_{2\nu}-q'_\nu\,\frac{(q'p_2)}{q'^2}\right), \tag{П5}$$

где $\chi_{1,2}=2(p_{1,2}k)$. Здесь и далее мы пренебрегаем членами, которые дают зануляющийся при $m\to 0$ вклад в $\dfrac{d\sigma}{dx\,dy}$.

Проводя в (П3) свертку тензоров, переходя к переменным (1) и используя обозначения (16), с указанной точностью получаем

$$\frac{d\sigma^{(\gamma)}}{dx\,dy}=2\alpha y\int\frac{d^3k}{2\pi\omega}\left\{G(z,r)\times\right.$$
$$\times\left[\frac{1}{\chi_1\chi_2}\left(1+\frac{1}{r^2}\right)+\frac{2}{Q^4r^2}-\frac{2m^2}{Q^2r}\left(\frac{1}{\chi_1^2}+\frac{1}{\chi_2^2}\right)\right]+$$
$$+\frac{V\cdot\alpha^2(Q'^2)\,W_2(x',Q'^2)}{M\,xyr^2(1-r)}\left[-\frac{2(1-y)(1-r)}{Q^4}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{(1-z)(1-y-r)}{\chi_2Q^2}\left(1-\frac{r}{r_2}\right)-\frac{(1-y+z)(1-r(1-y))}{\chi_1Q^2}\left(1-\frac{r}{r_1}\right)\right]\right\}. \tag{П6}$$

Здесь член с W_2 не имеет ни коллинеарных, ни инфракрасных сингулярностей и целиком входит в жесткое сечение. Делая упомянутые пренебрежения, член с G в фигурных скобках (П6) представим в следующем виде:

$$\frac{1}{Q^2\chi_1}\left(\left(1+\frac{1}{r^2}\right)\frac{G(z,r)}{1-r}-\left(1+\frac{1}{r_1^2}\right)\frac{G(z,r_1)}{1-r_1}\right)+\left(\begin{matrix}\chi_1\to-\chi_2\\ r_1\to r_2\end{matrix}\right)+$$
$$+\frac{2G(z,r)}{Q^4r^2}+\left[\left(\frac{1}{(1-r_1)Q^2\chi_1}\left(1+\frac{1}{r_1^2}\right)-\frac{2m^2}{Q^2r_1\chi_1^2}\right)G(z,r_1)+\left(\begin{matrix}\chi_1\to-\chi_2\\ r_1\to r_2\end{matrix}\right)\right]. \tag{П7}$$

Здесь члены вне квадратных скобок не имеют коллинеарных сингулярностей. Для них, так же как для членов с W_2 в (П6), используя

$$\frac{d^3k}{2\pi\omega}=\frac{Q^2}{2\sqrt{y^2+4\tau xy}}\,\frac{d\varphi}{2\pi}\,dz\,dr,$$

где φ — азимутальный угол вылета фотона в системе $\vec{p}_1+\vec{P}-\vec{p}_2=0$ с полярной осью, направленной по $\vec{P}$, выполняем интегрирование по φ с помощью формул

$$\int\frac{d\varphi}{2\pi\chi_1}=\frac{\sqrt{y^2+4\tau xy}}{Q^2(1-xy)|r-r_1|};\qquad \int\frac{d\varphi}{2\pi\chi_2}=\frac{\sqrt{y^2+4\tau xy}}{Q^2(1-z_+)|r-r_2|}. \tag{П8}$$

Представляя $d^3k/2\pi\omega$ в виде $\dfrac{dz}{z_+-z}\,\dfrac{\omega^2d\Omega_k}{2\pi}$, члены в квадратных скобках в (П7) интегрируем по $d\Omega_k$, используя инвариантность $\omega^2 d\Omega_k$, в наиболее удобной системе отсчета, получая

$$\int\frac{\omega^2d\Omega_k}{2\pi}\frac{m^2}{\chi_{1,2}^2}=\frac{1}{2};\qquad \int\frac{\omega^2d\Omega_k}{2\pi\chi_1}=\frac{z_+-z}{2(1-xy)}\ln\left(\frac{Q^2(1-xy)^2}{m^2xy(\tau+z_+)}\right),$$
$$\int\frac{\omega^2d\Omega_k}{2\pi\chi_2}=\frac{z_+-z}{2(1-z_+)}\ln\left(\frac{Q^2(1-z_+)^2}{m^2xy(\tau+z_+)}\right). \tag{П9}$$

Оставшиеся невыполненными интегрирования должны вестись по r от r_- до r_+ и по z от 0 до $z_+-2\dfrac{\Delta\varepsilon}{\sqrt{V}}\sqrt{z_++\tau}$, так как в системе $\vec{P}+\vec{p}_1-\vec{p}_2=0$, $\omega=\dfrac{\sqrt{V}}{2}\dfrac{(z_+-z)}{\sqrt{z_++\tau}}$. Полностью сечение получаем, учитывая вклад (П2), где $\varepsilon_{1,2}$ и $\cos\theta$ должны быть взяты в той же системе $\vec{P}+\vec{p}_1-\vec{p}_2=0$.

Обратимся теперь к формуле (3) с $d\sigma^{(hard)}=d\sigma^{(0)}$. Разложение функций $D(z,\ Q^2)$ по степеням α в подынтегральном выражении невозможно из-за сингулярности при $z_{1,2}=1$. Выделим в интеграле область вблизи $z_{1,2}=1$ (см. рис.2), ограниченную неравенством

$$(1-z_1)(1-xy)+(1-z_2)(1-z_+)<\frac{2\Delta\varepsilon}{\sqrt{V}}\sqrt{z_++\tau}, \tag{П10}$$

(это ограничение соответствует ограничению $z>z_+-2\dfrac{\Delta\varepsilon}{\sqrt{V}}\times\sqrt{z_++\tau}$). Используя в этой области $D(z)=\dfrac{\beta}{2}(1-z)^{\beta/2-1}\times\left(1+\dfrac{3}{8}\beta\right)$, получаем, что ее вклад в поправку $\sim\alpha$ к $d\sigma^{(0)}$ есть

$$\frac{d\sigma^{(0)}}{dx\,dy}\left(\frac{3}{4}\beta+\frac{\beta}{2}\ln\left(\frac{4(\Delta\varepsilon)^2}{V}\frac{(z_++\tau)}{(1-z_+)(1-xy)}\right)\right). \qquad (\text{П}11)$$

В оставшейся области хотя бы одно из z_i не может быть равно 1, так что соответствующее $D(z,\ Q^2)$ в α-порядке равно $\frac{\beta}{4}\frac{1+z^2}{1-z}$, а другое, следовательно, может быть взято в нулевом порядке по α, т. е. $\delta(z-1)$; делая еще в оставшихся после снятия δ-функций интегралах замены $z_1=\frac{1-y+z}{1-xy}$, $z_2=\frac{1-z_+}{1-z}$, получаем вклад этой области в виде

$$\frac{\alpha(L-1)}{Vx}\int\limits_0^{z_+-\frac{2\Delta\varepsilon}{\sqrt{V}}\sqrt{z_++\tau}}\frac{dz}{z_+-z}\left[\left(1+\frac{1}{r_1^2}\right)G(z,r_1)+\left(1+\frac{1}{r_2^2}\right)G(z,r_2)\right]. \qquad (\text{П}12)$$

Вычитая из суммы $d\sigma_{virt}+d\sigma_{soft}+d\sigma^{(\gamma)}$ выражения (П11) и (П12), приходим к формуле (15).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Schwinger J.* Phys. Rev., 1949, v.76, p.790.
2. *Tsai Y.S.* Phys. Rev., 1961, v.122, p.1898.
   Meister N.T., Yennie D.R., Phys. Rev., 1963, v.130, p.1210.
   Motz J.W., Olsen H., Koch H.W., Rev. Mod. Phys., 1964, v.36, p.881.
   Maximon L.C., Rev. Mod. Phys., 1969, v.41, p.193.
3. *Mo L.W., Tsai Y.S.*, Rev. Mod. Phys., 1969, v.41, p.205.
4. *Tsai Y.S.* SLAG-PUB-848, Stanford, 1971.
   Ахундов А.А., Бардин Д.Ю., Шумейко Н.М., ЯФ, 1977, т.26, с.1251.
   Bardeen D.Yu., Schumeiko N.M., Nucl. Phys. 1977, v.B127, p.242.
   Бардин Д.Ю., Шумейко Н.М., ЯФ, 1979, т.29, с.969.
5. *Yennie D.R., Suura H.*, Phys. Rev., 1957, v.105, p.1378;
   Yennie D.R., Frautschi S.F., Suura H., Ann. Phys., 1961, v.13, p.379.
6. *Tsai Y.S.* SLAC-PUB-3129, Stanford, 1983.
7. *Кураев Э.А., Фадин В.С.*, ЯФ, 1985, т.41, с.733; Препринт ИЯФ СО АН СССР 84-43, Новосибирск, 1984.
8. *Altarelli G., Martinelli G.*, CERN 86-02, 47.
9. *Грибов В.Н., Липатов Л.Н.*, ЯФ, 1972, т.15, с.1218.
10. *Липатов Л.Н.*, ЯФ, 1974, т.20, с.181.
11. *Фейнман Р.* Взаимодействие фотонов с адронами.—М.: Мир, 1975.
12. *Ахундов А.А., Бардин Д.Ю., Шумейко Н.М.* Препринт ОИЯИ Е2-10147, Дубна, 1976.
    Шумейко Н.М. ЯФ, 1979, т.29, с.1571.
13. *Кураев Э.А., Меренков Н.П., Фадин В.С.* ЯФ, 1987, т.45, с.782
14. *Ахундов А.А., Бардин Д.Ю., Шумейко Н.М.* ЯФ, 1986, т.44, с.1517.
15. *Кураев Э.А., Меренков Н.П., Фадин В.С.* Препринт ИЯФ 87 .

Э.А. Кураев, Н.П. Меренков, В.С. Фадин

Вычисление радиационных поправок к сечению рассеяния электронов на ядрах методом структурных функций

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 5 июня 1987 г.
Подписано в печать 24.07 1987 г. МН 08298
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1,3 печ.л., 1,0 уч.-изд.л.
Тираж 180 экз. Бесплатно. Заказ № 101

Набрано в автоматизированной системе на базе фото-наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и отпечатано на ротапринте Института ядерной физики СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.