

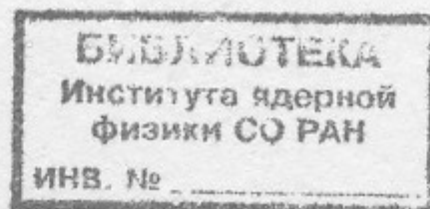
К 89



ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

С.В. Кузьмин, П.Б. Лысянский

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ  
УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ  
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В КАСПЕ



ПРЕПРИНТ 88-5



НОВОСИБИРСК

+

Численное исследование  
устойчивости движения  
заряженных частиц в каспе

*С.В. Кузьмин, П.Б. Лысянский*

Институт ядерной физики  
630090, Новосибирск 90, СССР

© Институт ядерной физики СО АН СССР

## ВВЕДЕНИЕ

В последнее время возрос интерес к созданию осесимметричных открытых плазменных ловушек, в которых для обеспечения МГД-устойчивости плазмы используется осесимметричный касп (антипробкотрон) [1]. Существенной особенностью такого элемента является наличие нуля магнитного поля внутри области удержания плазмы (см. рис. 1). В окрестности этой точки магнитный момент заряженной частицы не является адиабатическим инвариантом, и движение частиц хаотично. В этом случае удержание плазмы определяется не классическими процессами парных кулоновских столкновений, а вероятностью попадания стохастически движущейся частицы в зону потерь в фазовом пространстве. В обычных условиях при полностью стохастическом блуждании вылет частицы из ловушки происходит после нескольких пролетов, тогда как при адиабатическом движении с учетом только кулоновского рассеяния частица удерживается на много порядков дольше. Такое поведение частиц должно приводить к быстрому убыванию плотности и давления плазмы в направлении нуля магнитного поля. При крутом профиле спада давления поперек силовых линий возможно развитие желобковой МГД-неустойчивости [2], и «сваливание» всей плазмы в неадиабатическую область ловушки.

Влияние эффектов неадиабатичности движения частиц на удержание плазмы начинает проявляться уже вдали от области полной стохастичности и фактически определяет профиль спада давления

плазмы к точке нуля поля. Для получения возможных профилей давления необходимо изучение движения заряженной частицы и ее удержания в этой области. Для практического применения полученных ранее результатов теории нужно уточнить положение и структуру границы адиабатической области фазового пространства частицы. Кроме того, желательно учесть влияние на движение частицы особенностей магнитного поля реальной ловушки и электрического поля, всегда присутствующего в плазме. При исследовании этих вопросов получен ряд теоретически интересных и практически важных новых эффектов. Полезным явилось также изучение динамики частиц в неадиабатической области. Показана возможность создания простой модели конечных преобразований для исследования диффузии таких частиц в фазовом пространстве.

Дальнейший план изложения следующий. В разделе 1 исследуется граница адиабатичности для линейного приближения магнитного поля каспа и влияние нелинейных членов. В разделе 2 описано воздействие стационарного электрического поля на движение частицы. В разделе 3 приводятся результаты моделирования движения частиц в неадиабатической области. В последнем разделе 4 обсуждаются основные выводы работы. Описание численной модели вынесено в Приложение.

### 1. ГРАНИЦА АДИАБАТИЧЕСКОГО УДЕРЖАНИЯ

Рассмотрим движение заряженной частицы в магнитном поле идеального круглого каспа:

$$\begin{cases} B_x = kx \\ B_y = ky \\ B_z = -2kz \end{cases} \quad (1)$$

В этом поле можно ввести конус  $r = \sqrt{2} \cdot z$ , ортогональный силовым линиям, и конус, проходящий через точки минимумов магнитного поля на силовых линиях  $r_m = \sqrt{8} \cdot z_m$  (см. рис. 1). Легко показать, что радиус кривизны силовых линий на конусе минимумов равен  $h$ , а величина магнитного поля  $B_h = \sqrt{2} \cdot kh$ . Соответственно, ларморовский радиус

$$\rho_h = \frac{c}{e} \frac{\sqrt{\mathcal{E} \cdot m}}{k \cdot h}.$$

Здесь  $e$ ,  $m$ ,  $\mathcal{E}$  — заряд, масса и энергия частицы;  $c$  — скорость света.

В качестве одного из параметров частицы, в согласии с [3], выберем отношение радиуса кривизны к удвоенному ларморовскому радиусу на конусе  $h$ :

$$N = \frac{h}{2\rho_h}. \quad (2)$$

Отметим, что в случае заполнения каспа плазмой параметр  $N$  характеризует физическую толщину плазмы — количество ларморовских радиусов, укладываемых до точки  $h$ :

$$\int_0^h \frac{dt}{\rho_t} = \frac{h}{2\rho_h} \equiv N.$$

При достаточно малом ларморовском радиусе магнитный момент частицы является адиабатическим инвариантом и время жизни таких частиц может быть очень велико (разумеется, при отсутствии столкновений с другими частицами). Выберем энергию частицы так, чтобы ларморовский радиус частицы в любой точке ее траектории был меньше радиуса кривизны силовых линий. Тогда частица движется вдоль силовой линии и одновременно вращается вокруг нее в ларморовском движении. Если вектор скорости не коллинеарен вектору поля, то частица совершает продольные колебания, отражаясь от областей сильного поля. Кроме того, происходит сравнительно медленный градиентный дрейф по азимуту, который в аксиально-симметричной системе не влияет на устойчивость движения.

Теория движения частицы в открытой магнитной ловушке в каспе была развита Б.В. Чириковым [3]. В ней заряженная частица рассматривается как динамическая система с двумя основными частотами — продольных колебаний между точками отражения и ларморовского вращения вокруг траектории ведущего центра. Соотношения этих частот дают целую сеть резонансов в фазовом

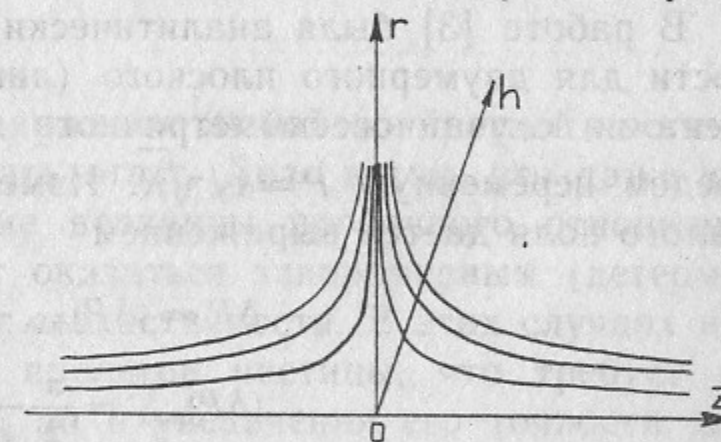


Рис. 1. Силовые линии магнитного поля каспа.  $0h$  — конус минимумов на силовых линиях.

пространстве частицы, которые при определенных условиях перекрываются. Это приводит к диффузионному изменению магнитного момента, а следовательно, и к блужданию точек отражения частицы. Для реального каспа с конечным магнитным полем в пробках в конце концов частица неизбежно попадает в конус потерь и покидает ловушку. Подчеркнем, что описанный механизм начинает работать уже при малых ларморовских радиусах задолго до того, когда частица перестает быть замагниченной и ее ведущий центр уже не удерживается на поверхности дрейфа  $r(z)$ .

Существенно, что устойчивость движения частицы зависит не только от параметра  $N$  (как это предполагалось, например, в работе [4]), но и от глубины проникновения частицы в магнитные пробки. Это связано с нелинейной зависимостью частоты продольных колебаний и набега фазы ларморовского вращения за один пролет между пробками  $G$  от величины пробочного отношения в точке отражения  $R$  или, для заданной энергии  $\mathcal{E}$  частицы, от ее магнитного момента  $\mu$ . Таким образом, в пространстве параметров частицы  $(N, R)$  существует граница  $R(N)$ , отделяющая область устойчивого движения от стохастической области (см. рис. 2).

В работе [3] была аналитически получена граница адиабатичности для двумерного плоского (линейного) каспа и затем обобщена на случай осесимметричного каспа. Следуя данной работе, введем переменную  $P = 1/\sqrt{R}$ . Изменение  $P$  при пролете области малого поля дается выражением

$$\Delta P = (\Delta P)_{\max} \cdot \sin \varphi_0,$$

$$(\Delta P)_{\max} = \frac{\pi}{2} \frac{e^{-q}}{\sqrt{1-P^2}}, \quad (3)$$

$$q = Q \cdot \frac{N}{\sqrt{1-P^2}}.$$

Здесь  $\varphi_0$  — ларморовская фаза частицы при пролете минимума магнитного поля;  $Q$  — численный коэффициент порядка 1. Для плоского линейного каспа  $Q=1$ , для осесимметричного оценка дает  $Q=2/3$ .

В этих обозначениях условие перекрытия резонансов

$$K = (\Delta P)_{\max} \cdot \left| \frac{dG(P)}{dP} \right| \geq 1 \quad (4)$$

дает границу адиабатичности:

$$\frac{\sqrt{1-P^2}}{P^4} = \frac{e^{-q}}{66q}. \quad (5)$$

Уточнение величины  $Q$ , а также вопросы влияния особенностей реального магнитного поля и электрического поля плазмы, поведения и времени удержания частиц в неадиабатической области параметров вызывают определенные трудности при аналитическом рассмотрении. В то же время вопросы эти не только интересны с точки зрения теории, но и важны практически. Численное исследование динамики движения частицы дает необходимую информацию.

При моделировании оказалось недостаточным простое интегрирование уравнений движения заряженной частицы в электромагнитном поле:

$$\begin{cases} m \frac{d\vec{v}_0}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v}_0 \times \vec{B}] \\ \frac{d\vec{r}_0}{dt} = \vec{v}_0 \end{cases} \quad (6)$$

На вопрос о стохастичности движения любой конкретной частицы часто при этом невозможно дать ответ. Дело в том, что даже кажущееся случайным изменение величины пробочного отношения после каждого пролета может оказаться закономерным (детерминированным) и не гарантирует стохастичности. В этих случаях нужен анализ большого числа пролетов частицы, что требует не только больше времени счета, но и увеличения его точности для исключения влияния ошибок округления и шага интегрирования по времени.

Как показали пробные расчеты, более приемлемым является метод, основанный на том, что причиной стохастичности динамической системы является локальная неустойчивость, при которой близкие траектории экспоненциально расходятся со временем. В этом методе одновременно с уравнениями (6), дающими траекторию  $\vec{r}_0(t)$  «базовой» частицы, интегрируются линеаризованные по малым отклонениям  $\vec{\xi} = \vec{r} - \vec{r}_0$ ,  $\vec{\eta} = \vec{v} - \vec{v}_0$  от этой траектории уравнения

$$\begin{cases} m \frac{d\vec{\eta}}{dt} = e(\vec{\xi}, \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r}_0) + \frac{e}{c} [\vec{\eta} \times \vec{B}(\vec{r}_0)] + \frac{e}{c} [\vec{v}_0 \times (\vec{\xi}, \vec{\nabla}) \vec{B}(\vec{r}_0)] \\ \frac{d\vec{\xi}}{dt} = \vec{\eta}, \end{cases} \quad (7)$$

описывающие отход траектории  $\vec{\xi}(t)$  «частицы», близкой к базовой. Расчеты показали, что отклонения  $|\vec{\xi}|$  после нескольких десятков продольных колебаний для частиц с устойчивым и неустойчивым типами движения различаются на несколько порядков и такие частицы легко отличимы друг от друга. Для интегрирования уравнений движения применялись симметричные по времени разностные схемы, описание которых дано в Приложении.

Старт частицы производится из точки отражения в заданном пробочном отношении  $R$  и ларморовской фазе  $\varphi_{st}$  так, чтобы ее ведущий центр лежал на силовой линии, проходящей через

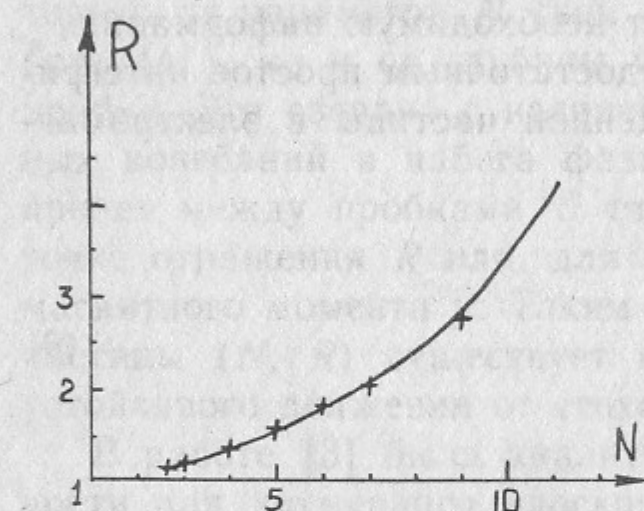


Рис. 2. Граница адиабатичности. Сплошная линия — теоретическая кривая с  $Q=0.773$ . Крестики — расчет.

точку  $z_m=1$  (см. рис. 1). Соотношение величин энергии частицы и магнитного поля фиксируется заданием параметра  $N$  (2). Таким образом, стартовые параметры частицы соответствуют точке на плоскости  $(N, R)$  (см. рис. 2). Этой точке, однако, соответствует целый ансамбль частиц, отличающихся друг от друга ларморовской фазой старта  $\varphi_{st}$ .

При определении границы адиабатичности оказалось, что в фазовом пространстве точек старта области устойчивого и неустойчивого движения перемешаны, особенно вблизи самой границы. Поэтому вывод о том, что данная точка  $(N, R)$  принадлежит к неустойчивой области, делался в случае, если больше половины ансамбля частиц, стартовавших в малой окрестности пространства этой точки, являлись неустойчивыми. Полученные таким образом точки границы адиабатичности проставлены на рис. 2. Теоретическая кривая (5) при коэффициенте  $Q=0.773$  (сплошная линия) хорошо согласуется с результатами моделирования.

Для изучения влияния особенностей реального магнитного поля каспового узла установки АМБАЛ-М [1] было использовано более точное, чем (1) приближение аксиально-симметричного поля:

$$\begin{aligned} B_x &= k \cdot x \cdot \left( p' - \frac{r^2}{8} p''' \right) \\ B_y &= k \cdot y \cdot \left( p' - \frac{r^2}{8} p''' \right) \\ B_z &= -2 \cdot k \cdot \left( p - \frac{r^2}{4} p'' \right) \\ p &= c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 \end{aligned} \quad (8)$$

Это поле удовлетворяет уравнениям Максвелла и при  $c_0=-1.516$ ,  $c_1=3.971$ ,  $c_2=-0.782$ ,  $c_3=0.19$ . Такая аппроксимация обеспечивает достаточную точность в рабочей области ловушки (см. рис. 3).

Моделирование показало, что в области удержания плазмы нелинейные члены практически не влияют на положение границы адиабатичности для высокоэнергетических ионов. Причиной этого, по-видимому, является слабая зависимость величины изменения магнитного момента (2) при пролете частицей минимума поля от нелинейных членов, которые в рабочей области каспа ловушки АМБАЛ-М малы. Действительно, в этой области ( $0 < r < 2.8$ ,  $0 < z < 2$ ) отличие модуля магнитного поля, обусловленное нелинейными членами, не превышает 20%. Изменение зависимости набега ларморовской фазы от переменной  $P$  ( $G(P)$ ) также невелико, поскольку аппроксимация (8) не отражает пробочного характера поля реальной ловушки (нет максимумов поля вдоль силовой линии).

Вопросы влияния небольших искажений аксиальной симметрии магнитного поля в данной работе не рассматривались, однако можно предположить, что если эти искажения крупномасштабны (сравнимы с размерами каспа) и не изменяют существенно кри-

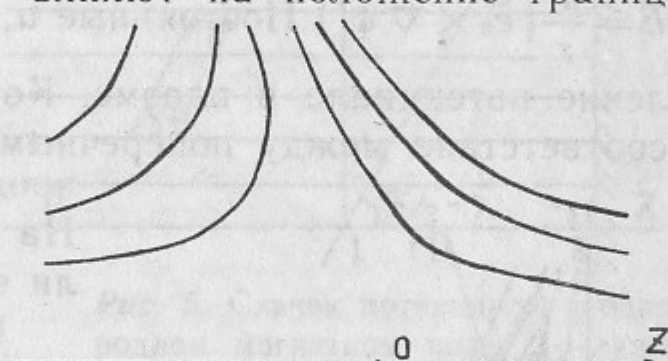


Рис. 3. Силовые линии магнитного поля каспового узла установки АМБАЛ-М, совпадающие в масштабе рисунка с аппроксимацией (8).

визны силовых линий, то их вкладом в нарушение адиабатичности движения практически можно пренебречь. Возникающие при этом (дополнительно к ларморовской и продольной) частоты, кратные дрейфовой частоте, по-видимому, не должны вносить качественных изменений.

## 2. ЭФФЕКТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Анализ влияния электрического поля на характер движения частиц проводился для магнитного поля (1) и модельного электрического потенциала

$$\Phi = \Phi_0 \left\{ a \frac{\left(\frac{\psi}{\psi_0} - 1\right)^2}{\gamma^2 + \left(\frac{\psi}{\psi_0} - 1\right)^2} + b \frac{\left(\frac{\chi}{\chi_0} - 1\right)^2}{\delta^2 + \left(\frac{\chi}{\chi_0} - 1\right)^2} \right\}, \quad (9)$$

где  $\psi$  и  $\chi$  — потоковые координаты магнитного поля ( $\vec{B} = \vec{\nabla}\chi$ ,  $\vec{B} = \frac{1}{r}[\vec{e}_\theta \times \vec{\nabla}\psi]$ ). Постоянные  $a$ ,  $b$ ,  $\gamma$  и  $\delta$  характеризуют распределение потенциала в плазме. Коэффициенты  $a$  и  $b$  устанавливают соответствие между поперечным (относительно силовых линий) и продольным перепадом потенциала. На рис. 4 изображены эквипотенциалы в одном из вариантов.

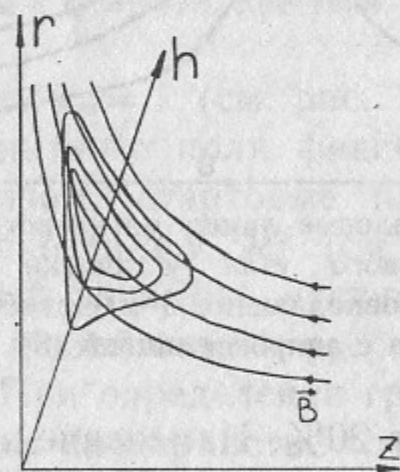


Рис. 4. Эквипотенциалы электрического поля (9).

При  $a=0$  электрическое поле параллельно магнитному и изменяет только форму продольного распределения удерживающего эффективного потенциала

$$U_{||} = \mu B + e\Phi \quad (10)$$

Если  $e\Phi < 0$  (выталкивающее электрическое поле), то возможно удержание юшмановских частиц (с соответствующими значениями  $\epsilon$  и  $\mu$ ) между потенциалом (9) с максимумом в точке  $(\psi_0, \chi_0)$  и магнитными пробками. Часть из этих частиц не пересекает минимума магнитного поля и, следовательно, находится в магнитном поле относительно слабой кривизны. Движение таких частиц тривиально и его исследование выходит за

рамки данной работы. Для частиц, которые пересекают область минимума магнитного поля, влияние электрического поля сводится лишь к количественному изменению функций (3) и соответствующему изменению границы адиабатичности. Поправки эти пренебрежимо малы вплоть до перепадов потенциала (9) порядка энергии частицы на размере ее ларморовского радиуса.

Моделирование движения частиц при наложении электрического поля, ортогонального магнитному ( $b=0$ ), показало, что и его влияние становится существенным при изменении потенциала порядка энергии частицы. В поперечном поле азимутальный дрейф частицы в скрещенных полях образует дополнительный центробежный потенциал:

$$U_{\perp}(r) = - \int \frac{mv_E^2}{r} dr = - \frac{mc^2}{2} \cdot r^2 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \right)^2,$$

который при разумных значениях  $a$ ,  $\gamma$  и  $r$  намного меньше  $U_{||}$  (10). Важно, что как в случае чисто продольного, так и в случае чисто поперечного электрического поля вплоть до очень больших величин, качественно меняющих характер движения частицы, изменение магнитного момента за один период продольных колебаний практически не зависит от электрического поля и обусловлено только неадиабатическими эффектами (3) при движении частицы в области малого магнитного поля.

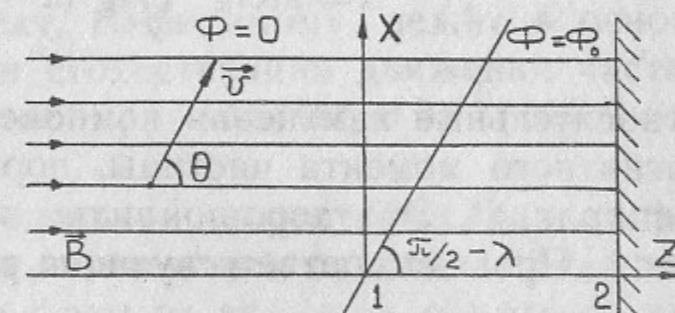


Рис. 5. Скачок потенциала в однородном магнитном поле: 1 — линия скачка потенциала; 2 — отражающая стенка.

Проведенное моделирование показало, что наложение электрического поля общего вида ( $a, b \neq 0$ ) приводит к качественному изменению характера движения частицы уже при небольших перепадах потенциала. Для объяснения этого рассмотрим частицу с параметрами  $\mathcal{E}$ ,  $\mu$ , движущуюся в однородном магнитном поле ( $B_x, B_y = 0; B_z = B_0$ ) и пересекающую скачок электростатического потенциала ( $\Phi = 0$  при  $z < x \operatorname{tg} \lambda$ ;  $\Phi = \Phi_0$  при  $z > x \operatorname{tg} \lambda$  (см. Рис. 5)). Будем считать для простоты, что пространственная ширина скачка мала по сравнению с ларморовским радиусом частицы, а угол  $\lambda$  наклона фронта больше питч-угла  $\theta$  частицы. Пусть для определенности  $\Phi_0 < 0$ . Тогда частица, движущаяся слева направо, пересекает фронт однократно в

некоторой фазе  $\varphi_1$  ее ларморовского вращения. Вводя единичную скорость частицы  $\vec{v} = \vec{v}/|\vec{v}|$ , запишем в декартовой системе координат скорость в непосредственной близости слева от фронта:

$$v_x = \sin \theta \cos \varphi_1; \quad v_y = \sin \theta \sin \varphi_1; \quad v_z = \cos \theta.$$

Используя закон сохранения энергии, после несложных преобразований получим скорость частицы справа от фронта:

$$\begin{aligned} v_x^* &= \sqrt{A^2 + D^2} \cos(\lambda - \Delta), \\ v_y^* &= v_y \end{aligned} \quad (11)$$

$$v_z^* = \sqrt{A^2 + D^2} \sin(\lambda - \Delta),$$

где

$$A = 1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi_1, \quad D^2 = \frac{2e\Phi_0}{mv^2},$$

$$\alpha = \arctg(\cos \varphi_1 \cdot \tg \theta),$$

$$\Delta = \arctg \sqrt{\tg^2(\lambda - \alpha) + \frac{D^2}{A^2 \cos^2(\lambda - \alpha)}}$$

Относительные изменения компонент скорости, а следовательно, и магнитного момента частицы, порядка относительного скачка потенциала  $D$ . Это хорошо видно при небольшой величине скачка  $D \ll 1$ . Проведя соответствующие разложения в (11), получим:

$$\begin{aligned} v_x^* &\approx v_x - \frac{D^2 \cos \lambda}{2 \sin(\lambda - \alpha)}, \\ v_y^* &= v_y, \\ v_z^* &\approx v_z + \frac{D^2 \sin \lambda}{2 \sin(\lambda - \alpha)}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{\Delta \mu}{\mu} = (v_x / (v_x^2 + v_y^2)) \frac{D^2 \cos \lambda}{\sin(\lambda - \alpha)}.$$

Существенно, что величина  $\Delta \mu / \mu$  зависит от ларморовской фазы пересечения фронта. Пусть далее частица отражается от идеальной стенки ( $v_z \rightarrow -v_z$ ) и пересекает фронт в обратном направлении, получая также толчок магнитного момента. Ясно, что в общем случае произвольных фаз влета и вылета суммарное изменение момента остается того же порядка, что и при однократном прохождении скачка потенциала.

При конечной ширине фронта толчок уменьшается и величина  $D$  приобретает смысл масштаба относительного изменения потенциала на длине ларморовского радиуса частицы. Важно, что при периодическом движении даже небольшое несохранение адиабатического инварианта может приводить к стохастизации фазовой траектории частицы.

Применительно к движению частиц в каспе с электрическим полем более общего вида подобные эффекты также должны иметь место. Это приводит к дополнительному изменению магнитного момента на одном пролете вдоль силовой линии между точками отражения, которое не содержит экспоненциально малого множителя (3). Здесь следует добавить, что в области кольцевой пробки круглого каспа магнитный поток, перехватываемый ларморовским радиусом, растет в силу сжатия силовых линий:

$$\delta \psi \propto r r B \propto r, \quad \text{при } r/r_m \gg 1,$$

что может приводить к эффективному усилению действия электрического поля (росту перепада потенциала на ларморовском радиусе частицы). Именно этот эффект, по-видимому, лежит в основе наблюдаемой при моделировании стохастизации движения частиц в каспе с потенциалом (9) уже при  $e\Phi_0/\mathcal{E} \gtrsim 0.01$  ( $N=3 \div 5$ ,  $R=1.1 \div 1.4$ ).

Заметим, что зависимость продольной скорости частицы от фазы ларморовского вращения при пересечении фронта  $\Delta v_z(\varphi_1)$  вызывает также модуляцию набега фазы за время до обратного вылета. Б.В. Чириков обратил внимание на возможность в результате этого стохастизации набега фазы  $G$  без влияния описанного в разделе 1 механизма связи набега фазы и магнитного момента частицы. Суть эффекта состоит в следующем. Запишем последовательность фаз при периодическом пересечении, например, фронта потенциала в виде конечного преобразования

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + c + \mathcal{K} \cdot F(\varphi_n),$$

где  $\varphi_n, \varphi_{n+1}$  — последовательные фазы;  $\mathcal{K}F$  — набег фазы за период продольных колебаний, зависящий от фазы подлета к фронту; значения фаз берутся по модулю  $2\pi$ . При определенной величине константы  $\mathcal{K}$  последовательность фаз  $\varphi_n$  является случайной. Подобная последовательность исследована в работе [5], где показано, что для функции  $F = \sin \varphi_n$  критическое  $\mathcal{K} = 1$ . Важно, что при небольшой величине скачка  $D \ll 1$  в почти ортогональных электрическом и магнитном полях ( $\lambda \rightarrow \pi/2$ ), когда изменения магнитного

момента (12) еще не ведут к стохастизации движения, величина  $\mathcal{H}$  может быть велика настолько, что будет служить причиной стохастизации прироста фазы при периодическом продольном движении частицы. В случае каспа это приведет к некоррелированности приращений магнитного момента при пролетах частицей области малого магнитного поля, т. е. не только к стохастизации фазы пролета, но и к диффузии по магнитному моменту. Существенную роль в этом механизме играет структура магнитного и электрического полей в областях отражения частицы.

Отметим еще один интересный эффект — возможность бесстолкновительного захвата частицы в области потенциальной ямы. Оказывается, что при определенных условиях обратный вылет частицы, прошедшей фронт внутрь потенциальной ямы, возможен только для некоторой области ларморовских фаз. Для других фаз частица будет отражаться от барьера внутрь области ямы. В качестве примера рассмотрим глубокую потенциальную яму:  $D \gg 1$ . При этом, независимо от фазы при прохождении фронта слева направо, частица ускоряется до скорости  $|v^*| = D$ , направленной ортогонально фронту. Питч-угол ее  $\theta_0 = \pi/2 - \lambda$ . Пусть  $\varphi_2$  — фаза подхода к потенциальному барьеру при обратном движении. Находя проекцию скорости частицы на нормаль к фронту

$$v_n^* \approx \sqrt{[1 - \cos^2 \lambda (1 + \cos \varphi_2)] (1 + D^2)}$$

запишем условие пересечения барьера  $(v_n^*)^2 \geq D^2$ :

$$1 - \cos^2 \lambda (1 + \cos \varphi_2) \geq \frac{D^2}{D^2 + 1} \approx 1.$$

Последнее неравенство выполняется при  $\varphi_2 = \pi$ . В остальных случаях частица отражается от потенциального барьера. В данном примере механизм захвата легко понять качественно, а именно, питч-угол частицы после попадания в яму таков, что при обратном движении проекция ее скорости на нормаль к фронту всегда меньше полной скорости, за исключением фазы  $\varphi_2 = \pi$ , где и возможен обратный вылет.

В общем случае область фаз  $\Delta\varphi$ , в которой частицы отражаются внутрь, зависит от углов  $\lambda$  и  $\theta$ , величины барьера  $D$  и фазы влета внутрь ямы  $\varphi_1$ . Бесстолкновительный захват частиц может играть роль в заполнении потенциальных ям в распределении амбиполярного потенциала в плазме. В частности, он может ускорять заполнение ионами термобарьеров амбиполярной ловушки [6].

### 3. УДЕРЖАНИЕ ЧАСТИЦ В НЕАДИАБАТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Интересным и практически полезным оказалось моделирование динамики частиц в области стохастического движения. Вблизи границы устойчивости обнаружена, как и предсказывалось теорией [3], сложная структура фазового пространства частиц. Найдены как области стохастического движения (рис. 6,а), так и островки

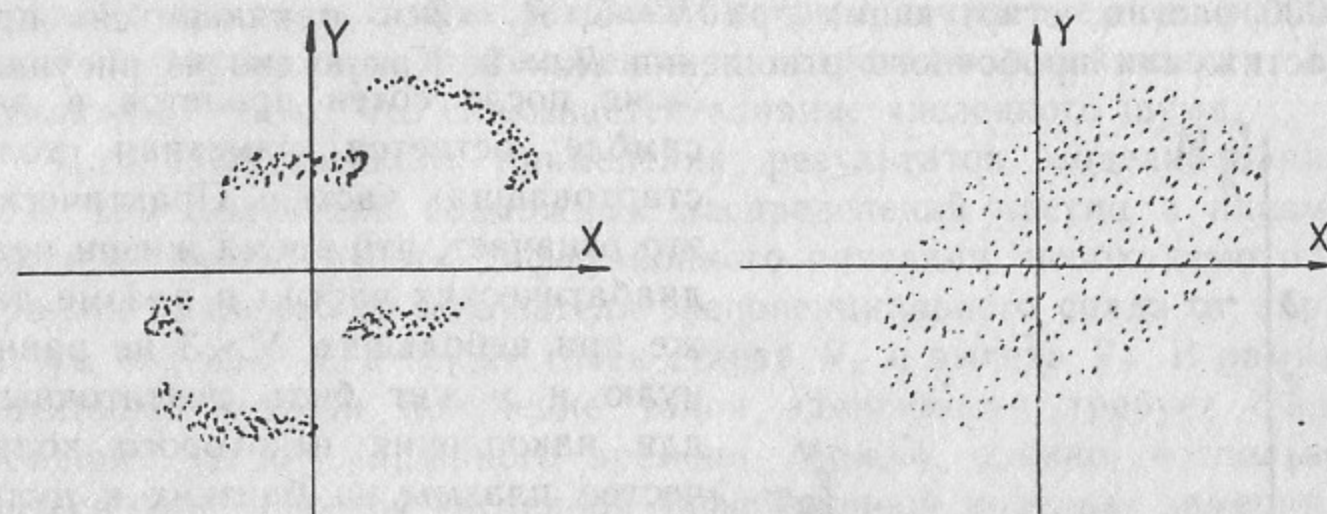


Рис. 6. Следы пересечения частицей плоскости  $XY$ ; а — устойчивый резонанс, б — стохастическое движение.

устойчивых резонансов (рис. 6,б) с ограниченным размахом продольных колебаний. На этих рисунках отмечены следы пересечения частицей плоскости  $xy$ , касательной к конусу минимумов магнитного поля на силовых линиях (см. рис. 1). Силовая линия, на которой лежит ларморовский центр частицы, проходит через центр координат  $0$ . Удаление точек от центра пропорционально ларморовскому радиусу в точке  $0$ , взятому по поперечной скорости частицы. При стохастическом движении магнитный момент, а следовательно и поперечная скорость, испытывают хаотические колебания, что приводит к заполнению точками на рис. 6,а всей площади круга максимального ларморовского радиуса, взятого по полной скорости частицы. Близкие к центру  $0$  точки соответствуют малым питч-углам и большим пробочным отношениям в местах отражения. В устойчивом движении даже достаточно большие колебания магнитного момента ограничены и скоррелированы с фазами пролета плоскости  $xy$ , что хорошо видно на рис. 6,б.

Для анализа удержания неадиабатических частиц (до выхода их через условную магнитную пробку) применялась следующая численная модель. Ансамбль частиц стартует из малой окрестнос-



ти фазового пространства вблизи точки с пробочным отношением  $R_{st}$  и заданным  $N$  в стохастической области. Затем последовательно рассматривается движение очередной частицы в магнитном поле (1), причем регистрируется ее сдвиг по пробочному отношению после каждого продольного пролета. Если частица пересекает заданное пробочное отношение  $R_m$ , то она считается вылетевшей в пробку.

На рис. 7 приведена кривая убывания во времени ансамбля из 1000 частиц, стартующих при  $N=5$ ,  $R_{st}=3$  и «теряющихся» при достижении пробочного отношения  $R_m=5$ . Как видно из рисунка, даже после сотен пролетов в ансамбле остается заметная доля стартовавших частиц. Практически это означает, что время жизни неадиабатических частиц в плазме даже при небольших  $N > 3$  не равно нулю и может быть достаточным для накопления некоторого количества плазмы на близких к нулю магнитного поля силовых линиях каспа.

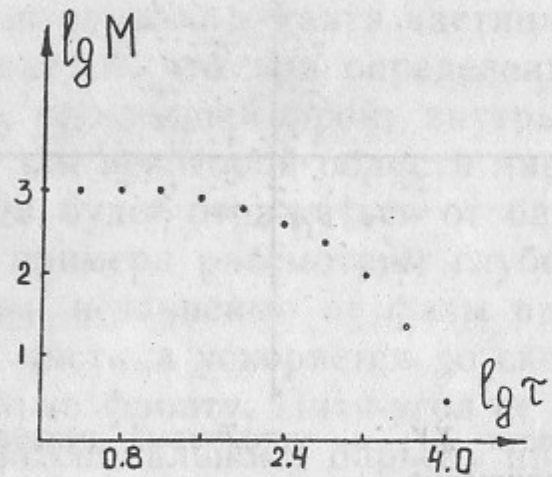


Рис. 7. Убывание ансамбля частиц во времени.  $\tau$  — число продольных колебаний.

При движении частицы в неадиабатической области вдали от границы устойчивости, когда ларморовская фаза  $\varphi$  пролета ею области максимальной кривизны есть случайная функция, магнитный момент изменяется от пролета к пролету диффузионным образом. Используя (3), получим соответствующий коэффициент диффузии

$$D_0 = \frac{(\Delta P)_m^2}{4} = \frac{e^{-2\varphi}}{4(1-P^2)} \quad (13)$$

Качественной особенностью является зануление коэффициента (13) при  $R=1$ . Такое поведение связано с тем, что в плоском линейном каспе, а именно для него получена исходная зависимость  $D_0(P)$ , плоскость минимумов магнитного поля совпадает с плоскостью, ортогональной силовым линиям. В этом случае при  $P=1$  траектория частицы является плоской замкнутой кривой и толчок магнитного момента зануляется. Кроме того, коэффициент диффузии убывает при приближении фазовой траектории частицы к островкам устойчивости вблизи границы адиабатичности. При таком

поведении коэффициента диффузии убывание ансамбля во времени должно носить степенной характер  $M(\tau) \propto 1/\tau^l$ , тогда как кривая  $M(\tau)$  на рис. 7, начиная с некоторого момента времени, имеет явно экспоненциальный вид. Связано это с тем, что в круглом каспе соответствующие этим плоскостям конусы не совпадают, траектория частицы в принципе не может быть плоской кривой, и величина  $(\Delta P)_m$  (3) не стремится к нулю при  $P \rightarrow 1$ . Возможно, что это связано и с большой шириной стохастических зон вблизи границы адиабатичности и с недостаточно быстрым занулением коэффициента диффузии при приближении к островкам устойчивости. Не исключено также, что сказывается влияние численного шума.

Для практического применения результатов моделирования, т. е. для получения возможных распределений частиц в плазме, даже в случае грубого диффузионного описания, необходимо построение зависимости показателя экспоненциального спада от параметра частицы  $N$ , а также точек старта  $R_{st}$  и вылета  $R_m$ . В рамках описанной модели получение такой зависимости требует очень больших затрат машинного времени. Можно, однако, воспользоваться более простой численной диффузионной моделью, заменив в описанной выше модели интегрирование траектории частицы на одном продольном пролете конечным приращением величины  $\Delta P$  по формуле:

$$\Delta P = (\Delta P)_m \cdot \sin \varphi,$$

где  $\varphi$  — случайная фаза от 0 до  $2\pi$ . Нетрудно видеть, что результатом такого процесса будет диффузия по  $P$ , описываемая уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial P} \left( D_0 \frac{\partial f}{\partial P} \right),$$

с граничными условиями  $f(P=1/\sqrt{R_m})=0$ ;  $\frac{\partial f}{\partial P}(1)=0$  и  $f=f_0 \delta(P-1/\sqrt{R_{st}})$  в начальный момент времени. Моделирование подтвердило степенной характер убывания числа частиц. Для получения экспоненциального спада можно ограничить снизу область диффузии, поставив условие отражения при достижении частицей точки  $P=1/\sqrt{R_b}$ . Оказалось, однако, что граница  $R_b=R(N)$  не дает совпадения с полной моделью движения (см. рис. 8). В общем случае отражающая граница является функцией  $N$ ,  $R_m$  и  $R_{st}$ .

Нахождение этой функции может быть предметом отдельного исследования. На рис. 8 показано убывание во времени ансамбля, полученное как по полной модели, так и по диффузионной при различных значениях  $R_b$ .

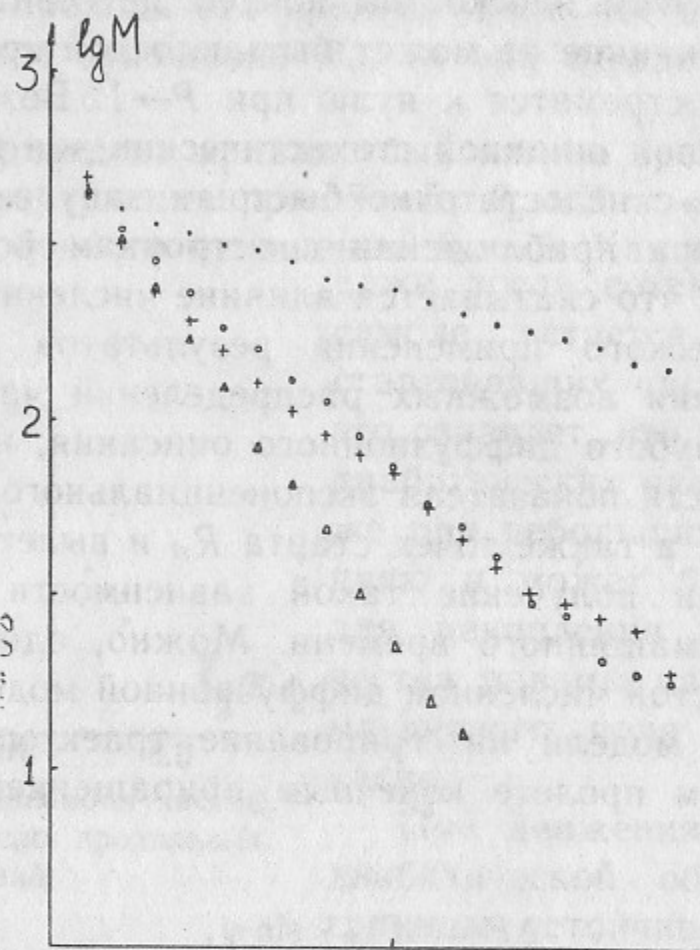


Рис. 8. Сравнение полной траекторной модели (+) с диффузионной при  $N=3$ ,  $R_{st}=2$ ,  $R_m=2.5$ ; • —  $R_b=R(N)=1.2$ , ○ —  $R_b=1.32$ , △ —  $R_b=1.4$ .

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Численное моделирование движения заряженных частиц в круглом каспе показало, что:

1) для идеального магнитного поля граница, разделяющая фазовое пространство частицы на области детерминированного и стохастического движения, удовлетворительно описывается теорией с учетом полученного коэффициента;

2) влиянием особенностей реального поля ловушки АМБАЛ можно пренебречь;

3) влияние стационарного электрического поля, ортогонального

или коллинеарного магнитному, пренебрежимо мало для разумных величин перепадов потенциала;

4) влияние электрического поля общего вида стохастизует движение частицы уже при небольших перепадах потенциала, что практически может быть достаточно опасным для удержания плазмы;

5) движение частиц в глубоко стохастической области является диффузией в фазовом пространстве, а вблизи границы адиабатичности имеются как участки стохастического движения, так и островки устойчивости.

Качественно исследован механизм влияния электрического поля, а также обнаружены возможности стохастизации набегов фазы без взаимодействия их с изменениями магнитного момента и бесстолкновительный захват частицы в области электростатической ямы.

Предварительное исследование диффузии стохастических частиц по магнитному моменту показывает возможность построения «быстрой» диффузионной модели для нахождения характерных времен удержания и функции распределения плазмы.

Авторы благодарят Г.И. Димова, Д.Д. Рютова и Б.В. Чирикова за многочисленные плодотворные дискуссии.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

Для численного решения уравнений (6) и (7) применялись центрированные по времени разностные схемы [7]. Такие алгоритмы обратимы по времени и позволяют избежать накопления ошибки в энергии частицы на большом временном интервале. Для уравнения (6) схема выглядит следующим образом:

$$\frac{\bar{v}_0^{n+1/2} - \bar{v}_0^{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{e}{m} \bar{E}_n + \frac{e}{2mc} [(\bar{v}_0^{n+1/2} + \bar{v}_0^{n-1/2}) \times \bar{B}_n], \quad (1П)$$

$$\bar{r}_0^{n+1} = \bar{r}_0^n + \bar{v}_0^{n+1/2} \Delta t.$$

Здесь  $\bar{E}_n = \bar{E}(\bar{r}_n)$ ,  $\bar{B}_n = \bar{B}(\bar{r}_n)$ , а значения скорости и координат частицы берутся в точках, сдвинутых на половину шага по времени.

Эта схема обеспечивает точность  $\sim (\Delta t)^3$  и допускает явное разрешение относительно  $\bar{v}_0^{n+1/2}$  для первого уравнения системы. Для этого введем вспомогательные векторы

$$\bar{v}_0^+ = \bar{v}_0^{n+1/2} - \frac{e\Delta t}{2mc} \bar{E}_n,$$

$$\bar{v}_0^- = \bar{v}_0^{n-1/2} + \frac{e\Delta t}{2mc} \bar{E}_n$$

и перепишем первое уравнение (1п) в виде

$$\frac{\bar{v}^+ - \bar{v}^-}{\Delta t} = \frac{e}{2mc} [(\bar{v}_0^+ + \bar{v}_0^-) \times \bar{B}_n]. \quad (2П)$$

Умножая последнее уравнение векторно и скалярно на  $\bar{B}$ , после преобразований получим

$$\bar{v}_0^+ = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 \cdot B_n^2} \times \\ \times \left\{ \Delta t [\bar{v}^- \times \bar{B}_n] + \left(1 - \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 B_n^2\right) \bar{v}_0^- + \frac{(\Delta t)^2}{2} \cdot (\bar{v}_0^-, \bar{B}_n) \bar{B}_n \right\}.$$

Аналогично реализуется разностная схема для уравнения (7), если ввести обозначения:

$$\bar{E}_n^* = \bar{E}_n + \frac{1}{2c} [\bar{v}_0^*, (\bar{\xi}, \bar{\nabla}) \bar{B}_n], \quad \bar{v}_0^* = \frac{\bar{v}_0^{n+1/2} + \bar{v}_0^{n-1/2}}{2}.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Димов Г.И., Лысянский П.Б. Препринт ИЯФ СО АН СССР 86-102. Новосибирск, 1986.
2. Нагорный В.П., Ступаков Г.В. Физика плазмы, 1984, т.10, с.476.
3. Чириков Б.В. В сб.: Вопросы теории плазмы.- М.: Энергоатомиздат, 1983, вып.13, с.3
4. Leffel C.S. Gray Jr. and E.P. Phys. Fluids, 1969, v.12, p.1008.
5. Ostlund S., Rand D., Sethna J., Siggia E. Physika D, 1983, v.8, p.303.
6. Baldwin D.E., Logan B.G. Phys. Rev. Lett, 1979, v.43, p.1318.
7. Морз Р. В сб.: Вычислительные методы в физике плазмы. М.: Мир, 1974.

С.В. Кузьмин, П.Б. Лысянский

Численное исследование  
устойчивости движения  
заряженных частиц в каспе

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 22 октября 1987 г.  
Подписано в печать 20.01. 1988 г. МН 08038  
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2,0 печ.л., 1,6 уч.-изд.л.  
Тираж 250 экз. Бесплатно. Заказ № 5

Набрано в автоматизированной системе на базе фото-  
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и  
отпечатано на ротапинтере Института ядерной физики  
СО АН СССР,  
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.