

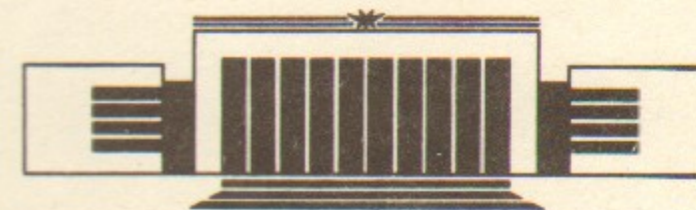


8
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

А.Р. Житницкий

ДРОБНЫЙ ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ЗАРЯД, ТОРОНЫ И
НАРУШЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ СИММЕТРИИ
В CP^{N-1} МОДЕЛИ

ПРЕПРИНТ 87-15



НОВОСИБИРСК

ДРОБНЫЙ ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ЗАРЯД, ТОРОНЫ И НАРУШЕНИЕ
ДИСКРЕТНОЙ СИММЕТРИИ В CP^N МОДЕЛИ

А.Р. Житницкий

Основываясь на классификации вакуумных состояний, допускающих дробные $\sim 1/N$ топологические числа, построено явное решение флуктуации, соединяющих эти вакуумы. Решение является самодуальным и минимизирует действие. Вычислен вклад соответствующей флуктуации в величину $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ в суперсимметричном варианте CP^1 модели. Он оказывается конечным. Этот результат указывает на существование спонтанного нарушения дискретной киральной симметрии. Обсуждается возможность описания флуктуаций с $Q \sim 1/N$ вне рамок квазиклассики.

I. Введение

В предыдущей работе [1] было показано, что во многих моделях (в том числе и КХД) класс допустимых калибровочных преобразований включает в себя не только преобразования с целыми, но и с дробными ($Q \sim 1/N$) топологическими числами. Это приводит к важным физическим следствиям. В частности, такая классификация определяет количество вакуумных секторов полной теории, возможность (или отсутствие таковой) нарушения дискретных симметрий в модели и т.д. Отметим, что в [1] был проанализирован широкий класс моделей, к которым, с одной стороны, применима упомянутая выше классификация, а с другой стороны — применимы различные динамические схемы расчета. Согласованность результатов является сильным аргументом в пользу правильности классификации.

Цель настоящей статьи — проанализировать этот круг вопросов в CP^{N-1} моделях (и ее суперсимметричных модификациях) [2,3]. Как известно [1], в этих моделях также допустимы дробные значения Q . Вопросу — как реализовать эти дробные Q , то есть как описать соответствующие вакуумные флуктуации и посвящена настоящая работа. В этом смысле CP^{N-1} модель является теоретической лабораторией, помогающей понять роль дробных Q при анализе физических теорий (КХД).

Напомним, что причина допустимости дробных Q наиболее явно видна в моделях типа глюодинамики (и ее суперсимметричном обобщении), где отсутствуют поля фундаментального представления (кварки). В этом случае калибровочной группой является не $SU(N)$, а $SU(N)/Z_N$, где $Z_N = \exp\{2\pi i k/N\}$ — элементы центра, принадлежащие группе и не изменяющие вида полей

присоединенного представления, глюонов A_μ . Действительно $A'_\mu = Z_N^{-1} A_\mu Z_N = A_\mu$. В этом случае на калибровочную матрицу могут быть наложены менее жесткие, чем обычно* граничные условия, именно: $U(x=+\infty) = Z_N U(x=-\infty)$. Действительно в рассматриваемом случае глюон не "замечет" появившегося дополнительно фактора Z_N . Легко убедиться, что это приводит к допустимости вакуумных состояний с дробными $\sim 1/N$ топологическими числами, так как последние определяются лишь условиями на границе.

Введение полей фундаментального представления наивно нарушает $SU(N)/Z_N$ симметрию. Однако для класса моделей классификация, основанная на центре, и в этом случае может быть сохранена, если имеется подходящая дополнительная группа инвариантности [1]. CP^{N-1} модели как раз относятся к этому типу теорий. В этом случае, наряду с глобальной $SU(N)$ инвариантностью, лагранжиан обладает локальной $U(1)$ - симметрией. Это приводит к тому, что поля фундаментального представления $n^i(\psi^i)$ $i=1, N$ не изменяют своего вида под действием суперпозиции преобразований из центра $Z_N \in SU(N)$ и $U(1)$ - преобразований $\exp\{i\alpha\}$ с фазой $\alpha = \frac{2\pi k}{N}$, аналогично тому, как в глюодинамике поля не изменялись под действием $Z_N: A'_\mu = Z_N^{-1} A_\mu Z_N = A_\mu$. Это означает, что соответствующие преобразования должны быть отождествлены с единичным, точно так же как отождествлены матрицы $U(x)$ и $Z_N U(x)$ в глюодинамике. Формально группой является не $SU(N) \times U(1)$, а $G = SU(N) \times U(1) / Z_N$ и $\pi_1(G) \sim Z_N$.

* Стандартные условия $U(x=+\infty) = U(x=-\infty)$ приводят к классификации, допускающей вакуумные состояния с целыми топологическими числами.

В конечном счете это приводит к допустимости дробных значений $Q \sim 1/N$ [1].

Отметим, что впервые факт существования дробного топологического заряда в 2-х мерных теориях отмечался в [4] основываясь на динамическом решении (методе "бозонизации"). Топологическая природа результата [4] была выявлена в [1].

Вернемся к обсуждению CP^{N-1} модели. Как проявляют себя обнаруженные выше N вакуумных состояний? Реализация этих вакуумов наиболее яркая в суперсимметричном варианте CP^{N-1} . В этом случае, как известно, модель имеет наивную киральную симметрию $\psi \rightarrow \exp\{i\beta\gamma_5\}\psi$, нарушаемую аномалией:

$$\partial_\mu q_\mu = 2N Q, \quad Q = \frac{1}{4\pi} \int \epsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu} d^2x \quad (B1)$$

Однако дискретная симметрия степени N при этом сохраняется. Обсуждаемые выше, вакуумные состояния с дробным $\sim 1/N$ топологическим числом в точности способны нарушить спонтанно эту дискретную киральную симметрию и обеспечить $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$ в согласии с $1/N$ разложением [3]. Действительно, киральные заряды Q_5 вакуумных состояний с дробным $\sim 1/N$ топологическим числом принимают значения в точности $Q_5 = 0, 2, \dots, 2(N-1)$. В этом легко убедиться, в частности, из аномалии B1. Суперпозиция таких состояний

$$|\Omega_Q\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} e^{i \frac{2\pi k Q}{N}} |k\rangle \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (B2)$$

в точности способна обеспечить ненулевое значение оператора $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$, имеющего киральность два.

Отметим, что стандартные вакуумные состояния с целым топологическим числом характеризуются киральностями $Q_5 = 0, 2N, \dots$ и способны обеспечить лишь $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$. Инстантоны, которые явно реализуют переходы между такими вакуумами действительно

дают ненулевой вклад лишь в величины типа $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$ [5].

Главный итог приведенных выше рассуждений состоит в следующем. Утверждение о неравенстве нулю конденсата $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$ (подтверждаемое анализом предела $N \rightarrow \infty$) обязательно означает спонтанное нарушение дискретной киральной симметрии. В свою очередь это означает выбор одного из имеющихся в наличии N вакуумных состояний (B2), являющихся, в свою очередь суперпозициями вакуумом с $Q_5 = Q_2 \cdot 2(N-1)$. Из вида аномалии (B1) это с необходимостью означает существование в теории флуктуаций с дробным $\sim 1/N$ топологическим зарядом. Наша цель — найти способ описания таких флуктуаций, удовлетворяющих условию, самодуальности и, тем самым, минимизирующих действие.

Аналогичная задача в чистой глюодинамике решена с помощью так-называемых твистованных граничных условий [6], позволяющих явно реализовать дробные Q . Именно, найдены решения классических уравнений-тороны [7], удовлетворяющие уравнению самодуальности, имеющие $Q = k/N$ и действие $S = \frac{8\pi^2 k}{g^2 N}$. Такое описание дробных Q с помощью твистованных граничных условий является вполне удовлетворительным в отсутствие полей фундаментального представления. Если же ввести кварки, то классификация, как объяснялось выше, сохраняется. Однако описание полей фундаментального представления с помощью твистованных граничных условий приводит к различного рода сингулярностям. Их происхождение легко понять из конструкции τ Хоффа [6, 7] рис.1. Вдоль пути "a" поле приобретает фазу (в обозначениях τ Хоффа) $\psi'_a = P Q \psi$, а вдоль "b" соответственно фазу $\psi'_b = Q P \psi = P Q e^{i \frac{2\pi}{N}} \psi + \psi'_a$, и отличающегося от

ψ'_a на Z_N . Как объяснялось выше только присоединенное представление не "замечает" этого фактора и остается однозначным.

Поэтому ниже предлагается другой способ описания того-же явления в присутствии полей фундаментального представления.

В этом смысле CD^{N-1} модели являются подходящим "испытательным стендом" для изучения флуктуаций с дробными Q . Действительно, и в КХД и в CD^{N-1} моделях с одной стороны классификация допускает существование дробных Q (и это подтверждается как пределом больших N так и анализом СКХД [1]), а с другой — в обеих теориях присутствуют поля фундаментального представления и поэтому реализация дробных Q с помощью твистованных граничных условий по некоторым причинам неудовлетворительна.

Коротко опишем основную идею при конструировании флуктуаций с дробными Q . Вместо Евклидова пространства времени R^2 с помощью стереографической проекции вводится S^2 (рис.2). Тогда любое топологически-нетривиальное решение в R^2 с $\oint_{K \rightarrow \infty} A_\mu dx_\mu \neq 0$ означает существование струны при описании теории, определенной на S^2 . Действительно, как видно из рис.2, бесконечно большому контуру в R^2 соответствует малая ϵ окрестность вокруг струны в S^2 . Более того, легко убедиться, что выражение для векторного потенциала A_μ соответствующего стандартному инстантонному решению в SO^2 в точности такое, как если бы в центр сферы (рис.2) поместить монополь и изучать его потенциал в струнной калибровке на сфере S^2 . Это наблюдение подсказывает способ описания топологически-нетривиальных флуктуаций в CD^{N-1} моделях, так как соответствующие методы описания монополей хорошо изучены. Избавиться от сингулярности можно, в частности, с помощью метода Ву-Янга [8].

Именно, на северном и южном полушариях можно определить различные решения и сшить их с помощью допустимой калибровочной функции на экваторе. Мы используем, однако другой путь, часто применяемый в последнее время в задачах о солитонах, скирмионах и т.д. [9-11]. Основные идеи заимствованы именно из этих работ.

Вместо двух координат на S^2 мы вводим третью (фиктивную) степень свободы, так что, по существу переходим к описанию на $S^3 \sim SU(2)$. От этой фиктивной степени свободы зависят лишь фазы физических полей. Но возможность "подкрутить" эту фазу и обеспечивает всюду регулярное описание, см. подробнее разделы 2, 3.

Чтобы пояснить весь этот круг вопросов, в разделах 2, 3 описывается инстантон на сфере и проводится аналогия с задачей о монополе. В разделе 4 обсуждается тороноподобное решение в CP^2 . Этот термин подчеркивает тот факт, что решение является самодуальным, оно минимизирует действие, $S = 2\pi Q$ и имеет топологический заряд, $Q = 1/2$, т.е. обладает всеми свойствами, присущими торону [7]. Одно из приложений этого решения - квазиклассическое вычисление конденсата $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ в суперсимметричной CP^2 - модели - также рассмотрено в 4 разделе. В разделе 5 обсуждается роль топологических флуктуаций с $Q = 1/2$ в физике больших расстояний для несуперсимметричной CP^2 модели. С некоторыми дополнительными предположениями, вне рамок квазиклассики, удастся найти вклад соответствующих флуктуаций ($Q = 1/2$) в плотность энергии вакуума \mathcal{E} . Этот вклад оказывается положительным, $\mathcal{E} > 0$, что согласуется с результатами $1/N$ разложения. Напомним, что в КХД знак энер-

гии вакуума обратный. На этом различии акцентировалось ранее внимание [12] при анализе низкоэнергетических теорем в CP^{N-1} моделях и КХД.

2. В этом разделе мы проведем аналогию между инстантоном в CP^2 и монополю; поясним природу возникающих сингулярностей, обусловленную топологической нетривиальностью объекта и опишем в общих чертах подход, свободный от сингулярностей.

Действие CP^2 теории определяется следующим образом [2, 3]:

$$S = \frac{1}{f} \int d^4x |D_\mu n|^2, \quad D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu$$

$$A_\mu = -i\bar{n}\partial_\mu n, \quad \bar{n}n = 1 \quad (1)$$

Инстантонное решение с топологическим зарядом

$$Q = \frac{1}{2\pi} \oint_{|x| \rightarrow \infty} A_\mu dx^\mu = \frac{1}{4\pi} \int d^4x \epsilon_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2)$$

равным единице, выглядит следующим образом [2]:

$$n = \begin{pmatrix} \lambda \\ z \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{|\lambda|^2 + |z|^2}}, \quad z = x_1 + i x_2 \quad (3)$$

Здесь $|\lambda|$ имеет смысл размера инстантона, расположенного в начале координат. Теперь отобразим координатное пространство $R^2 \subset S^2$ с диаметром, равным инстантонному размеру: $2R = \lambda$ рис.2. Так что координатное пространство описывается двумя углами θ, φ , совпадающими (для топологического заряда 1) с соответствующими углами конфигурационного пространства.

Решение (3) переписывается в виде:

$$n = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ \sin \theta/2 e^{i\varphi} \end{pmatrix} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + |z|^2}} = \cos \theta/2 \quad \lambda = 2R$$

$$\frac{|z|}{\sqrt{\lambda^2 + |z|^2}} = \sin \theta/2 \quad \text{tg } \varphi = x_2/x_1 \quad (4)$$

Легко убедиться, что решению (4) отвечают следующие выражения для потенциала $A_\mu(1)$ и напряженности $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$:

$$A_\theta = 0, \quad A_\varphi = \frac{1}{R \sin \theta} \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos \theta), \quad F_{\theta\varphi} = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta A_\varphi) \stackrel{(5a)}{=} = \frac{1}{2R^2}$$

$$Q = \frac{1}{2\pi} \oint A_\mu dx^\mu = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_\varphi \sin \theta d\varphi = 1 \quad (5b)$$

В (5a) легко узнать выражение для поля монополя, а соотношение (5b) демонстрирует наличие струны в точке $\theta = \pi$.

Таким образом, определяя теорию на сфере, и, тем самым регуляризуя ее на больших расстояниях, мы приходим к сингулярностям иного рода. К счастью, хорошо известно, как обходиться с такими сингулярностями [9-II]. Именно, замечаем, что комплексный спинор (4) обладает 3 степенями свободы, а не двумя, как записано в (4). Действительно, имеется лишь одно ограничение $\bar{n}n = 1$ на четыре вещественных параметра. Имея это в виду, введем в (4) общую фазу, $\exp\{i\alpha\}$ и вычислим величину $A_\mu dx^\mu$. При этом индекс пробегает не два значения θ, φ , а три — θ, φ, α :

$$A_\mu dx^\mu = -i \bar{n} dn = \cos^2 \frac{\theta}{2} d\alpha + \sin^2 \frac{\theta}{2} d\beta \quad (6)$$

$$\varphi = \beta + \alpha$$

Учитывая, что метрика в данном случае равна*

$$ds^2 = \frac{1}{4} d\theta^2 + \cos^2 \frac{\theta}{2} d\alpha^2 + \sin^2 \frac{\theta}{2} d\beta^2$$

легко убедиться, что потенциал A_μ нигде не сингулярен:

$$A_\theta = 0, \quad A_\alpha = \cos \frac{\theta}{2}, \quad A_\beta = \sin \frac{\theta}{2} \quad (7)$$

Старое (сингулярное) выражение для потенциала (5a) легко получить из (6) положив $\alpha = 0$ и учитывая вид метрики

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$$

Отметим, что аналогичные конструкции расширения пространства с целью исключения сингулярностей применяются в послед-

* В этом легче всего убедиться, вычислив $ds^2 = \sum_{i=1}^4 dx_i^2$, где $x_1 = \cos \frac{\theta}{2} \cos \alpha$, $x_2 = \cos \frac{\theta}{2} \sin \alpha$, $x_3 = \sin \frac{\theta}{2} \cos \beta$, $x_4 = \sin \frac{\theta}{2} \sin \beta$.

нее время в широком классе задач. Наиболее известная из которых видимо связана со скирмионом. В последнем случае требуется доопределения теории на нефизическое пространство и формальное расширение группы $SU(2)$ до $SU(3)$ [10].

Подведем итог. Для описания флуктуаций с дробным топологическим зарядом необходима инфракрасная регуляризация. Один из возможных путей такой регуляризации — наложение твистованных граничных условий [6, 7]. Другая возможность связана с компактификацией на сферу. В этом случае возникают сингулярности иного свойства. Формальный путь их преодоления хорошо известен и применим как для струн с целым, так и полуцелым потоком (именно полуцелые потоки возникают в теории монополи в группе $SU(2)/Z_2$, см., например [13]). Инстантон, описанный выше, аналогичен монополю с целым зарядом; торон (описываемый ниже) с полуцелым.

Выше обсуждена лишь идейная сторона вопроса на простом примере. Подходящий формальный аппарат, приспособленный для наших целей, известен в математике давно; в физических приложениях он применялся, в частности, при вычислении многоинстантонного вклада в производящий функционал CP^{N-1} моделей [5, 14]. Ниже коротко обсуждаются необходимые для дальнейшего математические сведения из этих работ.

3. Обозначим координаты точек на S^2 (Рис.2) через z_a . Тогда связь между z_a и $X_\mu \in R^2$ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} z_\mu &= \frac{4R^2}{4R^2 + X^2} X_\mu & \mu = 1, 2; \quad a = 1, 2, 3 \\ z_3 &= R \frac{4R^2 - X^2}{4R^2 + X^2} & X^2 &= X_\mu X_\mu \\ X_\mu &= 2R \frac{z_\mu}{R + z_3} & z^a z^a &= R^2 \end{aligned} \quad (8)$$

Вместо поля $n^\alpha(x_\mu)$, определенного на R_2 введем поле $\xi^\alpha(z)$, определенное на сфере S_2 и принимающее в точности значения $n^\alpha(x_\mu)$, когда x_μ и z_a связаны (8):

$$\xi^\alpha(z) = n^\alpha(x_\mu(z)) \quad (9)$$

Далее, вместо координат z_a введем матрицу $g \in SU(2)$, описывающую три степени свободы:

$$g = u(x) e^{i\tau \frac{\sigma^3}{2}}, \quad u(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{4R^2}}} \left[1 + \frac{i x_2 \sigma_1}{2R} - \frac{i x_1 \sigma_2}{2R} \right] \quad (10)$$

$$\frac{z^a \sigma^a}{R} = g \sigma^3 g^{-1}, \quad g^+ g = 1$$

Такое расширение координатного пространства аналогично обсуждавшемуся в разделе 2 введению дополнительного угла α . Здесь эту роль берет на себя τ . Фиктивность τ проявляется в том, что любые преобразования $g \rightarrow g' = g \exp\{i\omega \frac{\sigma^3}{2}\}$ не изменяют физических координат z_a . Действительно:

$$\frac{z^a \sigma^a}{R} = g \sigma^3 g^{-1} = g' e^{i\omega \frac{\sigma^3}{2}} \sigma^3 e^{-i\omega \frac{\sigma^3}{2}} g'^{-1} = g' \sigma^3 (g')^{-1} \quad (11)$$

Воспользуемся этим и определим зависимость ξ от τ таким образом, чтобы при изменении τ , ξ_a меняло лишь фазу:

$$\xi^\alpha(g e^{i\omega \frac{\sigma^3}{2}}) = e^{-i\omega Q} \xi^\alpha(g). \quad (12)$$

Легко понять, что смысл Q — топологический заряд, равный целому или полуцелому, в зависимости от того, какую фазу приобретает поле ξ^α сделав полный оборот по бесконечно большому кругу. Действительно, при $|x| \rightarrow \infty$, $u(x) \rightarrow -i \sigma_2 \exp\{i\varphi \frac{\sigma^3}{2}\}$. и согласно (12) ξ^α зависит от угла φ как $\exp\{-i\varphi Q\}$, что и поясняет утверждение о смысле величины Q , как топологическом заряде. Легко убедиться, что описание с помощью матриц g , заменяющих координаты z_a , свободно от сингулярностей [14]. Это в точности аналогично тому, как введе-

ние дополнительного угла α в разделе 2 позволило написать всюду регулярное выражение для полей.

Поясним на другом языке причину исчезновения разрывов для $Q = 1/2$ при введении лишней степени свободы τ . При стандартном описании поворот на угол 2π и, тем самым, возврат в исходную точку приводит к фактору (-1) у поля ξ^α (скачок, так как в одной и той-же точке z^a поле равно ξ^α или $-\xi^\alpha$ в зависимости от направления подхода). Введение параметра τ приводит к тому, что точке z^a соответствует целое семейство g , и при повороте на 2π мы приходим к величине $g' \neq g$ (хотя $z^a = z'^a$ (11)). Тем самым поля определены однозначно. Учитывая, что физические величины, в том числе действие, не зависят от τ вовсе, можно проводить вычисления в расширенном пространстве. Окончательные формулы от τ не зависят.

Перейдем к описанию действия в терминах $\xi(g)$ [14]. Для этого вместо операции дифференцирования $\partial/\partial x_i$: введем операторы:

$$I_+ = -\frac{e^{i\tau}}{2R} \left\{ (4R^2 + |z|^2) \frac{\partial}{\partial z} - i \bar{z} \frac{\partial}{\partial \tau} \right\}$$

$$I_- = +\frac{e^{-i\tau}}{2R} \left\{ (4R^2 + |z|^2) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + i z \frac{\partial}{\partial \tau} \right\} \quad (13)$$

$$I_3 = -i \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad I_\pm = I_1 \pm i I_2$$

удовлетворяющие стандартной алгебре $[I_i, I_j] = i \epsilon_{ijk} I_k$. Вместо интегрирования по $dx_1 dx_2$ введем интегрирование по dg , такое, что

$$\int dg = 1, \quad dg \rightarrow \frac{4R^2}{\pi} \frac{dx_1 dx_2}{(4R^2 + x^2)^2} \quad (14)$$

После всех этих предварительных замечаний запишем действие (I) в терминах $\xi(g), g, z_a$ следующим образом [14]:

$$S = \frac{4\pi}{f} \int dg |\gamma_a \xi|^2 \quad \gamma_a = \bar{I}_a - \bar{\xi} \bar{I}_a \xi \quad (I5)$$

Здесь \bar{I}_a является аналогом ковариантной производной D_μ . С помощью (9), (I3), (I4) можно явно проверить эквивалентность (I), (I5). Топологический заряд Q в этих обозначениях выглядит следующим образом:

$$Q = \int dg \left\{ |\gamma_+ \xi|^2 - |\gamma_- \xi|^2 \right\}. \quad (I6)$$

Теперь коротко опишем стандартное одноинстантонное решение в CP^1 -модели в новых обозначениях, и допускающее простое обобщение на n -инстантонное в CP^{n-1} моделях [I4]. Это поможет нам в дальнейшем по аналогии построить решение с дробным топологическим зарядом. Введем поле $W_\alpha(u)$, зависящее от $u(x)$ (I0) следующим образом:

$$W_\alpha(u) = \frac{p_\alpha}{\sqrt{4R^2 + |z|^2}}, \quad p_\alpha = z - a_\alpha$$

$$\zeta_\alpha(g) = \frac{W_\alpha(g)}{|W_\alpha|}, \quad W_\alpha(g = ue^{i\tau \frac{\sigma^3}{2}}) = W_\alpha(u) e^{-i\frac{\tau}{2}} \quad (I7)$$

Легко убедиться, что $\bar{I}_- W(g) = 0$. Это соотношение является аналогом условия Коши $\partial/\partial \bar{z} f(\bar{z}) = 0$. В то же время $\zeta(g)$ удовлетворяет более сложному уравнению:

$$\bar{I}_- \zeta(g) = 0, \quad (I8)$$

являющемуся аналогом соотношения самодуальности. Заметим, что зависимость W от τ , определяемая соотношением (I7) в точности соответствует решению с топологическим зарядом единица, как это объяснялось выше (I2). Учитывая, что $\bar{I}_- \xi = 0$, из (I6) следует, что $\int dg |\gamma_+ \xi|^2 = 1^*$. Тривиальное вычисление

* Этот факт можно проверить и явным вычислением.

дает $\bar{I}_3 \xi = 0$. С учетом этого имеем:

$$Q = \int dg (|\gamma_+ \xi|^2 - |\gamma_- \xi|^2) = 1 \quad (I9)$$

$$S = \frac{4\pi}{f} \int dg \left(\frac{1}{2} |\gamma_+ \xi|^2 + \frac{1}{2} |\gamma_- \xi|^2 + |\gamma_3 \xi|^2 \right) = \frac{2\pi}{f}$$

в согласии со стандартными результатами [2, 3].

Последний вопрос, на котором мы хотели бы коротко остановиться, связан с вычислением инстантонной плотности в квазиклассическом приближении с помощью конструкции, описанной выше [I4, 5]. Обсуждение этого вопроса для инстантона поможет нам, практически без вычисления, в следующем разделе получить торонную плотность в суперсимметричной CP^1 -модели. Как объяснялось в [I2] суперсимметричная модель выгодно отличается от обычной, так как требует учета лишь нулевых мод; вклад ненулевых мод сокращается между бозонами и фермионами.

Итак, в суперсимметричной CP^1 -модели требуется найти инстантонную меру. Для этого необходима знать лишь коллективные координаты, от которых нетривиально зависит инстантонное решение. В параметризации (I7) таких вещественных координат 4: $a_{1,2}$ и их сопряженные. Физически более наглядные коллективные переменные — размер и положение инстантона в принципе выражаются через a_α . Далее, интегрирование по бозонным координатам всегда сопровождается интегрированием по фермионным. Соответствующие коллективные координаты связаны с существованием нулевых мод — нормируемых решений классических уравнений движения. Легко проверив, что в параметризации (I7) решения классических уравнений выглядят следующим образом [5]:

$$\psi^\alpha = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} (\delta^{\alpha\beta} - \zeta^\alpha \bar{\zeta}^\beta) \frac{\partial \xi^\beta}{\partial a^\delta} \varepsilon^\delta \quad (20)$$

$$\psi_2^\alpha = 0, \quad \Omega \equiv (1 + \frac{|z|^2}{4R^2})^{-1}$$

Здесь индексы $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2$ описывают внутренние степени свободы $S^1 U(2)$, нижние индексы ψ_1, ψ_2 , описывают соответственно пространственные (лоренцевы) степени свободы. Далее, ε^δ в (20) являются фермионными коллективными координатами. Их количество равно 4 ($\varepsilon^1, \varepsilon^2$ и их сопряженные) — число, ожидаемое из аксиальной аномалии. Собирая все факторы вместе, и учитывая, что инстантонная мера пропорциональна произведению интегралов по всем коллективным координатам, ^{приходим} к результату [5]:

$$Z = \text{const } M_0^2 e^{-\frac{2\pi}{f_0}} d^2 a_1 d^2 a_2 d^2 \varepsilon_1 d^2 \varepsilon_2 \quad (21)$$

$$M^2 = M_0^2 e^{-\frac{2\pi}{f_0}},$$

причем, постоянная в принципе может быть вычислена из анализа детерминанта, связанного лишь с нулевыми модами. В (21) через M_0 обозначена масса регулятора, фактор $\exp\{-2\pi/f_0\}$ связан с величиной классического действия (19); степень M_0^2 восстанавливается по размерности. Заметим, что $M^2 = M_0^2 \exp\{-2\pi/f_0\}$ является ренорминвариантной величиной [2, 3] и определяет масштаб физических величин теории.

Одно из приложений формулы (21) — вычисление коррелятора $\langle \bar{\psi}\psi(x), \bar{\psi}\psi(0) \rangle$. В рамках квазиклассического приближения достаточно в рассматриваемый коррелятор подставить классическое решение $\psi^\alpha(20)$ с ζ^α (17) и взять интеграл по коллективным переменным. Он оказывается отличным от нуля и не зависит от x [5]:

$$\langle \bar{\psi}\psi(x), \bar{\psi}\psi(0) \rangle = \text{const } M^2 \quad (22)$$

Это позволяет надеяться (рассматривая предел $|x| \rightarrow \infty$) на существование конденсата $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$. Если бы мы попытались непосредственно вычислить величину $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$, используя (21) мы бы получили тривиальный нуль, связанный с существованием 4 нулевых мод. Наш оператор $\bar{\psi}\psi$ "связывает" лишь две из них. Аналог этого является хорошо известен в КХД — инстантон может обеспечить ненулевое значение лишь величины $\langle (\bar{\psi}\psi)^N \rangle$, но не $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$.

Как объяснялось во Введении для обеспечения ненулевого значения $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ в данном случае требуются флуктуации с дробным ($\sim 1/2$) топологическим зарядом. Эти флуктуации имеют две нулевых моды (вместо 4, возникающих от инстантона) и способны обеспечить ненулевое значение $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$.

Действительно, в CP^{N-1} моделях $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$ означает спонтанное нарушение дискретной симметрии степени N [3]. Для этого необходимо иметь N вакуумов с киральными зарядами $Q_5 = 0, 2, \dots, 2(N-1)$. Переходы между соседними такими вакуумными состояниями есть в точности флуктуация, имеющая две нулевых моды и топологический заряд $\sim 1/N$, что видно из аномалии (VI). Общие аргументы в пользу допустимости $Q \sim 1/N$ приведены в [1]. Ниже явно построены такие флуктуации с действием $2\pi/N \cdot f$.

Основной урок настоящего раздела состоит в следующем. Для того, чтобы получить квазиклассическое выражение для меры, типа (21) необходимо знать лишь число коллективных координат классического бозонного (17) и фермионного (20) решений. Это, с точностью до постоянной, позволяет восстановить вид Z (21).

4. В настоящем разделе описываются тороны в CP^2 . Термин "торон" заимствован из работы [7], где впервые построены классические решения в глюодинамике с дробным $Q = 1/N$. Мы сохранили этот термин в CP^2 модели, чтобы подчеркнуть тот факт, что обсуждаемые ниже решения самодуальны, минимизируют действие, $S = \frac{2\pi}{f} Q = \frac{\pi}{f}$, имеют полужелый топологический заряд $Q = 1/2$, то-есть обладают всеми свойствами, присущими торонам [7]. В этом же разделе рассмотрены простейшие приложения - вычисление торонной меры (аналог $Z(2,1)$) и $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ в суперсимметричном варианте CP^2 .

По аналогии с (17) определим торонное решение следующим образом:

$$\begin{aligned}
 w_\alpha(u) &= \frac{p_\alpha}{(4R^2 + |z|^2)^{1/4}} \quad p_\alpha = (z - a_\alpha)^{1/2} \\
 w_\alpha(g) &= u e^{i\tau \frac{g^3}{2}} = w_\alpha(u) e^{-i\tau/4} \\
 \xi_\alpha(g) &= \frac{w_\alpha(g)}{|w_\alpha|}, \quad a_1 \rightarrow a_2
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

Как объяснялось выше, (12), зависимость ξ от τ однозначно фиксирует топологический заряд решения (в данном случае $Q = 1/2$). Это является аналогом того, что в стандартной формулировке зависимость n_α (3) от фазы φ при $|x| \rightarrow \infty$ определяет топологический заряд флуктуации. Таким образом, весь вопрос сводится к тому, является ли (23) решением уравнения самодуальности (18). Явной проверкой легко убедиться, что соотношения $\mathcal{L}_- w = 0$ также как $\mathcal{L}_- \xi = 0$ выполняются. Тем самым, уравнение самодуальности выполнено и

$$\begin{aligned}
 Q &= \int dg (|y_+ \xi|^2 - |y_- \xi|^2) = \frac{1}{2} \rightarrow \int |y_+ \xi|^2 dg = \frac{1}{2} \\
 S &= \int \frac{4\pi}{f} \left[\frac{1}{2} |y_+ \xi|^2 + \frac{1}{2} |y_- \xi|^2 + |y_3 \xi|^2 \right] dg = \frac{\pi}{f}
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

Соотношение $\int |y_+ \xi|^2 dg = \frac{1}{2}$ может быть проверено и явным вычисле-

нием. Таким образом мы описали регулярное решение с $Q = 1/2$ и действием, в 2 раза меньшим инстантонного (19). Отметим, что параметризация типа (23) допускает простое обобщение (как и для инстантонов [5, 14]) на k -торонное, ℓ -инстантонное решение в CP^{N-1} модели.

В этом месте мы хотим обсудить следующий, очень важный вопрос. Как объяснялось в конце предыдущего раздела классическое решение характеризуется своими коллективными координатами. Их число может быть понято из общих соображений [12]. В частности, инстантон имеет 4 фермионных нулевых моды (это есть прямое следствие аномалии). Из соотношения (20) это с необходимостью означает существование, по крайней мере, четырех параметров a_α, \bar{a}_α , описывающих бозонные коллективные степени свободы. С другой стороны, для решений с $Q = 1/2$ мы бы ожидали существования всего двух фермионных нулевых мод и связанных с ними всего двух параметров "a". Решение же (23) с $Q = 1/2$ как и (17) параметризовано четырьмя "a". Кажущийся парадокс разрешается следующим образом. В решении (23), в отличие от (17), a_1, a_2 не являются независимыми коллективными координатами. Действительно, требуя в согласии с классификацией, чтобы весь спинор приобретал общую фазу $\exp\{2\pi i k/N\}$ при обходе любой из точек a_1, a_2 приходим к выводу о необходимости

$$a_1 \rightarrow a_2. \tag{23a}$$

В то же время нельзя полагать $a_1 = a_2$ с самого начала, так как это приведет к ультрафиолетовым расходимостям, см. ниже. Таким образом символ $a_1 \rightarrow a_2$ в определении нашего решения (23) понимается как способ регуляризации, так что $a_1 = a_2 + \Delta$ и Δ не есть коллективная переменная и ее можно полагать равной 0 лишь в конце вычислений. Количество же не-

зависимых коллективных координат равно 2 для решения (23). Необходимость ультрафиолетовой регуляризации $a_1 \rightarrow a_2$ возникает во многих местах. В частности, при проверке условия самодуальности, $\mathcal{L}\xi = 0$, при вычислении некоторых интегралов, возникающих при расчете детерминанта перехода, например:

$$I = \lim_{a_1 \rightarrow a_2} \int \Omega^2 \frac{d^2 z}{[|z-a_1| + |z-a_2|]^2} \quad (25)$$

Интеграл явно сходится при $|z| \rightarrow \infty$, так как $\Omega \sim |z|^{-2}$. Однако, если положить $a_1 = a_2$ с самого начала, то $I \sim \int d^2 z / |z-a_1|^2$ и имеет логарифмическую расходимость при $z \sim a_1$. Если $a_1 \neq a_2$, то вклад конечен. Действительно, без ограничения общности положим $a_2 = 0$, $Re a_1 = 0$, $Im a_1 = a$ и оценим вклад от области $z \sim a$:

$$\int_{|z| \leq a} \frac{d^2 z}{[\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+(y-a)^2}]^2} \sim \int_0^a \frac{r dr d\varphi}{[r + \sqrt{r^2+a^2-2ra\cos\varphi}]^2} \sim 2\pi \int_0^a \frac{r dr}{[r + \sqrt{r^2+a^2}]^2} \sim \pi \quad (26)$$

Из (26) явно видна конечность интеграла. С нашей точки зрения регуляризация такого сорта всегда будет присутствовать при описании флуктуаций с дробным \mathcal{Q} . Определив теорию на сфере радиусом R мы добились инфракрасной регуляризации; ультрафиолетовая же должна быть введена отдельно. Наше доопределение (23) соответствует тому, что решение (23) самодуально и в точности минимизирует действие.

Учитывая приведенные выше обсуждения о количестве коллективных координат для решения (23) запишем торонную меру в следующем виде:

$$Z_{\text{торон}} = \text{const } M_0 e^{-\pi/f_0} d^2 a_1 d^2 \epsilon_1 \quad (27)$$

Здесь величина $\exp\{-\pi/f_0\}$ связана с действием торона (24); $d^2 a$, $d^2 \epsilon$ характеризуют количество коллективных координат; степень регулятора M_0 восстанавливается по размерности;

величина постоянной в (27) связана с расчетом интегралов типа (25) и в принципе может быть вычислена. В справедливости (27) можно убедиться и явным вычислением детерминанта при переходе к интегрированию по коллективным переменным. Заметим, что возникшая в (27) комбинация $M_0 \exp\{-\pi/f_0\}$ в точности ренорминвариантна, как и в инстантонном случае (21) - вместе с уменьшением действия в два раза, уменьшилось количество коллективных переменных, что привело к уменьшению вдвое степени регуляторной массы M_0 .

Последний пункт, завершающий настоящий раздел, связан с вычислением вклада в конденсат $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$, обусловленного торонной флуктуацией (23). В квазиклассическом приближении поле ψ заменяется нулевой модой (20):

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = \text{const} \cdot M \int \frac{1}{\Omega} d^2 \epsilon d^2 a \frac{\partial \bar{\xi}^\alpha}{\partial a} \bar{\epsilon} (\delta^{\alpha\beta} - \xi^\alpha \bar{\xi}^\beta) \frac{\partial \xi^\beta}{\partial a} \epsilon = \text{const} \cdot M \int \frac{d^2 a}{\Omega} \frac{\partial}{\partial a} \frac{\partial}{\partial \bar{a}} \ln |p|^2 \quad (28)$$

В (28) были использованы соотношения:

$$\frac{\partial \bar{\xi}^\alpha}{\partial a} = \frac{1}{|p|^2} \frac{\partial p^\alpha}{\partial a}; \quad \frac{\partial \bar{p}^\alpha}{\partial \bar{a}} = \frac{1}{|p|^2} \frac{\partial p^\alpha}{\partial \bar{a}}; \quad \frac{\partial p^\alpha}{\partial a} = \frac{\partial p^\alpha}{\partial a} \frac{\partial \bar{a}}{\partial a} = \frac{\partial p^\alpha}{\partial a} \frac{\partial \bar{a}}{\partial a} \ln |p|^2;$$

$$|p|^2 = |p_1|^2 + |p_2|^2; \quad \int d^2 \epsilon \bar{\epsilon} \epsilon = 1$$

Перейдем от комплексной величины "a" к вещественным: $a = a_x + i a_y$, $\partial/\partial a_\mu = (\partial/\partial a_x, \partial/\partial a_y)$ и определим вектор $A_\mu = \epsilon_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial a_\nu} \ln |p|^2$. Тогда

$$\int d^2 a \frac{\partial}{\partial a} \frac{\partial}{\partial \bar{a}} \ln |p|^2 \sim \int d^2 a \frac{\partial}{\partial a_\mu} \frac{\partial}{\partial a_\mu} \ln |p|^2 \sim \int d^2 a \epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu A_\mu \sim \lim_{|a| \rightarrow \infty} \oint A_\mu da_\mu \sim \oint_{|a| \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_{\mu\nu} a_\nu da_\mu}{|a|^2} = 2\pi$$

При получении последнего соотношения был использован тот факт, что $A_\mu(|a| \rightarrow \infty) = \frac{a_\mu}{|a|^2}$ и не зависит от x вовсе. Теперь в (28) можно снять инфракрасную регуляризацию, положить $R = \infty$ ($\mathcal{Q} = 1$)

и убедиться, что $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \sim M$. Это утверждение по существу является проявлением того факта, что флуктуация (23) несет нужные квантовые числа, $Q = 1/2$, $Q_5 = 2NQ = 2$, так что вакуумный переход $(Q_5=0) \rightarrow (Q_5=2)$ обязательно сопровождается рождением $\bar{\psi}\psi$. Запишем это следующим образом:

$$\langle Q_5=2 / \bar{\psi}_2 \psi_2 / Q_5=0 \rangle = \text{const } M \quad (30)$$

Как обсуждалось в Введении и в [1] правильными вакуумными состояниями являются суперпозиции вида (B2); поэтому (30) имеем:

$$| \Omega_{1,2} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (| Q_5=0 \rangle \pm | Q_5=2 \rangle)$$

$$\langle \Omega_1 / \bar{\psi}_2 \psi_2 / \Omega_1 \rangle = \text{const } M. \quad (31)$$

$$\langle \Omega_2 / \bar{\psi}_2 \psi_2 / \Omega_2 \rangle = - \text{const } M.$$

Общий вид настоящего раздела таков. В CP^{N-1} моделях класс допустимых калибровочных преобразований включает в себя дробные $\sim 1/N$ топологические числа; это приводит к размножению вакуумных секторов. С другой стороны, киральная симметрия, нарушаемая аномалией (B1) сохраняет дискретную подгруппу. Именно существование дополнительных секторов в теории и обеспечивает спонтанное нарушение этой дискретной симметрии, что и продемонстрировано явным расчетом (28) - (31) величины конденсата $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$.

Этот расчет, с идейной точки зрения аналогичен вычислению конденсата глюино $\langle \lambda^2 \rangle$ в суперсимметричной глюодинамике [15]. В обоих случаях наличие конденсата отражает нарушение лишь дискретной симметрии. Различие же состоит в том, что в [15] присутствуют поля лишь присоединенного представления, у нас - фундаментального. Именно поэтому мы не можем воспользоваться конструкцией типа [6,7,15].

5. В предыдущем разделе были рассмотрены физические проявления флуктуации с дробным Q в суперсимметричной CP^1 -модели. Характерными чертами этой теории являются: во-первых, существование конденсата $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$, связанного со спонтанным нарушением дискретной симметрии; во-вторых, отсутствие конфинмента [2,3]. В настоящем разделе мы обсудим роль дробных Q в обычной CP^1 -модели, находящейся, предположительно, в фазе конфинмента.

Напомним, что при больших N качественное поведение модели известно [2,3] - поле $n^\alpha(I)$ получает массу M , вспомогательное векторное поле $A_\mu(I)$ становится динамическим и взаимодействует с полем n^α с зарядом $e^2 = \frac{2\pi}{N} M^2$; конфинмент есть тривиальное следствие безмассовости A_μ и двумерности задачи. Вместе с [3] мы предполагаем, что все эти качественные моменты сохраняются и для $N=2$. Имея это в виду можно надеяться, что главный член в эффективном лагранжиане, ответственный за поведение теории при больших $|x|$ есть:

$$S_{\text{eff.}} = -\frac{1}{4e^2} \int d^2x F_{\mu\nu}^2, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad A_\mu = -\bar{n} i \partial_\mu n \quad (32)$$

остальные члены ($M^2 \bar{n}n, \dots$) ввиду массивности поля n^α предполагаются менее существенными. Заметим, что записав $S_{\text{eff.}}$ в виде (32) мы явно отразили тот факт, что на квантовом уровне, первоначально вспомогательное поле $A_\mu(I)$ становится динамическим, то-есть появляется член $\sim F_{\mu\nu}^2$ в эффективном действии [3].

Программа наших дальнейших действий состоит в следующем. Как и в разделе 2, Евклидова теория определяется на сфере радиусом R . В этом случае, как мы знаем (раздел 2), топологически-нетривиальная флуктуация приводит к существованию ж) В 2-ух измерениях заряд имеет размерность массы.

струны. Оказывается, что действие (32) в этом случае может быть переписано как сумма двух слагаемых: $S_0 + S_1$ [13]. Одно из слагаемых S_0 описывает двумерную теорию поля, но с тривиальными граничными условиями, недопускающими топологических объектов. Второе слагаемое S_1 нетривиально, но одномерно, то-есть описывает не теорию поля, а квантовую механику. Квантование этого действия S_1 позволяет вычислить некоторый вклад связанный с флуктуациями $\varphi = \pi/2$ в вакуумную энергию.

Перейдем к последовательному изложению вопроса. В калибровке $A_\theta = 0$, запишем $A_\varphi(\theta, \varphi)$ в виде [13]:

$$\sin \theta A_\varphi(\theta, \varphi) = [\hat{A}_\varphi(\theta, \varphi) \sin \theta + \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) A_\varphi(\pi, \varphi)] \quad (33)$$

Смысл такого разбиения очевиден - на поле \hat{A}_φ можно наложить тривиальные граничные условия: $\hat{A}_\varphi(0, \varphi) = \hat{A}_\varphi(\pi, \varphi) = 0$, так что вся нетривиальная информация о топологии содержится лишь в $A_\varphi(\pi, \varphi)$. Например, инстантонному решению на сфере (5а) отвечают значения $\hat{A}_\varphi = 0$, $\hat{A}_\varphi(\pi, \varphi) = 1/R$. Величина $F_{\theta\varphi}$, отвечающая (33) имеет вид:

$$F_{\theta\varphi} = \hat{F}_{\theta\varphi} + \frac{1}{2R} A_\varphi(\pi, \varphi) \quad (34)$$

$$\hat{F}_{\theta\varphi}^2 = \hat{F}_{\theta\varphi}^2 + \frac{1}{4R^2} A_\varphi^2(\pi, \varphi) + \frac{1}{R} \hat{F}_{\theta\varphi} A_\varphi(\pi, \varphi)$$

Так как перекрестное слагаемое $A_\varphi \hat{F}_{\theta\varphi}$ при интегрировании по $d\theta$ исчезает ввиду тривиальности граничных условий:

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta \hat{F}_{\theta\varphi} A_\varphi(\pi, \varphi) = \frac{A_\varphi(\pi, \varphi)}{R} \int_0^\pi d\theta \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \hat{A}_\varphi) = 0$$

мы приходим к выводу о диагонализации действия:

$$S = S_0 + S_1, \quad S_0 = \frac{R^2}{4e^2} \int \hat{F}^2 \sin \theta d\theta d\varphi, \quad S_1 = \frac{1}{8e^2} \int d\varphi A_\varphi^2(\pi, \varphi) \quad (35)$$

Возвращаясь к исходным n^α полям запишем действие S_1 в виде:

$$S_1 = \frac{1}{8e^2 R^2} \int d\varphi (\bar{n} i \frac{\partial}{\partial \varphi} n)^2, \quad n = n(\pi, \varphi), \quad A_\varphi = \frac{1}{R} \bar{n} i \frac{\partial}{\partial \varphi} n \quad (36)$$

Таким образом, информация о топологически - нетривиальных флуктуациях содержится в действии некоторой квантовомеханической системы, в которой роль времени t играет угол φ . Нас интересует величина вакуум - вакуумного перехода с $\varphi = \pi/2$ и обусловленного S_1 (36). В данном случае задача вычисления функционального интеграла по существу является задачей не теории поля, а квантовой механики. Для решения этой задачи необходимо найти спектр состояний, описываемых (36). В принципе, в интересующую нас величину дают вклад (в смысле Фейнмана) все траектории, как охватывающие струну 1, 2, 3... раза, так и неохватывающие вовсе (входит сумма по всем топологическим классам). Нас, однако, интересует лишь флуктуация, описывающая однократный охват струны. Такой флуктуации отвечает значение интеграла $\oint (\bar{n} i \frac{\partial}{\partial \varphi} n) d\varphi = \pi$

С формальной точки зрения (36) напоминает задачу о влиянии конфинмента на монополь [13].

Проблема квантования системы (36) аналогична задаче о квантовании скирмиона [9-II]. Для того, чтобы воспользоваться этой аналогией буквально, введем вместо комплексного спинора $n^\alpha = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$ матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} n_1 & -\bar{n}_2 \\ n_2 & \bar{n}_1 \end{pmatrix}, \quad A^+ A = 1, \quad A = a_0 + i \vec{a} \vec{\sigma}, \quad \bar{n}_1 n_1 + \bar{n}_2 n_2 = 1 \quad (37)$$

Параметризация A(37) в точности совпадает с параметризацией квантовых степеней свободы в задаче о скирмионе [10]. Учитывая, что величина $\bar{n} i \frac{\partial}{\partial \varphi} n$ равна:

$$\bar{n} i \frac{\partial}{\partial \varphi} n = \frac{i}{2} \text{tr} \dot{A} \sigma^3 A^+ = (a_3 \dot{a}_0 - a_0 \dot{a}_3 + a_2 \dot{a}_1 - a_1 \dot{a}_2) \rightarrow \mathcal{I}_3 \quad (38)$$

(здесь точка означает дифференцирование по φ), и в точности совпадает с видом оператора \mathcal{I}_3 [10], легко понять, что система (36) есть ротатор с моментом инерции $I = \frac{1}{4e^2 R^2}$ и уров-

нями энергии

$$E_k = \kappa^2/2I, \quad \kappa = 0, 1/2, 1, \dots \quad (39)$$

Заметим, что собственное значение $\kappa = 1/2$ оператора \mathcal{L}_3 отвечает ситуации с $\oint \vec{n} \cdot \frac{dn}{d\varphi} d\varphi = 2\pi \frac{1}{2} = \pi$; другие значения " κ " соответствуют большему числу наматываний на струну.

Отметим, что при квантовании скирмиона [10] спектр иной $\sim k(k+1)$, что связано с иным видом гамильтониана $\sim \vec{J}^2$, в то время как для нашей задачи гамильтониан (36) $\sim \mathcal{L}_3^2$.

Итак, вклад состояния с $\kappa = 1/2$ в функциональный интеграл с учетом (39) равен (сравни с [13]):

$$\langle 1 | e^{-(S_0 + S_1)} d^2x | 0 \rangle = \langle e^{-S_0} d^2x \rangle e^{-2\pi E_k} = e^{-\pi e^2 R^2} = e^{-\varepsilon_{\text{vac}} V} \quad (40)$$

Учитывая, что $V = 4\pi R^2$, приходим к заключению, что плотность энергии вакуума ε_{vac} , связанная с флуктуациями с $\varphi = 1/2$ в предположении (32) конечна и равна

$$\varepsilon_{\text{vac}} = e^2/4 \quad (41)$$

Положительность значения этой величины в рамках настоящего подхода кажется неизбежной, аналогично тому, что квантовые поправки к массе скирмиона всегда положительны [10].

Отметим, что мы не знаем значения e^2 при $N=2$. При $N \rightarrow \infty$ значение e^2 фиксировано: $e^2 = \frac{12\pi}{N} M^2$ [3]. Более того, известно точное значение вакуумной энергии при больших N , оно положительно и порядка $M^2 N$ [12]. Возможно, что этот факт является проявлением флуктуаций с дробными φ .

Главный же итог для нас состоит в том, что задача о топологических флуктуациях в физике больших расстояний может быть сведена к квантовомеханической задаче (возникают одномерные объекты). С нашей точки зрения этот факт не является спецификой модели. Действительно, упрощение задачи у нас бы-

ло связано с тем, что существенные переменные оказались не зависящими от угла θ , что, в свою очередь, обусловлено наличием струны. Но как объяснилось выше топологические объекты при компактификации на сферу всегда приводят к струне.

6. Заключение.

Основная цель работы состояла в анализе физических следствий, связанных с существованием дробных топологических зарядов в CP^{N-1} теориях. Наиболее ярко эти флуктуации проявляют себя в суперсимметричном варианте теории — они обеспечивают спонтанное нарушение дискретной киральной симметрии и дают ненулевой вклад в конденсат $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$. Что касается абсолютной величины конденсата при $N \rightarrow \infty$, то в [5] утверждалось о точном совпадении результата инстантонного расчета [5] с пределом больших N [3]. В [12] это утверждение подвергалось сомнению, связанному с опытом работы в других теориях, где аналогичные расчеты давали правильный порядок величины, но не совпадали с точным ответом буквально. Мы хотим добавить, что в $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ имеется конечный вклад от флуктуаций с дробными $\varphi \sim 1/N$, которые в принципе не учитывались в [5]. Так что буквальное согласие [5] со строгим результатом [3] выглядит еще более загадочным.

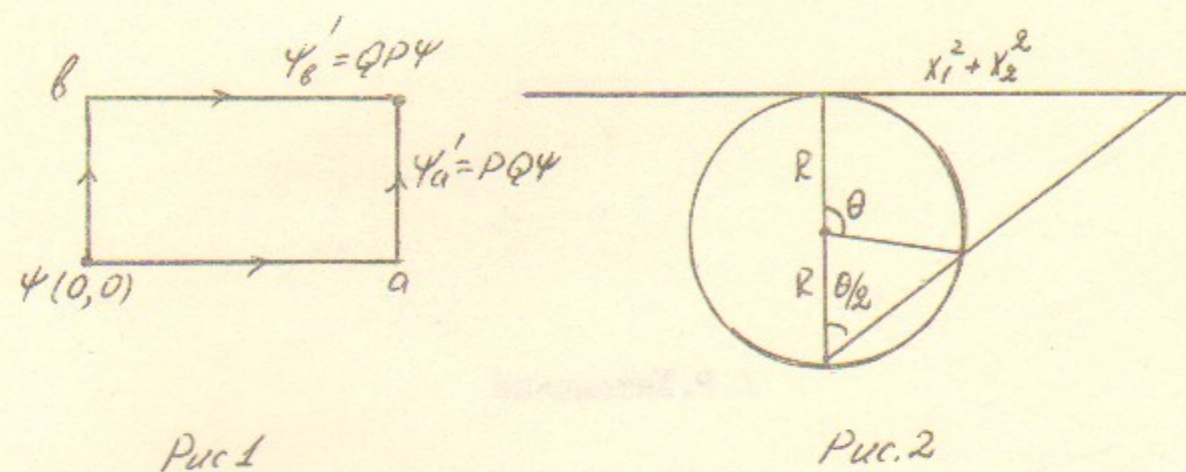
Отметим также, что предложенное в работе решение с

$$\varphi = 1/2, \text{ являющееся самодуальным и минимизирующее действие } S = \frac{2\pi\varphi}{f} = \frac{\pi}{f}, \text{ допускает простое обобщение на } CP^{N-1} \text{ теории с } \varphi = k/N \text{ и действием } S = \frac{2\pi k}{f N}.$$

Автор выражает благодарность А.И.Вайнштейну и В.Л.Черняку за обсуждения.

Литература

1. А.Р.Житницкий, Препринт 86-152, Новосибирск.
2. D'Adda T.A. et al., Nucl. Phys. B146 (1978), 63.
Eichenherr H., Nucl. Phys. B146 (1978), 215.
Golo V.L., Perelomov A.M., Phys. Lett. B79 (1978), 112.
3. Witten E. Nucl. Phys. B149 (1979), 285.
4. Rothe K.D., Swieca J.A., Nucl. Phys. B168 (1980), 454.
5. Narain K.S., Nucl. Phys. B243 (1984), 131.
6. G't Hooft, Nucl. Phys. B138 (1978), 1; B153 (1979), 141.
7. G't Hooft, Commun. Math. Phys. 81 (1981), 267.
8. T.T.Wu, C.N.Yang, Phys. Rev. D12 (1975), 3845.
9. A.P.Balachandran et al., Nucl. Phys. B256 (1985), 525;
B162 (1980), 385.
10. E.Witten, Nucl. Phys. B223 (1983), 422, 433.
11. E.Rabinovici et al., Nucl. Phys. B248 (1984), 523.
12. А.И.Вайнштейн, В.И.Захаров, В.А.Новиков, М.А.Шифман,
ЭЧАЯ, том I7 (1986), 472.
13. С.Коулмен, УФН, том I44 (1984), 277.
14. B.Berg and M.Lüscher, Comm. Math. Phys. 69 (1979), 57.
15. E.Cohen, C.Gomez, Phys. Rev. Lett. 52 (1984), 237



А.Р.Житницкий

ДРОБНЫЙ ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ЗАРЯД, ТОРОНЫ И НАРУШЕНИЕ
ДИСКРЕТНОЙ СИММЕТРИИ В CP^{n-1} МОДЕЛИ

Препринт
№ 87-15

Работа поступила - 28 января 1987 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати 10.02.1987г. МН 08620
Формат бумаги 60x90 1/16 Усл. 1,8 печ.л., 1,5 учетно-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно. Заказ № 15.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90