

29

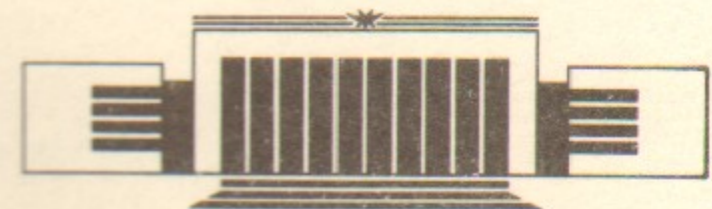


ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

Б.Н.Брейзман, З.Седлачек, К.Юнгвирт

ОБРАЗОВАНИЕ СОЛИТОНОВ ИЗ
ЛЕНГМЮРОВСКИХ ВОЛН
СО СЛУЧАЙНЫМИ ФАЗАМИ

ПРЕПРИНТ 87-154



НОВОСИБИРСК

Образование солитонов из ленгмюровских волн
со случайными фазами

Б.Н. Брейзман, З. Седлачек^{*)}, К. Юнгвирт^{*)}

Институт ядерной физики
630090, Новосибирск 90, СССР

АННОТАЦИЯ

Рассмотрена динамика формирования ленгмюровских солитонов из широкого спектра свободных плазмонов, обладающих сверхзвуковыми групповыми скоростями. Обсуждены законы сохранения в элементарных процессах с участием солитонов и дополнительные адиабатические ограничения, связанные со спецификой сверхзвуковой задачи. Представлены результаты одномерных численных расчетов, демонстрирующие возможность рождения солитонов как в режиме модуляционной неустойчивости, так и под ее порогом (в последнем случае зародышами солитонов служат флуктуации давления плазмонов, лежащих в длинноволновой части спектра). Проведены аналитические оценки характерного времени захвата плазмонов в солитоны и числа плазмонов, захватываемых из первоначального спектра. Обращено внимание на возможность существенного изменения скорости слаботурбулентной спектральной перекачки плазмонов вследствие их локализации в поле звуковых возмущений. Проведено сравнение аналитических оценок с результатами численного счета.

^{*)} Институт физики плазмы ЧСАН, Прага, ЧССР

Formation of Solitons
from the Langmuir Waves with Random Phases

B.N. Breizman, Z. Sedláček^{*)}, K. Jungwirth^{*)}

ABSTRACT

The dynamics of the formation of Langmuir solitons from free Langmuir waves (plasmons) propagating at supersonic group velocities is described. The conservation laws and adiabatic restrictions which are imposed on the elementary processes with solitons containing supersonic plasmons are discussed. One-dimensional numerical results are presented which demonstrate that solitons appear both above and below the threshold of modulational instability. In the latter case solitons are generated by the pressure fluctuations of plasmons belonging to the long-wavelength part of the spectrum. Analytical estimates are given of the characteristic time of plasmon trapping into solitons as well as of the number of trapped plasmons. Localization of plasmons caused by the acoustic perturbations can substantially change the rate of nonlinear spectral transfer of plasmons. Analytical estimates are compared with numerical results.

^{*)} Institute of Plasma Physics, Czech. Acad. Sci., 18211 Prague 8, Czechoslovakia.

1. ВВЕДЕНИЕ

Для работ, посвященных ленгмюровской турбулентности, уже стал традиционным вывод о том, что в одномерном случае увеличение энергии волн способствует образованию самоподдерживающихся связанных состояний — солитонов [1, 2]. Хотя в принципе ясно, что солитоны возникают вследствие захвата плазмонов в потенциальные ямы, образующиеся при деформации профиля плотности плазмы под действием пондеромоторной силы [3], в количественном описании этого процесса остается ряд пробелов. Хотелось бы, в частности, найти (по крайней мере на уровне оценок) зависимость частоты появления новых солитонов от плотности уже имеющихся и от спектрального распределения свободных плазмонов. Наиболее трудную часть этой задачи составляет предельный случай, в котором характерное значение волнового числа плазмонов k_0 превышает $r_D^{-1}(m_e/m_i)^{1/2}$, где r_D — дебаевский радиус, m_e — масса электрона, m_i — масса иона. Неравенство

$$k_0 r_D \gg (m_e/m_i)^{1/2} \quad (1.1)$$

соответствует сверхзвуковому движению плазмонов и означает, что по отношению к большинству плазмонов профиль плотности плазмы перестраивается очень медленно (адиабатически). Поэтому вероятность перехода свободного плазмона в связанное состояние, отделенное от непрерывного спектра энергетической щелью, оказывается относительно малой.

Альтернативу предельному случаю сверхзвуковых плазмонов

составляет так называемый статический режим, для которого характерна малость групповых скоростей плазмонов по сравнению со скоростью звука; при этом возмущение плотности плазмы с точностью до постоянного множителя совпадает с возмущением давления плазмонов. В математическом отношении этот режим сравнительно прост, так как он описывается нелинейным уравнением Шредингера, которое, как известно, интегрируется методом обратной задачи рассеяния [4]. Модифицировать метод обратной задачи применительно к сверхзвуковому режиму, к сожалению, не удастся. Эта техническая трудность, связанная с качественными особенностями сверхзвукового режима, обычно вынуждает ограничить его аналитическое рассмотрение оценками по порядку величины и во многом полагаться на информацию, полученную посредством численных расчетов.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы выявить закономерности образования солитонов из сверхзвуковых плазмонов в случае свободной турбулентности, т. е. в отсутствие накачки и затухания волн. В неизотермической плазме с горячими электронами и холодными ионами интересующие нас эффекты описываются уравнениями Захарова [5]. В работе изложены результаты численного интегрирования этих уравнений при случайных начальных фазах ленгмюровских волн и проведены оценки, позволяющие дать численным результатам наглядную интерпретацию.

Как показали Веденов и Рудаков [6], газ плазмонов с плотностью энергии W , превышающей $k_0^2 r_D^2 n_0 T$, где n_0 — невозмущенная плотность, а T — температура электронов плазмы, подвержен модуляционной неустойчивости. Именно эту неустойчивость и принято считать причиной образования солитонов. В случае достаточно сильной надпороговости это вполне естественно. Если же надпороговость мала, то ситуация требует определенной осторожности, поскольку результаты численных расчетов свидетельствуют о том, что солитоны могут рождаться и в устойчивой системе [7]. В подпороговом режиме их появление, как будет видно из дальнейшего, обязано флуктуациям плотности свободных плазмонов. Двигаясь независимо друг от друга, плазмоны время от времени образуют сгустки, которые и служат зародышами солитонов. Задача о формировании солитона из одиночного сгустка малой протяженности была решена в работе [8], а особенности динамики нескольких сгустков рассматривались в недавней работе [9]. Соображения, высказанные в этих работах, позволят нам оценить пространственный масштаб и амплитуду флуктуаций, выступающих в

роли затравочных сгустков. Превращение спонтанно возникших сгустков в солитоны — это интересный конкретный пример способности устойчивой нелинейной системы сохранять память о достаточно сильных флуктуациях.

В дальнейшем мы будем придерживаться следующего плана изложения. В разделе 2 приведены исходные уравнения вместе с вытекающими из них законами сохранения и обсуждена специфика сверхзвукового режима. В разделе 3 описана методика, а в разделе 4 — результаты численных расчетов. В разделе 5 изложены качественные представления о модуляционной и флуктуационной картинах формирования солитонов, получены соответствующие оценки и проведено обсуждение численных результатов. В разделе 6 собраны заключительные замечания.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ

В одномерном случае система уравнений Захарова имеет следующий вид [5]:

$$i \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{3}{2} \omega_p r_D^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \omega_p \frac{n}{n_0} E, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \frac{1}{16\pi m_i} \frac{\partial^2}{\partial x^2} |E|^2. \quad (2.2)$$

Здесь E — комплексная амплитуда высокочастотного электрического поля плазмонов $\mathcal{E} = \text{Re}[E e^{-i\omega_p t}]$, ω_p — плазменная частота, n — возмущение плотности ионов, c_s — скорость ионного звука. Следовало в исходных уравнениях замену переменных

$$\begin{aligned} x &= x'/k_0, & E &= (48\pi n_0 T)^{1/2} k_0 r_D E', \\ t &= t'/(k_0 c_s), & n &= 3n_0 k_0^2 r_D^2 n', \end{aligned} \quad (2.3)$$

где выбор волнового числа k_0 определяется соображениями удобства, можно привести систему (2.1), (2.2) к безразмерному виду

$$ig \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = nE, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} |E|^2 \quad (2.5)$$

(штрихи здесь и далее опущены).

Входящий в уравнение (2.4) параметр

$$g \equiv \frac{2}{3k_0 r_D} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \quad (2.6)$$

представляет собой удвоенное отношение скорости ионного звука к групповой скорости плазмонов с $k = k_0$. Положив $k_0 = 2c_s / (3\omega_p r_D^2)$, мы получили бы $g = 1$. Однако, рассматривая образование солитонов из сверхзвуковых плазмонов, удобнее считать k_0 характерным значением волнового числа в первоначальном спектре плазмонов, что позволяет явно выделить имеющийся в данной задаче малый параметр $g(k_0) \ll 1$ (малость величины g следует из неравенства (1.1)).

Система (2.4), (2.5) является гамильтоновой и сохраняет число плазмонов

$$N = \int |E|^2 dx, \quad (2.7)$$

энергию

$$H = \int \left[\left| \frac{\partial E}{\partial x} \right|^2 + n|E|^2 + \frac{n^2}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (2.8)$$

и импульс

$$P = \int \left[\frac{ig}{2} \left(E \frac{\partial E^*}{\partial x} - E^* \frac{\partial E}{\partial x} \right) - n \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx \quad (2.9)$$

Величина u в формулах (2.8), (2.9) представляет собой гидродинамический потенциал, связанный со скоростью ионов v соотношением

$$v = - \frac{\partial u}{\partial x}$$

Для солитонного решения системы (2.4), (2.5)

$$E(x; t) = E_* \frac{\exp \left(i \frac{gsx}{2} - i\Omega t + i\varphi_0 \right)}{\operatorname{ch} \left[E_* \frac{x - st - x_0}{\sqrt{2(1-s^2)^{1/2}}} \right]}, \quad \Omega \equiv \frac{gs^2}{4} - \frac{E_*^2}{2g(1-s^2)}, \quad (2.10)$$

$$n(x, t) = - \frac{|E(x, t)|^2}{1-s^2}, \quad |s| < 1, \quad (2.11)$$

где E_* , s , x_0 и φ_0 — вещественные константы, интегралы движения

принимают вид

$$\begin{aligned} N &= 2^{3/2} |E_*| (1-s^2)^{1/2}, \\ H &= \frac{g^2 s^2}{4} N + \frac{N^3}{48} \frac{5s^2 - 1}{(1-s^2)^3}, \\ P &= \frac{g^2 s}{2} N + \frac{N^3}{12} \frac{s}{(1-s^2)^3}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Прежде чем перейти к обсуждению динамики солитонов, следует обратить внимание на то, что в солитоне с $N \gg g$ собственная частота связанных плазмонов Ω существенно превышает частоту звука Ω_s , отвечающую размеру такого солитона. Поскольку оценка энергии связанного состояния определяется достаточно грубыми параметрами потенциальной ямы, неравенство

$$\Omega \gg \Omega_s$$

характеризует не только солитон с $N \gg g$, но и любую другую яму сопоставимой глубины и ширины. Если в такой (отличной от солитона) яме имеется N захваченных плазмонов, то яма будет деформироваться с характерным временем порядка Ω_s^{-1} , излучая звук и превращаясь в солитон (см., например, [8]). При этом в силу адиабатичности плазмоны не могут ни покинуть яму, ни захватываться в нее. Чтобы вероятность захвата была заметной, уровень энергии в яме должен лежать гораздо ближе к границе непрерывного спектра, чем в соответствующем солитоне. Иными словами, по сравнению с солитоном яма должна быть мелкой, а это значит, что момент захвата характеризуется относительно низким уровнем возмущений плотности плазмы¹⁾. С другой стороны, ясно, что при заданном начальном профиле плотности вероятность захвата должна расти с увеличением начальной скорости плазмы v , поскольку увеличение скорости способствует нарушению адиабатичности. Допуская некоторую вольность, можно сделать отсюда вывод, что для процесса захвата характерна малость величины n по сравнению с v .

Учитывая сделанные замечания, можно получить из законов сохранения энергии и импульса полезное ограничение на скорость

¹⁾ Последующее углубление ямы в процессе формирования солитона приводит к тому, что энергия связи и кинетическая энергия находящихся в ней плазмонов существенно возрастают по сравнению со своими значениями в момент захвата [8].

s солитона, формирующегося из свободных плазмонов. Малость возмущения плотности плазмы и кинетической энергии плазмонов в момент захвата позволяют считать полную энергию системы равной исходной энергии звука

$$\varepsilon(0) = \frac{1}{2} \int v^2 dx,$$

а импульс — равным нулю.

Величина $\varepsilon(0)$ представляет собой суммарную энергию двух встречных звуковых волн, сфазированных таким образом, что на стадии захвата плазмонов суммарное возмущение плотности мало по сравнению с амплитудой каждой из этих волн. Предполагая, что в конечном состоянии имеется солитон с параметрами N и s и расходящиеся от него звуковые волны с энергиями ε_+ и ε_- (знаки $+$ и $-$ указывают направление распространения волны), можно представить законы сохранения в виде

$$H(N; s) + \varepsilon_+ + \varepsilon_- = \varepsilon(0) \quad (2.13)$$

$$P(N; s) + \varepsilon_+ - \varepsilon_- = 0 \quad (2.14)$$

Ввиду положительности величин ε_+ и ε_- законы сохранения могут выполняться только в том случае, когда

$$H(N; s) + |P(N; s)| \leq \varepsilon(0). \quad (2.15)$$

Для интересующих нас солитонов не слишком малой амплитуды ($N \gg g$) это ограничение имеет следующий вид:

$$\frac{N^3 5s^2 + 4|s| - 1}{48(1-s^2)^3} \leq \varepsilon(0).$$

Полученное неравенство показывает, что неподвижные и медленно движущиеся солитоны ($|s| < 1/5$) могут рождаться даже при $\varepsilon(0) = 0$, т. е. без участия затравочного звука. Что же касается более быстрых солитонов, то для них пороговая энергия звука отлична от нуля, причем по мере увеличения скорости солитона этот порог неограниченно возрастает.

Процесс, обратный только что рассмотренному, — это разрушение солитона набегающими на него звуковыми импульсами. Плазмоны, находящиеся в исходном солитоне, вытесняются в непрерывный спектр и покидают область первоначальной локализации. Высвобождение плазмонов происходит в тот момент, когда соб-

ственное значение энергии в потенциале, образованном возмущением ионной плотности, приближается к нулю²⁾. Поэтому потери энергии и импульса, связанные с излучением плазмонов, оказываются пренебрежимо малыми. Приняв во внимание это обстоятельство, можно с помощью законов сохранения найти энергии звуковых волн, уходящих от разрушенного солитона [9]

$$\varepsilon_{\pm}(\infty) = \varepsilon_{\pm}(0) + \frac{N^3 5s^2 \pm 4s - 1}{96(1-s^2)^3}. \quad (2.16)$$

Здесь $\varepsilon_+(0)$ и $\varepsilon_-(0)$ — энергии набегающих на солитон волн. Интересной особенностью рассматриваемого процесса является то, что для разрушения медленного ($|s| < 1/5$) солитона необходимы два звуковых импульса, движущихся навстречу друг другу. Если же звук набегаёт с какой-либо одной стороны, то он не может разрушить медленный солитон. Этот вывод непосредственно следует из формулы (2.16) и условия положительности величин $\varepsilon_+(\infty)$ и $\varepsilon_-(\infty)$.

Адиабатичность волновой функции локализованных в солитоне плазмонов ограничивает также возможности слияния двух достаточно глубоких солитонов с параметрами N_1, s_1 и N_2, s_2 в энергетически более выгодный солитон с суммарным числом плазмонов $N = N_1 + N_2$. Для такого слияния необходима близость собственных частот Ω_1 и Ω_2 , поскольку в отсутствие сближения уровней число плазмонов на каждом из них в силу адиабатичности остаётся неизменным. Наличие резонанса $\Omega_1 \approx \Omega_2$ означает, что сливающимся солитонам отвечают почти одинаковые потенциальные ямы (см. (2.10), (2.11)) и что

$$\frac{N_1}{(1-s_1^2)} \approx \frac{N_2}{(1-s_2^2)} \quad (2.17)$$

Ясно также, что для слияния солитонов наиболее благоприятна ситуация, когда исходная волновая функция плазмонов в симметричной яме, образованной сближающимися солитонами, является четной. В этом случае все плазмоны с самого начала находятся на нижнем энергетическом уровне, который может адиабатически

²⁾ Здесь подразумевается, что плазмоны, вытесненные в непрерывный спектр, уходят из области локализации за время порядка времени свободного разлета, т. е. в непрерывном спектре отсутствуют метастабильные локализованные состояния (квазиуровни).

перейти в уровень, отвечающий одному солитону. Что же касается состояния с нечетной волновой функцией и, соответственно, более высокой энергией, то при слиянии солитонов оно, оставаясь незаполненным, вытесняется в непрерывный спектр. Заметим, что описанный здесь процесс происходит вообще без изменения заселенностей уровней, т. е. наиболее легким в адиабатической ситуации способом. С учетом условия (2.17) законы сохранения энергии и импульса в процессе слияния можно записать в следующем виде:

$$\frac{N_1^3 (2-s_1^2-s_2^2)^3}{48 (1-s_1^2)^3} \frac{5s^2-1}{(1-s^2)^3} + \varepsilon_+ + \varepsilon_- = \frac{N_1^3 5(s_1^2+s_2^2)-2}{48 (1-s_1^2)^3}, \quad (2.18)$$

$$\frac{N_1^3 (2-s_1^2-s_2^2)^3}{12 (1-s_1^2)^3} \frac{s}{(1-s^2)^3} + \varepsilon_+ - \varepsilon_- = \frac{N_1^3 s_1 + s_2}{12 (1-s_1^2)^3}, \quad (2.19)$$

где s — скорость получающегося солитона, а ε_+ и ε_- — энергии излучаемых звуковых волн. Вследствие положительности величин ε_+ и ε_- скорости солитонов s_1 , s_2 и s должны удовлетворять неравенству

$$\frac{5(s_1^2+s_2^2)-2}{(2-s_1^2-s_2^2)^3} - \frac{5s^2-1}{(1-s^2)^3} \geq 4 \left| \frac{s_1+s_2}{(2-s_1^2-s_2^2)^3} - \frac{s}{(1-s^2)^3} \right|, \quad (2.20)$$

из которого следует (см. Приложение), что слияние разрешено³⁾ для солитонов с любыми значениями s_1 и s_2 ; но при этом скорость нового солитона s ограничена сверху условием

$$|s| \leq \max\{|s_1|; |s_2|; 1/5\}, \quad (2.21)$$

причем знак равенства здесь имеет место только при $s=s_1=s_2=\pm 1/5$. В действительности неравенство (2.20) дает еще более жесткое ограничение на s , но уже из условия (2.21) видно, что процессы слияния ведут к уменьшению числа быстрых солитонов, т. е. солитонов со скоростями, превышающими $1/5$.

³⁾ Подчеркнем, что неравенство (2.20) является необходимым, но отнюдь не достаточным условием слияния солитонов.

Кроме рассмотренного нами резонансного слияния солитонов, не исключен, вообще говоря, и другой процесс: слияние с образованием промежуточного двухуровневого солитона. Электрическое поле такого солитона имеет вид [9]

$$E = \psi_1(x-st)e^{-i\Omega_1 t} + \psi_2(x-st)e^{-i\Omega_2 t}, \quad (2.22)$$

где ψ_1 и ψ_2 — собственные функции уравнения (2.4) с потенциалом

$$n = - \frac{|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2}{1-s^2}. \quad (2.23)$$

Строго говоря, двухуровневый солитон не удовлетворяет уравнению (2.5), поскольку в это уравнение вносит вклад интерференция полей ψ_1 и ψ_2 . Однако если частоты Ω_1 и Ω_2 не слишком близки, то интерференционный вклад быстро осциллирует и создаваемые им возмущения плотности сравнительно малы. По этой причине время жизни двухуровневого солитона может быть достаточно большим. Конкретная форма двухуровневого солитона и аналогичных ему составных солитонов с большим числом уровней найдена в работе [9].

Упомянутые в этом разделе эффекты отнюдь не исчерпывают всех элементарных процессов с участием солитонов. Мы стремились в основном к тому, чтобы продемонстрировать возможности конструктивного использования условия адиабатичности в сочетании с общими законами сохранения. Обсуждение других элементарных процессов можно найти в обзорах [1, 2].

3. МЕТОДИКА РАСЧЕТОВ И НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Система уравнений (2.4), (2.5) подвергается дискретному преобразованию Фурье по дискретизованной пространственной координате x . В наших расчетах для этой цели используется алгоритм быстрого преобразования Фурье, оперирующий комплексными гармониками функций E и n , определенных на сетке с числом узлов $2M$, где $M=2^p$. Индекс m , нумерующий гармоники, изменяется в пределах от $(-M+1)$ до M . Поскольку возмущение плотности n

вещественно, амплитуды соответствующих гармоник n_m удовлетворяют соотношению $n_{-m} = n_m^*$, что позволяет ограничиться вычислением амплитуд с положительными значениями m , заметно сократив тем самым время расчетов.

Фурье-компоненты пространственных производных вычисляются путем умножения амплитуд E_m и n_m на соответствующие степени $2\pi m/L$, что отвечает аппроксимации исходных функций тригонометрическим полиномом с периодом, равным длине рассматриваемого пространственного промежутка L , и дифференцированию данного полинома. Такая схема эквивалентна конечно-разностной схеме максимально высокого порядка.

Нелинейные члены в уравнениях (2.4), (2.5) вычисляются путем быстрого Фурье-синтеза функций E и n в узлах сетки, выполнения нелинейных операций и возврата к дискретному представлению Фурье. Такая процедура, называемая псевдоспектральной, требует, как отмечено в работе [10], меньшего времени, чем проводившееся в работе [11] непосредственное вычисление сверток коэффициентов Фурье. Заметим, что псевдоспектральному методу присущи ошибки, связанные с недостаточностью сетки размером $2M$ для описания генерируемых нелинейностью гармоник с номерами, превышающими M . Эти ошибки можно было бы устранить, полагая амплитуды гармоник с $|m| \geq 2M/3$ равными нулю. При таком усовершенствовании получился бы быстрый эквивалент спектрального метода. Однако в наших расчетах (так же, как и в расчетах [12]) упомянутые ошибки не играли заметной роли. Поэтому никаких специальных мер для их устранения не предпринималось.

Чтобы обеспечить достаточную точность интегрирования системы уравнений для коэффициентов Фурье без существенного проигрыша в скорости счета, мы использовали метод Рунге-Кутты четвертого-пятого порядка с автоматическим выбором шага, реализованный в программе RKF 45 [13] (алгоритм, представленный в работе [14], имеет второй порядок точности). Программа типа Адамса-Башфорта ODE, DE/STEP, INTRP с варьируемым шагом и порядком, описанная в работе [15], давала в нашей задаче при той же точности меньшую скорость счета.

Проверка алгоритма выявила медленно развивающуюся счетную неустойчивость, приводившую к постоянному росту числа шагов интегрирования в единицу времени и накоплению ошибок, связанных с нефизическим возбуждением высоких пространственных гармоник. Эту неустойчивость удалось подавить, устранив из урав-

нения (2.4) линейный по полю дисперсионный вклад с помощью подстановки

$$E_m(t) = \tilde{E}_m(t) e^{-i(2\pi m/L)^2 t/g} \quad (3.1)$$

Преобразованная система уравнений остается гамильтоновой. Ее гамильтониан I равен $h_0 L$, где h_0 — нулевая гармоника плотности гамильтониана (2.8), вычисленная с помощью дискретного преобразования Фурье. Кроме величины I , эта система сохраняет число плазмонов. Что касается импульса, то при решении преобразованной системы псевдоспектральным методом он, вообще говоря, не сохраняется, однако при переходе к спектральному методу импульс также становится точным интегралом движения.

Признаком точности интегрирования по времени является сохранение числа плазмонов и величины I . Точность пространственного описания (достаточность выбранного числа гармоник) контролируется по сохранению энергии (2.8) и импульса (2.9), отвечающих функциям E и n , аппроксимированным конечными рядами Фурье. Индикатором ошибок, связанных с использованием псевдоспектрального метода служит разность величин I и H .

В обсуждаемых ниже расчетах исходное спектральное распределение плазмонов считалось гауссовым:

$$|E_m|^2 = 2 \sqrt{\pi} W_0 e^{-(2\pi m/L)^2} \quad (3.2)$$

Начальные фазы гармоник задавались генератором случайных чисел.

С учетом того, что для спектра (3.2) порог модуляционной неустойчивости сверхзвуковых плазмонов ($g \ll 1$) лежит при $W_0 = 1$ [6], средняя плотность энергии плазмонов выбиралась равной либо 0.8, либо 1.6, что позволяло проследить за изменениями, связанными с переходом от подпорогового режима к надпороговому.

Пространственный промежуток L (основной период) задавался равным $16\sqrt{2}$ л, так что волна с $k = \sqrt{2}$ представляла собой шестнадцатую гармонику. Параметр g выбирался равным $\sqrt{2}/20$. В расчетах использовались либо $2M = 512$, либо $2M = 256$ спектральных компонент электрического поля (M волн, бегущих в каждом направлении) и M гармоник возмущения плотности. Охва-

тываемый расчетами временной интервал составлял не менее 30 единиц.

Во всех расчетах начальная скорость ионов полагалась равной нулю. Начальное возмущение плотности либо отсутствовало, либо задавалось в виде синусоидальной волны малой амплитуды ($n_{max}=0.24$) с волновым числом $k=2^{-3/2}$ ($m=4$). Это позволило проверить, насколько важны для образования солитонов плазмы, находящиеся в длинноволновой части спектра, поскольку именно такие плазмы наиболее чувствительны к введенной неоднородности плотности.

Сводка начальных условий, при которых велись расчеты, представлена на рис. 1.

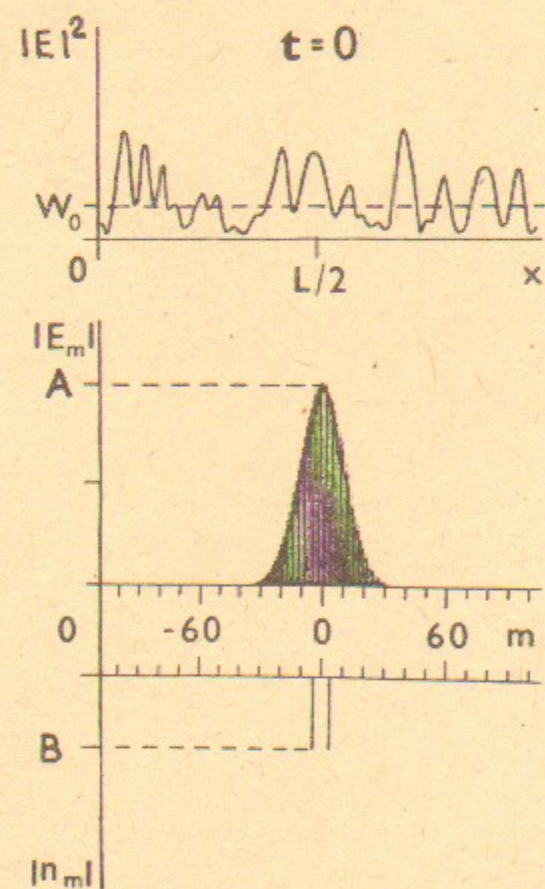


Рис. 1. Начальное пространственное распределение плотности плазмонов $|E(x)|^2$ и начальные амплитуды пространственных гармоник электрического поля $|E_m|$ и возмущения плотности плазмы $|n_m|$.

Расчеты велись в трех вариантах:
 а) $W_0=0.8$; $A=1.68$; $B=0$;
 б) $W_0=0.8$; $A=1.68$; $B=0.12$;
 в) $W_0=1.6$; $A=2.38$; $B=0.12$;

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В рассматриваемой нами задаче об эволюции турбулентности естественно характеризовать систему некоторыми усредненными по пространству величинами. Такие величины введены и проанализированы в первой половине этого раздела. Вторая половина раздела посвящена элементарным процессам, составляющим наблюдаемую усредненную картину. Здесь представлены конкретные пространственные и спектральные распределения плазмонов и возмущений плотности плазмы.

4.1 Усредненные величины

Основываясь на качественных соображениях и результатах предшествующих расчетов [7, 16], можно ожидать, что в исследуемой нами системе динамически сосуществуют структуры трех типов: свободные плазмоны, солитоноподобные связанные состояния и звуковые волны. В соответствии с этим удобно рассматривать среднюю плотность энергии h_0 как сумму четырех слагаемых

$$h_0 = h_f + h_l + h_s + h_{int}, \quad (4.1)$$

где величина h_f отвечает свободным плазмонам, h_l — связанным состояниям, h_s — звуковым волнам, а h_{int} — добавка, учитывающая энергию взаимодействия. В качестве формального определения величин h_f , h_l и h_s введем соотношения

$$h_f = \frac{1}{L} \int_0^L \left(\left| \frac{\partial E}{\partial x} \right|^2 + \frac{n}{4} |E|^2 \right) dx, \quad (4.2)$$

$$h_l = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{n}{4} |E|^2 dx, \quad (4.3)$$

$$h_s = \frac{1}{L} \int_0^L v^2 dx, \quad (4.4)$$

руководствуясь при этом следующими соображениями.

Энергия солитона с $N \gg g$ может быть записана в виде

$$H = \frac{1}{4} \int n |E|^2 dx + \int v^2 dx, \quad (4.5)$$

Первое слагаемое в правой части формулы (4.5), называемое ниже энергией связанного состояния, всегда отрицательно. Заметим, что оно равно кинетической энергии локализованных в солитоне плазмонов, взятой с обратным знаком. Второе (положительное) слагаемое обусловлено движением солитона как целого со скоростью $s = v/n$. Считая солитоны, свободные плазмоны и звук статистически независимыми, мы определили плотность кинетической энергии свободных плазмонов h_f как разность между плотностью кинетической энергии всех плазмонов и плотностью кинетической энергии связанных. Относительно плотности энергии связанных состояний h_l заметим, что она вычисляется без учета энергии движения солитонов. Этой энергией, учитываемой в h_s , можно вообще пренебречь, если предположить (в согласии с результатами раздела 2 и численных расчетов), что захваченные плазмоны локализованы преимущественно в медленных солитонах.

Изменение во времени величин h_s и h_l , отнесенных к удвоенной плотности числа плазмонов W_0 , показано на рис. 2,а—в и 3,а—в. Сравнивая h_s и h_l нетрудно заметить, что в каждом из трех вариантов расчета на всем временном интервале, за исключением короткого начального участка, имеет место соотношение

$$-h_l \approx h_s \geq h_f(0) = h_0. \quad (4.6)$$

Различие между устойчивой и неустойчивой системами проявляется в том, что в неустойчивой системе (рис. 2,в) величина h_s с самого начала растет быстрее, чем в устойчивой (рис. 2,а и в), и очень рано выходит на насыщение. Для устойчивой системы характерен заметно более длительный рост h_s .

Наряду с введенными выше величинами h_f , h_l и h_s важной характеристикой рассматриваемой системы является также число захваченных плазмонов. Строгое разделение плазмонов на свободные и захваченные требует разложения поля E по собственным функциям стационарного уравнения Шредингера с потенциалом n и представляет собой весьма трудоемкую задачу. Поэтому для обработки результатов расчетов использовалась более грубая процедура, сводящаяся к следующему. По найденному профилю скорости плазмы вычисляется среднеквадратичное (по пространству) возмущение скорости $\langle v^2 \rangle^{1/2}$. Затем выделяются те области пространства, в которых возмущение плотности удовлетворяет условию

$$n > -\beta \langle v^2 \rangle^{1/2},$$

где β — некоторый численный коэффициент. Среднее по этим областям значение величины $|E|^2$

$$W_f = \langle |E|^2 \rangle_\beta$$

считается плотностью свободных плазмонов, а оставшаяся часть суммарной плотности плазмонов, равная $W_0 - W_f$ и обозначаемая ниже W_l , приписывается захваченным плазмонам. Изменение параметра β в пределах от 0 до 1 показало, что значение W_f практически не зависит от конкретного выбора β .

Найденная таким способом зависимость доли захваченных плазмонов $\alpha \equiv W_l/W_0$ от времени показана на рис. 2,а—в. Если допустить, что все захваченные плазмоны сосредоточены в неподвижных и к тому же одинаковых солитонах, то для амплитуды солитона E_* и числа таких солитонов Q на промежутке длиной L нетрудно получить следующие выражения:

$$E_*^2 = -\frac{6h_l}{W_l}, \quad (4.7)$$

$$Q = \left(-\frac{W_l}{48h_l} \right)^{1/2} W_l L, \quad (4.8)$$

Зависимости величин E_*^2 и Q от времени показаны на рис. 2,а—в и 3,а—в.

Поскольку ширина неподвижного солитона однозначно определяется его амплитудой, величина E_* позволяет судить о ширине спектров $|E_m|$ и $|n_m|$. Сравнение с непосредственно найденными спектрами $|E_m|$ и $|n_m|$, представленными в разделе 4.2, показывает, что с момента появления первых солитонов указанное соответствие действительно имеет место. С учетом того, что и сами значения E_*^2 и Q , оцененные по формулам (4.7), (4.8), удовлетворительно соответствуют приведенным в разделе 4.2 пространственным распределениям плазмонов, предположения, сделанные при выводе оценок (4.7), (4.8), можно считать вполне приемлемыми.

Обратимся теперь к другой, более формальной характеристике поля плазмонов, — среднеквадратичному отклонению плотности плазмонов $|E|^2$ от величины W_0 : $\sigma \equiv \langle (|E|^2 - W_0)^2 \rangle^{1/2}$. Для большого числа синусоидальных волн со случайными фазами $\sigma = W_0$. Таким образом, отличие σ от W_0 следует рассматривать как свидетельство корреляции фаз. Поведение соответствующего корреляционного коэффициента

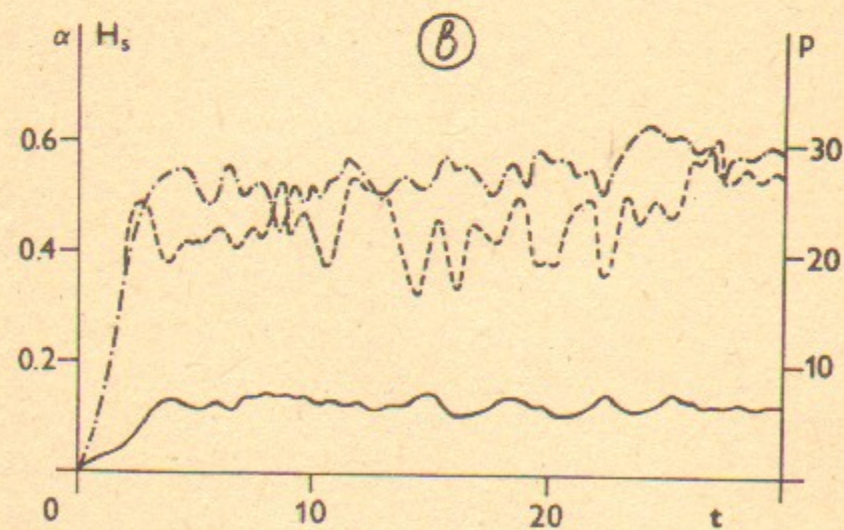
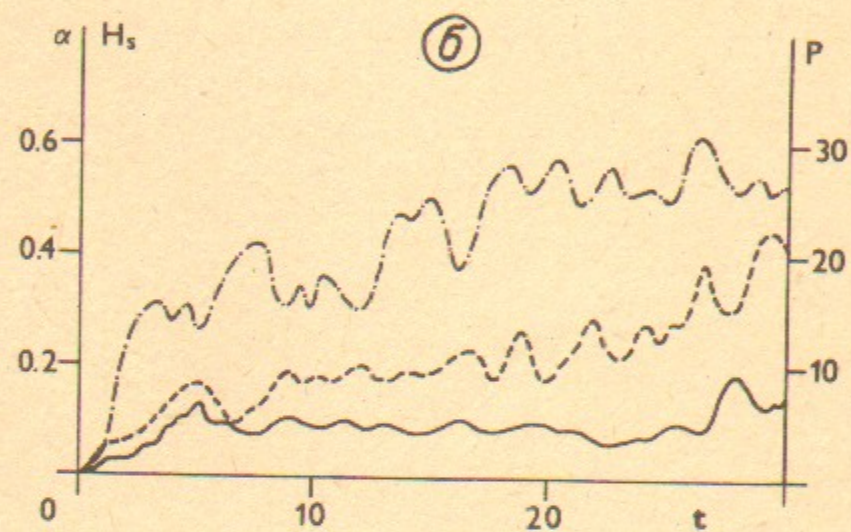
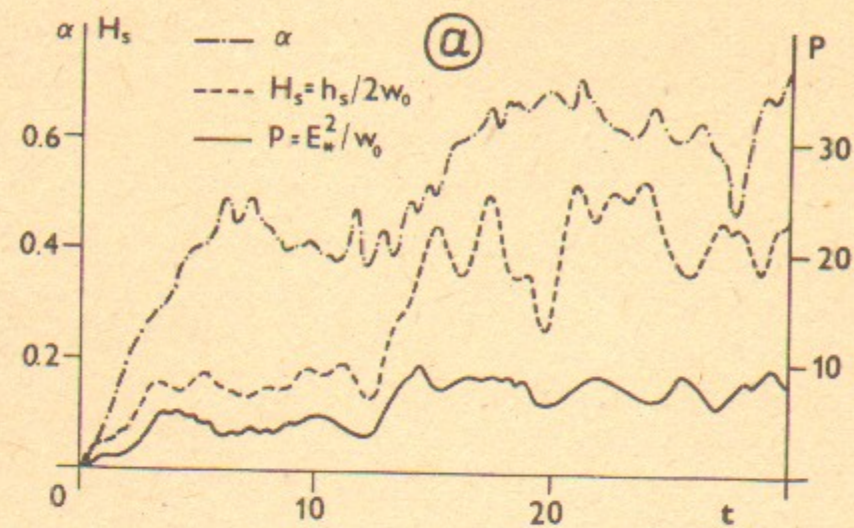


Рис. 2. Зависимости параметров турбулентности от времени для показанных на рис. 1 вариантов расчета (а, б, в); α — доля захваченных плазмонов, h_s — средняя энергия звуковых волн (4.4), E_s — характерная амплитуда солитонов (4.7).

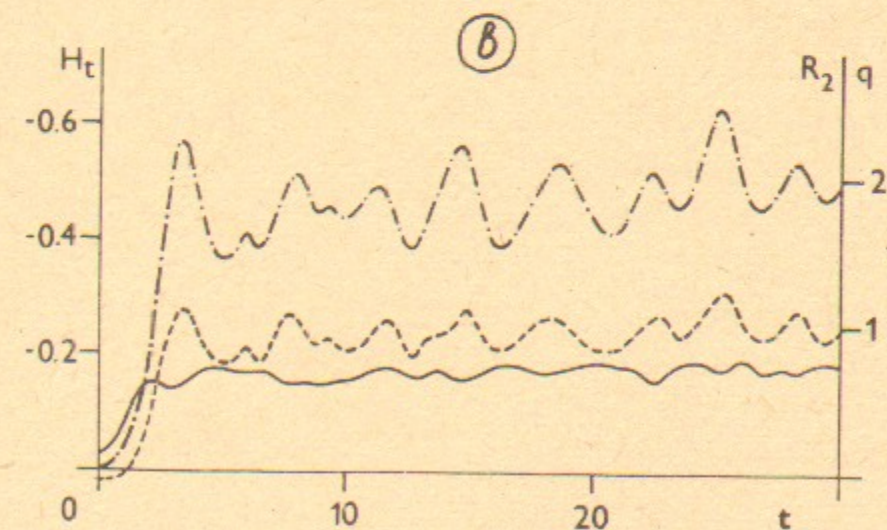
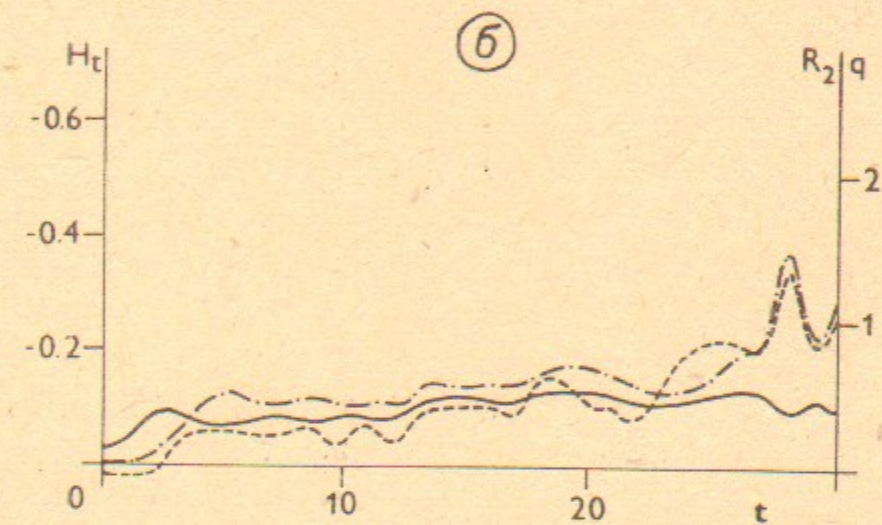
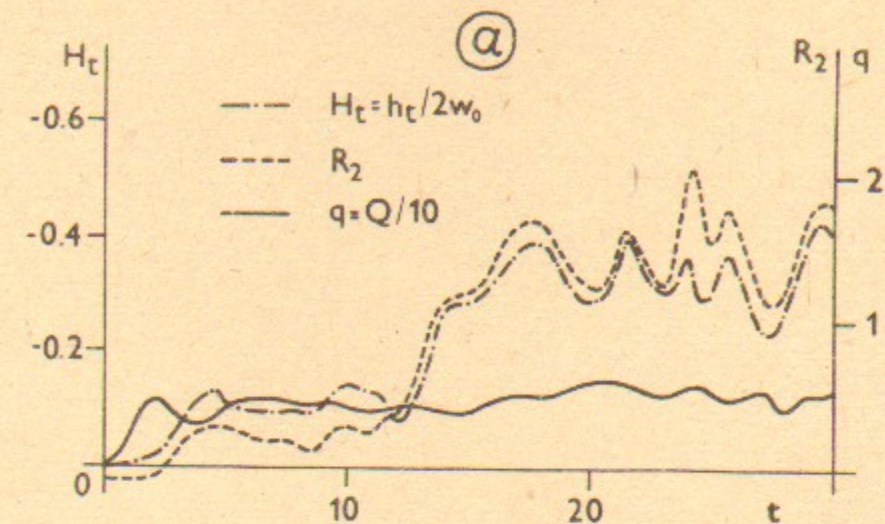


Рис. 3. Зависимости параметров турбулентности от времени для показанных на рис. 1 вариантов расчета (а, б, в); h_t — средняя энергия связанных плазмонов (4.3), R_2 — корреляционный коэффициент (4.9), Q — число солитонов (4.8).

$$R_2 \equiv \frac{\langle |E|^4 \rangle - 2W_0^2}{2W_0^2} \quad (4.9)$$

показано на рис. 3а—в. Начальный промежуток времени, в течение которого $R_2 \ll 1$ (время задержки) в модуляционно неустойчивой системе (рис. 3в), оказывается более коротким, чем в устойчивой. Кроме того, в неустойчивой системе коэффициент R_2 нарастает быстрее и сравнительно рано выходит на насыщение. В устойчивой системе характерное время формирования первых солитонов (время начального роста R_2) сопоставимо со временем задержки. Коэффициент R_2 здесь растет сравнительно медленно, но в конце концов достигает больших значений, чем в неустойчивом режиме, что указывает на большую степень локализации плазмонов.

Отметим, что значение R_2 может оказаться равным нулю даже в том случае, когда в солитоны захвачены все плазмоны. Рассмотрим в качестве примера Q одинаковых покоящихся солитонов с амплитудами E_0 , равномерно распределенных на промежутке длиной L . Для такой цепочки солитонов нулевое значение R_2 достигается при

$$E_0^2 = 3W_0, \quad (4.10)$$

т. е. при

$$\frac{L}{Q} = \frac{6\sqrt{2}}{E_0}. \quad (4.11)$$

Соотношение (4.11) можно также понимать как условие плотной упаковки солитонов при фиксированной средней плотности плазмонов W_0 . Заметим, что в наших расчетах состояние плотной упаковки не реализуется, поскольку при $\alpha \approx 1/2$ коэффициент R_2 не мал (он больше или порядка единицы).

Чтобы получить более полную информацию о поведении системы, полезно рассмотреть еще корреляционный коэффициент R_3 , задаваемый формулой

$$R_3 = \frac{\langle |E|^6 \rangle - 6W_0^3}{6W_0^3}. \quad (4.12)$$

Так же, как и R_2 , этот коэффициент равен нулю для волн со случайными фазами. Простые вычисления с использованием формулы (2.10) позволяют, зная R_2 и R_3 , получить в пределе $R_{2,3} \gg 1$ следующие выражения для h_i , W_i и Q :

$$h_i \approx -\frac{W_0^2}{2} R_2, \quad (4.13)$$

$$W_i \approx \frac{4}{5} R_2^2 / R_3, \quad (4.14)$$

$$Q \approx L \left[\frac{1}{3} \left(\frac{2}{5} \right)^3 W_0 R_2^5 / R_3^3 \right]^{1/2}. \quad (4.15)$$

При выводе формул (4.13) — (4.15) сделано предположение, что все захваченные плазмоны сосредоточены в неподвижных солитонах с примерно равными амплитудами. Поведение величин h_i и R_2 , представленных на рис. 3а—в, хорошо соответствует формуле (4.13) уже при $R_2 \sim 1$. Численные расчеты позволили также проверить соотношения (4.14) и (4.15). Эта проверка показала, что при $R_{2,3} \gg 1$ — выражения (4.14) и (4.15) дают для W_i и Q зависимости, близкие к показанным на рис. 2 и 3. Совпадение введенных нами усредненных величин, вычисляемых двумя независимыми способами, свидетельствует об адекватности используемой методики обработки численных результатов.

4.2. Пространственные и спектральные профили

На рис. 4 и 5 представлены мгновенные пространственные распределения плазмонов и возмущений плотности ионов, а также относительные значения амплитуд пространственных гармоник функций E и n . Рис. 4 отвечает подпороговой (вариант «а» на рис. 1), а рис. 5 — надпороговой (вариант «в») средней плотности плазмонов W_0 . Меньшие значения t на обоих рисунках соответствуют характерному времени образования первых солитонов, а большие — моменту окончания расчета.

Из рис. 5 видно, что в неустойчивой системе число солитонов уже на начальной стадии оказывается довольно большим, причем эти солитоны практически неподвижны. Скорость наиболее быстрого из них (первый слева на рис. 5) не превышает $1/6$. Хотя времена на рис. 5 различаются более чем на порядок, после солитонов первого поколения, возникающих очень быстро, новые солитоны практически не появляются. Отметим также, что при $t \gg 3$ с хорошей точностью сохраняется огибающая спектра гармоник $|E_m|$. В устойчивой системе (рис. 4) рост числа солитонов заметно растянут во времени. При этом прослеживается тенденция к образова-

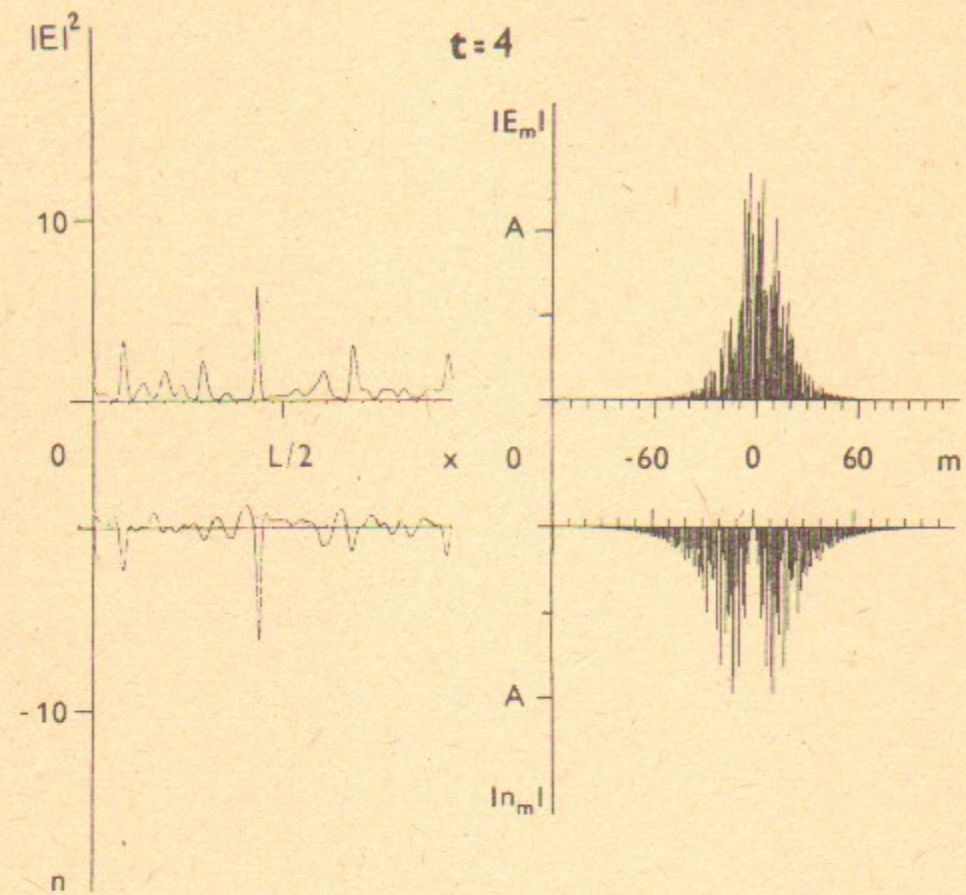


Рис. 4. Распределения высокочастотного электрического поля и возмущений плотности плазмы для двух моментов времени в подпороговом режиме (вариант «а» на рис. 1).

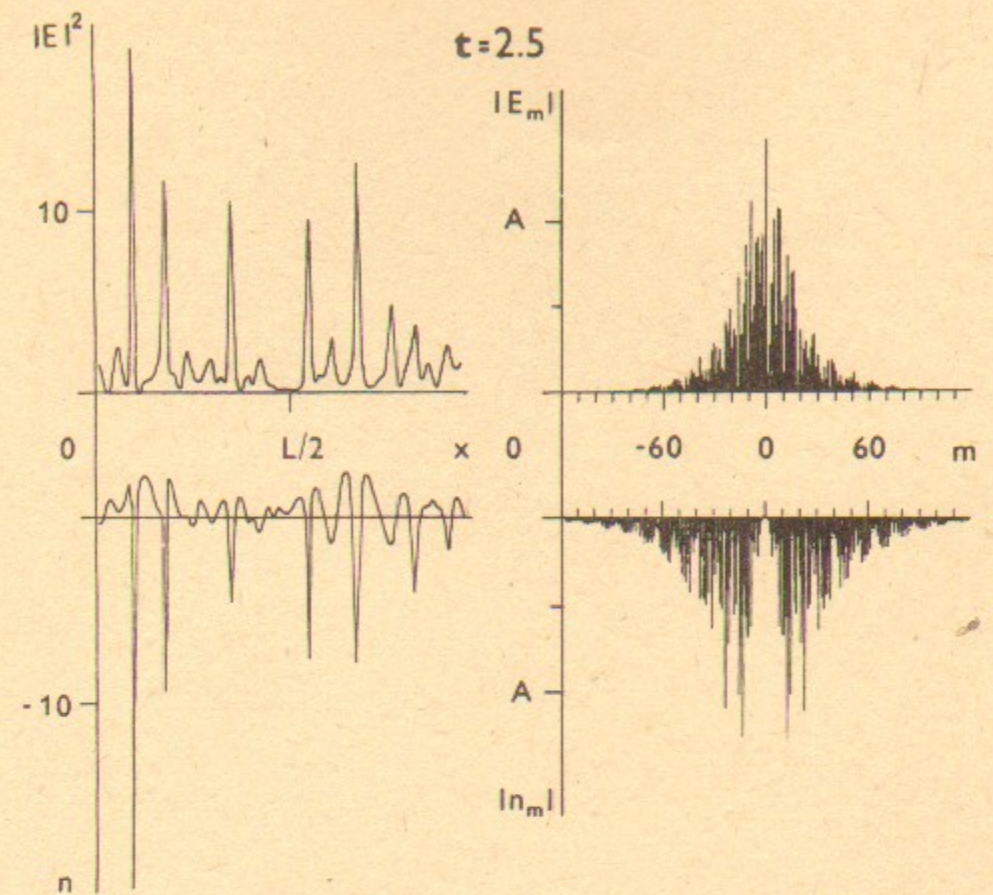
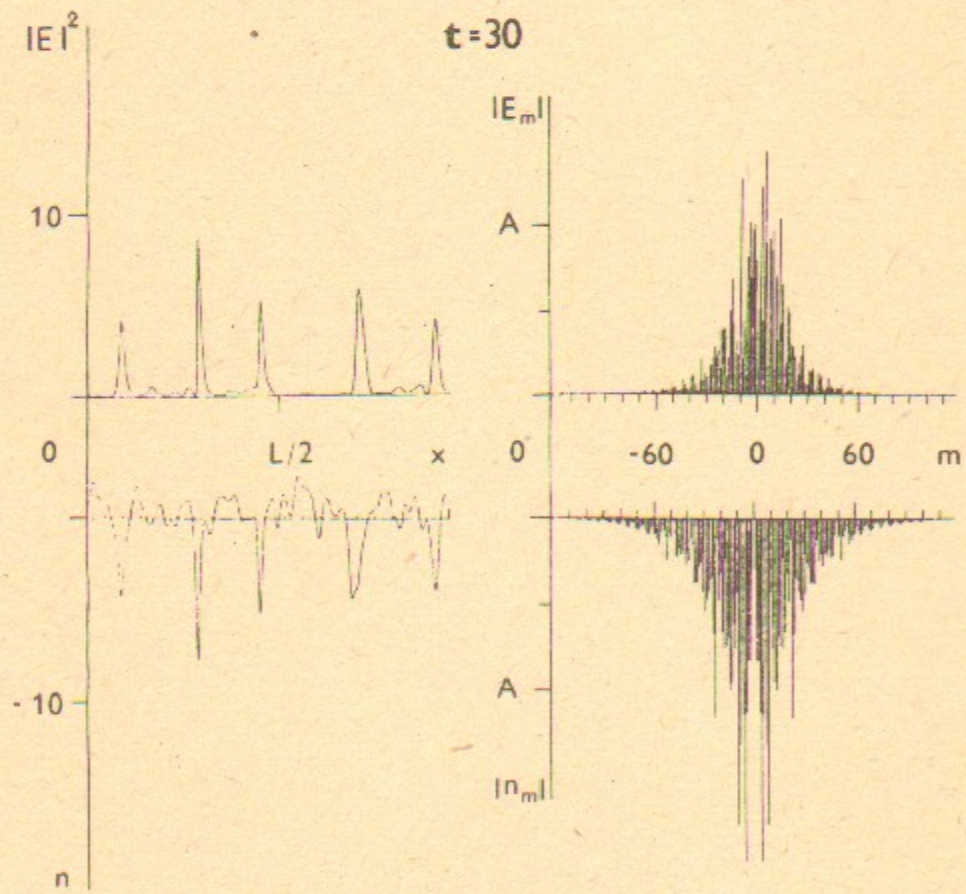
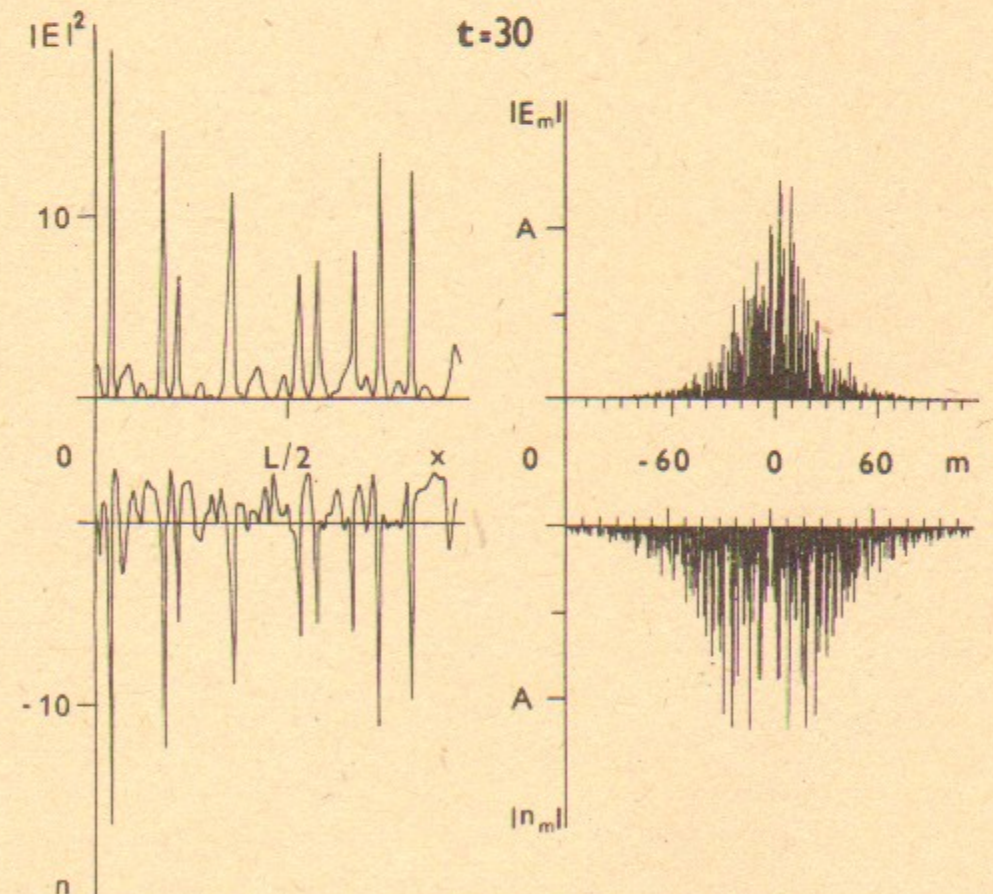


Рис. 5. Распределения высокочастотного электрического поля и возмущений плотности плазмы в надпороговом режиме (вариант «в» на рис. 1)



нию все больших солитонов в промежутках между уже имеющимися.

Общее представление об элементарных процессах, определяющих эволюцию рассматриваемой системы, дает рис. 6, составленный в виде черно-белой карты плоскости $x; t$, на которой степень почернения характеризует значение $|E|^2$. Поскольку плотность плазмонов в сформировавшихся медленных солитонах остается неизменной, максимальная степень почернения приписана областям, в которых $|E|^2 \geq 2.5 W_0$, что дает возможность более детально проследить за динамикой остальных плазмонов. Дополнением к рис. 6 служит рис. 7, на котором изображена серия профилей возмущения плотности плазмы в различные моменты времени с временным шагом $\Delta t \approx 0,3$. Кроме солитонов, рис. 7 позволяет наблюдать звуковые волны; свободные плазмоны на этом рисунке не видны.

Построив наряду с профилями $|E|^2$ профили полного давления $n + |E|^2$ (рис. 8), удастся продемонстрировать, что присутствующие в системе связанные состояния в большинстве своем равновесны: в процессе эволюции системы на профиле давления остаются только звуковые возмущения и возмущения, связанные с интерференцией свободных плазмонов. Таким образом, каждый из рисунков 6, 7, 8 (все они относятся к первому из перечисленных на рис. 1 вариантов расчета) дает представление о каких-либо двух из трех типов объектов, имеющих в рассматриваемой системе (свободные плазмоны, солитоны, звук).

Содержание рисунков 6, 7, 8 можно охарактеризовать как двухступенчатый процесс формирования связанных состояний из первоначально свободных плазмонов, сопровождающийся излучением звука. На первой стадии, отвечающей захвату плазмонов из исходного спектра, наблюдается формирование связанных состояний в виде покоящихся и движущихся кавитонов. Покоящиеся кавитоны представляют собой долгоживущие образования, более узкие, чем зародыши, из которых они возникли. Все эти кавитоны впоследствии превращаются в медленные солитоны. Движущиеся кавитоны (их характерная скорость составляет примерно половину скорости звука) существенно менее стабильны и могут внезапно исчезать или сливаться друг с другом (иногда с образованием покоящегося солитона). Движущиеся кавитоны могут также отщепляться от покоящегося кавитона при его перестройке в солитон. Совокупность всех этих процессов определяет вторую стадию эволюции системы.

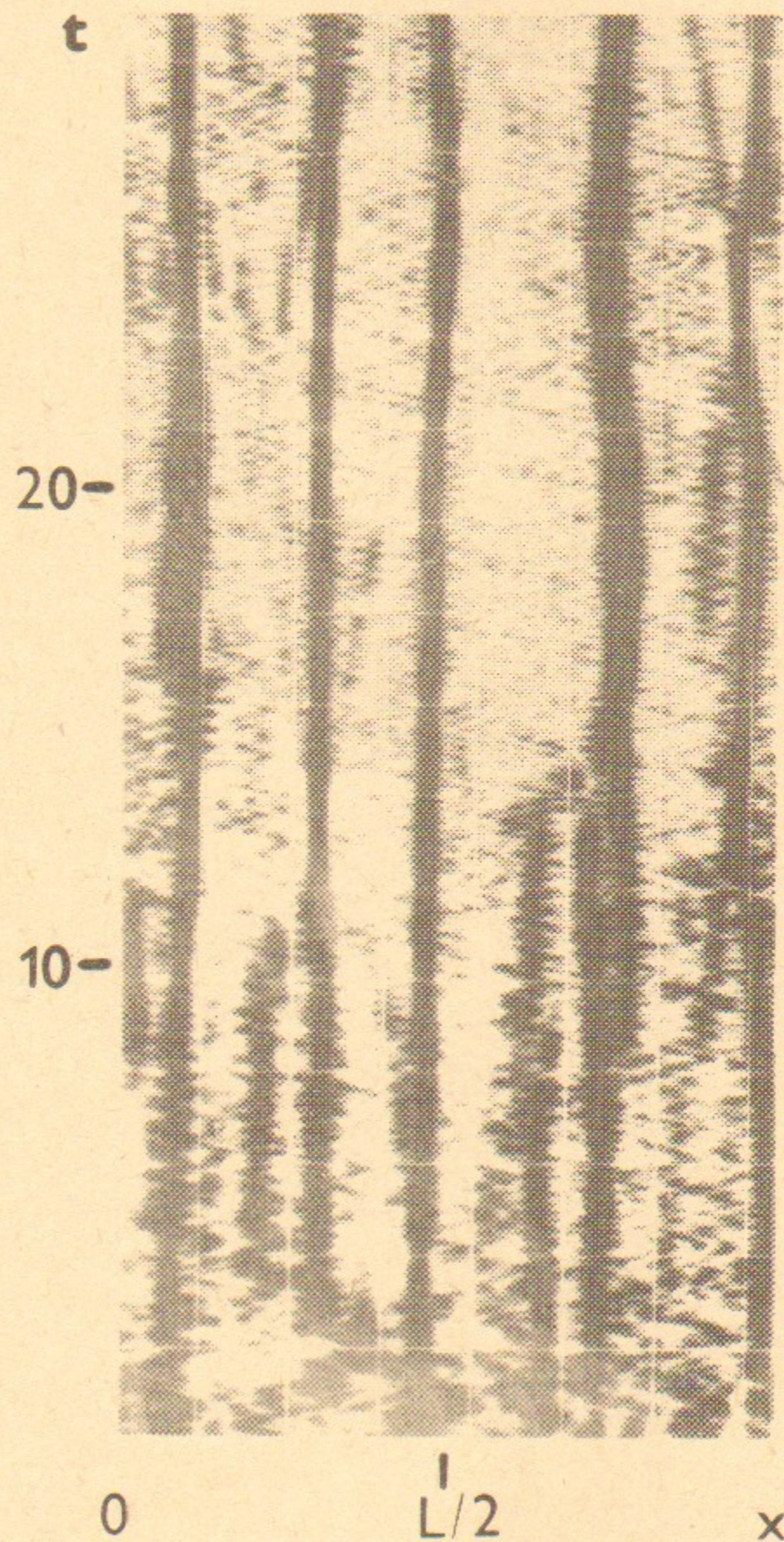


Рис. 6. Пространственно-временная эволюция плотности плазмонов $|E|^2$. Темные полосы соответствуют кавитонам и солитонам.

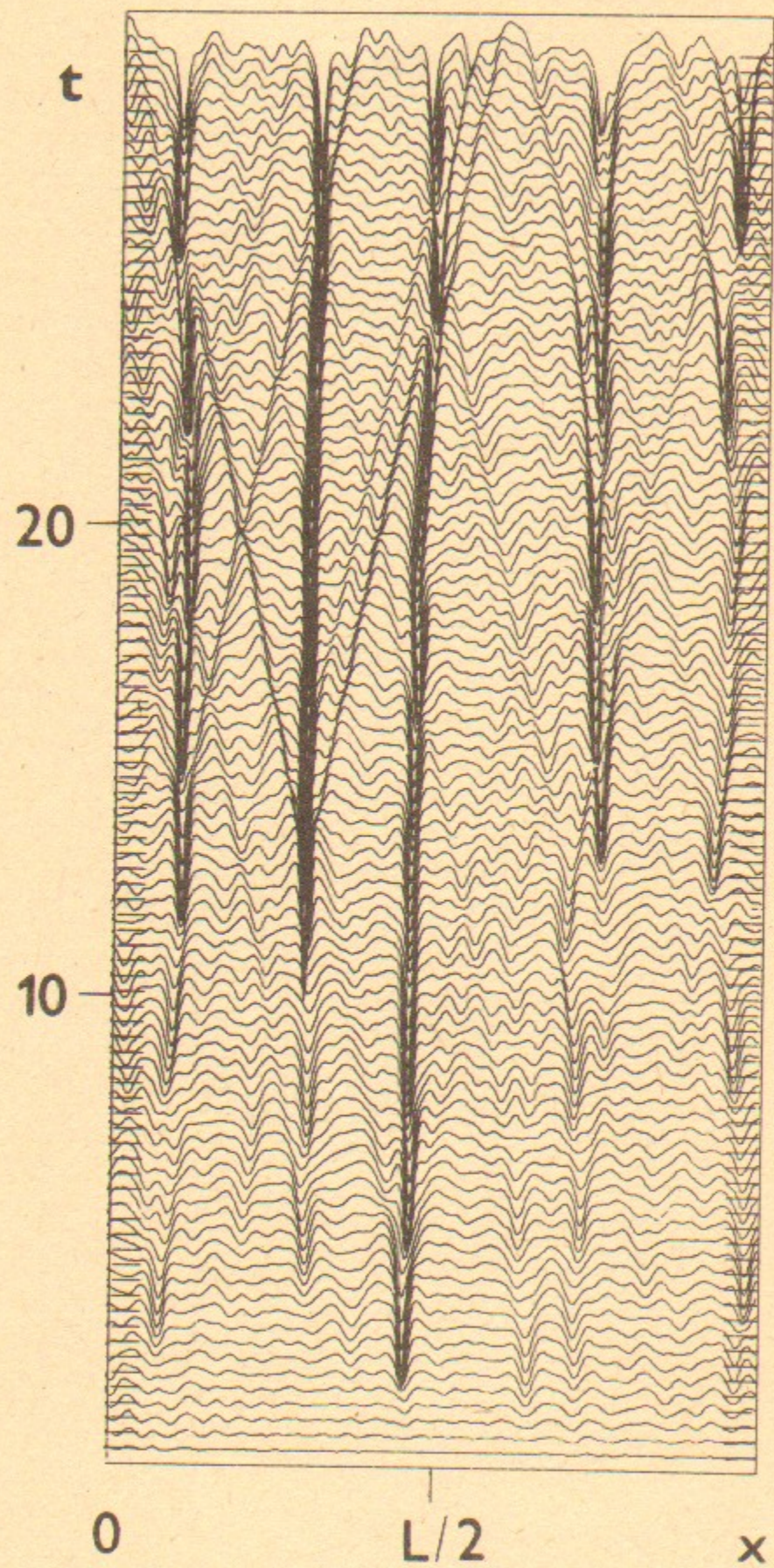


Рис. 7. Пространственно-временная эволюция возмущений плотности плазмы n .

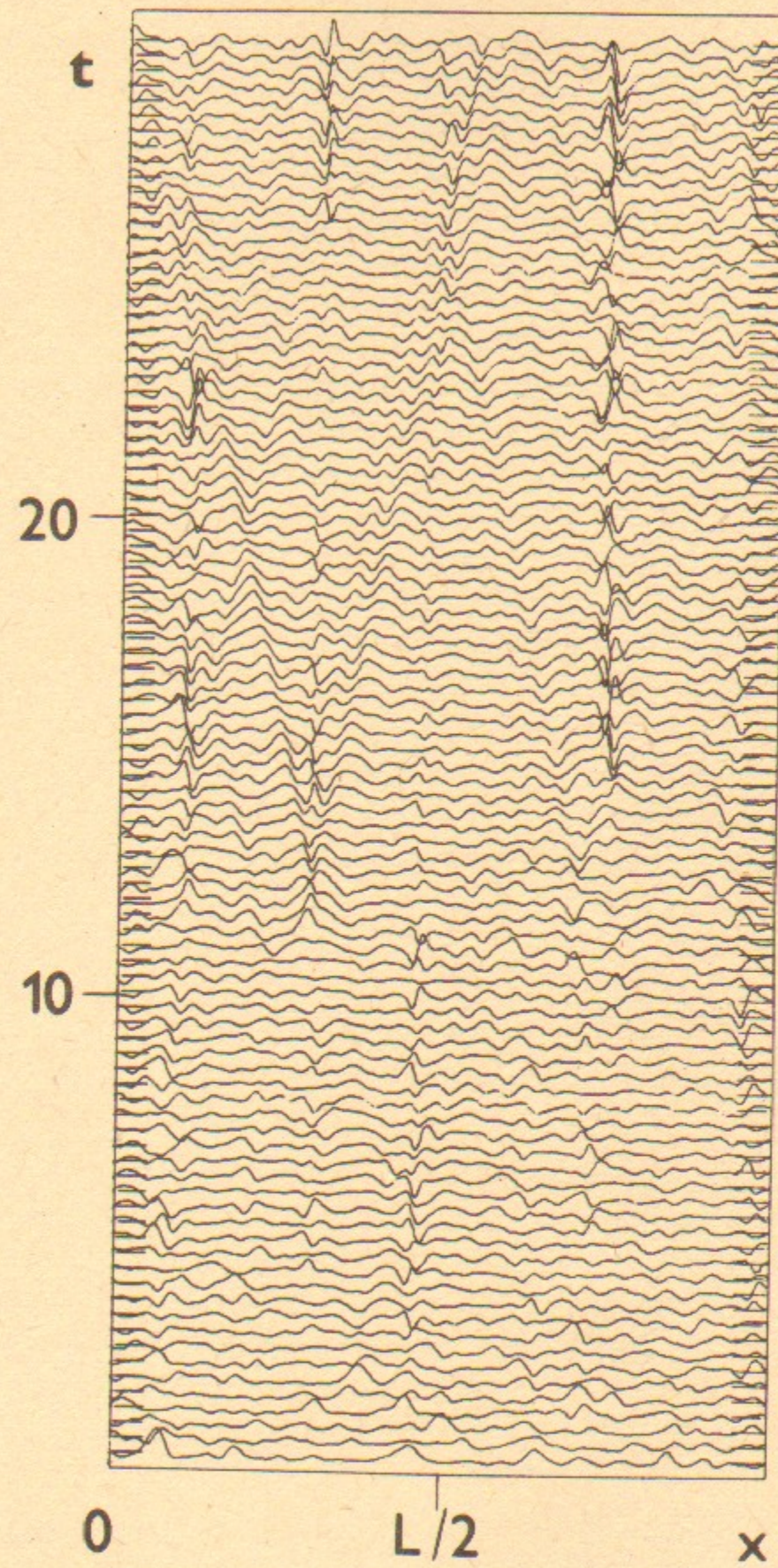


Рис. 8. Пространственно-временная эволюция величины $n + |E|^2$.

Наличие свободных плазмонов приводит к быстрым интерференционным колебаниям величины $|E|^2$ на краях солитонов. Частоты этих колебаний практически совпадают с собственными частотами связанных состояний. По мере углубления потенциальной ямы частота возрастает, что является удобным отличительным признаком рассматриваемых колебаний. Аналогичные колебания величины $|E|^2$ в движущихся кавитонах имеют, как и следовало ожидать, меньшую характерную частоту и более широкую область локализации.

С течением времени эволюция системы замедляется, и достигается состояние, в котором большинство захваченных плазмонов локализовано в медленных солитонах. Взаимодействие этих солитонов происходит сравнительно редко. Так, в частности, слияние солитонов удалось пронаблюдать лишь однажды (в конце второго варианта расчета), причем процессу слияния предшествовало длительное соседство двух близких по величине каверн плотности. На рис. 6—8 обращает на себя внимание другой процесс взаимодействия солитонов: в области $x \approx 3L/4$ наблюдается образование долгоживущей структуры, в которой возмущение давления быстро осциллирует, а силовое равновесие выполняется лишь в среднем по времени. Эта структура напоминает составной солитон (2.22), (2.23), описанный в работе [9].

5. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ И ОБСУЖДЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Имея в виду описанные выше численные расчеты, рассмотрим подробнее качественную картину формирования солитонов в системе, близкой к порогу модуляционной неустойчивости, т. е. при $W_0 \sim W_{th}$, где W_{th} — пороговое значение плотности плазмонов. В работе [18] было показано, что в случае малой надпороговости

$$\mu \equiv \frac{W_0 - W_{th}}{W_{th}} \ll 1 \quad (5.1)$$

и гауссова спектра исходного поля E_k модуляционная неустойчивость связана с длинноволновыми возмущениями плотности:

$$q = (3\mu)^{1/2}, \quad (5.2)$$

где q — характерное волновое число возмущения.

На линейной стадии эти возмущения нарастают с инкрементом

$$\gamma = \mu \sqrt{3/2} \quad (5.3)$$

из случайных затравок, создаваемых длинноволновыми флуктуациями давления плазмонов.

Чтобы составить представление об обратном влиянии растущих возмущений плотности на плазмоны, удобно обратиться к простейшему случаю строго периодического в пространстве возмущения с периодом $2\pi/q$. Вследствие адиабатичности рассматриваемой задачи такое возмущение уже при весьма малой амплитуде расслаивает энергетический спектр плазмонов на зоны, переходы между которыми практически запрещены. С увеличением амплитуды возмущения нижняя зона, куда входят плазмоны с исходными волновыми числами $|k| \leq q/2$, опускается вниз по частотам и превращается в набор солитонных состояний. Отсюда видно, что основная доля плазмонов может захватиться в солитоны только в случае достаточно большой надпороговости, когда величина q сопоставима с характерным волновым числом плазмонов [9].

Если пренебречь возможным спонтанным нарушением периодичности системы, обусловленным флуктуациями, то можно сделать вывод, что плазмоны, находящиеся в нижней энергетической зоне, образуют на каждом периоде исходного синусоидального возмущения по одному солитону с

$$N = \frac{2\pi}{q} \int_{-q/2}^{q/2} W(k) dk \sim W_0. \quad (5.4)$$

где W_k — исходная спектральная плотность плазмонов. Спонтанное нарушение периодичности на стадии пространственного разделения солитонных волновых функций, т. е. при $n \sim q^2$ может привести к тому, что образующиеся солитоны окажутся неодинаковыми. При случайном увеличении числа плазмонов в окрестности какого-либо минимума плотности, служащего зародышем солитона, процесс углубления ямки плотности в этом месте ускоряется, что способствует переходам плазмонов с уровня на уровень в пределах нижней энергетической зоны. По этой причине можно ожидать преимущественного захвата плазмонов в солитоны с повышенным значением N ($N > W_0$), характерное расстояние между которыми в несколько раз превышает длину волны, соответствующую максимуму инкремента модуляционной неустойчивости. Именно такая ситуация и наблюдается в численных расчетах (см. рис. 5).

В случае малой надпороговости ($\mu, q \ll 1$) возникает дополни-

тельный вопрос о судьбе плазмонов, не захваченных в солитоны первого поколения. Наиболее естественная, на первый взгляд, возможность состоит в том, что благодаря слаботурбулентной спектральной перекачке свободных плазмонов в системе восстанавливается модуляционная неустойчивость, ведущая к появлению новых солитонов. Здесь, однако, следует учесть два обстоятельства.

Во-первых, результаты численных расчетов, относящихся к подпороговому режиму, показывают, что солитоны появляются раньше, чем начинает играть сколько-нибудь заметную роль перекачка, обусловленная трехволновым взаимодействием плазмонов со звуком. Во-вторых, в исходно неустойчивой системе должна замедляться и сама спектральная перекачка [18].

Дело в том, что при образовании солитона из него выдавливаются «излишки» плотности в виде положительных выбросов, которые по ширине и амплитуде сопоставимы с самим солитоном. Для плазмонов с $k < N$ эти выбросы представляют собой практически непроницаемые потенциальные барьеры. При $N \geq 1$ такие барьеры «перегораживают» фактически весь исходный спектр. Пара барьеров, разделенных промежутком $\sim q^{-1}$, делает спектр плазмонов в этом промежутке квазидискретным, причем разность волновых чисел соседних спектральных компонент Δk сопоставима с q , а разность соответствующих частот $\Delta \Omega \sim kq/g$. На квантовомеханическом языке упомянутая дискретизация соответствует появлению квазиуровней (метастабильных состояний, локализованных в промежутке между барьерами). В случае непрерывного спектра законы сохранения энергии и импульса при трехволновом взаимодействии плазмонов со звуком показывают, что изменение волнового числа плазмона в элементарном акте взаимодействия равно g , а характерное время связанной с этим процессом спектральной перекачки оценочно равно $g^{-1}W_0^{-1}$ (см., например, [19]). Ясно, что влияние дискретизации спектра на скорость перекачки должно быть наиболее сильным при $q \gg g$. В этом режиме перекачка становится экспоненциально медленной (ее характерное время возрастает как $\exp(q/g)$)⁴⁾.

Альтернативная модуляционной неустойчивости модель, позво-

⁴⁾ Здесь не учитывается возможность разрушения рассматриваемых потенциальных барьеров под воздействием свободных плазмонов и солитонов. Такое разрушение может изменить конкретную оценку скорости перекачки, но не снимает вопроса о замедлении перекачки вследствие локализации плазмонов, аналогичной андерсоновской локализации квантовой частицы в случайном потенциале [20]. Роль андерсоновской локализации в динамике плазмонов требует, на наш взгляд, отдельного и весьма подробного обсуждения.

ляющая объяснить появление солитонов и в подпороговом режиме, основана на предположении, что солитоны рождаются из сгустков плазмонов, представляющих собой флуктуации случайного поля $E(x)$. Динамика образования солитонов из отдельных сгустков описана в работах [8, 9]. Чтобы построить статистическую картину, необходимо дополнительно знать вероятности различных флуктуаций пространственного распределения плазмонов.

Рассмотрим комплексное электрическое поле плазмонов $E_l(x)$, где l — пространственный корреляционный масштаб, представляющее собой суперпозицию большого числа гармоник со случайными фазами. В любой точке x вещественная (R) и мнимая (I) части $E_l(x)$ являются статистически независимыми величинами, распределенными по нормальному закону

$$f(R; I) dR dI = \frac{1}{\pi W_{0l}} \exp\left(-\frac{R^2 + I^2}{W_{0l}}\right) dR dI, \quad (5.5)$$

где $W_{0l} \equiv \langle |E_l(x)|^2 \rangle$ (угловые скобки означают усреднение по ансамблю).

По распределению (5.5) нетрудно оценить вероятность того, что число плазмонов на некотором интервале порядка корреляционной длины l превышает N_l :

$$P(N_l) \sim \exp\left(-\frac{N_l}{lW_{0l}}\right). \quad (5.6)$$

Если на оси x выделено несколько таких интервалов, то по смыслу величины l числа плазмонов на непересекающихся интервалах можно считать статистически независимыми.

Допустим теперь, что поле $E_l(x)$ представляет собой длинноволновую часть полного поля плазмонов $E(x)$, корреляционный масштаб которого равен единице. Кроме того, предположим, что рассматриваемые длинноволновые плазмоны все еще можно считать сверхзвуковыми, т. е.

$$l \ll g^{-1}. \quad (5.7)$$

Если спектр гармоник поля $E(x)$ качественно сходен с гауссовым, то величину W_{0l} — для длинных волн можно оценить как W_0/l . В результате формула (5.6) приобретает вид

$$P(N_l) \sim \exp\left(-\frac{N_l}{W_0}\right), \quad (5.8)$$

не зависящий от конкретного значения корреляционной длины l . Отметим, что во флуктуациях, которые могут стать зародышами солитонов, участвует заметная доля всех длинноволновых плазмонов. Действительно, согласно формуле (5.8) на тех участках, где $N_l \geq 2W_0$, сосредоточена примерно половина (точнее, $3e^{-2}$) таких плазмонов, тогда как доля этих участков среди всех интервалов порядка корреляционной длины l составляет всего лишь e^{-2} . Соответствующие сгустки достаточно удалены друг от друга, что позволяет рассматривать их как независимые.

Из-за экспоненциального убывания $P(N_l)$ с увеличением N_l солитоны с числом плазмонов $N > W_0$ должны рождаться прежде всего из тех флуктуаций, которым отвечает достаточно высокая (порядка единицы) вероятность перехода плазмонов в связанное состояние. Такой переход естественно назвать самозахватом.

Для самозахвата сгустка плазмонов, имеющего ширину l и не обладающего дополнительным внутренним масштабом, глубина n потенциальной ямы, создаваемой этим сгустком за время его свободного разлета

$$\tau_l \sim gl^2, \quad (5.9)$$

должна быть сопоставимой с характерным значением кинетической энергии плазмона l^{-2} . Оценив значение n с помощью уравнения (2.5) как

$$n \sim \tau_l^2 N l^{-3}, \quad (5.10)$$

можно записать условие $n \sim l^{-2}$ в следующем виде:

$$N \sim g^{-2} l^{-3}. \quad (5.11)$$

Заметим, что благодаря неравенству (5.7) ширина солитона с числом плазмонов (5.11), равная по порядку величины $g^2 l^3$, оказывается малой по сравнению с l . Поэтому сгусток плазмонов, образовавшийся при самозахвате связанное состояние, должен в дальнейшем сжаться в $g^{-2} l^{-2}$ раз. Длительность такого сжатия, имеющего автомодельный характер, по порядку величины не превышает длительности самозахвата [8]. Это позволяет оценить время формирования солитона с числом плазмонов $N > g$ по формуле (5.9), положив в ней $l \sim (g^2 N)^{-1/3}$.

$$\tau_N \sim g^{-1/3} N^{-2/3} \quad (5.12)$$

Заметим, что при $N \gg W_0$ и $W_0 < g^{-2}$ это время меньше времени спектральной перекачки.

Согласно соотношениям (5.8), (5.12), плотность солитонов $\nu(N; t)$ с числом захваченных плазмонов, превышающим N , должна расти со временем по закону

$$\nu(N; t) \approx g N t e^{-N/W_0} \quad (5.13)$$

до тех пор, пока в исходном спектре не исчерпается запас плазмонов с $k \leq g^{2/3} N^{1/3}$. В этой оценке учтено, что область формирования отдельного солитона имеет ширину порядка размера захватываемого в солитон сгустка, т. е. $(g^2 N)^{-1/3}$.

Чисто формально из оценки (5.13) следует, что для рассматриваемой системы наиболее характерны солитоны с $N \sim W_0$. Здесь, однако, необходимо сделать два замечания. Во-первых, при $W_0 \ll 1$ локальное значение $|E|^2$ в солитонах с $N \sim W_0$, равное по порядку величины W_0^2 , мало по сравнению с W_0^5 , т. е. такие солитоны практически неразличимы на фоне исходного распределения плазмонов и, следовательно, не представляют большого интереса. Солитоны начинают заметно выделяться из фона только при $N \sim W_0^{1/2}$. Впрочем, при $W_0 \sim 1$, т. е. в тех режимах, где велись численные расчеты, значения W_0 и $\sqrt{W_0}$ фактически сливаются. Во-вторых, по мере рождения солитонов с $N \sim W_0$ в них постепенно захватываются все имеющиеся в исходном спектре плазмоны с длинами волн порядка $(g^2 W_0)^{-1/3}$, после чего образование таких солитонов прекращается, и основную роль начинают играть солитоны с большим числом плазмонов.

Предположим теперь, что основная часть плазмонов с $k \leq \bar{k} \ll 1$ благодаря самозахвату перешла в связанные состояния, а плазмоны с $k > \bar{k}$ остались свободными. Тогда согласно формуле (5.11) для рассматриваемой системы наиболее типичны солитоны с

$$N \sim \bar{k}^3 g^{-2}. \quad (5.14)$$

Характерное расстояние L_N между такими солитонами определяется полным числом плазмонов с $k \leq \bar{k}$ в исходном спектре и равно

$$L_N \sim N / (\bar{k} W_0). \quad (5.15)$$

При $N \gg W_0$ это расстояние существенно превышает размер облас-

⁵⁾ Чтобы не нарушалось введенное выше ограничение (5.7), должно иметь место неравенство $W_0 \gg g$, которое предполагается здесь выполненным.

ти формирования солитона \tilde{k}^{-1} . Отсюда видно, что при обогащении спектра плазмонами с $k \leq \tilde{k}$ в промежутках между имеющимися солитонами могли бы сформироваться новые солитоны с тем же значением N .

Согласно формулам (5.13), (5.14) время захвата из первоначального спектра большинства волн с $k \leq \tilde{k}$ возрастает с \tilde{k} пропорционально $\exp(\tilde{k}^3/g^2 W_0)$. Поэтому должно существовать некоторое пороговое значение \tilde{k} , начиная с которого становится недопустимым пренебрежение спектральной перекачкой плазмонов. В том случае, когда дискретизация спектра свободных плазмонов подавляет перекачку, обусловленную распадным взаимодействием плазмонов с ионным звуком, основным каналом перекачки может оказаться не включенное в наше рассмотрение индуцированное рассеяние плазмонов на электронах.

В описанном флуктуационном сценарии формирования солитонов система вообще не достигает порога модуляционной неустойчивости. Тем не менее значительная часть свободных плазмонов может захватываться в солитоны. Ясно, что и при достаточно малой надпороговости должны доминировать флуктуации. Чтобы уточнить роль модуляционной неустойчивости, необходимо сравнить отвечающие ей оценки времени захвата и длины волны захватываемых плазмонов с аналогичными оценками для флуктуационного механизма.

Сравнение инкремента неустойчивости (5.3) со временем формирования солитона с $N \sim 1$ путем самозахвата (5.12) показывает, что неустойчивость является более быстрым процессом при

$$\mu > g^{1/3}. \quad (5.16)$$

Чтобы неустойчивость могла перевести в солитоны большее число плазмонов, чем самозахват, необходимо выполнение неравенства $ql > 1$. Учитывая, что q определено формулой (5.2), а l — формулой (5.11) и условием $N \sim 1$, получаем отсюда ограничение, более мягкое, чем (5.16):

$$\mu > g^{4/3}. \quad (5.17)$$

Из этих оценок видно, что при $\mu < g^{4/3}$ полностью доминирует флуктуационный механизм образования солитонов, а при несколько больших значениях μ

$$g^{1/3} > \mu > g^{4/3} \quad (5.18)$$

из флуктуаций возникают только первые солитоны, вслед за появлением которых развивается модуляционная неустойчивость с $q \sim \mu^{1/2}$, увеличивающая долю захваченных плазмонов до $\mu^{1/2}$. При этом благодаря малой надпороговости ($\mu \ll 1$) плазмоны в большинстве своем остаются свободными. Скорость образования солитонов на следующем этапе определяется скоростью спектральной перекачки, модифицированной вследствие дискретизации спектра плазмонов (необходимость учета дискретизации вытекает из неравенства $q > g^{2/3} \gg g$). При $1 > \mu > g^{1/3}$ флуктуационный механизм в сочетании со спектральной перекачкой начинает играть роль только после насыщения модуляционной неустойчивости.

Если сравнить качественные предсказания, следующие из полученных оценок, с результатами расчетов в подпороговом режиме ($W_0 = 0.8$), то между ними обнаруживается вполне удовлетворительное соответствие. Действительно, оценка времени самозахвата (5.12) неплохо согласуется с характерным временем появления первых солитонов (время задержки и время начального роста величины R_2 на рис. 3, а и б). Число плазмонов, захваченных в эти солитоны, отвечает исходному числу плазмонов в длинноволновой части спектра, подверженной самозахвату, а расстояние между солитонами в несколько раз превышает длину их формирования, что подтверждается появлением более поздних солитонов сопоставимого размера (рис. 4, 6, 7). В качественном соответствии с оценками на временах, превышающих (5.12), в системе наблюдается снижение частоты появления новых солитонов и образование солитонов с большей амплитудой. Несмотря на отсутствие модуляционной неустойчивости доля захваченных плазмонов к моменту окончания расчета достигает примерно половины от общего числа плазмонов. К этому моменту в системе отчетливо видны медленные ($|s| \ll 1$) солитоны с сопоставимыми амплитудами. Добавим еще, что наличие начального возмущения плотности, отличающего расчетный режим «б» от режима «а» (см. рис. 1), заметно меняет положения и амплитуды возникающих солитонов. Естественное объяснение этого факта состоит в том, что малое возмущение плотности сказывается на динамике длинноволновых плазмонов, испытывающих самозахват, поскольку именно эти плазмоны сильнее всего подвержены влиянию данного возмущения.

Из результатов, относящихся к надпороговому режиму ($W_0 = 1.6$), видно, что модуляционная неустойчивость действительно повышает плотность солитонов первого поколения и скорость их образования. В эти одновременно образующиеся солитоны зах-

ватывается больше плазмонов, чем в солитоны первого поколения устойчивой системы. В дальнейшем, однако, процесс захвата плазмонов резко замедляется, несмотря на то, что число свободных плазмонов все еще заметно превышает соответствующее число для подпорогового режима с $W_0=0.8$. Такое поведение системы можно считать косвенным подтверждением влияния дискретизации на скорость спектральной перекачки плазмонов.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты расчетов и аналитические оценки показывают, что в системе сверхзвуковых плазмонов, средняя плотность которых W_0 лежит ниже порога модуляционной неустойчивости, но превышает величину g , солитоны первого поколения рождаются в результате самозахвата спонтанно возникающих сгустков длинноволновых плазмонов. При фиксированном отношении W_0/W_{th} доля захватываемых плазмонов убывает с увеличением характерной групповой скорости основной массы плазмонов как $g^{2/3}$.

В надпороговой системе с $\mu > g^{4/3}$ преобладающим механизмом захвата становится модуляционная неустойчивость, но вплоть до надпороговости порядка единицы доля непосредственно захватываемых плазмонов остается малой (порядка $\mu^{1/2}$). В системе с $\mu \ll 1$ модуляционная неустойчивость допускает образование солитонов только из наиболее длинноволновых плазмонов с волновыми числами порядка $\mu^{1/2}$. Для захвата всех остальных плазмонов необходима их предварительная перекачка в длинноволновую область спектра. При наличии такой перекачки формирование дополнительных солитонов может быть обеспечено флуктуационным механизмом, не требующим перехода через порог модуляционной неустойчивости.

Процесс формирования солитонов сопровождается излучением звуковых волн, приводящих к дискретизации спектра свободных плазмонов. Эта дискретизация способна сильно замедлить процесс спектральной перекачки по сравнению со случаем однородной плазмы, что косвенно подтверждается результатами численных расчетов.

Наряду с различиями между модуляционным и флуктуационным механизмами рождения солитонов им присуща важная общая черта: число плазмонов, захватываемых в солитоны, определяется

начальной стадией их (солитонов) формирования, поскольку в дальнейшем возникает адиабатический запрет на переход свободных плазмонов в связанные состояния. Так как медленность эволюции профиля плотности плазмы не является спецификой рассмотренной нами одномерной задачи, адиабатические ограничения на захват плазмонов должны играть не менее важную роль при образовании двух и трехмерных самолокализованных структур, в частности, на начальной стадии ленгмюровского коллапса.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Докажем, что для любой пары чисел s_1 и s_2 , лежащих на интервале $(-1; 1)$, можно найти на этом интервале число s , удовлетворяющее неравенству

$$\frac{5(s_1^2 + s_2^2) - 2}{(2 - s_1^2 - s_2^2)^3} - \frac{5s^2 - 1}{(1 - s^2)^3} \geq 4 \left| \frac{s_1 + s_2}{(2 - s_1^2 - s_2^2)^3} - \frac{s}{(1 - s^2)^3} \right|. \quad (\text{П.1})$$

Положим для этого $s = y$, где y — корень уравнения

$$\frac{y}{(1 - y^2)^3} = \frac{s_1 + s_2}{(2 - s_1^2 - s_2^2)^3}, \quad (\text{П.2})$$

и покажем, что

$$\frac{5y^2 - 1}{(1 - y^2)^3} \leq \frac{5(s_1^2 + s_2^2) - 2}{(2 - s_1^2 - s_2^2)^3}. \quad (\text{П.3})$$

Поскольку при изменении y от -1 до 1 функция $y/(1 - y^2)^3$ монотонно возрастает от $-\infty$ до ∞ , искомый корень заведомо существует.

На промежутке $0 \leq y^2 < 1$ левая часть (П.3) представляет собой монотонно возрастающую функцию y^2 . Поэтому для доказательства неравенства (П.3) достаточно проверить, что это неравенство выполняется при замене y^2 некоторой величиной z^2 , удовлетворяющей условию

$$y^2 \leq z^2 < 1. \quad (\text{П.4})$$

В качестве z выберем корень уравнения

$$\frac{z}{(1 - z^2)^3} = \frac{r}{4(1 - r^2)^3}, \quad (\text{П.5})$$

где $r \equiv [(s_1^2 + s_2^2)/2]^{1/2}$.

Выполнение условия (П.4) обеспечивается при этом соотношениями (П.2), (П.5) и неравенством $|s_1 + s_2| \leq 2r$.

Проверим теперь, что

$$\frac{5z^2 - 1}{(1 - z^2)^3} \leq \frac{5r^2 - 1}{4(1 - r^2)^3}. \quad (\text{П.6})$$

Учитывая положительность величин z и r и используя формулу (П.5), можно переписать неравенство (П.6) в виде

$$5z - \frac{1}{z} \leq 5r - \frac{1}{r}.$$

При $z > 0$ и $r > 0$ это соотношение эквивалентно требованию

$$z \leq r. \quad (\text{П.7})$$

Монотонность возрастания функции $z/(1 - z^2)^3$ на интервале $(0; 1)$ позволяет сделать вывод, что лежащий на указанном интервале корень уравнения (П.5) автоматически удовлетворяет неравенству (П.7), что, в свою очередь, гарантирует выполнение неравенства (П.3).

Чтобы получить из неравенства (П.1) соотношение (2.21), заметим предварительно, что в силу симметрии (П.1) относительно перестановки s_1 и s_2 можно без ограничения общности считать, что $|s_1| \geq |s_2|$.

Неравенство (П.1) эквивалентно следующим двум ограничениям:

$$\frac{5(s_1^2 + s_2^2) \pm 4(s_1 + s_2) - 2}{(2 - s_1^2 - s_2^2)^3} \geq \frac{5s^2 \pm 4s - 1}{(1 - s^2)^3}.$$

Отсюда, в частности, видно, что

$$\frac{5(s_1^2 + s_2^2) + 4|s_1| \pm 4s_2 - 2}{(2 - s_1^2 - s_2^2)^3} \geq \frac{5s^2 \pm 4s - 1}{(1 - s^2)^3}.$$

Это неравенство останется в силе, если максимизировать числитель левой части по s_2 с учетом условия $|s_2| \leq |s_1|$. Такая максимизация показывает, что

$$2 \frac{5s_1^2 + 4|s_1| - 1}{(2 - s_1^2 - s_2^2)^3} \geq \frac{5s^2 + 4|s| - 1}{(1 - s^2)^3}. \quad (\text{П.8})$$

При $|s_1| < 1/5$ левая часть соотношения (П.8) отрицательна, а это значит, что отрицательна и правая часть, т. е.

$$|s| < 1/5 \quad (\text{П.9})$$

Если же $|s_1| \geq 1/5$, то в (П.8) можно, сохраняя знак неравенства, заменить s_2 на s_1 . Получающийся результат имеет вид

$$\frac{1}{4} \frac{5s_1^2 + 4|s_1| - 1}{(1 - s_1^2)^3} \geq \frac{5s^2 + 4|s| - 1}{(1 - s^2)^3}. \quad (\text{П.10})$$

С учетом монотонного возрастания функции $\frac{[5s^2 + 4|s| - 1]}{(1 - s^2)^3}$ на промежутке $0 < |s| < 1$ неравенство (П.10) сводится к требованию

$$|s| \leq |s_1|. \quad (\text{П.11})$$

Неравенства (П.9) и (П.11) в совокупности с условиями их применимости эквивалентны соотношению (2.21).

ЛИТЕРАТУРА

1. Rudakov L.I., Tsytoich V.N. Strong Langmuir Turbulence. — Phys. Reports, 1978, v.40, N.1, p.1—73.
2. Thornhill S.G., Ter Haar D. Langmuir Turbulence and Modulational Instability. — Phys. Reports, 1978, v.43, N.2, p.45—99.
3. Гапонов А.В., Миллер М.А. О потенциальных ямах для заряженных частиц в высокочастотном электромагнитном поле. — ЖЭТФ, 1958, т.34, вып.1, с.242—243.
4. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах. — ЖЭТФ, 1971, т.61, вып.1(7), с.118—134.
5. Захаров В.Е. Коллапс ленгмюровских волн. — ЖЭТФ, 1972, т.62, вып. 5, с.1745—1759.
6. Веденов А.А., Рудаков Л.И. О взаимодействии волн в сплошных средах. — ДАН СССР, 1964, т.159, с.767—770.
7. Strong Langmuir Turbulence — Computer Simulations/Z. Sedláček, K. Jungwirth, P. Stavinoha, V.N. Breizman. — Proc. 12 Europ. Conf. on Contr. Fusion and Plasma Phys., Budapest, 1985, pt 2, p.338—341.
8. Захват квантовой частицы в мелкую потенциальную яму и образование солитона из сгустка ленгмюровских волн / В.Т. Астрелин, Б.Н. Брейзман, В.В. Васильев, З. Седлачек, К. Юнгвирт. — ЖЭТФ, 1986, т.91, вып. 6(12), с.2039—2052.
9. Адиабатические эффекты в динамике ленгмюровских солитонов / В.Т. Астрелин, Б.Н. Брейзман, З. Седлачек, К. Юнгвирт. — Препринт 87-33 ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1987.
10. Gottlieb D., Orszag S.A. Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and

- Applications. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania, 1977.
11. *Weiland J.* The Growth of Modulational Instability for Randomized Initial Conditions. — *Physica Scripta*, 1977, v.16, p.137—141.
 12. *Fornberg B., Whitham G.B.* A Numerical and Theoretical Study of Certain Non-linear Wave Phenomena. *Phil. Trans. Royal Soc. (London), Ser. A, Math. and Phys. Sci.* 1978, v.289, N. 1361, p.373—404.
 13. *Forsythe G.E., Malcolm M.A., Moler C.B.* Computer Methods for Mathematical Computations. Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.Y., 1977.
 14. *Payne G.L., Nicholson D.R., Downie R.M.* Numerical Solution of the Zakharov Equations. — *J. Comput. Phys.*, 1983, v.50, N.3, p. 482—498.
 15. *Shampine L.F., Gordon M.K.* Computer Solution of Ordinary Differential Equations. The Initial Value Problem. W.N.Freeman and Co., San Francisco, 1975.
 16. Одномерная турбулентность ленгмюровских волн / *Л.М.Дегтярев, Р.З. Сагдеев, Г.И. Соловьев, В.Д. Шапиро, В.И. Шевченко.* — *Физика плазмы*, 1980, т.6, вып.3, с.485—508.
 17. *Брейзман Б.Н., Малкин В.М.* Динамика модуляционной неустойчивости широкого спектра ленгмюровских волн. — *ЖЭТФ*, 1980, т.79, вып.3(9), с.857—869.
 18. *Breizman B.N., Jungwirth K.* Dynamics of Solution Formation from Random Langmuir Waves. — *Proc. 7. Int. Conf. on Plasma Phys.*, Kiev, 1987, v.2, p.31—34.
 19. *Цытович В.Н.* Нелинейные эффекты в плазме. М.: Наука, 1967.
 20. *Лифшиц И.М., Гредескул С.А., Пастур Л.А.* Введение в теорию неупорядоченных систем. М.: Наука, 1982.

Б.Н. Брейзман, З. Седлачек, К. Юнгвирт

**Образование солитонов из
ленгмюровских волн со случайными фазами**

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 4 ноября 1987 г.
Подписано в печать 10 ноября 1987 г. МН 08447
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 3,4 печ.л., 3,0 уч.-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 154

Набрано в автоматизированной системе на базе фото-
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и
отпечатано на ротапинтере Института ядерной физики
СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.