

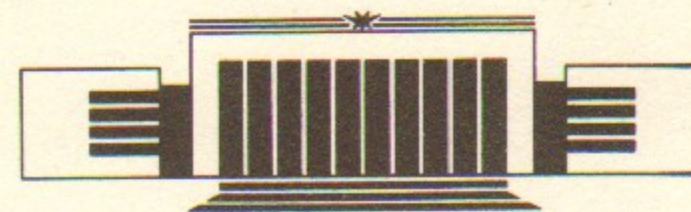


33
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

В.Н. Байер, В.М. Катков, В.М. Страховенко

РОЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННЫХ ПАР
ФОТОНАМИ ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ ПРИ ВЛЕТЕ
ВБЛИЗИ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ПЛОСКОСТЕЙ

ПРЕПРИНТ 87-59



НОВОСИБИРСК

Рождение электрон-позитронных пар
фотонами высокой энергии при влете
вблизи кристаллических плоскостей

В.Н. Байер, В.М. Катков, В.М. Страховенко

Институт ядерной физики
630090, Новосибирск, СССР

АННОТАЦИЯ

Рассмотрен процесс рождения электрон-позитронных пар фотонами при влете в монокристалл под малым углом ϑ_0 к кристаллическим плоскостям. Получено общее описание процесса, пригодное при любых ϑ_0 . Детально проанализированы предельные случаи: 1) малых ϑ_0 , когда применимо приближение постоянного поля; 2) относительно больших ϑ_0 , когда применима теория когерентного рождения пар, получена модификация этой теории, имеющая более широкую область применимости. Дано общее описание поляризационных эффектов, изучена возможность использования кристаллов для получения и измерения поляризации фотонных пучков.

Electron-Positron Pair Creation
by High-Energy Photons
Incident near the Crystalline Planes

V.N. Bayer, V.M. Katkov, V.M. Strakhovenko

Institute of Nuclear Physics
630090, Novosibirsk, USSR

АБСТРАКТ

The process is considered of electron-positron pair creation by photons incident on a single crystal at a small angle ϑ_0 to the crystalline planes. A general description of the process, valid at any ϑ_0 , is obtained. The limiting cases are comprehensively analysed: a) of small ϑ_0 when the constant field approximation is applicable; b) of relatively large when the theory of coherent pair creation is applicable; a modification of this theory with a broader range of applicability has been derived. A general description of the polarization effects is given and the possibility is studied of using crystals to obtain and to measure the polarization of photons.

1. ВВЕДЕНИЕ

Недавно авторами была развита (см. [1]) теория рождения e^+e^- пар фотонами в кристалле, справедливая для любых энергий и направлений влета фотона. Исходя из общих выражений в [1] был проведен подробный анализ случая, когда импульс фотона \vec{k} лежит вблизи направления кристаллической оси. Настоящая работа посвящена количественному изучению ситуации, когда фотон движется вблизи кристаллических плоскостей. Угол между \vec{k} и ближайшими осями будем считать настолько большим, чтобы когерентные осевые эффекты не превышали аморфных значений. Тогда влияние кристаллических плоскостей выделяется в чистом виде.

В разделе 2 получено общее выражение для вероятности рождения пар поляризованными фотонами, справедливое при любых углах влета фотона ϑ_0 (угол между \vec{k} и плоскостью). В разделе 3 процесс исследован при малых углах влета $\vartheta_0 < V/m$, когда применимо приближение постоянного поля. В разделе 4 процесс рассмотрен при относительно больших углах $\vartheta_0 > V/m$, получена модификация теории когерентного рождения пар. В разделе 5 проведен анализ эффектов, связанных с измерением и получением поляризации фотонного пучка. Приложение посвящено процедуре вычисления поправок к приближению постоянного поля, анализ которых содержит ряд технических сложностей.

2. ОБЩЕЕ ОПИСАНИЕ РОЖДЕНИЯ ПАР ФОТОНАМИ, ВЛЕТАЮЩИМИ ПОД МАЛЫМ УГЛОМ К ПЛОСКОСТИ И ОСИ

В плоскостном случае могут проявляться поляризационные эффекты. Для их учета выпишем квазиклассическое выражение для вероятности рождения пар, которое можно получить, исходя, например, из формулы (11.12) книги [2]:

$$W_e = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{d^3 r_0}{V_{cr}} \int \frac{d^3 p_0}{\omega} \int dt_1 \int dt_2 \left\{ \left(\frac{\varepsilon' - \varepsilon}{2\varepsilon'} \right)^2 (\vec{e}^* \vec{v}_1) (\vec{e} \vec{v}_2) - \left(\frac{\omega}{2\varepsilon'} \right)^2 [(\vec{e}^* \vec{v}_2) (\vec{e} \vec{v}_1) - (\vec{v}_1 \vec{v}_2 - 1 + 1/\gamma^2) (\vec{e}^* \vec{e})] \right\} e^{iA_1}, \quad (1)$$

$$A_1 = \frac{\varepsilon\omega}{2\varepsilon'} \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{1}{\gamma^2} + (\vec{n} - \vec{v}(t))^2 \right],$$

где V_{cr} — объем кристалла; \vec{p}_0 — импульс частицы родившейся пары в точке рождения \vec{r}_0 ; $\vec{v}_{1,2} \equiv \vec{v}(t_{1,2})$ — скорость частицы, ε — ее энергия; $\varepsilon' = \omega - \varepsilon$; $\gamma = \varepsilon/m$; m — масса электрона; $\vec{n} = \vec{k}/\omega$; \vec{e} — вектор поляризации фотона. Если в (1) провести усреднение по поляризации фотона, то мы приходим к формуле (2.2) работы [1]. Можно провести в (1) интегрирование по углам вектора \vec{p}_0 ($\vec{v}_0 = \vec{p}_0/\varepsilon$), как это было сделано в [1] при переходе от формулы (2.2) к (2.4). Для этого представим скорость $\vec{v}(t) \equiv \vec{v}_0 + \Delta\vec{v}(t, \vec{v}_0)$ и, поскольку основной вклад дают участки траектории, на которых направление \vec{v}_0 близко к \vec{n} , то в $\Delta\vec{v}(t, \vec{v}_0)$ можно заменить $\vec{v}_0 \rightarrow \vec{n}$. В результате имеем:

$$\omega_e = \frac{i\alpha}{2\pi\omega^2} \int \frac{d^3 r_0}{V_{cr}} \int \varepsilon^2 d\varepsilon \int \frac{dt d\tau}{\tau + i0} \left\{ (\vec{e}^* \vec{e}) \left[\frac{1}{\gamma^2} + (\vec{a}_1 \vec{a}_2) - \frac{\varphi(\varepsilon)}{4} (\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2 \right] + \frac{1}{2\varepsilon\varepsilon'} [(\varepsilon - \varepsilon')^2 (\vec{e}^* \vec{a}_1) (\vec{e} \vec{a}_2) - (\varepsilon + \varepsilon')^2 (\vec{e}^* \vec{a}_2) (\vec{e} \vec{a}_1)] \right\} e^{iA_2}, \quad (2)$$

где

$$A_2 = \frac{\varepsilon\omega\tau}{2\varepsilon'} \left[\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dx (\Delta\vec{v}(t+x))^2 - \left(\frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dx \Delta\vec{v}(t+x) \right)^2 \right], \quad (3)$$

$$\vec{a}_{1,2} = \frac{1}{\tau} \int_{t_1}^{t_2} dx \Delta\vec{v}(x) - \Delta\vec{v}(t_{1,2}). \quad \varphi(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}.$$

Мы перешли к переменным t, τ : $t_{1,2} = t \mp \tau/2$. Используя уравнения движения в потенциале кристалла $U(\vec{r}) = \sum_{\vec{q}} G(\vec{q}) e^{-i\vec{q}\vec{r}}$ и вычисляя

$\Delta\vec{v}$ в приближении прямолинейной траектории

$$\Delta\vec{v}(t) = -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{\vec{q}} G(\vec{q}) \exp[-i(\vec{q}\vec{r} + q_{\parallel}t)] \frac{\vec{q}_{\perp}}{q_{\parallel}}, \quad q_{\parallel} = (\vec{q}\vec{n}), \quad \vec{q}_{\perp} = \vec{q} - \vec{n}(\vec{q}\vec{n}),$$

окончательно находим для вероятности рождения электрон-позитронной пары поляризованным фотоном в единицу времени:

$$W_e \equiv \frac{d\omega_e}{dt} = \frac{i\alpha m^2}{2\pi\omega^2} \int \frac{d^3 r_0}{V_{cr}} \int d\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau + i0} e^{iA_3} \times$$

$$\times \left\{ (\vec{e}^* \vec{e}) \left[1 + \varphi(\varepsilon) \left(\sum_{\vec{q}} \frac{G(\vec{q}) \vec{q}_{\perp}}{m q_{\parallel}} \sin(q_{\parallel}\tau) e^{-i\vec{q}\vec{r}_0} \right)^2 \right] + \sum_{\vec{q}, \vec{q}'} \frac{G(\vec{q}) G(\vec{q}')}{m^2 q_{\parallel} q'_{\parallel}} e^{-i(\vec{q} + \vec{q}')\vec{r}_0} \left[\frac{i\varphi(\varepsilon)}{2} (\vec{e}^* \vec{q}_{\perp}) (\vec{e} \vec{q}'_{\perp}) - (\vec{e}^* \vec{q}'_{\perp}) (\vec{e} \vec{q}_{\perp}) \right] \times \right.$$

$$\times [\sin q'_{\parallel}\tau \cdot g(q_{\parallel}\tau) - \sin q_{\parallel}\tau \cdot g(q'_{\parallel}\tau)] + [(\vec{e}^* \vec{e}) (\vec{q}_{\perp} \vec{q}'_{\perp}) - (\vec{q}_{\perp} \vec{e}^*) (\vec{q}'_{\perp} \vec{e}) - (\vec{q}'_{\perp} \vec{e}^*) (\vec{q}_{\perp} \vec{e})] [g(q_{\parallel}\tau) g(q'_{\parallel}\tau) + \sin(q_{\parallel}\tau) \sin(q'_{\parallel}\tau)] \left. \right\}, \quad (4)$$

где

$$A_3 = \frac{m^2\omega\tau}{\varepsilon\varepsilon'} \left\{ 1 + \sum_{\vec{q}, \vec{q}'} \frac{G(\vec{q}) G(\vec{q}')}{m^2 q_{\parallel} q'_{\parallel}} (\vec{q}_{\perp} \vec{q}'_{\perp}) e^{-i(\vec{q} + \vec{q}')\vec{r}_0} \times \right.$$

$$\times \left[\frac{\sin(q_{\parallel} + q'_{\parallel})\tau}{(q_{\parallel} + q'_{\parallel})\tau} - \frac{\sin q_{\parallel}\tau \sin q'_{\parallel}\tau}{q_{\parallel}\tau q'_{\parallel}\tau} \right] \left. \right\}, \quad g(x) = \frac{\sin x}{x} - \cos x. \quad (5)$$

Выражение (4) обобщает основной результат работы [1] на случай поляризованных фотонов.

3. ПРОЦЕСС В ПОЛЕ ПЛОСКОСТИ, ПОПРАВКИ К ПРИБЛИЖЕНИЮ ПОСТОЯННОГО ПОЛЯ

Для малых углов падения относительно оси или плоскости $\theta_0 \ll V/m$, где V — характерный масштаб потенциала, из (4) следует аналог формулы (3.6) работы [1]:

Параметры потенциала (7) и некоторые величины, характеризующие эффект рождения пар фотоном в плоскости (110) различных кристаллов при комнатной температуре

Кристалл	V (эВ)	δ	η^2	ω_i (ГэВ)	$(\langle \frac{E^2}{E_0^2} \rangle)^{1/2} \cdot 10^7$	$l_0 \cdot W_{\text{ВН}} \cdot 10^{-5} \omega/m$	$l_{\text{min}}(1/2)$ (мм)
C	7,7	2,2	0,005	550	3,73	3,0	4,2
Si	3,5	2,9	0,0045	920	2,59	8,8	6,4
Ge	4,5	3,2	0,0052	700	4,41	12,9	3,9
Fe	8	3,1	0,002	350	7,28	6,2	2,2
W	6,4	3,85	0,0007	240	12,1	11,3	1,3

где $y = 2x/d_{pl}$, $|y| \leq 1$. Параметры V , δ , η^2 для некоторых веществ приведены в таблице. Они определяются из сравнения (7) с выражением для потенциала плоскости в виде суммы по q_x . Если устремить амплитуду тепловых колебаний u_1 к нулю ($\eta^2 \rightarrow 0$), то выражение (7) переходит в потенциал, введенный нами в [3]. В потенциале (7) локальное значение квантового параметра κ , определяющего поведение вероятности рождения пары фотоном в постоянном поле будет

$$\kappa(x) = \frac{E(x)}{E_0} \cdot \frac{\omega}{m} = \kappa_p \psi(y); \quad \kappa_p = \frac{2V\delta\omega}{m^3 d_{pl}} \equiv \frac{V\omega}{a, m^3}; \quad (8)$$

$$\psi(y) = \sqrt{\frac{y^2}{y^2 + \eta^2}} \operatorname{sh} \delta (\sqrt{1 + \eta^2} - \sqrt{y^2 + \eta^2}), \quad E_0 = \frac{m^2}{e} \simeq 1,32 \cdot 10^{10} \text{ В/см.}$$

Электрическое поле $E(x)$ и параметр $\kappa(x)$ обращается в нуль на плоскости (из-за тепловых колебаний) и посередине между плоскостями (из симметрии) и достигает максимума в точке y_0 , где $\psi'(y_0) = 0$.

Обсудим сначала поведение вероятности процесса при плоскостной ориентации в пределе постоянного поля. Эта часть выражения (6) с помощью интегрирования по частям по ε приводится к виду:

$$W_{el}^{pl} = \frac{2\alpha m^2}{3\sqrt{3} \pi \omega^2} \int_0^\omega d\varepsilon \int_0^1 dy \{ |e_x|^2 (\varphi(\varepsilon) + 1) + |e_y|^2 (\varphi(\varepsilon) + 4) \} K_{2/3}(\lambda) \equiv \\ \equiv |e_x|^2 W_{\perp} + |e_y|^2 W_{\parallel}, \quad (9)$$

$$W_e = \frac{\alpha m^2}{\pi \sqrt{3} \omega^2} \int d\varepsilon \int \frac{d^2 \rho_0}{s} \left\{ (\bar{e}^* \bar{e}) \left[\varphi(\varepsilon) K_{2/3}(\lambda) + \int_\lambda^\infty dy K_{1/3}(y) \right] - \right. \\ \left. - \left[2 \frac{(\bar{b} \bar{e}^*)(\bar{b} \bar{e})}{|\bar{b}|^2} - (\bar{e} \bar{e}^*) \right] K_{2/3}(\lambda) - \frac{1}{3} \varphi(\varepsilon) (\bar{e}^* \bar{e}) \frac{(\bar{b}, (\bar{n} \bar{\nabla})^2 \bar{b})}{|\bar{b}|^4} \times \right. \\ \times \left[K_{2/3}(\lambda) - \frac{2}{3\lambda} K_{1/3}(\lambda) \right] - \frac{1}{3|\bar{b}|^4} [(\bar{e} \bar{e}^*) (\bar{b}, (\bar{n} \bar{\nabla})^2 \bar{b}) - \frac{1}{3} ((\bar{n} \bar{\nabla}) \bar{b})^2] - \\ \left. - (\bar{b} \bar{e})(\bar{e}^*, (\bar{n} \bar{\nabla})^2 \bar{b}) - (\bar{b} \bar{e}^*)(\bar{e}, (\bar{n} \bar{\nabla})^2 \bar{b}) + \frac{2}{3} (\bar{e}^*, (\bar{n} \bar{\nabla}) \bar{b})(\bar{e}, (\bar{n} \bar{\nabla}) \bar{b}) \right] \times \\ \times \left[K_{2/3}(\lambda) - \frac{2}{3\lambda} K_{1/3}(\lambda) \right] + \frac{1}{10|\bar{b}|^4} [(\bar{b}, (\bar{n} \bar{\nabla})^2 \bar{b}) + \frac{1}{3} ((\bar{n} \bar{\nabla}) \bar{b})^2] \times \\ \times [(\bar{e} \bar{e}^*) \left[\left(\frac{4}{3} K_{2/3}(\lambda) - \lambda K_{1/3}(\lambda) \right) + \left[\frac{2(\bar{b} \bar{e}^*)(\bar{b} \bar{e})}{|\bar{b}|^2} - (\bar{e} \bar{e}^*) (1 + \varphi(\varepsilon)) \right] \times \right. \\ \left. \times \left[\left(\lambda + \frac{16}{9\lambda} \right) K_{1/3}(\lambda) - 4 K_{2/3}(\lambda) \right] \right] \right\}, \quad (6)$$

здесь $\lambda = \frac{2}{3} m^2 \omega / \varepsilon \varepsilon' |\bar{b}|$, s — площадь элементарной ячейки, принадлежащей на одну ось. В осевом случае $\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \bar{\rho}_0}$, $\bar{b} = \bar{\nabla} U(\bar{\rho}_0) / m$, $U(\bar{\rho}_0) = \sum_{\bar{q}_i} G(\bar{q}_i) \exp\{-i\bar{q}_i \bar{\rho}_0\}$; векторы \bar{q}_i лежат в плоскости, перпендикулярной к оси.

В плоскостном случае $\int \frac{d^2 \bar{\rho}_0}{s} \rightarrow \int \frac{dx}{d_{pl}}$, где d_{pl} — расстояние между соседними плоскостями, $\bar{\nabla} \rightarrow \frac{d}{dx}$,

$\bar{b} \rightarrow \frac{1}{m} \frac{dU(x)}{dx}$, $U(x) = \sum_{q_x} G(q_x) \exp\{-iq_x x\}$; координата x перпендикулярна плоскости; $\bar{n} \bar{\nabla} \rightarrow \theta_0 \frac{d}{dx}$, где θ_0 — угол между направлением

влета фотона и плоскостью. Первые два члена в (6) представляют собой вероятность рождения пары поляризованным фотоном в приближении постоянного поля, остальные дают зависящие от θ_0 поправки к этому приближению.

Ниже наряду с выражением для потенциала плоскости в виде суммы по q_x будет использоваться его аналитическая аппроксимация в форме

$$U(x) = V [\operatorname{ch} \delta (\sqrt{1 + \eta^2} - \sqrt{y^2 + \eta^2}) - 1], \quad (7)$$

где $\lambda = \frac{2}{3} \frac{\omega^2}{\varepsilon \varepsilon'} \frac{1}{\kappa_p \psi(y)}$. Выражение (9) совпадает (с точностью до усреднения по координате) с формулой (13.4) из [2], если в последней считать внешнее поле чисто электрическим и направить его по оси x . Из (9) видно, что в случае линейной поляризации фотона вдоль x (перпендикулярно плоскости) соответствующая вероятность W_{\perp} меньше, чем W_{\parallel} — вероятность процесса при линейной поляризации фотона вдоль оси y (параллельно плоскости).

При малых значениях параметра κ величина λ в (9) оказывается большой при всех y и для $K_{2/3}(\lambda)$ можно использовать асимптотическое выражение при $\lambda \gg 1$: $K_{2/3}(\lambda) \simeq \sqrt{\pi/2\lambda} e^{-\lambda}$. Основной вклад в этих условиях дает область значений y вблизи точки y_0 , где поле максимально, а по энергии вблизи $\varepsilon \simeq \varepsilon' \simeq \omega/2$, что вместе обеспечивает минимальное (но большое) значение λ :

$$W_{ef}^{pl} (\kappa \ll 1) \simeq \frac{3am^2 \kappa_m^2}{16\omega} \sqrt{\frac{\pi}{2\kappa_p |\psi''(y_0)|}} e^{-8/3\kappa_m} (|e_x|^2 + 2|e_y|^2). \quad (10)$$

Здесь κ_m — максимальное значение параметра $\kappa(x)$: $\kappa_m = \kappa_p \psi(y_0)$. В этом пределе, как и в постоянном поле, при $\kappa \ll 1$ имеем $W_{\parallel} = 2W_{\perp}$. При достаточно малом κ_m вероятность (10) экспоненциально мала, и в этом смысле можно говорить об энергетическом пороге рассматриваемого процесса. Более строго определим пороговую энергию фотона ω_t соотношением: $\bar{W}_{ef}|_{\omega=\omega_t} \equiv \frac{1}{2}(W_{\parallel} + W_{\perp})|_{\omega=\omega_t} = W_{\text{ВН}}$ — вероятности в соответствующей аморфной среде. Значения ω_t для ряда веществ приведены в таблице.

Вероятность (9) достигает максимума при высоких энергиях (для плоскости (110) при $4 \div 30$ ТэВ), когда $\kappa_m \gg 1$. Поэтому представляет интерес асимптотика выражения (9) при больших значениях κ . Для ее получения удобно воспользоваться интегральным представлением для функции $K_{2/3}(\lambda)$ (см [4]):

$$K_{2/3}(\lambda) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-c-i\infty}^{-c+i\infty} ds \Gamma(-s) \Gamma\left(-s - \frac{2}{3}\right) \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2s+2/3}, \quad c > 2/3. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (9), проводя интегрирование по ε и замыкая контур интегрирования по s направо, получаем при $\kappa \gg 1$

$$W_{ef}^{pl} \simeq \frac{2}{3} \frac{am^2}{\omega} [|e_x|^2 (2A-1) + |e_y|^2 (3A-1)],$$

$$A = \frac{3^{5/3}}{7} \left[\frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} \right]^2 \langle \kappa^{2/3}(x) \rangle, \quad (12)$$

где

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-d_{pl}/2}^{d_{pl}/2} \frac{dx}{d_{pl}} \cdot f(x),$$

$\kappa(x)$ определено в (8). Выражения (12) для W_{\parallel} , W_{\perp} и в неполяризованном случае $\bar{W}_{ef} = \frac{1}{2}(W_{\perp} + W_{\parallel})$ имеют максимум при $\omega = \omega_0$. При этом ввиду плавной зависимости вероятности W_{ef}^{pl} от ω в районе максимума получаемые из (12) значения ω_0 могут служить лишь в качестве оценки, сами же максимальные значения W^{max} определяются из (12) с хорошей точностью, что подтверждается численным расчетом. Находим из (12)

$$W^{\text{max}} = \frac{4}{3} \frac{am^2}{\omega_0}, \quad \omega_0 = (\bar{A})^{-3/2}, \quad \omega_0^{\perp} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} \omega_0^{\parallel}, \quad \bar{\omega}_0 = \left(\frac{6}{5}\right)^{3/2} \omega_0^{\parallel}; \quad (13)$$

где $\bar{A} = A/\omega^{2/3}$, величина A определена в (12), \bar{A} не зависит от частоты фотона.

Поведение вероятности (9) в зависимости от энергии фотона изображено для ряда веществ на рис. 1, 2. Видно, что в области частот $\omega \geq \omega_t$ происходит быстрый рост вероятности, который замедляется в районе максимума, а после его прохождения наблюдается очень медленное падение вероятности. Максимальное значение $W_{\parallel}^{\text{max}}$ оказывается сравнимым с максимальной вероятностью в осевом случае. Поскольку поле плоскости слабее, чем поле оси, эффект при плоскостной ориентации проявляется и достигает максимальных значений при более высоких энергиях, чем при осевой (ср., например, соответствующие значения ω_t).

Выражение (6) содержит поправки, зависящие от ϑ_0 . Эти поправки определяют область применимости приближения постоянного поля, а также полезны для нахождения тенденции зависимости W_e от ϑ_0 и последующей сшивки с $W_e(\vartheta_0)$ в когерентной области. Однако, при вычислении поправочных членов в наиболее интересной области $\kappa \gg 1$ возникают технические трудности. Они обусловлены тем, что основной вклад в приближении постоянного поля

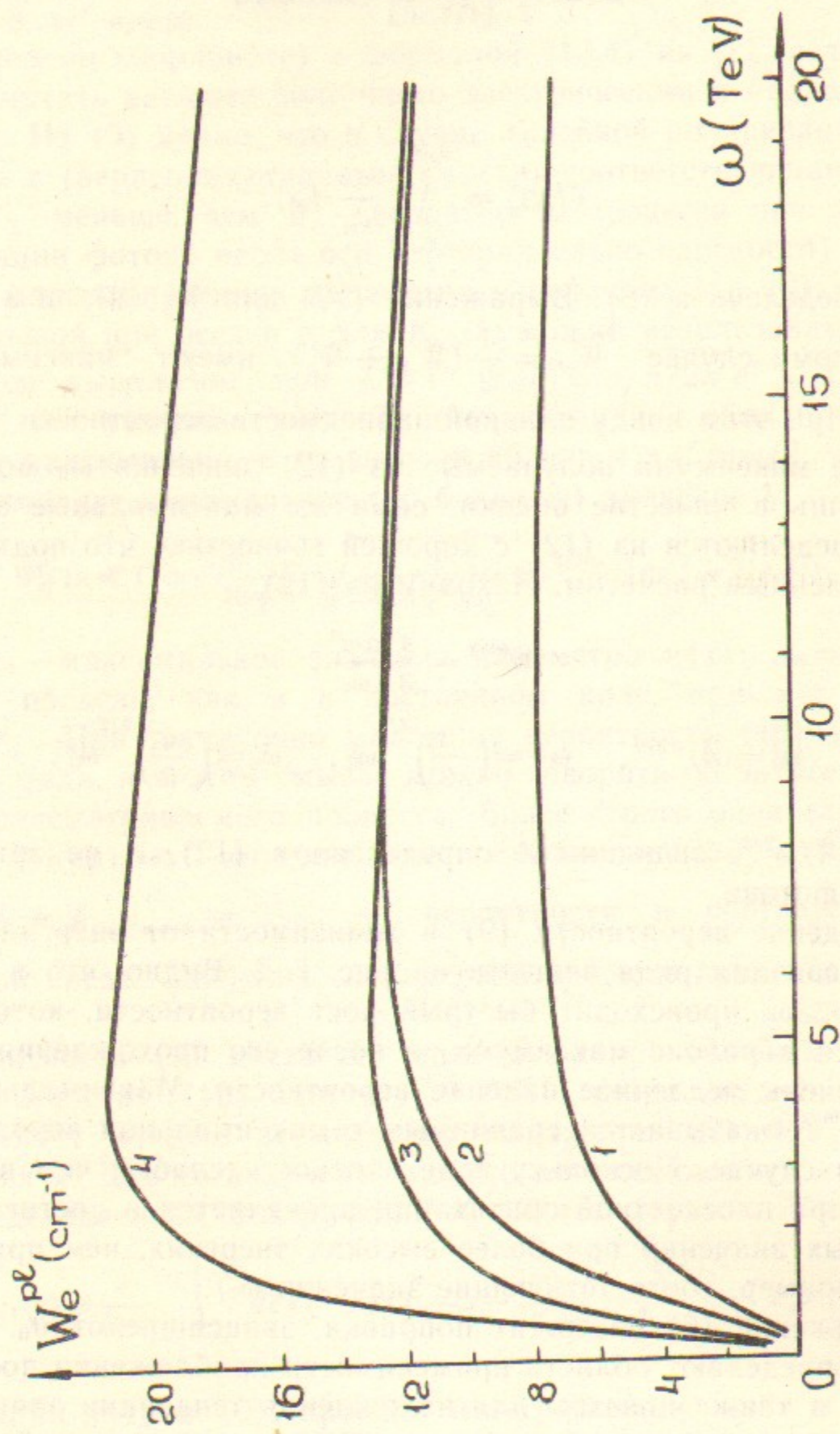


Рис. 1. Зависимость вероятностей W_{\perp} и W_{\parallel} от энергии фотона, найденная согласно (9) для плоскости (110) железа — кривые 1, 2 и вольфрама — кривые 3 и 4.

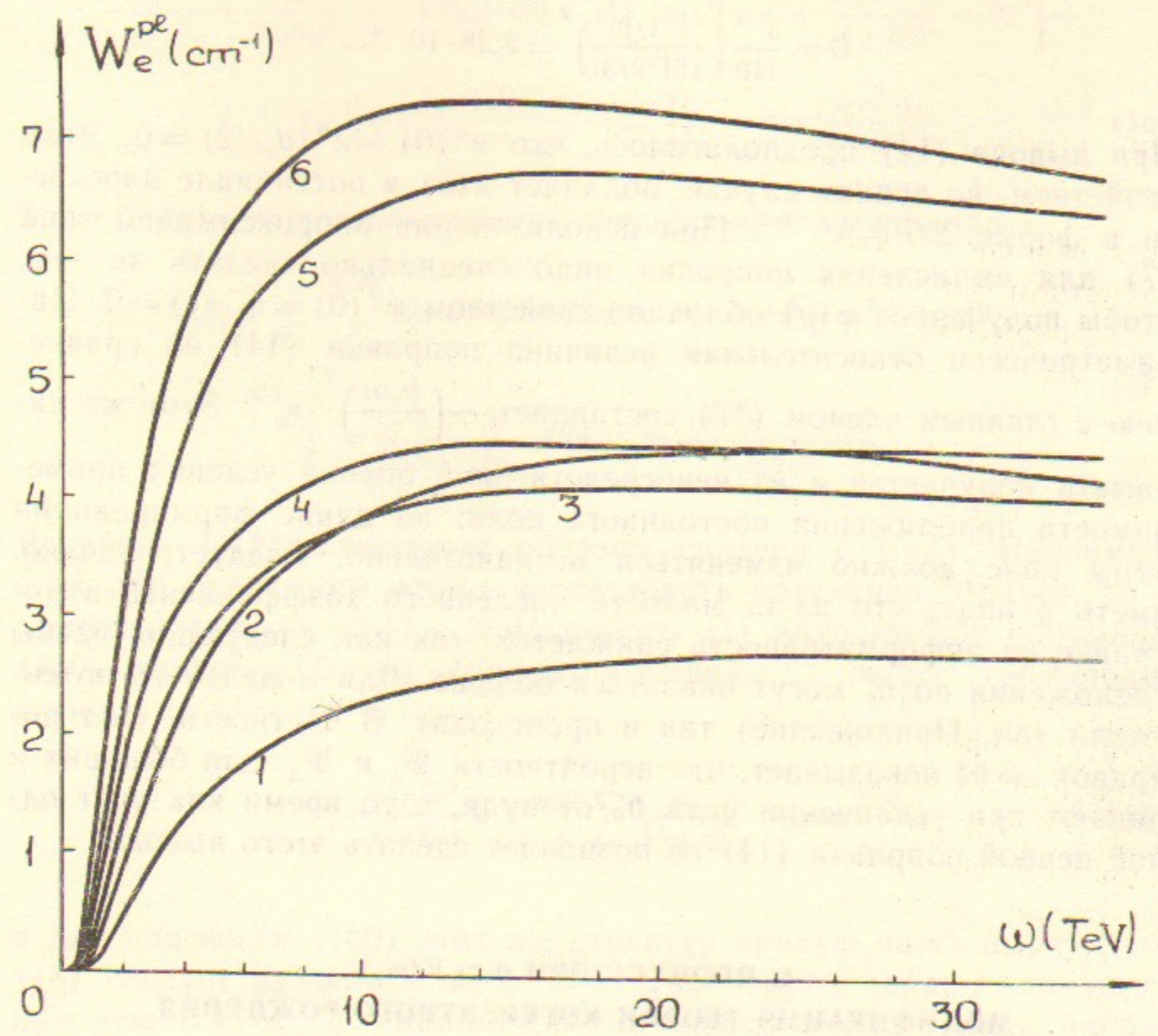


Рис. 2. То же, что на рис. 1, для кремния — кривые 1, 2, алмаза — кривые 3, 5 и германия — кривые 4, 6.

дает область $y \sim 1$ (см. (7)), а в поправочные члены — узкие области $\Delta y \sim \kappa^{-1}$ вблизи $y=0$ и $y=1$. Если $\kappa \gg 1$, то разложение экспоненты, использованное при выводе (6), оказывается несправедливым именно в этих узких областях, так что процедура вычисления поправок должна быть модифицирована. Она сформулирована в Приложении на примере модельного потенциала $U(x) = U_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{d_{pl}} \right)$. В общем случае она дает:

$$\Delta W_{el}^{pl} \simeq \frac{\alpha \omega}{m^2} \theta_0^2 \cdot D(15|e_x|^2 - |e_y|^2) \langle \kappa''(x) \kappa^{-5/3}(x) \rangle, \quad (14)$$

$$D = \frac{3^{1/3}}{110} \left(\frac{\Gamma(1/3)}{15\Gamma(2/3)} \right)^2 \simeq 2,28 \cdot 10^{-4}.$$

При выводе (14) предполагалось, что $\kappa''(0) = \kappa''(d_{pl}/2) = 0$. Этим свойством, во всяком случае, обладает $\kappa(x)$ в потенциале плоскости в форме $\Sigma G(q_x) e^{-iq_x x}$. При использовании аппроксимаций типа (7) для вычисления поправки надо специально следить за тем, чтобы полученное $\psi(y)$ обладало свойством $\psi''(0) = \psi''(1) = 0$. Параметрически относительная величина поправки (14) по сравнению с главным членом (12) составляет $\sim \left(\frac{\vartheta_0 m}{V} \right)^2 \cdot \kappa_p^{2/3}$. Этот же параметр получается и из непосредственной оценки условия применимости приближения постоянного поля: на длине формирования пары поле должно изменяться незначительно. Следует, однако, иметь в виду, что из-за малости численного коэффициента в поправке ее информативность снижается, так как следующие члены разложения по ϑ_0^2 могут оказаться больше. Для модельного потенциала (см. Приложение) так и происходит. В частности, учет поправок $\propto \vartheta_0^4$ показывает, что вероятности W_{\parallel} и W_{\perp} для больших κ падают при увеличении угла ϑ_0 от нуля, в то время как учет одной первой поправки (14) не позволяет сделать этого вывода.

4. ПРОЦЕСС ПРИ $\vartheta_0 > V/m$,

МОДИФИКАЦИЯ ТЕОРИИ КОГЕРЕНТНОГО РОЖДЕНИЯ

Для относительно больших углов влета $\vartheta_0 > V/m$, действуя так же, как при выводе формулы (4.7) в [1], получаем из (4) выражение для модифицированной когерентной вероятности рождения пары фотоном:

$$W_{pl}^{mcoh} = \frac{\alpha}{2\omega^2} \int_0^{\omega} d\epsilon \sum_q \frac{|G(\vec{q})|^2}{q_{\parallel}^2} \theta\left(q_{\parallel} - \frac{\omega m_*^2}{2\epsilon\epsilon'}\right) \cdot \left\{ (\vec{e}\vec{e}^*) \vec{q}_{\perp}^2 \left[\varphi(\epsilon) + \frac{2\omega m^2}{\epsilon\epsilon' q_{\parallel}^2} \left(q_{\parallel} - \frac{\omega m_*^2}{2\epsilon\epsilon'} \right) \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega m_*^2}{\epsilon\epsilon' q_{\parallel}} \right)^2 [(\vec{e}\vec{e}^*) q_{\perp}^2 - 2|(\vec{q}_{\perp}\vec{e})|^2] \right\}. \quad (15)$$

При плоскостной ориентации \sum_q в (15) становится одномерной:

$$\frac{dW_{pl}^{mcoh}}{d\epsilon} = \frac{\alpha}{2(\omega\vartheta_0)^2} \sum_{k=1}^{\infty} |U(k)|^2 \theta(1-z) \left\{ |e_x|^2 \left[\varphi(\epsilon) + \frac{4z(1-z)}{1+\rho/2} - 2z^2 \right] + |e_y|^2 \left[\varphi(\epsilon) + \frac{4z(1-z)}{1+\rho/2} + 2z^2 \right] \right\}; \quad z = \frac{\omega m_*^2 d_{pl}}{4\pi\epsilon\epsilon'\vartheta_0 k} \quad (16)$$

Здесь $U(k)$ — фурье-компонента плоскостного потенциала

$$U(k) = \frac{1}{d_{pl}} \int_{-d_{pl}/2}^{d_{pl}/2} dx U(x) \exp\{2\pi i k x / d_{pl}\}, \quad m_*^2 = m^2(1+\rho/2), \quad (17)$$

$$\frac{\rho}{2} = \frac{2}{(m\vartheta_0)^2} \sum_{k=1}^{\infty} |U(k)|^2 = \frac{\langle U^2 \rangle - \langle U \rangle^2}{(m\vartheta_0)^2}.$$

Величина $U(k)$ очевидным образом связана с $G(\vec{q})$. Например, если для отдельного атома использовать потенциал Мольера, то с помощью формул (5.1) — (5.4) работы [1] находим для плоскости (110) структур fcc(d) (алмаз, кремний ...) и bcc (вольфрам, железо ...)

$$U(k) = \frac{4\pi Z e^2}{l d_{pl}^2} e^{-u^2 q_x^2 / 2} \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i}{b_i^2 + q_x^2}, \quad q_x = \frac{2\pi k}{d_{pl}}, \quad (18)$$

а для плоскости (100) этих же структур правую часть выражения (18) следует разделить на 2; Z в (18) — заряд ядра; l — постоянная решетки; α_i, b_i — параметры потенциала Мольера (см., например, [2]). После интегрирования спектрального распределения (16) по ϵ , находим для полной вероятности:

$$W_{pl}^{mcoh} = \frac{\alpha}{\omega\vartheta_0^2} \sum_{k=1}^{\infty} |U(k)|^2 \theta(1-\mu) \left\{ \left[1 + \frac{\mu(2-\mu)}{2+\rho} \pm \frac{\mu^2}{4} \right] \ln \frac{1+\sqrt{1-\mu}}{1-\sqrt{1-\mu}} - \sqrt{1-\mu} \left[1 + \frac{2\mu}{2+\rho} \mp \frac{\mu}{2} \right] \right\},$$

где $\mu = \frac{m_*^2 d_{pl}}{\pi\omega k\vartheta_0}$; верхние знаки в (19) дают W_{\parallel} , нижние — W_{\perp} . Видно, что и в когерентном пределе $W_{\parallel} > W_{\perp}$.

Ориентационная зависимость вероятности процесса (без учета некогерентного вклада) представлена на рис. 3, 4 для плоскости (110) вольфрама и кремния. В этих условиях вычисленное по

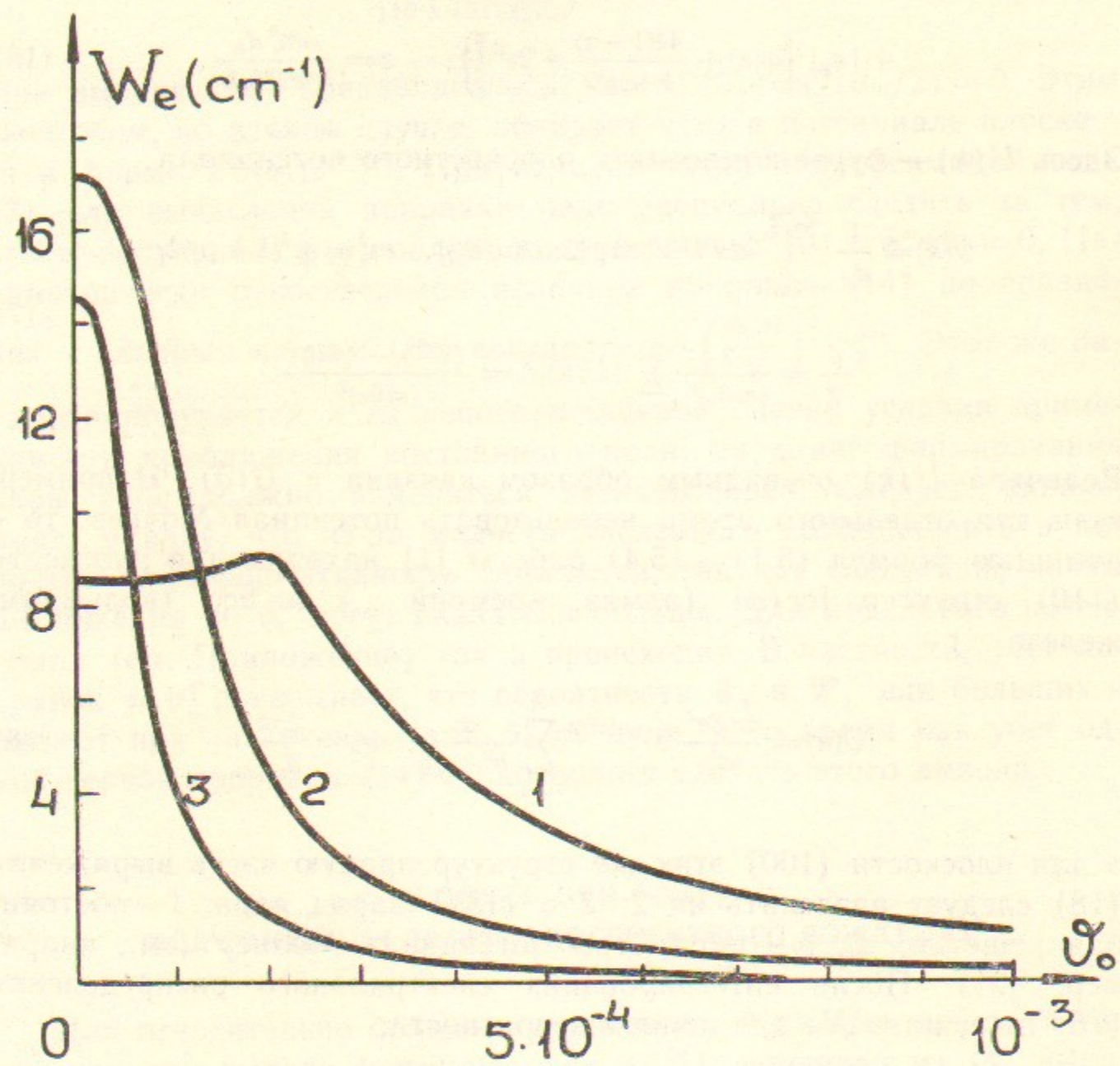


Рис. 3. Зависимость вероятности рождения пары неполяризованным фотоном от угла влета θ_0 относительно плоскости (110) вольфрама при энергии $\omega = 0,7$ ТэВ — кривая 1, $\omega = 4$ ТэВ — кривая 2 и $\omega = 10$ ТэВ — кривая 3.

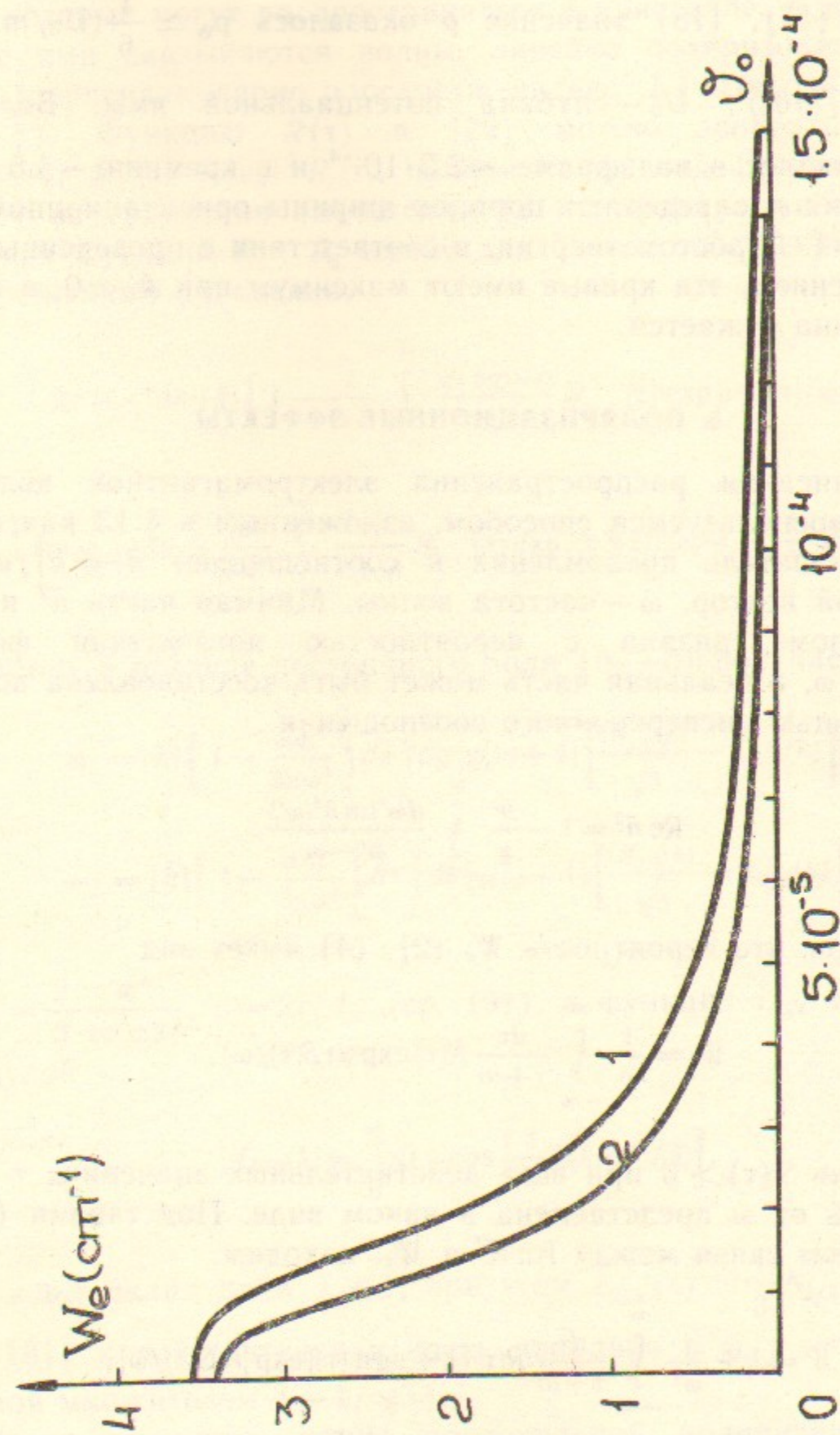


Рис. 4. То же, что на рис. 3, в кремнии при $\omega = 25$ ТэВ — кривая 1 и $\omega = 50$ ТэВ — кривая 2.

формулам (17), (18) значение ρ оказалось $\rho_w \simeq \frac{1}{6}(U_0/m\vartheta_0)^2$ и $\rho_{si} \simeq \frac{1}{5.2}(U_0/m\vartheta_0)^2$; U_0 — глубина потенциальной ямы. Величина U_0/m составляет в вольфраме $\sim 2.5 \cdot 10^{-4}$ и в кремнии $\sim 4.5 \cdot 10^{-5}$. Эти значения и определяют порядок ширины ориентационной кривой при $\kappa \sim 1$. С ростом энергии, в соответствии с проведенным выше обсуждением, эти кривые имеют максимум при $\vartheta_0 = 0$, а их угловая ширина сужается.

5. ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ

Для описания распространения электромагнитной волны в кристалле воспользуемся способом, изложенным в § 13 книги [2]. Введем показатель преломления \tilde{n} соотношением $\tilde{n} = |\vec{k}|/\omega$, где \vec{k} — волновой вектор, ω — частота волны. Мнимая часть \tilde{n}^2 известным образом связана с вероятностью поглощения фотона: $\text{Im } \tilde{n}^2 = W_e/\omega$, а реальная часть может быть восстановлена по мнимой с помощью дисперсионного соотношения

$$\text{Re } \tilde{n}^2 = 1 - \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega' \text{Im } \tilde{n}^2(\omega')}{\omega' - \omega}. \quad (20)$$

Учтем теперь, что вероятность W_e (2), (4) имеет вид

$$W_e = \frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau + i0} R(\tau) \exp(i\tau S(\tau)/\omega), \quad (21)$$

где функция $S(\tau) > 0$ при всех действительных значениях τ и вся зависимость от ω представлена в явном виде. Подставляя (21) в (20) с учетом связи между $\text{Im } \tilde{n}^2$ и W_e , находим:

$$\tilde{n}^2 = 1 + \frac{i}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau + i0} R(\tau) [1 + \text{sgn}(\tau)] \exp[i\tau S(\tau)/\omega], \quad (22)$$

здесь $\text{sgn}(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0 \\ -1, & \tau < 0 \end{cases}$. Как показано в [2] (см. стр. 190, 191), соотношение (22) представляет собой одну из форм записи дисперсионного уравнения, решения которого определяют типы

волн, которые могут распространяться в кристалле. В плоскостном случае ими оказываются волны, линейно поляризованные вдоль оси x (перпендикулярно плоскости, индекс \perp) и вдоль оси y (индекс \parallel). Функцию $R(\tau)$ в (22) можно записать в форме $R(\tau) = |e_x|^2 R_{\perp}(\tau) + |e_y|^2 R_{\parallel}(\tau)$, причем явный вид функций R_{\perp} и R_{\parallel} следует из сравнения выражения (21) с формулами (2), (4). В терминах функций R_{\perp} , R_{\parallel} имеем для частот собственных решений дисперсионного уравнения:

$$\begin{aligned} \text{Re } \omega_{\parallel, \perp} &= |\vec{k}| \left\{ 1 - \frac{i}{2\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau \text{sgn}(\tau)}{\tau + i0} R_{\parallel, \perp}(\tau) \exp[i\tau S(\tau)/\omega] \right\}, \\ \text{Im } \omega_{\parallel, \perp} &= -\frac{|\vec{k}|}{2\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau + i0} R_{\parallel, \perp}(\tau) \exp[i\tau S(\tau)/\omega] = -\frac{1}{2} W_{\parallel, \perp}. \end{aligned} \quad (23)$$

Например, в пределе постоянного поля ($\vartheta_0 \rightarrow 0$) получаем

$$\begin{aligned} \omega_{\parallel} &= |\vec{k}| \left\{ 1 - \frac{\alpha m^2}{3\pi\omega^3} \int_0^{\omega} d\varepsilon \int_0^1 dy [\varphi(\varepsilon) + 4] \left[\frac{iK_{2/3}(\lambda)}{\sqrt{3}} - L_{2/3}(\lambda) \right] \right\}, \\ \omega_{\perp} &= |\vec{k}| \left\{ 1 - \frac{\alpha m^2}{3\pi\omega^3} \int_0^{\omega} d\varepsilon \int_0^1 dy [\varphi(\varepsilon) + 1] \left[\frac{iK_{2/3}(\lambda)}{\sqrt{3}} - L_{2/3}(\lambda) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (24)$$

где $\lambda = \frac{2}{3} \frac{\omega^2}{\varepsilon \varepsilon' \kappa(x)}$, $y = 2x/d_{pl}$ (см. (9)), а функция $L_{2/3}$ определяется формулой

$$L_{2/3}(\lambda) = \int_0^{\infty} dt t \cos \left[\frac{3}{2} \lambda(t + t^3/3) \right]. \quad (25)$$

При $\kappa \gg 1$ вклад дают $\lambda \ll 1$, при этом $L_{2/3}(\lambda) \simeq \frac{1}{3} K_{2/3}(\lambda)$ (см. [2], стр. 181) и действительная часть поправки в $\omega_{\parallel, \perp}$ отличается от мнимой множителем $(-1/\sqrt{3})$.

Распространение волны произвольной поляризации найдем, представив ее в виде суммы собственных решений. Если на входе в кристалл было $\vec{E}_0 = \vec{e}_x E_{10} + \vec{e}_y E_{20}$, то на глубине l имеем $\vec{E}(l) = \vec{e}_x E_{10} e^{-i\omega_{\perp} l} + \vec{e}_y E_{20} e^{-i\omega_{\parallel} l}$. Составляя квадратичную комбинацию $E_i(l) E_j^*(l)$ и проводя усреднение по параметрам, от которых могут

зависеть величины E_{10} , E_{20} в случае частичной поляризации падающего пучка, получаем для матрицы плотности фотонного пучка на глубине l :

$$\rho(l) = \frac{1}{2} N(0) \times \begin{pmatrix} [1 + \eta_3(0)] e^{-W_{\perp} l} & [\eta_1(0) - i\eta_2(0)] e^{-\frac{1}{2} l(W_{\parallel} + W_{\perp}) - i l \operatorname{Re}(\omega_{\perp} - \omega_{\parallel})} \\ [\eta_1(0) + i\eta_2(0)] e^{-\frac{1}{2} l(W_{\parallel} + W_{\perp}) + i l \operatorname{Re}(\omega_{\perp} - \omega_{\parallel})} & [1 - \eta_3(0)] e^{-W_{\parallel} l} \end{pmatrix} \quad (26)$$

где $\eta_i(0)$ — значения параметров Стокса падающего пучка; $N(0)$ — число фотонов, падающих на кристалл. Сравнивая (26) со стандартным выражением для матрицы плотности, находим число фотонов и величину параметров Стокса на глубине l в кристалле:

$$N(l) = N(0) [\operatorname{ch} al + \eta_3(0) \operatorname{sh} la] \exp\left\{-\frac{1}{2} l(W_{\parallel} + W_{\perp})\right\},$$

$$\eta_1(l) = \frac{\eta_1(0) \operatorname{cos} bl - \eta_2(0) \operatorname{sin} bl}{\operatorname{ch} al + \eta_3(0) \operatorname{sh} al}; \quad (27)$$

$$\eta_2(l) = \frac{\eta_1(0) \operatorname{sin} bl + \eta_2(0) \operatorname{cos} bl}{\operatorname{ch} al + \eta_3(0) \operatorname{sh} al};$$

$$\eta_3(l) = \frac{\eta_3(0) + \operatorname{th} al}{1 + \eta_3(0) \operatorname{th} al};$$

$$a = \operatorname{Im}(\omega_{\perp} - \omega_{\parallel}) = \frac{1}{2}(W_{\parallel} - W_{\perp})$$

$$b = \operatorname{Re}(\omega_{\perp} - \omega_{\parallel})$$

Из полученного решения видно, что с ростом l число фотонов $N(l)$ и параметры $\eta_{1,2}(l)$ экспоненциально затухают, тогда как $\eta_3(l) \rightarrow 1$, т. е. на достаточно большой глубине независимо от начальной поляризации пучок оказывается линейно поляризованным перпендикулярно плоскости.

Обсудим возможность использования кристаллов для получения и измерения поляризации фотонного пучка высокой энергии. Пока параметр $\kappa_m \ll 1$ ($\omega \ll \omega_l$), вероятность рождения пар фотоном в поле плоскости экспоненциально мала и в (27) можно положить $a = 0$. Тогда

$$N(l) \simeq N(0) e^{-W_{\text{ВН}} l},$$

$$\eta_1(l) = \eta_1(0) \operatorname{cos} bl - \eta_2(0) \operatorname{sin} bl,$$

$$\eta_2(l) = \eta_2(0) \operatorname{cos} bl + \eta_1(0) \operatorname{sin} bl, \quad (28)$$

$$\eta_3(l) = \eta_3(0);$$

т. е. поляризация не возникает, но возможно преобразование линейной поляризации в круговую. В рамках когерентной теории рождения пар этот вопрос рассматривался в [5]. Однако при этом нельзя класть $a = 0$ и, как следствие, невозможно получить значение $|\eta_2| = 1$, да и число частиц $N(l)$ убывает с глубиной быстрее, чем в (28). Впрочем, для энергий в десятки ГэВ, которые рассматривались в [5], обсуждаемый нами механизм при $\theta_0 = 0$, как будет видно из дальнейшего, оказывается неэффективным.

Поясним появление фактора $\exp(-W_{\text{ВН}} l)$ в выражении для числа частиц в (28). Вообще говоря, вероятность рождения пары фотоном в кристалле является суммой когерентного члена (4) и некогерентной части $-W_{\text{nc}}$, которая может отличаться от своего значения в аморфной среде $-W_{\text{ВН}}$ (см., например, [6] в когерентной теории). В выражении для a , b в (2) величина W_{nc} сокращается, а в полусумме $(W_{\parallel} + W_{\perp})/2$ остается.

Пусть в (28) начальный пучок был полностью линейно поляризован под углом $\pi/4$ к оси x , т. е. $\eta_1(0) = 1$, $\eta_2(0) = \eta_3(0) = 0$. Тогда $\eta_2(l) = \operatorname{sin}(bl)$ и на глубине $l_0 = \pi/2b$ поляризация станет круговой. Оценим длину l_0 в рассматриваемом случае $\kappa_m \ll 1$. Учитывая, что при этом в выражении (24) $\lambda \gg 1$ и функция $L_{2/3}(\lambda) \approx -4/9\lambda^2$, получаем для b выражение

$$b(\kappa_m \ll 1) = \operatorname{Re}(\omega_{\perp} - \omega_{\parallel}) \Big|_{\kappa_m \ll 1} = \frac{\alpha m^2}{30\pi\omega} \langle \kappa^2(x) \rangle = \frac{\alpha\omega}{30\pi} \left\langle \left(\frac{E}{E_0}\right)^2 \right\rangle, \quad (29)$$

хорошо известно (с точностью до усреднений) в теории распространения фотона в постоянном поле (см. например, [2], стр. 192). Средние значения отношения поля в кристалле к критическому полю E_0 (см. 8)), вычисленные для потенциала (7) приведены в таблице. Следует иметь в виду (например, для оценки величины κ_m), что максимальные значения $(E/E_0)_{\text{max}}$ для приведенных в таблице кристаллов примерно в 3 раза больше, чем $\langle (E/E_0)^2 \rangle^{1/2}$. Мы приводим также значения произведения $l_0 \cdot W_{\text{ВН}}$, полученные с помощью (29), где $W_{\text{ВН}}$ определялось по формуле (19.17) книги [2]. Величина $l_0 W_{\text{ВН}} = \operatorname{const} \cdot 10^5 \cdot m/\omega$, где const меняется от 3 до 13. Верхняя граница применимости выражения (29) определяется условием $\omega \ll \omega_l$, при $\omega \lesssim \omega_l$ оно может использоваться в качестве грубой оценки. Нижняя граница частот, для которых реально можно использовать эффект преобразования линейной поляриза-

ции в круговую, определяется допустимыми потерями фотонов. Поскольку $l_0 \propto 1/\omega$, то с уменьшением ω растет необходимая толщина кристалла и величина $l_0 \cdot W_{\text{вн}}$. Например, в кремнии при $\omega = 500$ ГэВ, $l_0 \approx 12$ см и остается $\sim 40\%$ фотонов, что является вполне приемлемым. В работе [7] обсуждаемый эффект оценивался для кристалла вольфрама: при энергии 17 и 170 ГэВ получены значения $l_0 = 20$ и 2 см, соответственно. Из нашей таблицы видно, что для вольфрама из-за относительно малой величины ω , практически отсутствует область приемлемого использования эффекта (у нас получаются близкие, хотя и несколько меньшие значения l_0 (~ 16 и 1,6 см) для указанных значений ω), тем не менее даже при $\omega = 170$ ГэВ, лежащем на границе применимости, находим $N(l_0)/N(0) < 0,04$, а при $\omega = 17$ ГэВ от пучка вообще ничего не остается.

Рассмотрим теперь эффект преобразования поляризации при очень больших энергиях фотона, когда $\kappa \gg 1$. Для тех же начальных условий, что и выше: $\eta_1(0) = 1$, $\eta_2(0) = \eta_3(0) = 0$ имеем из (27):

$$\eta_1(l) = \frac{\cos bl}{\text{ch } al}, \quad \eta_2(l) = \frac{\sin bl}{\text{ch } al}, \quad \eta_3(l) = \text{th } al. \quad (30)$$

Учитывая, что при $\kappa \gg 1$, $b = -a/\sqrt{3}$, находим максимальное значение $\eta_2(l_0) = -0,35$ и $l_0 \approx 0,63/|b|$ (а не $\pi/2b$, как при $\kappa \ll 1$). Если пренебречь в выражении для $N(l)$ фактором $\exp(-W_{\text{вн}}l)$ и вспомнить, что при $\kappa \gg 1$ $W_{\parallel} = \frac{3}{2}W_{\perp}$, то для $N(l_0)$ получим $N(l_0)/N(0) \approx 7 \cdot 10^{-3}$. Итак, при $\kappa \gg 1$ не происходит полного перехода линейной поляризации в круговую, а ее максимальное значение достигается при больших потерях фотонов. Похожая ситуация сохраняется и при меньших κ , пока $a \sim |b|$. К тому же, поскольку величина b изменила знак (ср. (29)), существует область частот, для которых она близка к нулю.

Что касается поляризационной способности кристалла, то для $\theta_0 = 0$ она становится заметной только при $\omega > \omega_c$, когда «включается» механизм рождения пар полем плоскости. Для неполяризованного вначале пучка имеем из (27):

$$N(l) = \frac{1}{2} N(0) (e^{-W_{\perp}l} + e^{-W_{\parallel}l}), \quad (31)$$

$$\eta_1 = \eta_2 = 0; \quad \eta_3(l) = \text{th } al.$$

С помощью найденных выше выражений для вероятностей $W_{\parallel, \perp}$ в поле плоскости (9) и с учетом Бете—Гайтлеровского вклада мы изучили поведение величины l и $N(l)/N(0)$ для заданного значения степени поляризации $\eta_3(l)$ на выходе из кристалла для веществ, представленных в таблице. С ростом ω величина l сначала уменьшается, достигает минимума там, где вероятности $W_{\parallel, \perp}$ максимальны, и затем очень медленно нарастает. Минимальные значения величины l для $\eta_3(l) = 1/2$ приведены в таблице. Отношение $N(l)/N(0)$ быстро нарастает, достигает максимума в районе $1 \div 2$ ГэВ и затем медленно падает. Для $\eta_3(l) = 1/2$ отношение $(N(l)/N(0))_{\text{max}} \approx 0,1 \div 0,15$, а для $\eta_3(l) = 0,3$ оно составляет $0,27 \div 0,33$. При $\omega \sim \omega_c$ поляризация пучка сопровождается большими потерями. Например, для $\omega = 200$ ГэВ в вольфраме значение $\eta_3(l) = 1/2$ достигается на длине* $l = 1,8$ см, когда $N(l)/N(0) \approx \approx 4 \cdot 10^{-3}$. В асимптотической области, когда $\kappa \gg 1$, пренебрегая некогерентным вкладом, находим простую связь между числом фотонов и степенью поляризации пучка:

$$\frac{N(l)}{N(0)} \Big|_{\text{ас}} = \frac{[1 - \eta_3(l)]^2}{[1 + \eta_3(l)]^3} \quad (32)$$

С точки зрения ориентационной зависимости поляризация фотонного пучка кристаллом происходит наиболее эффективно в области углов, где максимальны вероятности $W_{\parallel, \perp}(\theta_0)$. Для $\omega \gg \omega_c$ это имеет место при $\theta_0 = 0$, т. е. при плоскостной ориентации.

Что касается возможности использования кристалла для анализа поляризации пучка фотонов высокой энергии по числу пар, рожденных в образце определенной толщины, то из выражения для $N(l)$ в (27) видно: 1) о круговой поляризации нельзя сделать никаких заключений; 2) проводя измерения при разных положениях кристалла, отличающихся поворотом вокруг направления влета пучка, можно найти лишь отношение параметров Стокса $\eta_1(0)$ и $\eta_3(0)$. Если же использовать теоретическое значение для величины la , то можно определить и их абсолютную величину.

* В работе [7] для этой ситуации получено значение $l = 10$ см.

Приложение

При плоскостной ориентации движение частиц происходит в одномерном периодическом потенциале $U(x)$ кристаллических плоскостей. В приближении прямолинейной траектории можно выразить отклонение скорости частицы от среднего значения непосредственно через $U(x)$

$$\Delta v(t) = [\langle U \rangle - U(x_0 + \vartheta_0 t)] / \varepsilon \vartheta_0. \quad (\text{П.1})$$

Подставляя это $\Delta v(t)$ в (2), находим аналог выражения (4) в плоском случае

$$W_e^{pl} = \frac{i\alpha m^2 \omega}{2\pi\omega^2} \int_0^\infty d\varepsilon \int_{-\infty}^\infty \frac{d\tau}{\tau + i0} \int_{X_{cr}}^{dx_0} \{ (|e_y|^2 + |e_x|^2) [1 - \varphi(\varepsilon) f_1(x_0, \tau)] + (|e_y|^2 - |e_x|^2) [f_2(x_0, \tau) - f_1(x_0, \tau)] \} \exp\{iA_4\}, \quad (\text{П.2})$$

где X_{cr} — размер кристалла в направлении оси x ,

$$f_1(x_0, \tau) = \left[\frac{U(x_0 + \tau\vartheta_0/2) - U(x_0 - \tau\vartheta_0/2)}{2m\vartheta_0} \right]^2$$

$$f_2(x_0, \tau) = \left[\frac{1}{m\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt t U'(x_0 + \vartheta_0 t) \right]^2; \quad U'(x) = \frac{dU(x)}{dx} \quad (\text{П.3})$$

$$A_4 = \frac{m^2 \omega \tau}{2\varepsilon \varepsilon'} \left\{ 1 + \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt \left(\frac{U(x_0 + \vartheta_0 t)}{m\vartheta_0} \right)^2 - \left(\frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt \frac{U(x_0 + \vartheta_0 t)}{m\vartheta_0} \right)^2 \right\}.$$

Ниже мы рассмотрим модель, в которой потенциал плоскости имеет вид:

$$U(x) = U_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{d_{pl}} \right). \quad (\text{П.4})$$

Рождение пары фотоном в нем происходит так же, как в поле плоской монохроматической электромагнитной волны линейной поляризации. Подставляя (П.4) в (П.2) и выполняя интегрирование по x_0 , находим:

$$W_e^{pl} = \frac{i\alpha m^2}{2\pi\omega} \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty \frac{dz}{z + i0} \left\{ J_0(y) - \frac{1}{2}\rho \left[\sin^2 z (J_0(y) - iJ_1(y)) (\varphi(\varepsilon) \pm 1) \mp (J_0(y) + iJ_1(y)) \left(\cos z - \frac{\sin z}{z} \right)^2 \right] \right\} \exp \left\{ \frac{i\sqrt{\rho} z}{\kappa_0 x(1-x)} \left[1 + \frac{1}{2}\rho \left(1 - \frac{\sin^2 z}{z^2} \right) \right] \right\} \quad (\text{П.5})$$

где $\rho = (U_0/m\vartheta_0)^2$, $\kappa_0 = \frac{2\pi U_0 \omega}{m^3 d_{pl}}$; J_0, J_1 — функции Бесселя. Введены

переменные $x = \varepsilon/\omega$, $z = \pi\vartheta_0\tau/d_{pl}$; $y = \frac{1}{2}\rho^{3/2} \frac{(\sin 2z)/2 - (\sin^2 z)/z}{\kappa_0 x(1-x)}$.

Верхние знаки относятся к W_{\parallel} , нижние — к W_{\perp} (см. (9)).

Рассмотрим случай малых углов падения $\vartheta_0 \ll U_0/m$, т. е. $\rho \gg 1$. Тогда в (П.5) вклад будут давать значения $z \ll 1$ и можно разложить входящие тригонометрические функции по степеням z , после чего, например, аргумент экспоненты и y в (П.5) принимают вид

$$\frac{iz\sqrt{\rho}}{\kappa_0 x(1-x)} \left[1 + \frac{1}{6} (z\sqrt{\rho})^2 \left(1 - \frac{2}{15} (z\sqrt{\rho})^2/\rho \right) \right] \quad (\text{П.6})$$

$$y \simeq -\frac{1}{6} \frac{(z\sqrt{\rho})^3}{\kappa_0 x(1-x)} \left[1 - \frac{4}{15} (z\sqrt{\rho})^2/\rho \right]$$

Разлагая экспоненту и функции Бесселя по степеням ρ^{-1} , получаем аналог формулы (6), т. е. предел постоянного поля с поправкой

$$W_e^{pl} \simeq \frac{i\alpha m^2}{2\pi\omega} \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{t + i0} \exp \left[\frac{it}{\kappa_0 x(1-x)} \left(1 + \frac{t^2}{6} \right) \right] \times$$

$$\times \left\{ \left[J_0(y_0) - \frac{t^2}{2} (J_0(y_0) - iJ_1(y_0)) (\varphi(\varepsilon) \pm 1) \right] \left(1 - \frac{it^5}{45\rho\kappa_0 x(1-x)} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{t^4}{6\rho} \left[(J_0(y_0) - iJ_1(y_0)) (\varphi(\varepsilon) \pm 1) \pm \frac{1}{3} (J_0(y_0) + iJ_1(y_0)) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{2t^5}{45\rho\kappa_0 x(1-x)} \frac{d}{dy_0} \left[J_0(y_0) - \frac{t^2}{2} (J_0(y_0) - iJ_1(y_0)) (\varphi(\varepsilon) \pm 1) \right] \right\}, \quad (\text{П.7})$$

где $y_0 = -\frac{1}{6} \frac{t^3}{\kappa_0 x(1-x)}$, $t = z\sqrt{\rho}$. Пусть теперь $\kappa_0 \gg 1$, тогда основной вклад в (П.7) дают большие $t \sim \kappa_0^{1/3}$ и можно опустить едини-

цу в экспоненте. Переходя к переменной $s = t^3/6\kappa_0 x(1-x)$ и проводя в ряде членов интегрирование по частям по s , имеем из (П.7) в пределе больших κ_0 :

$$W_e^{pl} \simeq -\frac{i\alpha m^2}{12\pi\omega} (6\kappa_0)^{2/3} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{2/3} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{iz} \left\{ [J_0(z) + iJ_1(z)] \cdot [\varphi(\varepsilon) \pm 1] z^{-1/3} + \frac{z^{1/3}}{45} [6\kappa_0 x(1-x)]^{2/3} \rho^{-1} \times \right. \\ \left. \times [(\varphi(\varepsilon) \pm 1)(iJ_1(z) - 7J_0(z)) \mp 5(J_0(z) - iJ_1(z))] \right\}. \quad (\text{П.8})$$

Выполняя интегрирование по z и по x (см. [4], стр. 761, 1056), находим

$$W_e^{pl} \simeq \frac{3\sqrt{3}}{7\pi} \frac{\alpha m^2}{\omega} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/6)} \frac{\Gamma^2(2/3)}{\Gamma(1/3)} (6\kappa_0)^{2/3} \times \\ \times \left\{ |e_x|^2 \left(2 - \frac{B}{\rho} \kappa_0^{2/3} \right) + |e_y|^2 \left(3 + \frac{B}{15\rho} \kappa_0^{2/3} \right) \right\}, \quad (\text{П.9}) \\ B = 6^{2/3} \cdot 7\Gamma^2(1/6) \Gamma^3(1/3) / \Gamma^2(5/6) / \Gamma^3(2/3) / (27 \cdot 2200) \simeq 0,07.$$

Мы вернулись к форме записи, в которой поляризация фотона входит в явном виде. Если учесть, что в модели $\kappa(x) = \kappa_0 \sin \frac{2\pi x}{d_{pl}}$, то результат (П.9) прямо следует из формул (12), (14).

Продемонстрируем на примере модели способ получения формулы (14). Будем использовать формулу (6), в которую надо подставить значение $b = -\frac{2\pi U_0}{md_{pl}} \sin \frac{2\pi x}{d_{pl}}$:

$$W_e^{pl} = \frac{\alpha m^2}{\pi\sqrt{3}\omega^2} \int_0^\omega d\varepsilon \int_0^1 dy \left\{ \int_\lambda^\infty dt K_{1/3}(t) + K_{2/3}(\lambda) (\varphi(\varepsilon) \pm 1) + \right. \\ \left. + \frac{1}{3\rho \sin^4 \pi y} \left(K_{2/3}(\lambda) - \frac{2}{3\lambda} K_{1/3}(\lambda) \right) \left[(\varphi(\varepsilon) \pm 1) \sin^2 \pi y \pm \frac{1}{3} \cos^2 \pi y \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{10\rho \sin^4 \pi y} \left(-\sin^2 \pi y + \frac{1}{3} \cos^2 \pi y \right) \left[\frac{4}{3} K_{2/3}(\lambda) - \lambda K_{1/3}(\lambda) + \right. \right. \\ \left. \left. + (\varphi(\varepsilon) \pm 1) \left(4K_{2/3}(\lambda) - \left(\lambda + \frac{16}{9\lambda} \right) K_{1/3}(\lambda) \right) \right] \right\}, \quad (\text{П.10})$$

где $\lambda = \frac{2}{3} \frac{m^2 \omega}{\varepsilon \varepsilon' |B|} = \frac{2}{3} \frac{\omega^2}{\varepsilon \varepsilon' \kappa_0 \sin \pi y}$; переменная $y = 2x/d_{pl}$. При $\kappa_0 \gg 1$ вклад в основной член в (П.10) порядка $\kappa_0^{2/3}$ дает область $y \sim 1$, а область, прилегающая к границам интегрирования, где поле слабое: $\sin \pi y \sim \kappa_0^{-1}$, $\lambda \sim 1$, дает пренебрежимо малый вклад $\sim \kappa_0^{-1}$. Естественно, что и поправку ($\propto \kappa_0^{-1}$) к основному члену надо вычислять в области тех прицельных параметров y , когда он велик. Для этого разобьем область интегрирования (в (П.10) достаточно интегрировать до $y = 1/2$: $\int_0^1 dy \dots = 2 \int_0^{1/2} dy \dots$) на две: от 0 до Δ и от Δ до $1/2$, считая, что $\kappa_0^{-1} \ll \Delta \ll 1$. Нас интересует вклад второй области, в которой при $\kappa_0 \gg 1$ имеем $\lambda \ll 1$ и можно воспользоваться соответствующим разложением K -функций. Оставляя старшие члены, получаем из (П.10)

$$W_e^{pl} \simeq \frac{\alpha m^2}{\pi\sqrt{3}\omega^2} \int_0^\omega d\varepsilon \int_\Delta^{1/2} dy \left\{ \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{3\varepsilon \varepsilon' \kappa_0 \sin \pi y}{\omega^2} \right)^{2/3} \times \right. \\ \times (\varphi(\varepsilon) \pm 1) - \frac{\Gamma(1/3)}{45\rho} \left(\frac{3\varepsilon \varepsilon' \kappa_0}{\omega^2} \right)^{4/3} (\sin \pi y)^{-8/3} \times \\ \left. \times \left[(\varphi(\varepsilon) \pm 1) \left(\sin^2 \pi y + \frac{4}{3} \cos^2 \pi y \right) \pm \frac{5}{3} \cos^2 \pi y \right] \right\}. \quad (\text{П.11})$$

В основном члене в (П.11) и в члене $\propto \sin^2 \pi y$ в квадратных скобках можно положить $\Delta = 0$. Остальные интегралы по y в поправке имеют вид:

$$\int_\Delta^{1/2} dy \cos^2 \pi y (\sin \pi y)^{-8/3} \simeq \frac{3}{5\pi} (\pi\Delta)^{-5/3} - \frac{3}{5} \int_0^{1/2} dy (\sin \pi y)^{-2/3}, \quad (\text{П.12})$$

где мы воспользовались интегрированием по частям. Расходящийся при $\Delta \rightarrow 0$ член в (П.12) сокращается с соответствующим вкладом из первой (от 0 до Δ) области интегрирования, однако, поскольку вклад этой области нас не интересует, то рецепт состоит просто в отбрасывании членов $\propto \Delta^{-5/3}$ в полученном вкладе второй области. Действуя так, находим

$$W_e^{pl} \simeq \frac{\alpha m^2}{\pi\sqrt{3}\omega^2} \int_0^\omega d\varepsilon \int_0^{1/2} dy \left\{ \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{3\varepsilon \varepsilon' \kappa_0 \sin \pi y}{\omega^2} \right)^{2/3} (\varphi(\varepsilon) \pm 1) - \right.$$

$$-\frac{\Gamma(1/3)}{225\rho} \left(\frac{3\epsilon\epsilon'\kappa_0}{\omega^2} \right)^{4/3} (\sin\pi y)^{-2/3} (\varphi(\epsilon) \mp 4) \}. \quad (\text{П.13})$$

Дальнейшее интегрирование элементарно, и мы снова воспроизводим формулу (П.9).

Малость численного коэффициента B (и тем более $B/15$ в W_{\parallel}) в (П.9) не позволяет конструктивно использовать полученное выражение для поправки, так как в этом случае возрастает роль следующих членов в разложении по ρ^{-1} . Мы провели вычисление членов $\propto \rho^{-2}$ в модели. С их учетом асимптотика вероятности W_e^{pl} при $\kappa_0 \gg 1$ принимает вид:

$$\begin{aligned} W_e^{pl} &\simeq \frac{3\sqrt{3}}{7\pi} \frac{\alpha m^2}{\omega} (6\kappa_0)^{2/3} \frac{\Gamma(5/6) \Gamma^2(2/3)}{\Gamma(1/6) \Gamma(1/3)} \times \\ &\times \left\{ |e_x|^2 \left[2 - B\kappa_0^{2/3} \rho^{-1} \left(1 + \frac{224}{3\rho} \right) \right] + |e_y|^2 \left[3 + \frac{B\kappa_0^{2/3}}{15\rho} (1 - 2360/\rho) \right] \right\} \simeq \\ &\simeq 0,108 \frac{\alpha m^2}{\omega} \kappa_0^{2/3} \left\{ 2|e_x|^2 \left[1 - 3,66 \cdot 10^{-2} \frac{\kappa_0^{2/3}}{\rho} \left(1 + \frac{74,7}{\rho} \right) \right] + \right. \\ &\left. + 3|e_y|^2 \left[1 + 1,63 \cdot 10^{-3} \frac{\kappa_0^{2/3}}{\rho} \left(1 - \frac{2360}{\rho} \right) \right] \right\}. \quad (14) \end{aligned}$$

Видно, что, хотя в членах $\propto \rho^{-2}$ произошло сокращение старшего по κ_0 члена, они очень скоро становятся доминирующими при увеличении угла θ_0 от 0. Заметим, что в W_{\parallel} членов $\propto \rho^{-2}$ меняет знак поправки, так что при больших κ_0 и W_{\perp} , и W_{\parallel} имеют в ориентационной зависимости максимум при $\theta_0 = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Байер В.Н., Катков В.М., Страховенко В.М. ЖЭТФ, 1986, т.90, вып.3, с.801.
2. Байер В.Н., Катков В.М., Фадин В.С. Излучение релятивистских электронов. М.: Атомиздат, 1973.
3. Baier V.N., Katkov V.M., Strakhovenko V.M. Phys. Lett., 1979, v.73A, p.414.
4. Градштейн И.С. и Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.
5. N. Cabibo and G. Da Prato, G. De Franceschi and U. Mosco. Phys. Rev. Lett., 1962, v.9, p.270, 435.
6. Тер-Микаелян М.А. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях. Ереван, Изд. АН АрмССР, 1969.
7. Барышевский В.Г., Тихомиров В.В. Ядерная физика, 1982, т.36, вып.3(9), с.697.

В.Н. Байер, В.М. Катков, В.М. Страховенко

**Рождение электрон-позитронных пар
фотонами высокой энергии при влете
вблизи кристаллических плоскостей**

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 11 февраля 1987 г.
Подписано в печать 21 мая 1987 г. МН 08204
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2,0 печ.л., 1,6 уч.-изд.л.
Тираж 250 экз. Бесплатно. Заказ № 59

Набрано в автоматизированной системе на базе фото-
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и
отпечатано на ротапинтере Института ядерной физики
СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.