



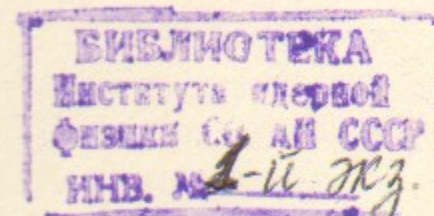
Б.18

14

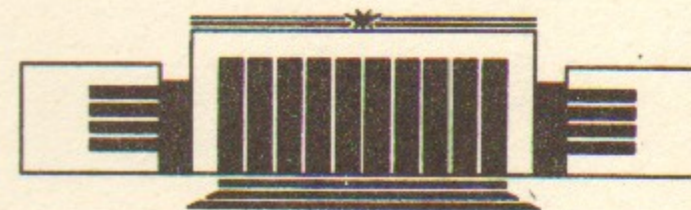
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

В.Н. Байер, В.М. Катков, В.М. Страховенко

ИЗЛУЧЕНИЕ ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ  
РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ В СРЕДЕ  
В ПРИСУТСТВИИ ВНЕШНЕГО ПОЛЯ



ПРЕПРИНТ 87-26



НОВОСИБИРСК

Излучение при столкновении релятивистских частиц  
в среде в присутствии внешнего поля

В.Н. Байер, В.М. Катков, В.М. Страховенко

Институт ядерной физики  
630090, Новосибирск 90, СССР

## АННОТАЦИЯ

Развит подход к рассмотрению тормозного излучения с учетом эффектов среды и внешнего поля. Получены кинетические уравнения, позволяющие учесть влияние рассеяния и внешнего поля. На их основе проведен анализ тормозного излучения в экранированном кулоновском потенциале и на ядре. Соответствующие сечения вычислены со степенной точностью. С логарифмической точностью проведено исследование эффектов при столкновении  $e^+e^-$  пучков в линейных коллайдерах.

Radiation at Collision of Relativistic Particles  
in Media in the Presence of External Field

V.N. Baier, V.M. Katkov, V.M. Strakhovenko

Institute of Nuclear Physics  
630090, Novosibirsk 90, USSR

## АБСТРАКТ

An approach has been developed for consideration of the bremsstrahlung taking into account the effects of a media and an external field. Kinetic equations are obtained which permit one to consider an influence of the scattering and the external field. An analysis of the bremsstrahlung in a screened Coulomb potential and in nucleus field is carried out using these equations. The corresponding cross sections are calculated up to power accuracy. An investigation of the bremsstrahlung at  $e^+e^-$  beams collision in linear colliders is carried out up to logarithmic accuracy.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

При очень высоких энергиях длина формирования некоторых основных процессов квантовой электродинамики оказывается очень большой и тогда картина процессов становится зависящей от среды, где они происходят, а также от внешних полей. Л.Д. Ландау и И.Я. Померанчук [1] впервые обратили внимание, что если длина формирования тормозного излучения становится сравнимой с длиной, на которой существенно проявляется многократное рассеяние, то происходит подавление процесса тормозного излучения. Количественная теория этого эффекта была развита А.Б. Мигдалом [2, 3]. Двое из авторов [4] показали, что внешние поля также могут менять процесс тормозного излучения. Указанные выше эффекты ярко проявляются в двух физических явлениях, активно изучаемых в настоящее время. Одно из них — излучение при прохождении электронов высокой энергии через ориентированные монокристаллы, второе — излучение при столкновении  $e^+e^-$  пучков в так называемых линейных коллайдерах (при энергии частиц в сотни ГэВ и выше). В настоящей работе развит теоретический подход к рассмотрению тормозного излучения с учетом среды и внешнего поля. Ранее полученные результаты (в тех случаях, когда они правильны) получаются как простые предельные случаи.

Квантовые эффекты во внешнем поле  $F_{\mu\nu}$  характеризуются параметром\*)  $\chi$  ( $\chi^2 = \frac{e^2}{m^6} |(F_{\mu\nu} p^\nu)^2|$ ,  $p^\mu$  — 4-импульс частиц), для определенности в поперечном электрическом (магнитном) поле  $E(H)$

\*) В работе используется система единиц  $\hbar=c=1$ .

$$\chi = \frac{E}{E_0} \gamma \quad \left( \chi = \frac{H}{H_0} \gamma \right), \quad (1.1)$$

где  $\gamma = \varepsilon/m$  — лоренц-фактор,  $E_0 = \frac{m^2}{e} = \left( \frac{m^2 c^3}{e \hbar} \right) = 1,32 \cdot 10^{16}$  В/см, причем область  $\chi \geq 1$  уже является существенно квантовой. Ситуация, при которой  $\chi > 1$  осуществляется при прохождении электронов и позитронов с энергией  $\varepsilon \geq 100$  ГэВ через ориентированные монокристаллы, где эффективное электрическое поле создается атомными цепочками. Такая же ситуация будет иметь место в линейных коллайдерах, где частица движется в скрещенном электромагнитном поле встречного пучка. В обоих этих случаях внешнее поле создается самой средой, через которую проходит частица, и поэтому неотделимо от этой среды.

Рассмотрим влияние внешнего поля на процесс тормозного излучения. Это влияние связано с уменьшением длины формирования фотона (тормозного или виртуального) за счет относительно большого поворота скорости частицы на этой длине и соответствующего расширения конуса углов излучения. Если фотон с частотой  $\Omega$  излучается электроном (позитроном) с энергией  $\varepsilon$  на угол  $\theta$  относительно направления его скорости, то длина формирования такого фотона определяется соотношением\*)

$$l_\Omega \sim \frac{\varepsilon - \Omega}{\varepsilon \Omega \theta^2} \equiv (\varepsilon u_\Omega \theta^2)^{-1}, \quad (1.2)$$

где  $u_\Omega \equiv \frac{\Omega}{\varepsilon - \Omega}$ . В слабых полях характерные углы излучения  $\theta \sim 1/\gamma$  и влиянием внешнего поля можно пренебречь, если выполняется условие

$$\dot{\nu} l_\Omega = \frac{eH}{\varepsilon} l_\Omega \ll 1/\gamma. \quad (1.3)$$

Подставляя (1.2) в (1.3), имеем критерий слабости поля

$$\gamma \frac{eH}{\varepsilon} \frac{\gamma^2}{\varepsilon u_\Omega} = \frac{\chi}{u_\Omega} \ll 1. \quad (1.4)$$

В сильных полях, когда  $\chi/u \gg 1$ , характерные углы излучения

$\theta \gg 1/\gamma$ , эффективный угол излучения  $\theta_{\text{эф}}$  определяется из условия самосогласованности определения  $\theta_{\text{эф}}$ : угол отклонения частицы в поле на длине формирования фотона не превышает  $\theta_{\text{эф}}$ , т. е.

$$\dot{\nu} l_\Omega(\theta_{\text{эф}}) \sim \theta_{\text{эф}}, \quad \theta_{\text{эф}} \sim \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\chi}{u_\Omega} \right)^{1/3} = \left( \frac{eH}{\varepsilon^2 u_\Omega} \right)^{1/3},$$

$$l_\Omega(\theta_{\text{эф}}) \sim \frac{\gamma}{m u_\Omega} \left( \frac{u_\Omega}{\chi} \right)^{2/3} = \left( \frac{\varepsilon}{u_\Omega e^2 H^2} \right)^{1/3}. \quad (1.5)$$

Как видно из (1.5), при  $\chi/u \gg 1$  ни характерный угол излучения, ни длина формирования фотона не зависят от массы излучающей частицы. Параметр, характеризующий влияние внешнего поля на процесс излучения, был получен в [4].

Из формул (1.5) следует, что характерная длина формирования фотона при  $\chi/u_\Omega \gg 1$  уменьшается в  $(\chi/u_\Omega)^{2/3}$  раз, а углы излучения увеличиваются в  $(\chi/u_\Omega)^{1/3}$ . Поскольку входящий сюда параметр  $\chi/u_\Omega$  зависит от частоты ( $u$ ), то эффект проявляется раньше для мягких фотонов. По этой причине в  $e^+e^-$ -столкновениях поле существенно влияет на формирование виртуального фотона

( $\Omega \simeq q'_0 = \frac{\omega m^2}{4\varepsilon(\varepsilon - \omega)}$ ,  $\omega$  — частота реального фотона) даже в умеренных полях и при относительно низких энергиях частиц, когда параметр  $\frac{\chi(\varepsilon - \omega)}{\omega} \equiv \frac{\chi}{u}$  мал, а большой является величина

$\frac{\chi(\varepsilon - q'_0)}{q'_0} \simeq 4\gamma^2 \frac{\chi}{u}$ . В этом случае картина излучения тормозного фотона (блок излучения) непосредственно не меняется, а существенно меняется спектр виртуальных фотонов при передачах импульса  $|q| \leq q_{\text{min}} \left( 4\gamma^2 \frac{\chi}{u} \right)^{1/3}$ , что приводит к увеличению нижней

границы эффективных передач импульса и, соответственно, к уменьшению сечения. С логарифмической точностью сечение излучения при этих условиях было получено в [4] с помощью метода эквивалентных фотонов. В работе [6] задача была решена с релятивистской точностью.

Как было показано в работе [4] и следует из формулы (1.4), при  $\chi/u \geq 1$  уже меняется блок излучения, описывающий поглощение виртуального фотона и излучение реального. Поскольку длина формирования реального фотона  $l_\omega$  при больших  $\chi/u \gg 1$  падает как  $(u/\chi)^{2/3}$  (см. (1.5)), то таким же образом падает сечение тормозного излучения. Ранее уже предпринимались попытки вычис-

\*) Это следует из квазиклассической теории излучения (см, например, [5]).

лить это сечение. Так, в работе [7] с логарифмической точностью вычислялось сечение тормозного излучения на ядре в постоянном внешнем поле. Однако некорректное использование в [7] стандартного метода эквивалентных фотонов для данной ситуации привело к неправильной зависимости аргумента логарифма от параметра  $\chi/u$ . В недавно опубликованной работе [8] вычислялось сечение излучения на экранированном кулоновском потенциале с той же точностью. Полученная в этой работе функция при логарифме не согласуется с [7].

Настоящая работа посвящена расчету сечения тормозного излучения при столкновении частиц в присутствии поля с релятивистской (квазиклассической) точностью. В разделе 2 содержатся вывод и анализ кинетических уравнений, применимость которых заметно шире, чем необходимая для дальнейшего расчета. В разделах 3, 4 проведен анализ излучения в экранированном кулоновском потенциале и на ядре, соответственно. В разделе 5 с логарифмической точностью обсуждаются особенности тормозного излучения при столкновении  $e^+e^-$  пучков. В Приложение вынесены детали вычислений в пределе сильного поля. В расчетах мы пренебрегаем поляризацией среды, которая существенна только при излучении очень мягких фотонов и которая в очень сильных полях, когда  $\chi/u \gg 1$  к тому же подавлена в  $(\chi/u)^{2/3}$  раз.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Будем исходить из квазиклассической теории излучения, развитой двумя из авторов (см., напр., [5]). Вероятность излучения в этой теории имеет вид (формула (9.27) работы [5])

$$d\omega = \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \frac{d^3k}{\omega} \int dt_1 \int dt_2 R^*(t_2) R(t_1) \exp \left\{ -\frac{i\varepsilon}{\varepsilon - \omega} (kx(t_2) - kx(t_1)) \right\}, \quad (2.1)$$

где  $k = (\omega, \vec{k})$  — четыре-импульс фотона;  $k^2 = 0$ ,  $x(t) = (t, \vec{r}(t))$ ;  $t$  — время;  $\vec{r}(t)$  — координата на классической траектории частицы. Для спинорных частиц с релятивистской точностью имеем

$$R(t) = \varphi_f^+ (A + i\vec{\sigma}\vec{B}) \varphi_i,$$

$$A = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \omega} \right) \vec{e}\vec{v} \simeq \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \omega} \right) \vec{e}\vec{\bar{v}}; \quad B = \frac{\omega}{2(\varepsilon - \omega)} \vec{e} \times \vec{b}, \quad (2.2)$$

$$b = \vec{n} - \vec{v} + \frac{\vec{n}}{\gamma} \simeq -\vec{\bar{v}} + \frac{\vec{n}}{\gamma},$$

где угол  $\vec{\bar{v}} = \frac{1}{v} (\vec{v} - \vec{n}(\vec{n}\vec{v})) \simeq \vec{v}_\perp$ ,  $\vec{v}_\perp$  — поперечная к вектору  $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{\omega}$  составляющая скорости частицы. Если нас не интересует поляризация начальной и конечных частиц, то

$$R^*(t_2) R(t_1) \rightarrow \frac{1}{2(\varepsilon - \omega)^2} \left[ \frac{\omega^2}{\gamma^2} + (\varepsilon^2 + (\varepsilon - \omega)^2) \vec{\bar{v}}\vec{\bar{v}}' \right] \equiv \frac{1}{2} \mathcal{Z}(\vec{\bar{v}}', \vec{\bar{v}}). \quad (2.3)$$

где введены обозначения  $\vec{\bar{v}}' = \vec{\bar{v}}(t_2)$ ,  $\vec{\bar{v}} = \vec{\bar{v}}(t_1)$ . Если частица движется по определенной траектории, то подставляя классические значения  $\vec{r}(t)$  и  $\vec{v}(t)$  в формулы (2.1) — (2.3), получаем искомую вероятность процесса. При наличии рассеяния выражение (2.1) должно быть усреднено по всем возможным траекториям частицы. Эта операция осуществляется при помощи функции распределения, усредненной по расположению атомов рассеивающей среды и удовлетворяющей кинетическому уравнению с учетом внешнего поля (ускорения частицы). Тогда вероятность излучения в единицу времени можно представить в виде (см. [5])

$$dW = \left\langle \frac{d\omega}{dt} \right\rangle = \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \frac{d^3k}{\omega} \operatorname{Re} \int_0^\infty d\tau \exp \left\{ -\frac{i\varepsilon}{\varepsilon'} \omega\tau \right\} \times \\ \times \int d^3v d^3v' d^3r d^3r' \mathcal{Z}(\vec{\bar{v}}', \vec{\bar{v}}) F(\vec{r}, \vec{v}, t) F(\vec{r}', \vec{v}', \tau; \vec{r}, \vec{v}) \times \\ \times \exp \left\{ i \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \vec{k}(\vec{r}' - \vec{r}) \right\}; \quad \varepsilon' = \varepsilon - \omega. \quad (2.4)$$

Функции распределения  $F$  в (2.4) удовлетворяют кинетическому уравнению

$$\frac{\partial F(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial F(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial \vec{r}} + \vec{\omega} \frac{\partial F(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial \vec{v}} = \\ = n \int \sigma(\vec{v}, \vec{v}') [F(\vec{r}, \vec{v}', t) - F(\vec{r}, \vec{v}, t)] d^3v', \quad (2.5)$$

где  $n$  — плотность атомов среды;  $\sigma(\vec{v}, \vec{v}')$  — сечение рассеяния. Должно выполняться также условие нормировки

$$\int d^3r d^3v F(\vec{r}, \vec{v}, t) = 1 \quad (2.6)$$

и начальное условие для  $F_i$ ;

$$F_i(\vec{r}', \vec{v}', 0; \vec{r}, \vec{v}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(\vec{v} - \vec{v}').$$

В формуле (2.4) проведем интегрирование по  $d^3r d^3(\vec{r}' - \vec{r})$ , воспользовавшись тем, что  $F_i(\vec{r}', \vec{v}', \tau; \vec{r}, \vec{v})$  может зависеть только от разности координат  $\vec{r}' - \vec{r}$

$$dW = \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \frac{d^3k}{\omega} \operatorname{Re} \int_0^\infty d\tau \int d^3v d^3v' \mathcal{L}(\vec{\theta}', \vec{\theta}) F_i(\vec{v}, t) F_k(\vec{v}', \tau; \vec{v}), \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned} F_i(\vec{v}, t) &= \int d^3r F_i(\vec{r}, \vec{v}, t), \\ F_k(\vec{v}', \tau; \vec{v}) &= \exp\left\{-i \frac{\varepsilon \omega \tau}{\varepsilon'}\right\} \int d^3\vec{r}' \exp\left\{i \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \vec{k}(\vec{r}' - \vec{r})\right\} \times \\ &\quad \times F_k(\vec{r}', \vec{v}', \tau; \vec{r}, \vec{v}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

При этом

$$\begin{aligned} F_k(\vec{v}', \tau; \vec{v}) &= U(\vec{\theta}', \vec{\theta}, \tau) \delta(|\vec{v}'| - |\vec{v}|), \\ U(\vec{\theta}', \vec{\theta}, 0) &= \delta(\vec{\theta}' - \vec{\theta}), \end{aligned} \quad (2.9)$$

если учесть, что в ультрарелятивистском случае  $\vec{\omega} \vec{v} \sim O\left(\frac{1}{\gamma^3}\right)$ ,  $\vec{\omega} \simeq \vec{\omega}_\perp$ , а сечение рассеяния

$$\sigma(\vec{v}, \vec{v}') = \delta(|\vec{v}'| - |\vec{v}|) \sigma(\vec{\theta}, \vec{\theta}'). \quad (2.10)$$

Используя уравнение (2.5) для  $F$ , получаем следующее уравнение для  $U(\vec{\theta}', \vec{\theta}, \tau)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} + i \frac{\omega \varepsilon}{2 \varepsilon'} \left( \frac{1}{\gamma^2} + \vec{\theta}'^2 \right) U + \vec{\omega} \frac{\partial U}{\partial \vec{\theta}'} &= \\ = n \int d^2\theta'' \sigma(\vec{\theta}', \vec{\theta}'') [U(\vec{\theta}'', \vec{\theta}, \tau) - U(\vec{\theta}', \vec{\theta}, \tau)]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Вывод этого уравнения при  $\vec{\omega} = 0$  содержится в книге [5], использование в которой квазиклассического метода позволило существенно упростить рассмотрение работы [3]. Аналогичное уравнение для зависимости  $U$  от  $\vec{\theta}$  можно получить, проведя замену  $\vec{\theta}' \rightarrow \vec{\theta}$ ,  $\vec{\omega} \rightarrow -\vec{\omega}$ . Если мы не интересуемся конечными состояниями заряженной частицы, то вероятность (2.7) необходимо проинтегрировать по  $d^3v'$ . В результате, имеем для вероятности излучения в

единицу времени, нормированной на одну частицу, движущуюся со скоростью  $\vec{v}$ :

$$\begin{aligned} dW &= \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \frac{d^3k}{\omega} \operatorname{Re} \int_0^\infty d\tau \exp\left\{-i \frac{a\tau}{2}\right\} \times \\ &\quad \times \left[ \frac{\omega^2}{\varepsilon'^2} \frac{1}{\gamma^2} V_0(\vec{\theta}, \tau) + \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon'^2}\right) \vec{\theta} \vec{V}(\vec{\theta}, \tau) \right], \end{aligned} \quad (2.12)$$

где  $a = \frac{\omega m^2}{\varepsilon \varepsilon'}$ ,  $V_\mu(\vec{\theta}, \tau)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial V_\mu}{\partial \tau} + \frac{ib}{2} \theta^2 V_\mu - \vec{\omega} \frac{\partial V_\mu}{\partial \vec{\theta}} = n \int d^2\theta' \sigma(\vec{\theta}, \vec{\theta}') [V_\mu(\vec{\theta}', \tau) - V_\mu(\vec{\theta}, \tau)]. \quad (2.13)$$

Здесь  $b = \omega \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$ ;  $V_\mu$  подчиняется также начальным условиям

$$V_0(\vec{\theta}, 0) = 1, \quad \vec{V}(\vec{\theta}, 0) = \vec{\theta}. \quad (2.14)$$

Если сечение рассеяния  $\sigma(\vec{\theta}', \vec{\theta})$  зависит только от разности углов  $\vec{\theta} - \vec{\theta}'$ , то уравнение (2.13) удобно решать при помощи преобразования Фурье по переменной  $\vec{\theta}$ :

$$\begin{aligned} \varphi_\mu(\vec{x}, \tau) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\theta e^{i\vec{\theta} \cdot \vec{x}} V_\mu(\vec{\theta}, \tau), \\ V_\mu(\vec{\theta}, \tau) &= \int d^2x e^{-i\vec{\theta} \cdot \vec{x}} \varphi_\mu(\vec{x}, \tau). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Из уравнения (2.13) при начальных условиях (2.14) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_\mu(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau} - i \frac{b}{2} \Delta_x \varphi_\mu(\vec{x}, \tau) + i \vec{\omega} \vec{x} \varphi_\mu(\vec{x}, \tau) &= \\ = n \int d^2\theta (e^{i\vec{\theta} \cdot \vec{x}} - 1) \sigma(\vec{\theta}) \varphi_\mu &= (2\pi)^2 n (\Sigma(\vec{x}) - \Sigma(0)) \varphi_\mu(\vec{x}, \tau); \\ \varphi_0(\vec{x}, 0) &= \delta(\vec{x}); \quad \vec{\varphi}(\vec{x}, 0) = -i \vec{\nabla} \delta(\vec{x}). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Если мы не интересуемся угловым распределением излучения, то выражение (2.12) нужно проинтегрировать по углам вылета фотона  $\vec{\theta}$ . Учитывая, что  $d^3k = \omega^2 d\omega d^2\theta$ , и принимая во внимание соотношения

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int V_0(\vec{\theta}, \tau) d^2\theta = \varphi_0(0, \tau),$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int \bar{\theta} \bar{V}(\bar{\theta}, \tau) d^2\theta = -i \bar{\nabla} \bar{\varphi}(\bar{x}, \tau)|_{x=0} \quad (2.17)$$

получаем для спектральной вероятности излучения в единицу времени следующее выражение:

$$\frac{dW}{d\omega} = \alpha\omega \operatorname{Re} \int_0^\infty d\tau \exp\left\{-i\frac{a\tau}{2}\right\} \left[ \frac{\omega^2}{\gamma^2 \varepsilon'^2} \varphi_0(0, \tau) - i\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon'^2}\right) \bar{\nabla} \bar{\varphi}(0, \tau) \right]. \quad (2.18)$$

Введем функцию

$$\Phi_\mu(\bar{x}) = \int_0^\infty d\tau e^{-ia\tau/2} \varphi_\mu(\bar{x}, \tau), \quad (2.19)$$

удовлетворяющую уравнению

$$\frac{i}{2}(a - b\Delta)\Phi_\mu(\bar{x}) + i\bar{\omega} \bar{x} \Phi_\mu(\bar{x}) = (2\pi)^2 n(\Sigma(\bar{x}) - \Sigma(0)) \Phi_\mu(\bar{x}) + \varphi_\mu(\bar{x}, 0). \quad (2.20)$$

Используя решение уравнения (2.20), спектральную вероятность излучения можно представить в виде

$$\frac{dW}{d\omega} = \alpha\omega \operatorname{Re} \left[ \frac{\omega^2}{\gamma^2 \varepsilon'^2} \Phi_0(0) - i\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon'^2}\right) \bar{\nabla} \bar{\Phi}(0) \right]. \quad (2.21)$$

Уравнение типа (2.20) в классическом пределе и с  $\bar{\omega} = 0$  рассматривалось в [9] (стр. 420).

### 3. ИЗЛУЧЕНИЕ В ЭКРАНИРОВАННОМ КУЛОНОВСКОМ ПОТЕНЦИАЛЕ

Сечение рассеяния в экранированном кулоновском потенциале имеет вид\*)

$$\sigma(\theta) = \frac{4Z^2\alpha^2}{\varepsilon^2(\theta^2 + \theta_1^2)^2}, \quad (3.1)$$

где  $\theta_1 = 1/a\varepsilon$ ,  $a$  — радиус экранирования, а его фурье-образ выражается через функцию Макдональда

\*) Пока не учитывается дифракция на ядре, которая существенна при углах  $\theta_{\text{эф}} \gg \theta_2 \simeq (Z^{1/3}\alpha\gamma)^{-1}$ .

$$\Sigma(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{i\bar{\omega}x} \frac{4Z^2\alpha^2}{\varepsilon^2(\theta^2 + \theta_1^2)^2} d^2\theta = \frac{Z^2\alpha^2}{\pi\varepsilon^2} \frac{x}{\theta_1} K_1(x\theta_1). \quad (3.2)$$

Учитывая, что вклад дают  $x \sim \frac{1}{\theta_{\text{эф}}} \ll \frac{1}{\theta_1}$ , и разлагая  $K_1(x\theta_1)$  по степеням  $x\theta_1$ , получаем из (2.16) со степенной точностью следующее уравнение для  $\varphi_\mu(\bar{x}, \tau)$ :

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \tau} - i\frac{b}{2}\Delta\varphi_\mu + i\bar{\omega} \bar{x} \varphi_\mu = \frac{2\pi n Z^2 \alpha^2}{\varepsilon^2} x^2 \left( \ln \frac{x\theta_1}{2} + C - \frac{1}{2} \right) \varphi_\mu, \quad (3.3)$$

где  $C = 0.577\dots$  — постоянная Эйлера. В случае, когда характерные углы излучения  $\theta_{\text{эф}} \gg \theta_2 \simeq (Z^{1/3}\alpha\gamma)^{-1}$ , дальнейшая «подстройка» углов рассеяния под углы излучения становится невозможной и уравнение (3.3) заметно упрощается:

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \tau} - i\frac{b}{2}\Delta\varphi_\mu + i\bar{\omega} \bar{x} \varphi_\mu = \frac{2\pi n Z^2 \alpha^2}{\varepsilon^2} x^2 \ln \frac{\theta_1}{\theta_2} \varphi_\mu. \quad (3.4)$$

В таком же виде можно представить уравнение (3.3), если мы хотим получить вероятность излучения с логарифмической точностью. При этом в качестве  $\theta_2$  надо взять характерный угол излучения  $\theta_{\text{эф}}$ , который в слабых полях и при отсутствии влияния многократного рассеяния  $\theta_{\text{эф}} \sim 1/\gamma$ . В сильных полях  $\left(\frac{\chi}{u} \gg 1\right)$   $\theta_{\text{эф}} \sim \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\chi}{u}\right)^{1/3}$ , так что для оценок можно использовать приближенную формулу

$$\theta_{\text{эф}} \sim \frac{1}{\gamma} \left(1 + \left(\frac{\chi}{u}\right)^{1/3}\right) \quad (3.5)$$

и уравнение для  $\varphi_\mu$  приобретает вид

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \tau} - i\frac{b}{2}\Delta\varphi_\mu + i\bar{\omega} \bar{x} \varphi_\mu = -qx^2\varphi_\mu, \quad (3.6)$$

где

$$q = 2\pi n \frac{Z^2\alpha^2}{\varepsilon^2} \ln \frac{\theta_{\text{эф}}}{\theta_1}. \quad (3.7)$$

Вообще говоря, для последовательной оценки  $\theta_{\text{эф}}$  необходимо учесть еще расширение углов излучения за счет многократного

рассеяния. Этот эффект (эффект Ландау—Померанчука) может стать определяющим в слабом поле, когда  $\chi/u \ll 1$ . Введем переменную  $\zeta = 1 + \gamma^2 \theta^2$  и оценим изменение квадрата угла отклонения частицы на длине формирования фотона  $l \sim \frac{\varepsilon(\varepsilon - \omega)}{m^2 \omega \zeta} = \frac{\gamma}{m u \zeta}$  за счет внешнего поля и многократного рассеяния. В результате получаем следующую оценку для  $\zeta_{\text{эф}}$

$$\frac{\chi^2}{u^2 \zeta^2} + \frac{\omega_0^2 Z \alpha \gamma}{m^2 u \zeta} \ln \frac{\zeta}{\gamma^2 \theta_1^2} \ll \zeta, \quad (3.8)$$

где  $\omega_0^2 = \frac{4\pi n Z \alpha}{m}$ .

Уравнение (3.6) имеет вид уравнения Шредингера для осциллятора во внешнем поле, и его решение с начальными данными (2.16) имеет вид гауссова распределения. Поэтому решение уравнения (3.6) ищем в виде (ср. [10])

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \exp(\alpha(\tau) + \beta(\tau)x^2 + \gamma(\tau)\bar{\omega} \bar{x}), \\ \bar{\varphi} &= (A(\tau)\bar{x} + B(\tau)\bar{\omega})\varphi_0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Подставляя это выражение в формулу (3.6) и решая получающуюся при этом систему уравнений с учетом начальных условий (2.16), получаем

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{q}{\pi v \text{sh } v\tau} e^{f(\tau)}, \quad \bar{\varphi} = \left( \frac{v\bar{x}}{b \text{sh } v\tau} + \frac{\bar{\omega}}{v} \text{th } \frac{v\tau}{2} \right) \varphi_0, \\ f(\tau) &= -\frac{qx^2}{v} \text{cth } v\tau - \frac{\omega^2}{4q} \tau + \frac{\omega^2}{2vq} \text{th } \frac{v\tau}{2} - \frac{i\bar{\omega}\bar{x}}{v} \text{th } \frac{v\tau}{2}, \quad v = \sqrt{2ibq}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Используя решение (3.10) и формулу (2.18), получаем для спектральной вероятности излучения в единицу времени следующее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\omega} &= \frac{\alpha}{\pi} \text{Re} \frac{q\omega}{v} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\text{sh } v\tau} \left[ \frac{\omega^2}{\gamma^2 \varepsilon'^2} - \left( 1 + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon'^2} \right) \times \right. \\ &\times \left. \left( \frac{2iv}{b \text{sh } v\tau} + \frac{\omega^2}{v^2} \text{th } \frac{2v\tau}{2} \right) \right] \exp \left\{ -\frac{i\alpha\tau}{2} - \frac{\omega^2\tau}{4q} + \frac{\omega^2}{2vq} \text{th } \frac{v\tau}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

После интегрирования по частям члена, содержащего  $\frac{1}{\text{sh}^2 v\tau}$ , имеем с логарифмической точностью для спектрального распределения вероятности:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\omega} &= -\frac{\alpha}{\pi} \text{Im} v \int_0^\infty d\tau \left[ \frac{1}{\gamma^2 \text{sh } v\tau} + \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right) \left( \frac{1}{\gamma^2} + \frac{\omega^2}{v^2} \right) \text{th } \frac{v\tau}{2} \right] \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{i\alpha\tau}{2} - \frac{\omega^2\tau}{4q} + \frac{\omega^2}{2vq} \text{th } \frac{v\tau}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

При  $\bar{\omega} = 0$  формула (3.12) переходит в вероятность, полученную Мигдалом [3]. Вероятность (3.12) также согласуется с основным результатом работы [8], вычисления в которой проводились при помощи метода функционального интегрирования. В случае слабого многократного рассеяния, когда вторым слагаемым в формуле (3.8) можно пренебречь, в выражении (3.12) можно провести разложение по степеням  $v\tau$ . Главный член разложения дает вероятность излучения в постоянном внешнем поле при отсутствии рассеяния, поправки  $\propto q$  определяют с логарифмической точностью сечение излучения при рассеянии на экранированном кулоновском потенциале в присутствии внешнего поля:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\omega} &= \frac{4z^2 \alpha^3}{15 m^2 \omega} \ln \left[ \frac{1}{\gamma \theta_1} \left( 1 + \left( \frac{\chi}{u} \right)^{1/3} \right) \right] \left[ \frac{\omega^2}{\varepsilon^2} (x^4 \Gamma - 3x^2 \Gamma' - x^3) + \right. \\ &\left. + \left( 1 + \frac{\varepsilon'^2}{\varepsilon^2} \right) (x^4 \Gamma + 3x \Gamma - 5x^2 \Gamma' - x^3) \right], \end{aligned} \quad (3.13)$$

где  $\theta_1 = \frac{q_1}{\varepsilon}$ ,  $q_1$  определяется параметрами потенциала,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty d\tau \sin \left( x\tau + \frac{\tau^3}{3} \right), \quad x = \left( \frac{u}{\chi} \right)^{2/3}. \quad (3.14)$$

Сечение (3.13) отличается от результата, полученного в тех же предположениях в [8]. Необходимо отметить, что поскольку, как это будет показано в следующем разделе, нижняя граница эффективных переданных импульсов растет в сильных полях как  $(\chi/u)^{2/3}$ , ситуация, когда в отсутствие внешнего поля имеется полное экранирование, может не являться таковой в достаточно сильных полях.

Вернемся к уравнению (2.16) и введем обозначение

$$V(\bar{x}) = (2\pi^2) n(\Sigma(\bar{x}) - \Sigma(0)) = n \int d^2\theta (e^{i\bar{\theta}\bar{x}} - 1) \sigma(\bar{\theta}). \quad (3.15)$$

Будем решать это уравнение в борновском приближении по рассеянию  $V(\bar{x})$ , не ограничивая величины внешнего поля. Полагая  $V=0$ , получаем в нулевом приближении:

$$\frac{\partial \varphi_\mu^{(0)}}{\partial \tau} - \frac{ib}{2} \Delta \varphi_\mu^{(0)} + i\bar{\omega} \bar{x} \varphi_\mu^{(0)} = 0. \quad (3.16)$$

Решение этого уравнения можно получить из (3.10), если устремить  $q \rightarrow 0$ :

$$\varphi_0^{(0)}(\bar{x}, \tau) = \frac{1}{2ib\pi\tau} \exp\left\{-\frac{x^2}{2ib\tau} - \frac{i\bar{\omega}\bar{x}\tau}{2} - \frac{ib\omega^2\tau^3}{24}\right\},$$

$$\bar{\varphi}^{(0)} = \frac{\bar{y}}{b} \varphi_0^{(0)}; \quad \bar{y} = \frac{\bar{x}}{\tau} + \frac{b\bar{\omega}\tau}{2}. \quad (3.17)$$

Подставляя решение (3.17) в формулу (2.18), получаем известную вероятность излучения в постоянном внешнем поле. В первом борновском приближении представим

$$\varphi_\mu^{(1)} = \varphi_\mu^{(0)} + \psi_\mu \varphi_0^{(0)}, \quad (3.18)$$

тогда, переходя к переменным  $\bar{y}$ ,  $s = 1/\tau$ , получаем, что функция  $\psi_\mu(\bar{y}, s)$  удовлетворяет следующему уравнению:

$$-\frac{\partial \psi_\mu(\bar{y}, s)}{\partial s} - \frac{ib}{2} \Delta \psi_\mu(\bar{y}, s) = \frac{y_\mu}{bs^2} V\left(\frac{\bar{y}}{s} - \frac{b\bar{\omega}}{2s^2}\right), \quad (3.19)$$

$$\psi_\mu(\bar{y}, s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0,$$

где введено обозначение  $y_0 = b$ . Решение уравнения (3.19) будем искать при помощи функции Грина  $G(\bar{y}, s)$ , удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial G}{\partial s} + i\frac{b}{2} \Delta G = -\delta(\bar{y}) \delta(s), \quad (3.20)$$

решение которого можно, например, найти с использованием преобразования Фурье:

$$G(\bar{y} - \bar{y}', s - s') = \frac{\vartheta(s' - s)}{2ib\pi(s' - s)} \exp\left\{-\frac{(\bar{y} - \bar{y}')^2}{2ib(s' - s)}\right\}. \quad (3.21)$$

Используя (3.21), получаем решение уравнения для  $\psi_\mu(\bar{y}, s)$  в виде:

$$\psi_\mu(\bar{y}, s) = \int G(\bar{y} - \bar{y}', s - s') \frac{y'_\mu}{bs'^2} V\left(\frac{\bar{y}'}{s'} - \frac{b\bar{\omega}}{2s'^2}\right) d^2y' ds' =$$

$$= \frac{1}{2ib^2\pi} \int_s^\infty \frac{ds'}{s' - s} \int d^2y' \left(\frac{y_0}{s'y'}\right) V\left(\bar{y}' - \frac{b\bar{\omega}}{2s'^2}\right) \exp\left\{-\frac{(s'\bar{y}' - \bar{y})^2}{2ib(s' - s)}\right\}. \quad (3.22)$$

Сделав замену переменных  $s' = (\xi + 1)s$  и  $\bar{y}' = \bar{\eta} + \frac{\bar{x}}{1 + \xi} + \frac{b\bar{\omega}\tau^2}{2(1 + \xi)}$  и возвращаясь к переменным  $\tau = \frac{1}{s}$ ,  $\bar{x} = \bar{y}\tau - \frac{b\bar{\omega}\tau^2}{2}$ , имеем:

$$\psi_0(\bar{x}, \tau) = \frac{1}{2ib\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi} \exp\left\{-\frac{(\xi + 1)^2 \eta^2}{2ib\xi\tau}\right\} V\left(\bar{\eta} + \frac{\bar{x}}{\xi + 1} + \frac{b\xi\bar{\omega}\tau^2}{2(\xi + 1)^2}\right) d^2\eta,$$

$$\bar{\psi}(\bar{x}, \tau) = \frac{1}{2ib^2\pi\tau} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi} \left(\bar{\eta}(\xi + 1) + \bar{x} + \frac{b\bar{\omega}\tau^2}{2}\right) V\left(\bar{\eta} + \frac{\bar{x}}{\xi + 1} + \frac{b\xi\bar{\omega}\tau^2}{2(\xi + 1)^2}\right) \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{(\xi + 1)^2 \eta^2}{2ib\xi\tau}\right\} d^2\eta. \quad (3.23)$$

Подставляя решение (3.23) в формулу (3.18), а затем в (2.18), получаем в первом борновском приближении:

$$\frac{dW^{(1)}}{d\omega} = \frac{\alpha\omega}{4b^2\pi^2} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \exp\left\{-i\frac{a\tau}{2} - i\frac{b\omega^2\tau^3}{24}\right\} \times$$

$$\times \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi} \int d^2\eta V\left(\bar{\eta} + \frac{b\bar{\omega}\xi\tau^2}{2(\xi + 1)^2}\right) \exp\left\{i\frac{(\xi + 1)^2 \eta^2}{2b\xi\tau}\right\} \times$$

$$\times \left[\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon'^2}\right) \left(\frac{(\xi + 1)^2 \eta^2}{b^2\xi\tau^2} + \frac{(\xi + 1)^2 \bar{\omega} \bar{\eta}}{2b\xi} + \frac{\omega^2\tau^2}{4}\right) - \frac{\omega^2}{\gamma^2 \varepsilon'^2}\right] \quad (3.24)$$

В выражении (3.24) удобно провести замены  $\tau \rightarrow 2\tau$ ,  $\xi = e^{2z}$ , после чего спектральная вероятность излучения принимает вид:

$$\frac{dW^{(1)}}{d\omega} = \frac{\alpha\omega}{b^2\pi^2} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} e^{-\rho(\tau)} \int_0^\infty dz \int d^2\eta \exp\left(i\frac{\eta^2 \operatorname{ch}^2 z}{b\tau}\right) V\left(\bar{\eta} + \frac{b\bar{\omega}\tau^2}{2\operatorname{ch}^2 z}\right) \times$$



$$\times \left[ \left( 1 + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon'^2} \right) \left( \frac{\eta^2 \text{ch}^2 z}{b^2 \tau^2} + \frac{2}{b} \text{ch}^2 z \bar{\omega} \bar{\eta} + \omega^2 \tau^2 \right) - \frac{\omega^2}{\gamma^2 \varepsilon'^2} \right], \quad (3.25)$$

$$\rho(\tau) = i(a\tau + b\omega^2 \tau^3/3).$$

Спектральную вероятность излучения можно непосредственно выразить через сечение рассеяния, для этого необходимо воспользоваться определением (3.15) и взять по  $\bar{\eta}$  в (3.25) соответствующие гауссовы интегралы. В результате получаем:

$$\frac{dW^{(1)}}{d\omega} = \frac{\alpha\omega n}{b\pi} \text{Im} \int_0^\infty d\tau e^{-\rho(\tau)} \int_0^\infty \frac{dz}{\text{ch}^2 z} \int d^2\theta \sigma(\theta) [F(0) - F(\theta)], \quad (3.26)$$

где

$$F(\theta) = \left[ \left( 1 + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon'^2} \right) \left( \frac{i}{b\tau} + \frac{\theta^2}{4\text{ch}^2 z} - \bar{\omega} \bar{\theta} \tau + \omega^2 \tau^2 \right) - \frac{\omega^2}{\gamma^2 \varepsilon'^2} \right] \times$$

$$\times \exp \left\{ -i \frac{b\tau}{4\text{ch}^2 z} (\theta^2 - 2\bar{\omega} \bar{\theta} \tau) \right\}. \quad (3.27)$$

Формулы (3.25) — (3.27) описывают излучение при рассеянии частиц во внешнем поле с квазиклассической (релятивистской) точностью в случае, когда сечение рассеяния имеет вид  $\sigma(\bar{\theta}, \bar{\theta}') = \sigma(\bar{\theta} - \bar{\theta}')$ . К этому случаю относится рассеяние на экранированном кулоновском потенциале (см. формулу (3.1)).

В слабых полях можно разложить входящие в (3.25) — (3.27) функции по степеням  $\omega\tau$ . Сохраняя старшие члены этого разложения и члены  $\sim \omega^2 \tau^2$ , получаем для экранированного кулоновского потенциала следующее выражение для сечения излучения в слабом поле  $\chi/u \ll 1$ :

$$\frac{d\sigma_{sc}^{(1)}}{d\omega} = \frac{4z^2 \alpha^3}{3m^2 \omega} \left\{ \frac{\omega^2}{\varepsilon^2} \left( \ln \frac{1}{\gamma\theta_1} + \frac{1}{3} \right) + 2 \left( 1 + \frac{\varepsilon'^2}{\varepsilon^2} \right) \left( \ln \frac{1}{\gamma\theta_1} + \frac{7}{12} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{5} \left( \frac{\chi}{u} \right)^2 \left[ \frac{\omega^2}{\varepsilon^2} \left( 32 \ln \frac{1}{\gamma\theta_1} - \frac{199}{15} \right) + \left( 1 + \frac{\varepsilon'^2}{\varepsilon^2} \right) \left( 43 \ln \frac{1}{\gamma\theta_1} - \frac{251}{15} \right) \right] \right\}. \quad (3.28)$$

В отсутствие поля сечение (3.28) совпадает со стандартным сечением в экранированном потенциале (см., например, [5]). Поправки со степенной точностью вычислены впервые.

В случае сильных полей ( $\chi/u \gg 1$ ) вклад в интегралы (3.25) —

(3.26) дают  $\omega^2 \tau^2 \sim \frac{1}{\eta^2} \sim \theta^2 \sim \frac{1}{\gamma^2} \left( \frac{\chi}{u} \right)^{2/3} \gg \frac{1}{\gamma^2}$ . Поэтому с точностью до членов  $\sim (u/\chi)^{2/3}$  можно пренебречь в показателе экспоненты  $\rho(\tau)$  членом, линейным по  $\tau$  ( $\rho(\tau) \simeq i \frac{b\omega^2 \tau^3}{3}$ ), а также опустить в квадратных скобках в (3.25), (3.27) член  $-\frac{\omega^2}{\gamma^2 \varepsilon'^2}$ . После этого

можно повернуть контур интегрирования по  $\tau$  на угол  $-\frac{\pi}{6}$ , так что  $\tau \rightarrow e^{-i\pi/6} \tau$  ( $i\tau^3 \rightarrow \tau^3$ ), и перейти к переменной  $\rho$ . Интегралы по  $\bar{\eta}$  и  $\bar{\theta}$  в (3.25) — (3.26) удобно вычислять при помощи экспоненциальной параметризации. Эта процедура описана в Приложении. В результате довольно громоздких вычислений получаем при  $\chi/u \gg 1$

$$\frac{d\sigma_{sc}^{(1)}}{d\omega} = \frac{2z^2 \alpha^3 \Gamma(1/3)}{5m^2 \omega} \left( \frac{u}{3\chi} \right)^{2/3} \left( 1 + \frac{\varepsilon'^2}{\varepsilon^2} \right) \left( \ln \frac{1}{\gamma\theta_1} \left( \frac{\chi}{u} \right)^{1/3} + D_{sc} \right), \quad (3.29)$$

где  $D_{sc} \simeq 2,3008$ . Фактор подавления излучения  $(u/\chi)^{2/3}$  в (3.29) возникает, как это было показано во Введении, за счет уменьшения длины формирования фотона. Множитель  $(\chi/u)^{1/3}$  в аргументе логарифма связан с увеличением эффективных углов излучения  $\theta_{эф} \sim \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\chi}{u} \right)^{1/3}$ . Отметим что поскольку квантовый параметр  $\chi \propto \frac{1}{m^3}$ , сечение (3.29) не зависит от массы излучающей частицы.

#### 4. ИЗЛУЧЕНИЕ НА ЯДРЕ

В чисто кулоновской задаче излучения сечение рассеяния при передачах импульса, близких к минимальной, зависит не только от разности углов  $\bar{\theta}' - \bar{\theta} = \bar{\theta}$  (поперечной передачи  $\bar{q}_\perp \simeq \varepsilon\bar{\theta}$ ), но и от самого угла излучения (продольной передачи\*)  $q_\parallel \simeq \frac{u\varepsilon}{2} \left( \frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)$ . Это связано с тем, что при таких значениях переданного импульса излучение фотона влияет на рассеяние частицы\*\*. В этом случае удобно представить сечение рассеяния в виде

\*) Рассмотрение проводится для покоящегося ядра.

\*\*\*) Детально этот вопрос обсуждался в [5].

$$\sigma(\bar{\theta}', \bar{\theta}) = \sigma(\bar{\theta}, \bar{\theta}') = \sigma\left(\bar{\theta}, \frac{\bar{\theta} + \bar{\theta}'}{2}\right) = \sigma\left(\bar{\theta}, \bar{\theta} + \frac{\bar{\theta}}{2}\right) = \sigma(\bar{\theta}, \theta_1) + \bar{\sigma}, \quad (4.1)$$

где

$$\bar{\sigma} \equiv \sigma\left(\bar{\theta}, \bar{\theta} + \frac{\bar{\theta}}{2}\right) - \sigma(\bar{\theta}, \theta_1). \quad (4.2)$$

Здесь  $\sigma(\bar{\theta}, \theta_1)$  сечение рассеяния в экранированном потенциале (3.1). Угол  $\theta_1$  выберем достаточно малым, чтобы выполнялось условие  $\theta_1 \ll \theta_{\text{эф}}$  (3.5), и достаточно большим, чтобы при  $\theta \geq \theta_1$  можно было пренебречь продольной передачей  $q_{\perp} \simeq \varepsilon\theta \gg q_{\parallel}$ :

$$\theta_1 \ll \theta_{\text{эф}} \simeq \frac{1}{\gamma} \left(1 + \left(\frac{\chi}{u}\right)^{1/3}\right); \quad \theta_1 \gg \frac{q_{\parallel}(\theta_{\text{эф}})}{\varepsilon} \simeq \frac{u}{2} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta_{\text{эф}}^2\right). \quad (4.3)$$

Правую (столкновительную) часть уравнения (2.13) представим как сумму с экранированным сечением и  $\bar{\sigma}$ . В первом борновском приближении эти слагаемые входят в сечение излучения линейно и независимо друг от друга. Соответствующее сечение излучения в экранированном потенциале вычислено нами выше. В оставшейся части с  $\bar{\sigma}$  воспользуемся тем, что при  $\theta_1 < \theta$ ,  $\theta_1 \ll \theta_{\text{эф}}$   $\bar{\sigma}$  падает как  $\theta_1^2/\theta^2$ , и разложим входящие величины по степеням  $\theta/\theta \sim \theta/\theta_{\text{эф}}$ :

$$V_{\mu}(\bar{\theta}') \simeq V_{\mu}(\bar{\theta}) + \frac{\partial V_{\mu}}{\partial \bar{\theta}} \bar{\theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_{\mu}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \theta_i \theta_j + \dots, \quad (4.4)$$

$$\bar{\sigma} \simeq \bar{\sigma}(\bar{\theta}, \bar{\theta}) + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{\sigma}(\bar{\theta}, \bar{\theta})}{\partial \bar{\theta}} \bar{\theta}.$$

Подставляя это разложение в формулу (2.13), получаем уравнение типа Фоккера — Планка

$$\frac{\partial V_{\mu}}{\partial \tau} + ib \frac{\partial^2 V_{\mu}}{2} - \bar{\omega} \frac{\partial V_{\mu}}{\partial \bar{\theta}} = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \left( \frac{\partial V_{\mu}}{\partial \bar{\theta}} \bar{\theta}^2(\bar{\theta}) \right)$$

где

$$\bar{\theta}^2(\bar{\theta}) = n \int \bar{\sigma}(\theta^2, \bar{\theta}) \theta^2 d^2\theta. \quad (4.5)$$

Для потенциала ядра  $\bar{\theta}^2(\theta)$  имеет вид ( $|q^2| = \varepsilon^2\theta^2 + q_{\parallel}^2$ ),

$$\bar{\theta}^2(\theta) = \frac{4z^2\alpha^2 n \pi}{\varepsilon^2} \int d\theta^2 \theta^2 \left[ \frac{1}{(\theta^2 + \delta^2 \zeta^2)^2} - \frac{1}{(\theta^2 + \theta_1^2)^2} \right] = \frac{8z^2\alpha^2 n \pi}{\varepsilon^2} \ln \frac{\theta_1}{\delta \zeta};$$

$$\delta = \frac{u}{2\gamma^2}, \quad \zeta = 1 + \gamma^2 \theta^2. \quad (4.6)$$

Введем переменную  $\bar{v} = \bar{\theta} + \bar{\omega}\tau$  и обозначим

$$2\pi n \frac{z^2\alpha^2}{\varepsilon^2} \ln \frac{\theta_1}{\delta \zeta} \equiv q \ln \frac{\theta_1}{\delta \zeta} \equiv qL(\bar{\theta}), \quad (4.7)$$

тогда уравнение (4.5) принимает вид

$$\frac{\partial V_{\mu}(\bar{v}, \tau)}{\partial \tau} + \frac{ib}{2} \bar{\theta}^2(\tau) V_{\mu}(\bar{v}, \tau) = q \frac{\partial}{\partial \bar{v}} \left( \frac{\partial V_{\mu}}{\partial \bar{v}} L(\bar{\theta}(\tau)) \right); \quad (4.8)$$

Найдем решение уравнения (4.8) в нулевом приближении:

$$\frac{\partial V_{\mu}^{(0)}(\bar{v}, \tau)}{\partial \tau} + \frac{ib}{2} \bar{\theta}^2(\tau) V_{\mu}^{(0)}(\bar{v}, \tau) = 0,$$

$$V_{\mu}^{(0)}(\bar{v}, \tau) = \Phi(\bar{v}, \tau) = \exp \left\{ -\frac{ib}{2} \int_0^{\tau} d\tau' \bar{\theta}^2(\tau') \right\} =$$

$$= \exp \left\{ -i \frac{b\tau}{2} \left( v^2 - \bar{v} \bar{\omega} \tau + \frac{\omega^2 \tau^2}{3} \right) \right\}, \quad (4.9)$$

$$\bar{V}^{(0)} = \bar{v} \Phi(\bar{v}, \tau).$$

Подстановка этого решения в выражение (2.12) дает спектрально-угловое распределение вероятности излучения в постоянном поле. В первом борновском приближении решение уравнения (4.8) ищем в виде

$$V_{\mu}(\bar{v}, \tau) = V_{\mu}^{(0)}(\bar{v}, \tau) + V_{\mu}^{(1)}(\bar{v}, \tau), \quad (4.10)$$

$$V_{\mu}^{(1)}(\bar{v}, \tau) = v_{\mu}(\bar{v}, \tau) \Phi(\bar{v}, \tau);$$

тогда уравнение для  $v_{\mu}$  принимает вид

$$\frac{\partial v_{\mu}}{\partial \tau} = q \Phi^{-1} \frac{\partial}{\partial \bar{v}} \left( \frac{\partial V_{\mu}^{(0)}}{\partial \bar{v}} L(\bar{v} - \bar{\omega}\tau) \right), \quad (4.11)$$

а его решение с учетом начальных данных  $v_{\mu}(\bar{\theta}, 0) = 0$  получается просто интегрированием правой части этого уравнения

$$v_{\mu}(\bar{v}, \tau) = q \int_0^{\tau} d\tau' \Phi^{-1}(\bar{v}, \tau') \frac{\partial}{\partial \bar{v}} \left( \frac{\partial V_{\mu}^{(0)}(\bar{v}, \tau')}{\partial \bar{v}} L(\bar{v} - \bar{\omega}\tau') \right). \quad (4.12)$$

Подставляя решение (4.12) в (4.10), а затем в (2.12), получаем следующее выражение для вероятности излучения:

$$\frac{d\bar{W}}{d\omega} = \frac{\alpha q \omega}{(2\pi)^2} \operatorname{Re} \int_0^\infty d\tau e^{-i\alpha\tau/2} \int d^2v \Phi(\bar{v}, \tau) \times$$

$$\times \int_0^\tau d\tau' \Phi^{-1}(\bar{v}, \tau') \left[ \frac{\omega^2}{\gamma^2 \varepsilon'^2} \frac{\partial}{\partial \bar{v}} \left( \frac{\partial \Phi(\bar{v}, \tau')}{\partial \bar{v}} L(\bar{v} - \bar{w}\tau') \right) + \right.$$

$$\left. + \left( 1 + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon'^2} \right) (\bar{v} - \bar{w}\tau) \frac{\partial}{\partial v_i} \left( \frac{\partial(\bar{v}\Phi(\bar{v}, \tau'))}{\partial v_i} L(\bar{v} - \bar{w}\tau') \right) \right] \quad (4.13)$$

Заметим, что

$$\Phi(\bar{v}, \tau) \Phi^{-1}(\bar{v}, \tau') = \Phi(\bar{v} - \bar{w}\tau', \tau - \tau'). \quad (4.14)$$

Интегрируя в (4.13) по частям и воспользовавшись соотношением (4.14), запишем (4.13) в симметричной форме:

$$\frac{d\bar{W}}{d\omega} = - \frac{\alpha q \omega}{(2\pi)^2} \operatorname{Re} \int_0^\infty d\tau e^{-i\alpha\tau/2} \int d^2\theta L(\bar{\theta}) \int_0^\tau d\tau' \times$$

$$\times \left[ \frac{\omega^2}{\gamma^2 \varepsilon'^2} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \Phi(\bar{\theta}, \tau - \tau') \right) \left( \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \Phi(\bar{\theta} + \bar{w}\tau', \tau') \right) + \right.$$

$$\left. + \left( 1 + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon'^2} \right) \sum_i \left( \frac{\partial}{\partial \theta_i} (\bar{\theta} - \bar{w}(\tau - \tau')) \Phi(\bar{\theta}, \tau - \tau') \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left( \frac{\partial}{\partial \theta_i} (\bar{\theta} + \bar{w}\tau') \Phi(\bar{\theta} + \bar{w}\tau', \tau') \right) \right] \quad (4.15)$$

Проведя замены  $\tau - \tau' = \frac{1-\mu}{2}\tau$ ,  $\tau' = \frac{1+\mu}{2}\tau$  и переходя к переменным  $\tau \rightarrow 2\tau$ ,  $\bar{\theta} = \bar{\theta} - \mu\bar{w}\tau$ , получаем поправку к спектральной вероятности излучения на ядре во внешнем поле в виде

$$\frac{d\bar{W}}{d\omega} = - \frac{\alpha q \omega}{\pi^2} \operatorname{Re} \int_0^\infty d\tau \tau e^{-\rho(\tau)} \int_0^1 d\mu \int d^2\theta e^{-i\mathbf{b}\tau\theta^2} \ln \frac{\delta(1 + \gamma^2(\bar{\theta} - \mu\bar{w}\tau)^2)}{\theta_1} \times$$

$$\times \left\{ b^2\tau^2(1 - \mu^2)[R_1 + R_2(\theta^2 - \omega^2\tau^2)] \left( \theta^2 - \bar{w}\bar{\theta}\mu\tau + \frac{\mu^2 - 1}{4}\omega^2\tau^2 \right) - \right.$$

$$\left. - 2R_2 + i\mathbf{b}\tau R_2[2\bar{\theta}(\bar{\theta} + \bar{w}\mu\tau) + (1 - \mu^2)\omega^2\tau^2] \right\}, \quad (4.16)$$

где

$$\rho(\tau) = i \left( a\tau + \frac{b\omega^2\tau^3}{3} \right), \quad R_1 = \frac{\omega^2}{\varepsilon'^2\gamma^2}, \quad R_2 = 1 + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon'^2}.$$

Разлагая при  $\bar{w} \rightarrow 0$  входящие в (4.16) выражения по степеням  $\omega\tau$  и проводя элементарные, но громоздкие вычисления, получаем в случае слабого поля ( $\chi/u \ll 1$ ) следующую поправку к сечению излучения:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\omega} = \frac{4z^2\alpha^3}{3m^2\omega} \left\{ \frac{\omega^2}{\varepsilon^2} \left( \ln \frac{\theta_1}{\delta} - \frac{5}{6} \right) + 2 \left( 1 + \frac{\varepsilon'^2}{\varepsilon^2} \right) \left( \ln \frac{\theta_1}{\delta} - \frac{13}{12} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{5} \left( \frac{\chi}{u} \right)^2 \left[ \frac{\omega^2}{\varepsilon^2} \left( 32 \ln \frac{\theta_1}{\delta} - \frac{662}{105} \right) + \left( 1 + \frac{\varepsilon'^2}{\varepsilon^2} \right) \left( 43 \ln \frac{\theta_1}{\delta} - \frac{3967}{420} \right) \right] \right\}. \quad (4.17)$$

Складывая этот результат с сечением для экранированного потенциала (3.28), получаем для сечения излучения на ядре при  $\chi/u \ll 1$  с учетом поправки  $\sim (\chi/u)^2$

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\omega} = \frac{4z^2\alpha^3}{3m^2\varepsilon^2\omega} \left\{ [\omega^2 + 2(\varepsilon^2 + \varepsilon'^2)] \left( \ln \frac{2\gamma}{u} - \frac{1}{2} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{5} \left( \frac{\chi}{u} \right)^2 \left[ \omega^2 \left( 32 \ln \frac{2\gamma}{u} - \frac{137}{7} \right) + (\varepsilon^2 + \varepsilon'^2) \left( 43 \ln \frac{2\gamma}{u} - \frac{733}{28} \right) \right] \right\}. \quad (4.18)$$

С логарифмической точностью сечение (4.18) согласуется с вычисленным в [7]. Поправки со степенной точностью получены впервые.

В сильном внешнем поле расчет проводится так же, как в экранированном случае (см. обсуждение перед формулой (3.29)). Подробности вычислений изложены в Приложении. Поправка  $d\bar{\sigma}/d\omega$  к сечению излучения при  $\chi/u \gg 1$  имеет вид

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\omega} = \frac{2z^2\alpha^3\Gamma(1/3)}{5m^2\omega} \left( \frac{u}{3\chi} \right)^{2/3} \left( 1 + \frac{\varepsilon'^2}{\varepsilon^2} \right) \left( \ln \frac{\theta_1}{\delta} \left( \frac{u}{\chi} \right)^{2/3} + \bar{D} \right), \quad (4.19)$$

где  $\bar{D} = -3,0131$ . Аргумент логарифма в (4.19) определяет границу полного экранирования потенциала при излучении. В случае полного экранирования должно выполняться условие

$$\left( \frac{\chi}{u} \right)^{2/3} \frac{\delta}{\theta_1} = \left( \frac{\chi}{u} \right)^{2/3} q_{\min} a \ll 1, \quad (4.20)$$

где  $q_{\min} = \varepsilon\delta = \omega m^2/2\varepsilon(\varepsilon - \omega)$ ,  $a$  — характерный размер действия потенциала. Например, в аморфном веществе при обычных условиях

$a \sim Z^{-1/3} a_0$  ( $a_0$  — боровский радиус), в ориентированных монокристаллах этот размер определяется амплитудой тепловых колебаний. Из (4.20) следует, что полностью экранированный потенциал в отсутствие внешнего поля ( $q_{\min} a \ll 1$ ), может стать незэкранированным в сильном поле. Отметим, что условие (4.20) слабо зависит от частоты фотона ( $\omega^{1/3}$ ) и не зависит от массы частицы. Складывая (4.19) с асимптотическим выражением для сечения излучения в экранированном потенциале (3.29), получаем для сечения излучения на ядре во внешнем поле, когда параметр  $\chi/u \gg 1$ :

$$\frac{d\bar{\sigma}_{\text{nosc}}}{d\omega} = \frac{2z^2\alpha^3\Gamma(1/3)}{5m^2\omega} \left(\frac{u}{3\chi}\right)^{2/3} \left(1 + \frac{\varepsilon'^2}{\varepsilon^2}\right) \left(\ln \frac{2\gamma}{u} \left(\frac{u}{\chi}\right)^{1/3} + D_{\text{nosc}}\right). \quad (4.21)$$

где  $D_{\text{nosc}} = D_{sc} + \bar{D} = -0,7123$ . Сечение (4.21), так же, как и (3.29), не зависит от массы излучающей частицы. Аргумент логарифма, полученный в работе [7], отличается от входящего в формулу (4.21) лишним фактором  $(u/\chi)^{1/3}$ , который, как это нетрудно видеть, пропорционален массе частицы.

#### 5. ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ НА ВСТРЕЧНЫХ $e^+e^-$ -ПУЧКАХ

С увеличением энергии частиц в ускорителях на встречных пучках еще в большей степени растет собственное поле самих пучков, что связано со значительным уменьшением их размеров, которое диктуется условием эффективности столкновения (светимостью). Таким образом, рост параметра  $\chi$  в этой ситуации обусловлен как ростом непосредственно самой энергии частиц, так и значительным увеличением напряженности поля встречного пучка (самодействие самого пучка  $\sim 1/\gamma^2$ ) в месте встречи. Как уже отмечалось во Введении, влияние внешнего поля на тормозное излучение может проявляться достаточно рано, когда параметр  $\frac{\varepsilon\chi}{q_0} \sim \frac{4\gamma^2\chi}{u} \gg 1$ . В этом случае меняется спектр эквивалентных фотонов в области минимальных передач, так что нижняя граница эффективных переданных импульсов растет как

$$\bar{q} \sim \frac{q_0}{\gamma} \left(\frac{\varepsilon\chi}{q_0}\right)^{1/3}. \quad (5.1)$$

При этом, пока не меняется блок излучения, не затрагиваются характерные частоты виртуального фотона, которые в области малых переданных импульсов определяются из кинематического соотно-

шения  $qp' \simeq kp$ , так что

$$q_0 \simeq \frac{\omega\varepsilon}{4(\varepsilon-\omega)} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right) = q'_0 \zeta, \\ q'_0 = \frac{\omega m^2}{4\varepsilon(\varepsilon-\omega)} = \frac{u}{4\gamma^2} \varepsilon; \quad \zeta = 1 + \gamma^2 \theta^2. \quad (5.2)$$

В этом случае ( $\chi/u \ll 1$ ,  $q_0 \sim q'_0$ ) процесс изучался в работах [4, 6]. При условии  $4\gamma^2 \frac{\chi}{u} \gg 1$  в работе [4] с логарифмической, а в [6] со степенной точностью был получен результат

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{4\alpha^3\varepsilon'}{m^2\omega\varepsilon} \left\{ \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} - \frac{2}{3}\right) \left[ \ln \frac{m}{q_{\min} \left(4\gamma^2 \frac{\chi}{u}\right)^{1/3}} - \frac{4-2C-\ln 3}{6} \right] + \frac{1}{27} \right\}; \\ q_{\min} = \frac{m^3\omega}{4\varepsilon^2(\varepsilon-\omega)} = \frac{q'_0}{\gamma}. \quad (5.3)$$

В случае, когда параметр  $\chi/u$  не мал, меняется блок излучения и, как следует из проведенного выше анализа, характерные углы излучения растут как  $\theta_{\text{эф}} \sim \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\chi}{u}\right)^{1/3}$ , что приводит к росту характерных частот виртуального фотона в области малых переданных импульсов:

$$q_0 \sim q'_0 (1 + \gamma^2 \theta_{\text{эф}}^2) \sim q'_0 \left(\frac{\chi}{u}\right)^{2/3}. \quad (5.4)$$

По той же причине увеличивается верхняя граница эффективных передач  $q_{\max} \sim \varepsilon \theta_{\text{эф}} \sim m \left(\frac{\chi}{u}\right)^{1/3}$ .

В результате аргумент логарифма при  $\chi/u \gg 1$  принимает вид

$$\frac{q_{\max}}{\bar{q}} \sim m \left(\frac{\chi}{u}\right)^{1/3} \frac{1}{\frac{q_0}{\gamma} \left(\frac{\chi}{q_0}\right)^{1/3}} \sim \frac{1}{u^{1/3}} \left(\frac{\varepsilon}{q_0}\right)^{2/3} \sim \frac{\gamma^{4/3}}{u^{5/9} \chi^{4/9}}. \quad (5.5)$$

Используя проведенный выше анализ, можно оценить характерные прицельные параметры  $\bar{\rho}$ , отвечающие нижней границе эффективных передач:

$$\rho_{эф} \sim \frac{1}{\bar{q}} \sim \frac{\gamma}{q_0 \left(\frac{\varepsilon}{q_0} \chi\right)^{1/3}} \sim \frac{1}{m} \frac{\gamma^{4/3}}{u^{2/9} \chi^{7/9}}. \quad (5.6)$$

Обрезание малых поперечных импульсов может быть обусловлено не только внешним полем, но и рядом других факторов [11]. В частности, в условиях столкновения  $e^+e^-$ -пучков с энергией несколько ГэВ в накопителе было установлено, что доминирует обрезание, обусловленное малостью поперечных размеров сталкивающихся пучков (см. [12] — эксперимент, [13] — теоретический анализ). С учетом последнего эффекта, в качестве нижней границы эффективных передач следует выбрать  $\max(1/\sigma, 1/\rho_{эф})$ . Т. е. если поперечные размеры пучка  $\sigma$  больше характеристик прицельных параметров, определяемых формулой (5.6), то ограниченностью этих размеров можно пренебречь, в противном случае ( $\rho_{эф} > \sigma$ ) нижняя граница переданных импульсов определяется размерами пучков. Коэффициент при логарифме определяется из формулы (4.21), если положить в ней  $Z=1$ . В результате имеем с логарифмической точностью при  $\chi/u \gg 1$  следующее выражение для сечения излучения на встречных пучках:

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{2\alpha^3 \Gamma(1/3)}{5m^2 \omega} \left(\frac{u}{3\chi}\right)^{2/3} \left(1 + \frac{\varepsilon'^2}{\varepsilon^2}\right) \ln \Delta, \quad (5.7)$$

где

$$\Delta = \begin{cases} \frac{\gamma^{4/3}}{u^{5/9} \chi^{4/9}}, & \frac{1}{m} \frac{\gamma^{4/3}}{u^{2/9} \chi^{7/9}} < \sigma \\ m\sigma \left(\frac{\chi}{u}\right)^{1/3}, & \frac{1}{m} \frac{\gamma^{4/3}}{u^{2/9} \chi^{7/9}} > \sigma \end{cases} \quad (5.8)$$

Выражение (5.7) носит локальный характер ( $\chi = \chi(\bar{\rho})$ ). Для вычисления интегральных характеристик излучения необходимо провести надлежащие усреднения с учетом распределения частиц в пучках.

ВЫЧИСЛЕНИЕ СЕЧЕНИЙ В ПРЕДЕЛЕ СИЛЬНОГО ПОЛЯ

Воспользуемся для фурье-образа экранированного потенциала выражением (3.3) и подставим его в формулу для спектральной вероятности (3.25). В соответствии со сказанным в разделе 3 опустим член  $\frac{\omega^2}{\varepsilon'^2 \gamma^2} \sim \left(\frac{u}{\chi}\right)^{2/3} \omega^2 \tau^2$  и с этой же точностью пренебрежем в  $\rho(\tau)$  линейным членом  $\rho(\tau) \simeq ib\omega^2 \tau^3/3$ . После этого вероятность излучения представим в виде

$$\frac{dW_1^{(1)}}{d\omega} = -\frac{\alpha Q b^2 \omega}{\pi^2} \operatorname{Re} \int_0^\infty d\tau \tau^3 \exp\left\{-i\frac{b\omega^2 \tau^3}{3}\right\} \int_0^\infty \frac{dz}{\operatorname{ch}^4 z} \int d^2 \eta e^{ib\eta^2 \tau} \times \\ \times (\eta^2 + 2\bar{\omega} \bar{\eta} \tau \operatorname{ch} z + \omega^2 \tau^2) \left(\bar{\eta} + \frac{\bar{\omega} \tau}{2 \operatorname{ch} z}\right)^2 \left(A - \ln \frac{b^2 \tau^2 \eta^2}{4 \operatorname{ch}^2 z} - \ln \frac{\left(\bar{\eta} + \frac{\bar{\omega} \tau}{2 \operatorname{ch} z}\right)^2}{\eta^2}\right) \quad (\text{П.1})$$

где

$$A = \ln \frac{1}{\theta_1^2} + 1 - 2C, \quad Q = \frac{\pi \lambda z^2 \alpha^2}{\varepsilon^2} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon'^2}\right).$$

Рассмотрим отдельно члены с

$$A - \ln \frac{b^2 \tau^2 \eta^2}{4 \operatorname{ch}^2 z} \quad \text{и} \quad \ln \frac{\left(\eta + \frac{\bar{\omega} \tau}{2 \operatorname{ch} z}\right)^2}{\eta^2}.$$

В первом из них интегрирование по азимутальному углу  $\varphi$  ( $d^2 \eta = \eta d\eta d\varphi$ ) элементарно. Повернем контур интегрирования по  $\eta$  на угол  $\pi/4$  и введем переменную  $x = -i\eta^2 b\tau$ . После этого в комплексной плоскости  $\tau$  повернем контур интегрирования на угол  $-\pi/6$  и введем переменную  $y = ib\omega^2 \tau^3$ . Тогда соответствующая часть вероятности излучения приобретает вид

$$\frac{dW_1^{(1)}}{d\omega} = \frac{\alpha Q \omega \gamma^2}{3b^2 \pi} \left(\frac{u}{\chi}\right)^{2/3} \operatorname{Re} e^{i\pi/3} \int_0^\infty \frac{dy}{y^{2/3}} e^{-y/3} \int_0^\infty \frac{dz}{\operatorname{ch}^4 z} \int_0^\infty dx e^{-x} \times \\ \times \left[x^2 - 2xy + \frac{1}{4 \operatorname{ch}^2 z} (y^2 - xy)\right] \left(A - \ln \left[\frac{e^{i\pi/3} x y^{1/3} \gamma^2}{4 \operatorname{ch}^2 z} \left(\frac{u}{\chi}\right)^{2/3}\right]\right). \quad (\text{П.2})$$

Интегралы по  $x, y, z$  в (П.2) берутся из следующих соотношений и их дифференцирования по параметру  $v$  в случае наличия логарифмических факторов

$$\int_0^{\infty} x^v e^{-x} dx = \Gamma(v+1); \quad \int_0^{\infty} \frac{dz}{\text{ch}^{2v} z} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(v)}{\Gamma(\frac{1}{2}+v)}. \quad (\text{П.3})$$

В результате получаем для  $W_1^{(1)}$

$$\frac{dW_1^{(1)}}{d\omega} = \frac{\alpha Q \omega \gamma^2}{5b^2 \pi} \left(\frac{u}{3\chi}\right)^{2/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \times \\ \times \left[ \ln \frac{(\chi/u)^{2/3}}{\theta \gamma^2} - \frac{2}{3} C + \frac{7\pi}{6\sqrt{3}} + \frac{1}{6} \ln 3 + \frac{97}{30} \right]. \quad (\text{П.4})$$

Во втором члене в (П.1) воспользуемся экспоненциальной параметризацией и представим  $\ln (\bar{\eta} + \bar{\omega} \tau / 2 \text{ch} Z)^2 \eta^{-2}$  в виде интеграла Фруллани:

$$\ln \left( \bar{\eta} + \frac{\bar{\omega} \tau}{2 \text{ch} z} \right)^2 \eta^{-2} = \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} \left( \exp(ib\eta^2 s \tau) - \exp\left(ibs\tau \left(\bar{\eta} + \frac{\bar{\omega} \tau}{2 \text{ch} z}\right)^2\right) \right). \quad (\text{П.5})$$

Теперь интегралы по  $\bar{\eta}$  являются гауссовыми. Заметим также, что

$$\left[ \left( \bar{\eta} + \frac{\bar{\omega} \tau}{2 \text{ch} z} \right)^2 + \frac{i}{b\tau} \frac{\partial}{\partial s} \right] \exp\left\{ibs\tau \left(\bar{\eta} + \frac{\bar{\omega} \tau}{2 \text{ch} z}\right)^2\right\} = 0. \quad (\text{П.6})$$

Взяв интегралы по  $\bar{\eta}$  в (П.1), имеем для второго члена в вероятности излучения

$$\frac{dW_2^{(1)}}{d\omega} = -\frac{\alpha Q \omega \gamma^2}{3b^2 \pi} \left(\frac{u}{\chi}\right)^{2/3} \text{Re} e^{i\pi/3} \int_0^{\infty} \frac{dy}{y^{2/3}} e^{-y/3} \int_0^{\infty} \frac{dz}{\text{ch}^4 z} \times \\ \times \int_0^1 \frac{d\xi}{\xi} \left\{ 2(1-\xi)^2 - (1-\xi)y \left( 2 + \frac{1}{4\text{ch}^2 z} \right) + \frac{y^2}{4\text{ch}^2 z} + \right. \\ \left. + (1-\xi) \frac{d}{d\xi} (1-\xi) e^{\lambda \xi} [(1-\xi)(1-y) - \xi^2 \lambda] \right\}. \quad (\text{П.7})$$

Введены переменные  $\xi = \frac{s}{s+1}$ ,  $y = i\omega^2 b \tau^3$  и обозначение  $\lambda = y/4 \text{ch}^2 Z$ . Интегрируя по  $\xi$  в (П.7), получаем

$$\frac{dW_2^{(1)}}{d\omega} = \frac{\alpha Q \omega \gamma^2}{6b^2 \pi} \left(\frac{u}{\chi}\right)^{2/3} \int_0^{\infty} \frac{dy}{y^{2/3}} e^{-y/3} \int_0^{\infty} \frac{dz}{\text{ch}^4 z} \times \\ \times \left\{ (e^\lambda - 1)(4\text{ch}^2 z + 1 - y) - \lambda + (2-\lambda)(1-y) \int_0^1 \frac{d\xi}{\xi} (e^{\lambda \xi} - 1) \right\}. \quad (\text{П.8})$$

Переходя к переменной  $\text{th} z = \psi$ , проведем интегрирование по частям в последнем члене в (П.8):

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{\text{ch}^4 z} (2-\lambda) \int_0^1 \frac{d\xi}{\xi} (e^{\lambda \xi} - 1) = \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{d\psi}{1-\psi^2} \left( 2 - \frac{y}{5} \right) (e^\lambda - 1) + \\ + \frac{2}{3} \int_0^1 d\psi \left[ 2(2-\psi^2) - \frac{y}{20} (8-7\psi^2+3\psi^4) \right] (1-e^\lambda). \quad (\text{П.9})$$

Взяв интегралы по  $y$  в (П.8), при помощи формулы (П.3) получаем

$$\frac{dW_2^{(1)}}{d\omega} = \frac{\alpha Q \omega \gamma^2}{2b^2 \pi} \left(\frac{u}{3\chi}\right)^{2/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \left\{ -\frac{263}{75} + \frac{4}{5} \int_0^1 \frac{d\psi}{1-\psi^2} (\alpha^{-1/3} - 1) + \right. \\ \left. + \int_0^1 d\psi \left[ \frac{7+\psi^2}{3\alpha^{1/3}} - \frac{1}{\alpha^{4/3}} \left( \frac{4}{15} + \frac{17}{30} \psi^2 - \frac{1}{10} \psi^4 \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\alpha^{7/3}} \left( \frac{1}{15} - \frac{23}{15} \psi^2 + \frac{2}{5} \psi^4 \right) \right] \right\}, \quad (\text{П.10})$$

где  $\alpha = \frac{1}{4}(1+3\psi^2)$ . Второй интеграл в (П.10) можно выразить через гипергеометрические функции. Воспользовавшись формулами преобразования (аналитического продолжения), а также рекуррентными соотношениями Гаусса, представим  $dW_2/d\omega$  в виде

$$\frac{dW_2^{(1)}}{d\omega} = \frac{\alpha Q \omega \gamma^2}{5b^2 \pi} \left(\frac{u}{3\chi}\right)^{2/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \left\{ -6 \left( F\left(\frac{1}{3}, 1; \frac{5}{6}, \frac{1}{4}\right) - \frac{2\pi \Gamma(2/3)}{\sqrt{3} \Gamma^2(1/3)} \right) + \right.$$

$$+ \int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x}} \left[ \left(1 - \frac{3x}{4}\right)^{-1/3} - 1 \right] + \frac{37}{30} \}. \quad (\text{П.11})$$

Складывая (П.4) и (П.11), окончательно имеем для экранированного потенциала следующее асимптотическое выражение:

$$\begin{aligned} \frac{dW_{sc}}{d\omega} &= \frac{\alpha Q \omega \gamma^2}{5b^2 \pi} \left(\frac{u}{3\chi}\right)^{2/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \left\{ \ln \frac{1}{\theta^2 \gamma^2} \left(\frac{\chi}{u}\right)^{2/3} + 2D_{sc} \right\}, \\ 2D_{sc} &= \frac{7\pi}{6\sqrt{3}} + \frac{1}{6} \ln 3 - \frac{2}{3} C + \frac{67}{15} - 6 \left( F\left(\frac{1}{3}, 1; \frac{5}{6}; \frac{1}{4}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma^2(1/3)} \right) + \int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x}} \left[ \left(1 - \frac{3x}{4}\right)^{-1/3} - 1 \right] = 4,6016. \quad (\text{П.12}) \end{aligned}$$

Аналогично проводятся вычисления для поправки  $d\bar{W}/d\omega$  в неэкранированном случае. Здесь еще (см. обсуждение в начале раздела) надо опустить 1 в аргументе логарифма в формуле (4.16), так что поправка к вероятности в случае  $\chi/u \gg 1$  имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{W}}{d\omega} &= \frac{2\alpha Q \omega}{\pi^2} \operatorname{Re} \int_0^\infty d\tau \tau \exp\left(-i \frac{b\omega^2 \tau^3}{3}\right) \int_0^1 d\mu \int d^2\theta e^{-ib\theta^2 \tau} \times \\ &\quad \times \left\{ b^2 \tau^2 (1 - \mu^2) (\theta^2 - \omega^2 \tau^2) \left( \theta^2 - \bar{\omega} \bar{\theta} \mu \tau + \frac{\mu^2 - 1}{4} \omega^2 \tau^2 \right) - \right. \\ &\quad \left. - 2 + ib\tau [2\theta^2 + 2\bar{\omega} \bar{\theta} \mu \tau + (1 - \mu^2) \omega^2 \tau^2] \right\} \times \\ &\quad \times \left( \ln \frac{\theta_1}{\delta \gamma^2 \theta^2} - \ln \frac{(\bar{\theta} - \mu \bar{\omega} \tau)^2}{\theta^2} \right). \quad (\text{П.13}) \end{aligned}$$

Вычисления с  $\ln \frac{\theta_1}{\delta \gamma^2 \theta^2}$  в (П.13) аналогичны тем, которые проводились при выводе формулы (П.4).

В результате получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{W}_1}{d\omega} &= \frac{2\alpha Q \omega \gamma^2}{5b^2 \pi} \left(\frac{u}{3\chi}\right)^{2/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \left[ \ln \frac{\theta_1 (u/\chi)^{2/3}}{\delta} + \frac{2}{3} C - \frac{7\pi}{6\sqrt{3}} - \frac{1}{6} \ln 3 \right] \approx \\ &\approx \frac{2\alpha Q \omega \gamma^2}{5b^2 \pi} \left(\frac{u}{3\chi}\right)^{2/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \left[ \ln \frac{\theta_1 (u/\chi)^{2/3}}{\delta} - 1,9144 \right]. \quad (\text{П.14}) \end{aligned}$$

При вычислении второго члена в (П.13) также представим входящий в него логарифм в виде интеграла Фруллани. Вводя те же обозначения, что и в (П.7), после аналогичных расчетов имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{W}_2}{d\omega} &= \frac{\alpha Q \omega \gamma^2}{3b^2 \pi} \left(\frac{u}{\chi}\right)^{2/3} \int_0^\infty \frac{dy}{y^{2/3}} e^{-y/3} \int_0^\infty \frac{dz}{ch^4 z} \times \\ &\quad \times \left\{ (e^{-\bar{\lambda}} - 1)(4ch^2 z + \lambda - 1) + (2 - \lambda)(1 - y) \int_0^1 \frac{d\xi}{\xi} (e^{-\bar{\lambda}\xi} - 1) \right\}, \quad (\text{П.15}) \\ \bar{\lambda} &= y \operatorname{th}^2 z, \quad \lambda = \frac{y}{4ch^2 z}. \end{aligned}$$

Возвращаясь к переменной  $\mu = \operatorname{th} z$  и проводя интегрирование по  $\mu$  в последнем члене в (П.15) по частям, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{W}_2}{d\omega} &= - \frac{\alpha Q \omega \gamma^2}{3b^2 \pi} \left(\frac{u}{\chi}\right)^{2/3} \int_0^\infty \frac{dy}{y^{2/3}} e^{-y/3} \left\{ \frac{2}{3} \left( 2 - \frac{11}{5} y + \frac{1}{5} y^2 \right) \times \right. \\ &\quad \times \int_0^1 \frac{d\xi}{\xi} (1 - e^{-\xi y}) + \int_0^1 d\mu e^{-\mu^2 y} \left[ 1 - \frac{19}{4} y + \frac{1}{2} y^2 - \frac{\mu^2}{6} (14 - 13y + 2y^2) + \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\mu^4}{20} y (2y - 7) \right] - \frac{2}{9} + \frac{922}{225} y - \frac{92}{225} y^2 \right\}. \quad (\text{П.16}) \end{aligned}$$

Интегралы по  $y$  в (П.16) определяются формулой (П.3), интегралы по  $\mu$  выражаются через гипергеометрические функции. Воспользовавшись формулами аналитического продолжения и формулами Гаусса, можно представить вероятность  $\bar{W}_2$  в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{W}_2}{d\omega} &= \frac{2\alpha Q \omega \gamma^2}{5b^2 \pi} \left(\frac{u}{3\chi}\right)^{2/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \left[ \frac{2}{5} - \int_0^1 \frac{d\xi}{\xi} (1 - (1 + 3\xi)^{-1/3}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2^{2/3}} \left( -33 \left( F\left(\frac{1}{3}, 1; \frac{5}{6}; \frac{1}{4}\right) - \frac{2\pi \Gamma(2/3)}{\sqrt{3} \Gamma^2(1/3)} \right) + 13 \right) \right] = \\ &= - \frac{2\alpha Q \omega \gamma^2}{5b^2 \pi} \left(\frac{u}{3\chi}\right)^{2/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \cdot 1,0987. \quad (\text{П.17}) \end{aligned}$$

Складывая (П.17) с (П.14) и с (П.12), получаем для незранированного потенциала при  $\chi/u \gg 1$  следующее выражение:

$$\frac{dW_{\text{посс}}}{d\omega} = \frac{2\alpha Q\omega\gamma^2}{5b^2\pi} \left(\frac{u}{3\chi}\right)^{2/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \left\{ \ln \frac{(u/\chi)^{1/3}}{\gamma\delta} + D_{\text{посс}} \right\}, \quad (\text{П.18})$$

где  $D_{\text{посс}} = -0,7123$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Померанчук И.Я. ДАН СССР, 1953, т.92, с. 535, 735.
2. Мигдал А.Б. ДАН СССР, 1954, т.96, с.49; 1955, т.105, с.77.
3. Мигдал А.Б. ЖЭТФ, 1957, т.32, с.633.
4. Байер В.Н., Катков В.М. ДАН СССР, 1972, т.207, с.68.
5. Байер В.Н., Катков В.М., Фадин В.С. Излучение релятивистских электронов. М.: Атомиздат, 1973.
6. Катков В.М., Страховенко В.М. ЯФ, 1977, т.25, с.1245.
7. Борисов А.Б., Жуковский В.Ч., Шариф Хамид. Вестн. Моск. ун-та, Физ. астрон. 1980, т.21., №4, с.17.
8. Барышевский В.Г., Тихомиров В.В. ЖЭТФ, 1986, т.90, с.1908.
9. Тер-Микаэлян М.А. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях. Ереван, Изд. АН АрмССР, 1969.
10. Гольдман И.И. ЖЭТФ, 1960, т.38, с.1866.
11. Байер В.Н., Катков В.М., Страховенко В.М. ДАН СССР, 1981, т.260, с.861.
12. Vlipov A.E., Bondar A.E., Eidelman Yu.I et al. Phys. Lett. 1982, v.113B, p.423.
13. Байер В.Н., Катков В.М., Страховенко В.М. ЯФ, 1982, т.36, с.163.

В.Н. Байер, В.М. Катков, В.М. Страховенко

#### Излучение при столкновении релятивистских частиц в среде в присутствии внешнего поля

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 21 января 1987 г.  
Подписано в печать 23 марта 1987 г. МН 08646  
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2,5 печ.л., 2,0 уч.-изд.л.  
Тираж 230 экз. Бесплатно. Заказ № 26

Набрано в автоматизированной системе на базе фото-наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и отпечатано на ротапринтере Института ядерной физики СО АН СССР,  
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.