

21

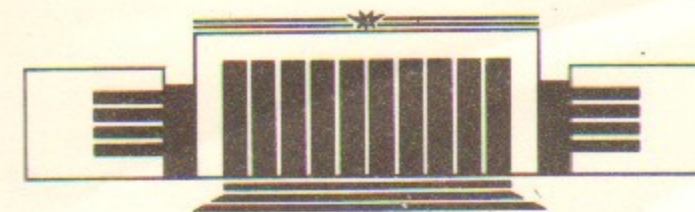


ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

Астрелин В.Т., Иванов В.Я.

ИТЕРАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ
ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ТОКА,
ОГРАНИЧЕННОГО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ЗАРЯДОМ

ПРЕПРИНТ 87-133



НОВОСИБИРСК

Итерационный алгоритм
определения плотности тока,
ограниченного пространственным зарядом

Астрелин В.Т., Иванов В.Я.

Институт ядерной физики
630090, Новосибирск 90, СССР

АННОТАЦИЯ

Предложен новый итерационный метод решения стационарных самосогласованных задач и проведено его сравнение с другими известными методами.

ВВЕДЕНИЕ

При решении самосогласованных задач формирования пучков заряженных частиц важное место занимает выбор метода определения плотности тока, эмиттируемого с поверхности, в условиях ограничения тока пространственным зарядом. В этом случае на поверхности эмиттера S должно выполняться условие равенства нулю нормальной компоненты самосогласованного электрического поля

$$E_n|_S = 0. \quad (1)$$

На практике обычно используют [1] метод установления, метод выделения прикатодной особенности (локальный «закон 3/2») или метод непосредственной аппроксимации [2] условия (1), который приводит к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$AJ + E_{n0} = 0, \quad (2)$$

где E_{n0} — нормальная компонента поля на катоде в отсутствие объемного заряда, J — вектор плотности тока, A — квадратная матрица, размерность которой равна числу точек N на эмиттере, в которых аппроксимируется условие (1). Неэкономичность метода установления для решения стационарных задач очевидна. Наиболее тонкими моментами использования «закона 3/2» являются выбор параметров эквивалентных элементарных диодов, аппроксимирующих поле прикатодной зоны, и релаксационных параметров, обес-

печивающих сходимость итерационного процесса. Глубокое методическое исследование этих вопросов проведено в статье Головина [1]. Справедливо критикуя недостатки, присущие данному методу, автор приходит к выводу (стр.1223), что «он почти никогда не сходится». Такой вывод находится в разительном противоречии с тем фактом, что именно «закон 3/2» является наиболее широко распространенным на практике методом решения самосогласованных задач, апробированным множеством исследователей, результаты которых подвергаются сомнению Головиным. На наш взгляд, сложность использования данной методики заключается в следующем. В окрестности эмиттирующих участков с малым радиусом кривизны требуется значительное измельчение параметров дискретизации объемного заряда и связанных с ними размеров элементарных диодов. Кроме того, в ряде случаев необходимо модифицировать «закон 3/2»: при эмиссии частиц в поперечном к направлению движения магнитном поле, при наличии в окрестности катода зарядового фона других потоков частиц и т. д. Основным же недостатком этого метода заключается в том, что для разномасштабных задач с элементами малого размера на катоде сходимость итерационного процесса существенно замедляется.

Основным недостатком используемой Головиным методики решения системы (2), как отмечается им самим, является необходимость решения на каждой нелинейной итерации N краевых задач, в каждой из которых рассчитывается одна траектория, а ее вклад в поле составляет строку матрицы A в то время, как вычисление плотности тока по «закону 3/2» содержит не более десятка арифметических операций. В последующей публикации [3] Головин несколько изменяет свое отношение к «закону 3/2» и предлагает комбинированный метод, в котором эмиттирующие участки делятся на «хорошие» и «плохие» по отношению к локальной одномерности прикатодной задачи. Для «хороших» участков плотность тока рассчитывается по «закону 3/2», а для «плохих» решается система (2), размерность которой теперь пропорциональна числу точек эмиссии на «плохих» участках. Ниже нами предлагается алгоритм вычисления плотности тока с выполнением условия (1), вычислительная сложность которого на каждой итерации эквивалентна сложности формулы «закон 3/2».

§1. АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ТОКА

Рассмотрим плоский диод с конечным значением напряженности поля $E_0 \leq 0$ на поверхности катода. Если принять потенциал катода равным нулю, то распределение потенциала в зазоре определяется уравнением Пуассона

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -4\pi\rho(x) = 4\pi J \sqrt{\frac{m}{2e\varphi}} \quad (3)$$

здесь ρ — плотность объемного заряда, J — плотность тока, e и m — заряд и масса покоя электрона. Умножив это уравнение на $d\varphi/dx$ и проинтегрировав по x , получим

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 - E_0^2 = 16\pi J \sqrt{\frac{m\varphi}{2e}} \quad (4)$$

Проводя вторичное интегрирование, получим искомое выражение для плотности тока

$$J = \frac{A}{x^2} \left(\sqrt{\varphi} + \frac{9}{16} \frac{A}{J} E_0^2 \right) \left(\sqrt{\varphi} + \frac{9}{8} \frac{A}{J} E_0^2 \right)^2, \quad A = \frac{1}{9\pi} \sqrt{\frac{2e}{m}} \quad (5)$$

Это выражение представляет собой закон эмиссии для конечного значения напряженности электрического поля на катоде и переходит в «закон 3/2» при $E_0 \rightarrow 0$. В дифференциальной форме при малых значениях E_0 это соотношение принимает вид

$$d(J^2) = -\frac{27}{8} \frac{A^2}{x^2} \varphi d(E_0^2) \quad (6)$$

Очевидно, его можно рассматривать как правило изменения плотности тока, необходимого для уменьшения величины электрического поля на катоде от малого значения E_0 до нуля. В этом случае φ и x можно рассматривать как величины, характеризующие для реального эмиттера эквивалентный диод: $\varphi(x)$ — потенциал в точке, отстоящей на некоторое малое расстояние x от поверхности эмиттера по нормали. Отличие от плоского диода проявится, в первую очередь, в величине коэффициента в формуле (6). Однако, имея ввиду проведение итерационного процесса с последовательным изменением плотности тока, согласно (6), можно уменьшить величину этого коэффициента, уменьшив тем самым скорость приближения к истинному решению, чтобы предотвратить

значительное проникновение в процессе итераций в нефизичную область $E_0 > 0$. Понятно, что в этом случае требования к выбору величины x не являются столь жесткими, как при использовании «закона 3/2».

Некоторые затруднения возникают в связи с тем, что физическим условием существования эмиссии является условие $E_0 \leq 0$, в то время как при установлении решения в итерационном процессе знак E_0 может меняться. Кроме того, при $E_0 \approx 0$ вблизи поверхности катода образуется особенность в распределении объемного заряда $\rho \sim x^{-2/3}$, которая при $E_0 > 0$ может нарушить ход итерационного процесса. Для учета этих обстоятельств в формулу (6) необходимо ввести корректирующий множитель B , доопределяющий величину $d(J^2)$ при $E_0 > 0$ и ускоряющий выход счетной схемы из этой области.

В целом предлагаемый алгоритм заключается в проведении итераций по следующей схеме:

1. Решается краевая задача для уравнения Пуассона с объемным зарядом ρ_v , полученным на предыдущей итерации

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho_v; \quad (7)$$

2. Плотность тока k -й трубки тока пересчитывается по формуле

$$J_{k,v+1}^2 = \max \left\{ 0, J_{k,v}^2 - A^2\varphi \left(\frac{E_0}{d} \right)^2 B \right\}, \quad (8)$$

где φ — потенциал точки, отстоящей на расстоянии d по нормали к поверхности эмиттера. Эмпирически подобранный коэффициент B принимался равным

$$B = \begin{cases} -1, & E_0 \leq 0, \\ 10, & E_0 > 0. \end{cases}$$

Численное интегрирование траектории начинается из точки, отстоящей на расстоянии $s \ll d$ по нормали от эмиттера. Начальная скорость принимается равной $v_0 = \sqrt{2e\varphi} (s/d)^{2/3}$, что соответствует плоскому диоду. В общем случае при $s < d$ малая начальная скорость практически не влияет на результат. В случае $\varphi < 0$ траектория не эмиттируется, и для предотвращения ключевого режима записания траекторий принимается $J_{k,v+1} = (1 - \omega_v) J_{k,v}$, где ω_v — коэффициент релаксации;

3. Рассчитываются траектории частиц в электрических и магнитных полях. Из уравнения неразрывности

$$\operatorname{div} \bar{\rho}_{v+1} \bar{v} = 0 \quad (9)$$

находится распределение объемного заряда и магнитного поля пучка на основе закона полного тока;

4. Производится релаксация объемного заряда по схеме

$$\rho_{v+1} = \omega_v \bar{\rho}_{v+1} + (1 - \omega_v) \rho_v. \quad (10)$$

Аналогичным образом релаксируется собственное магнитное поле пучка;

5. Производится проверка критериев окончания итерационного процесса

$$\|J_{v+1} - J_v\| < \varepsilon_1, \quad \|(E_n^{(v)})|_S\| < \varepsilon_2 \quad (11)$$

для заданных малых величин ε_1 и ε_2 . При невыполнении указанных условий процесс повторяется, начиная с шага 1. При этом используется полученное на шаге 4 значение ρ_{v+1} .

§2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Вышеприведенный алгоритм включен в пакет прикладных программ POISSON-2 [4] — [6], для которого расчет электростатических полей в двумерных областях произвольной формы проводится методом граничных коллокаций с аппроксимацией решения интегральных уравнений теории потенциала кубическими сплайнами. Проверка сходимости итерационного процесса проводилась для модели плоского диода и диода с пирсовской геометрией электродов. Она показала, что при начальной плотности заряда $\rho_0 = 0$ алгоритм (7) — (11) сходится плохо, что вызвано отсутствием согласованности величин ρ , v и φ на первых итерациях и приближенным характером зависимости (6) при конечных значениях E_0 . Поэтому для решения задач несколько итераций проводилось с использованием «закона 3/2», а затем промежуточный результат уточнялся алгоритмом (7) — (11). Для диода с плоскими электродами использовались следующие счетные параметры: число узлов коллокаций на поверхностях — 44, узлов равномерной пространственной сетки — 143, траекторий — 10, радиусы катода и анода $R = 1$ см, диодный зазор $D = 1$ см, потенциал анода $U = 1$ кВ.

Итерационные параметры были выбраны равными $2s=d=0,1$ см. Первые четыре итерации проводились с применением «закона $3/2$ », где $\omega=0,3$, а следующие — с алгоритмом (7) — (11) при $\omega=0,7$. В процессе расчета третий знак в величине тока диода установился за 9 итераций, а электрическое поле на катоде E_0 по отношению к вакуумному уменьшилось в 20—40 раз. Отличие установившегося значения тока $I=0,226$ А от теоретического $I_{\text{теор}}=0,232$ А объясняется дискретностью представления пространственного заряда в прикатодной области.

Для модели пирсовского диода были выбраны следующие параметры: число узлов коллокаций — 26, узлов сетки — 168, траекторий — 10, $R=1$ см, $d=4$ см, $U=100$ кВ, $5s=d=0,2$ см. Итерационный процесс проводился так же, как и для плоского диода. За 9 итераций установился ток $I=14,7$ А ($I_{\text{теор}}=14,5$ А). Время решения приведенных задач на ЭВМ ЕС-1061 составило около 6,5 мин.

Для сравнения приведем результаты решения этих же задач с применением «закона $3/2$ » с оптимизированными итерационными параметрами. В случае плоского диода решение $I=0,209$ А с установившимся третьим знаком тока получено за 8 итераций, а пирсовского диода ($I=14,0$ А) — за 7 итераций.

Таким образом, предлагаемый алгоритм позволяет провести итерационный процесс для получения самосогласованного решения за количество итераций, сопоставимое с их количеством в «законе $3/2$ », причем с более высокой точностью решения. Отметим, что в приведенных здесь примерах ограничение в форме поверхности катода (которая выбрана параллельно линии узлов сетки) связано с точечным представлением пространственного заряда в ППП POISSON-2. Для повышения точности решения задач с произвольной формой катода необходимо использовать какой-либо способ распределения заряда по ячейке пространственной сетки. В настоящее время проводится апробация этих алгоритмов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Головин Г.Т. О точности и эффективности различных методов решения стационарных самосогласованных задач. — Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1985, т.25, № 8, с.1220—1234.
2. Мокин Ю.И. Алгоритм определения плотности тока эмиссии в задаче о фокусировке пучка. — Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1980, т.20, № 3, с.671—681.
3. Головин Г.Т. Комбинированный метод решения двумерных стационарных самосогласованных задач. — Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1987, т.27, № 5, с.700—710.
4. Астрелин В.Т., Иванов В.А. Пакет программ для расчета характеристик интенсивных пучков релятивистских заряженных частиц. — Автометрия, 1980, № 3, с.92—99.
5. Астрелин В.Т. Расчет источников сильнооточных релятивистских электронных пучков. — Автореф. дис. канд. техн. наук. — Новосибирск, 1986. — 8 с.
6. Иванов В.А. Методы автоматизированного проектирования приборов электроники. Ч. II. Методы решения задач электронной оптики. — Новосибирск: 1986, изд-во Ин-та матем. СО АН СССР. — 198 с.

Астрелин В.Т., Иванов В.Я.

**Итерационный алгоритм
определения плотности тока,
ограниченного пространственным зарядом**

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 11 сентября 1987 г.
Подписано в печать 13.10.1987 г. МН 08405
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 0,8 печ.л., 0,7 уч.-изд.л.
Тираж 250 экз. Бесплатно. Заказ № 133

*Набрано в автоматизированной системе на базе фото-
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и
отпечатано на ротапринте Института ядерной физики
СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*