

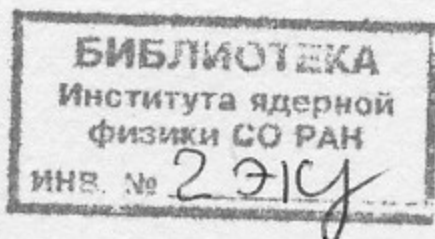
Ж. 74



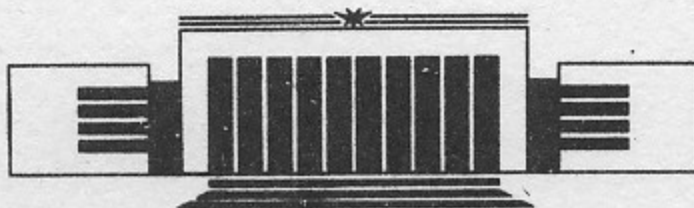
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

А.Р. Житницкий

ДРОБНЫЙ ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ЗАРЯД,  
ТОРОНЫ И НАРУШЕНИЕ  
ДИСКРЕТНОЙ КИРАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ  
В СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ  $O(3)_\sigma$ -МОДЕЛИ



ПРЕПРИНТ 88-6



НОВОСИБИРСК



Дробный топологический заряд, тороны  
и нарушение дискретной киральной симметрии  
в суперсимметричной  $O(3)\sigma$ -модели

А.Р. Житницкий

Институт ядерной физики  
630090, Новосибирск 90, СССР

## АННОТАЦИЯ

Рассматривается новый класс самодуальных решений в  $O(3)\sigma$  модели с половинным топологическим зарядом  $Q=1/2$ . Вычислен вклад соответствующих флуктуаций в величину  $\langle\psi\bar{\psi}\rangle$ . Результат оказывается конечным, что свидетельствует о спонтанном нарушении киральной симметрии. Рассматриваются возможные способы описания таких флуктуаций — аналитическое продолжение в комплексное пространство и альтернативный вариант описания на орбифолдах.

© Институт ядерной физики СО АН СССР

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время наиболее популярным примером непертурбативных флуктуаций является инстантон [1, 2]. Целочисленность топологического заряда  $Q$  в этом случае связана с компактификацией пространства в сферу, т. е. с отождествлением всех бесконечно удаленных точек. Выбор других граничных условий может привести к дробным топологическим зарядам. В частности, в глюодинамике с калибровочной группой  $SU(N)$  введение так называемых твистованных граничных условий [3] позволило получить решения классических уравнений — тороны [4], имеющие  $Q=k/N$ ,  $k=0, 1, \dots$  и действие  $S=\frac{8\pi^2}{g^2}Q$ .

Возможные физические проявления таких флуктуаций будут обсуждаться ниже, а сейчас отметим [3, 4], что допустимость дробного топологического заряда в  $SU(N)$  глюодинамике связана с существованием элементов центра  $Z_N=\exp\{2\pi ik/N\}$ , принадлежащих группе и не изменяющих вида полей присоединенного представления, глюонов:  $A'_\mu=Z_N^{-1}A_\mu Z_N=A_\mu$ . Так что, по существу, группой является  $SU(N)/Z_N$ , и нетривиальность отображения  $\pi_1(SU(N)/Z_N)=Z_N$  означает существование новых (неинстантонных) решений классических уравнений.

Введение полей фундаментального представления (кварков) наивно нарушает  $SU(N)/Z_N$  симметрию. Однако в [5] была высказана гипотеза, что для класса теорий флуктуации с дробным топологическим зарядом могут оказаться существенными и в этом



случае.  $O(3)\sigma$ -модель как раз относится к этому типу теорий и поэтому является прекрасной теоретической лабораторией, помогающей понять роль дробных  $Q$  при анализе более сложных калибровочных моделей.

Именно в этом состоит цель настоящей работы — найти способ описания решений с дробным  $Q$  в  $O(3)\sigma$ -модели и вычислить вклад соответствующих флуктуаций в функциональный интеграл.

К каким физическим эффектам приводят флуктуации с дробным  $Q$ ? Наиболее ярко эти эффекты проявляются в суперсимметричных вариантах теорий. В частности, в SYM с калибровочной группой  $SU(2)$  тороны [4] обеспечивают спонтанное нарушение дискретной киральной симметрии. Действительно, модель имеет наивную  $U(1)$  киральную симметрию  $\lambda^a \rightarrow \exp(i\alpha)\lambda^a$  ( $\lambda^a$  — поле глюино), нарушаемую аномалией  $\partial_\mu a_\mu \sim G_{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}$ . Однако дискретная симметрия  $Z_4$  при этом сохраняется. Тороны, генерирующие конденсат  $\langle \lambda^2 \rangle \neq 0$ , нарушают эту симметрию до  $Z_2$  ( $\lambda \rightarrow -\lambda$ ) [6]. Заметим, что инстантоны дают нулевой вклад в  $\langle \lambda^2 \rangle$  и способны обеспечить ненулевое значение лишь коррелятора  $\langle \lambda^2(x), \lambda^2(0) \rangle \neq 0$  [7].

Аналогичное явление, как будет показано ниже, возникает и в суперсимметричной  $O(3)\sigma$ -модели. В этом случае, как и в SYM, имеется наивная киральная симметрия  $\psi \rightarrow \exp(i\alpha\gamma_5)\psi$ , нарушаемая аномалией:

$$\partial_\mu a_\mu = 4 \cdot \frac{1}{4\pi} \epsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad Q = \frac{1}{4\pi} \int \epsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu} d^2x. \quad (1)$$

Дискретная симметрия  $Z_4$  при этом сохраняется. Описанные в разделе 4 тороноподобные\*) решения обеспечивают ненулевое значение  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$ , тем самым спонтанно нарушают дискретную симметрию до  $Z_2$ :  $\psi \rightarrow -\psi$ . Это согласуется с величиной индекса Виттена [8], равного двум.

Отметим, что и в этом случае инстантон может обеспечить ненулевое значение лишь коррелятора  $\langle \bar{\psi}\psi(x), \bar{\psi}\psi(0) \rangle$  [9, 10].

Работа построена следующим образом. В разделе 2  $O(3)\sigma$ -модель формулируется в терминах различных полей: единичного векторного поля  $n^a$ ,  $a=1, 2, 3$ ,  $n^a n^a = 1$ ; комплексного поля  $\varphi$ ; единич-

ного комплексного спинора  $u_\alpha$ ,  $\alpha=1, 2$ ,  $u^+ u = 1$ . Разные формулировки помогают понять различные аспекты флуктуаций с дробным  $Q$ . Раздел 3 несет двойную нагрузку. С одной стороны, в нем описывается хорошо известное инстантонное исчисление в интересующем нас контексте. С другой стороны, апробируются (необходимые для дальнейшего анализа) критерии отбора нулевых мод. Кроме того, связь между различными описаниями нулевых мод, окажется полезной при соответствующем анализе торонного исчисления.

## 2. $O(3)\sigma$ -МОДЕЛЬ

Для описания торонного решения в дальнейшем, сейчас достаточно обсудить уравнения дуальности и лагранжиан обычной (не суперсимметричной)  $O(3)\sigma$ -модели. Модификация, связанная с введением фермионов будет рассмотрена в следующих разделах. В терминах  $n^a$ -полей действие, топологический заряд и уравнения дуальности имеют следующий вид [1]:

$$S = \frac{1}{4f} \int d^2x (\partial_\mu n^a)^2, \quad n^a n^a = 1, \quad a=1, 2, 3, \quad \mu=1, 2;$$

$$Q = \frac{1}{8\pi} \int d^2x \epsilon^{abc} \epsilon_{\mu\nu} n^a \partial_\mu n^b \partial_\nu n^c; \quad (2)$$

$$\partial_\mu n^a = -\epsilon^{abc} n^b \epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu n^c.$$

Здесь  $f$  — затравочная константа.

Как обычно, для квазиклассического вычисления необходимо разложить поле  $n^a$  в окрестности решения  $n_{кл}^a$ ; сохраняя лишь квадратичные члены. Далее, задача диагонализации полученной билинейной формы сводится к следующему уравнению на собственные значения [11, 12]:

$$m^2 q_l = \lambda_l q_l, \quad q_l^a n_{кл}^a = 0,$$

$$m^2 = -\frac{2}{(\partial_\mu n_{кл}^a)^2} \partial_\nu^2 - 2, \quad (3)$$

где  $\lambda_l$  —  $l$ -ое собственное значение, а  $q_l$  — соответствующая собственная функция, ортогональная классическому решению и нормированная условием:

\*) Мы сохраняем термин «торон», введенный в [4] и для самодуального решения в  $O(3)\sigma$ -модели. Этим мы подчеркиваем тот факт, что решение минимизирует действие  $S = (2\pi/f)Q$  и имеет топологический заряд  $Q = 1/2$ , т. е. обладает всеми свойствами, присущими торону [4].



$$\int q_i^b q_i^b (\partial_\mu n_{кл}^a)^2 = 1. \quad (4)$$

Отметим, что дополнительное условие  $q_i^a n_{кл}^a = 0$  обусловлено связью  $n^2 = (n_{кл}^a + q^a)^2 = 1$ .

Как обычно, амплитуда перехода нормируется на вакуумную, для которой справедливы соотношения (3), (4) с той лишь разницей, что оператор  $m_{\text{вакуум}}^2$  (3) не содержит постоянного слагаемого (-2).

Чтобы избежать усложнений, обусловленных связью  $n^2 = 1$ , часто вводят (см., например, обзор [9]) вместо трех полей  $n^a$ , живущих на единичной сфере, два независимых поля  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  с помощью стереографической проекции:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{n_1}{1+n_3}, & n_1 &= \frac{2\varphi_1}{1+\varphi_1^2+\varphi_2^2}, \\ \varphi_2 &= \frac{n_2}{1+n_3}, & n_2 &= \frac{2\varphi_2}{1+\varphi_1^2+\varphi_2^2}, & n_3 &= \frac{1-\varphi_1^2-\varphi_2^2}{1+\varphi_1^2+\varphi_2^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Далее, объединяя  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  в одно комплексное поле  $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$  и вводя комплексную переменную  $z = x_1 + ix_2$ , можем переформулировать уравнения (2) в следующем виде:

$$\begin{aligned} S &= \frac{2}{f} \int \frac{d^2x}{(1+\bar{\varphi}\varphi)^2} \left[ \left| \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial\varphi}{\partial \bar{z}} \right|^2 \right], \\ Q &= \frac{1}{\pi} \int \frac{d^2x}{(1+\bar{\varphi}\varphi)^2} \left[ \left| \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial\varphi}{\partial \bar{z}} \right|^2 \right], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \varphi_{кл} = 0, \quad z = x_1 + ix_2, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2, \quad \varphi = \varphi_1 + i\varphi_2, \quad \bar{\varphi} = \varphi_1 - i\varphi_2.$$

На языке  $\varphi$ -поля учет квадратичных отклонений связан с задачей диагонализации следующего оператора:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{(1+\varphi_{кл}\bar{\varphi}_{кл})^2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \varphi_l &= \lambda_l \frac{1}{(1+\varphi_{кл}\bar{\varphi}_{кл})^2} \varphi_l, \\ \int \bar{\varphi}_l \varphi_l \frac{d^2x}{(1+\varphi_{кл}\bar{\varphi}_{кл})^2} &= 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Какие-либо дополнительные требования на моды  $\varphi_l$ , обусловленные связью, при этом отсутствуют.

Как видно из (6) уравнения дуальности выглядят наиболее просто на языке  $\varphi$ , в то же время, как будет показано ниже, кван-

товые моды наиболее естественно описываются в терминах исходных полей  $n^a$ . Что касается анализа топологических идей, то для наиболее тесной аналогии с калибровочными теориями нам требуется еще одна формулировка  $O(3)\sigma$ -модели, в которой присутствует локальная калибровочная инвариантность.

Именно, определим действие  $CP^1$ -теории, эквивалентной  $O(3)\sigma$ -модели, следующим образом [13, 14]:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{f} \int d^2x |D_\mu u|^2, & D_\mu &= \partial_\mu + iA_\mu, & A_\mu &= -i\bar{u}\partial_\mu u, \\ Q &= \frac{1}{4\pi} \int d^2x \varepsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu}, & F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, & \bar{u}u &= 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $u_\alpha$  — двухкомпонентный комплексный спинор,  $A_\mu$  — вспомогательное калибровочное поле. Локальная калибровочная инвариантность в терминах (8) выглядит очевидной:

$$u' = e^{i\alpha} u, \quad A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha. \quad (9)$$

Эквивалентность с исходной формулировкой проверяется с помощью соотношений:

$$n^a = \bar{u} \sigma^a u, \quad \varphi = \frac{u_2}{u_1}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где  $\sigma^a$  — обычные матрицы Паули. Отметим, что уравнения дуальности на языке спинорных полей записывается очень просто:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = 0. \quad (11)$$

В следующем разделе будет коротко описано инстантонное исчисление [9—12] в интересующем нас контексте. Особое внимание будет уделено нулевым модам и требованиям, которым эти моды должны удовлетворять. Обсуждение данного вопроса поможет нам, практически без вычислений, в разделе 5 получить выражение для торонной плотности в суперсимметричной  $O(3)\sigma$ -модели.



### 3. ИНСТАНТОНЫ В $O(3)_\sigma$ -МОДЕЛИ. НУЛЕВЫЕ И НЕНУЛЕВЫЕ МОДЫ

Как известно, инстантонное решение [1]

$$\varphi_{\text{кл}} = \frac{\rho}{z - z_0} \quad (12)$$

характеризуется двумя комплексными параметрами  $\rho$ ,  $z_0$ , имеет  $Q=1$  и действие  $S=2\pi/f$ . В дальнейшем без потери общности положим  $\rho=1$ ,  $z_0=0$ . При этом мы выбрали граничные условия в виде  $\varphi(z \rightarrow \infty) = 0$ , что соответствует направлению  $n^a(z \rightarrow \infty)$  строго по третьей оси:  $n^3(z \rightarrow \infty) = 1$ .

Для анализа квадратичных отклонений от классического решения (12) удобно обратиться к уравнению (3), проведя следующую замену переменных:

$$\theta \equiv \arccos \eta = \frac{1 - x_1^2 - x_2^2}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \quad \alpha = \arctg \frac{x_2}{x_1},$$

$$-1 \leq \eta \leq 1, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi. \quad (13)$$

Смысл  $\theta$ ,  $\alpha$  очевиден — это соответствующие координаты сферы, полученной с помощью стереографической проекции плоскости  $x_1, x_2$ . В этих обозначениях инстантонное решение особенно наглядно — единичное векторное поле  $n^a(\theta, \alpha)$  имеет в точности направление, задаваемое углами  $\theta, \alpha$ .

В переменных  $\eta, \alpha$  оператор  $m^2$  (3), подлежащий диагонализации, выражается через стандартный оператор углового момента  $L^2$ :

$$m^2 = L^2 - 2,$$

$$L^2 = -(1 - \eta^2) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2\eta \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{1}{1 - \eta^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}. \quad (14)$$

Поэтому собственные значения  $\lambda_l$  оператора  $m^2$  есть  $l(l+1) - 2$  [11, 12]. Отметим, что вес, с которым нормируются собственные функции  $q_l$  (4), есть в точности правильная мера для шаровых функций  $Y_{lm}$ :

$$d\Omega = (\partial_\mu n_{\text{кл}}^a)^2 d^2x \sim \frac{dx_1 dx_2}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2} \sim d\alpha \sin\theta d\theta. \quad (15)$$

Как уже обсуждалось, подобные вычисления должны быть проделаны и для вакуумного  $\varphi=0$  поля. В этом случае в операторе

$m^2$  (14) отсутствует фактор  $(-2)$ . Поэтому собственные значения  $\lambda_l$  (вакуум)  $= l(l+1)$ , а степень вырождения  $g_l = 2(2l+1)$ . Фактор  $2l+1$  не требует пояснений; дополнительный множитель 2 связан с двумя возможными направлениями  $q_i^a$ ,  $a=1, 2$ , ортогональными классическому вакуумному решению  $n_{\text{кл}}^a = \delta^{a3}$ , направленному по третьей оси.

Итак, дополнительное требование  $q_i^a n_{\text{кл}}^a = 0$ , обусловленное связью, может быть легко удовлетворено для пустого пространства с  $n^a = \delta^{a3}$ . Несколько менее тривиально этому требованию можно удовлетворить в случае инстантона. Так как инстантон  $n_{\text{кл}}^a$  описывает вектор, направленный вдоль радиуса  $\vec{r}$ , то существование двух независимых векторов, лежащих в плоскости, ортогональной  $\vec{r}$ , совершенно очевидно. Тем самым степень вырождения и для инстантонного случая равна  $g_l = 2(2l+1)$ . Что касается явного вида собственных функций, то их легко построить из  $Y_{lm}$  [11, 12], являющихся собственными функциями (14):

$$\bar{q}_{lm}^1 = \bar{\nabla} Y_{lm}, \quad \bar{q}_{lm}^2 = \bar{L} Y_{lm}. \quad (16)$$

Как и должно быть, имеется два типа независимых мод, ортогональных инстантонному решению  $\sim \vec{r}$ :

$$\vec{r} \bar{q}^1 \sim \vec{r} \cdot \bar{\nabla} Y_{lm} = 0, \quad \vec{r} \bar{q}^2 \sim \vec{r} (\vec{r} \times \bar{\nabla}) Y_{lm} = 0. \quad (17)$$

Теперь мы подготовлены для подсчета числа нулевых мод. Для инстантона это соответствует значению  $l=1$ ,  $g=2(2l+1)=6$ ,  $\lambda=l(l+1)-2=0$ . Заметим, что значению  $l=0$  соответствуют моды (16), тождественно обращающиеся в нуль.

Для пустого пространства нулевые моды соответствуют  $l=0$  и имеют степень вырождения  $g=2$ . Эти две моды отвечают свободе в выборе граничных условий. Аналогичные две моды присутствуют и в поле инстантона и учитывались при вычислении  $g=6$ . Тем самым количество нетривиальных нулевых мод в поле инстантона равно  $6-2=4$ . Как эти моды выглядят на языке  $\varphi$ -поля (5)? Подставляя  $\vec{n} = \vec{n}_{\text{кл}} + \sqrt{f} \vec{q}_i$  и  $\varphi = \varphi_{\text{кл}} + \sqrt{f} \delta\varphi_i$ , где  $\vec{q}_i$  — любая из нулевых мод (16) с  $l=1, i=1, \dots, 6$ , с помощью (5) приходим к следующей связи между модами  $\vec{q}_i$  в терминах  $\vec{n}$ -поля (3), (4) и модами  $\delta\varphi$  в терминах  $\varphi$ -поля (7):

$$\delta\varphi = \frac{1}{1 + n_{\text{кл}}^3} \{q^1 + iq^2 - q^3 \varphi_{\text{кл}}(z)\}. \quad (18)$$



Подставляя явные выражения  $\bar{q}$  (16) с  $l=1$ , легко убедиться, что четырем нетривиальным модам отвечают  $\delta\varphi \sim 1/z, 1/z^2$ ; двум оставшимся модам, связанным с изменением граничных условий, соответствует ненормируемая функция  $\delta\varphi = c$ . Как эти ответы понять непосредственно из уравнения (7)? Если взглянуть на (7), то решению  $\lambda=0$  отвечает произвольная аналитическая функция. По каким критериям мы выбираем лишь  $\delta\varphi \sim 1/z, 1/z^2$ ?

Ответ состоит в том, что мы требуем однозначности мод и фиксации топологического заряда [15]. Это выполняется лишь для функций  $\delta\varphi \sim 1/z, 1/z^2$ . Опережая события, сформулируем также требования на фермионные нулевые моды [15]:

$$\begin{aligned} |\psi| &\leq c/|z|, & |z| \rightarrow \infty, \\ |\psi| &\leq c|\varphi_{\text{кл}}|^2 \sim c/z^2, & z \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (19)$$

В  $O(3)$ -модели этому требованию отвечают в точности две комплексных моды [9, 10]:

$$\psi = 1/z, \quad \bar{\psi} = 1/z^2. \quad (20)$$

Отметим также, что нормировочный интеграл (7) логарифмически расходится для моды  $\delta\varphi \sim 1/z$  при больших  $z$ . Однако, как отмечалось в [15], этот факт не влияет на физическое содержание теории. С аналогичным явлением мы столкнемся и в случае торонов.

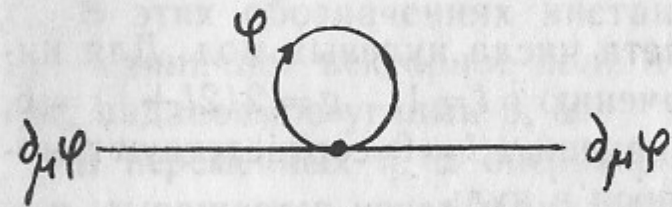


Рис. 1.

Коротко остановимся на вкладе ненулевых мод. Соответствующее аккуратное вычисление требует знания собственных значений  $l(l+1) - 2$ , степени их вырождения  $2(2l+1)$ , учета регуляторных полей и т. д. [11, 12]. Однако с логарифмической точностью суммарный вклад ненулевых мод может быть легко вычислен с помощью расчета обычных фейнмановских диаграмм, как это было сделано для калибровочных теорий в [16]. В частности, для  $O(3)$ -модели в терминах  $\varphi$ -поля (6) эффективная добавка к действию определяется рис. 1 и равна

$$S = \frac{2\pi}{f} + \Delta S,$$

$$\Delta S = \frac{2}{(2\pi)^2} \int_1^{M_0^2} \frac{d^2 k}{k^2} \frac{|\partial_\mu \varphi|^2}{(1 + \bar{\varphi}\varphi)^2} d^2 x = \frac{\ln M_0^2}{2\pi} (S_{\text{кл}} \cdot f). \quad (21)$$

Здесь фактор 2 перед интегралом связан с четырехточечной вершиной в лагранжиане  $2\partial_\mu \varphi \partial_\mu \bar{\varphi} (\bar{\varphi}\varphi)$ ; верхнее обрезание обусловлено регулятором  $M_0^2$ , нижнее — характерными размерами поля  $\sim 1$ . Далее, оператор  $|\partial_\mu \varphi|^2$  дополнен до подходящего  $O(3)$  инвариантного выражения  $|\partial_\mu \varphi|^2 / (1 + \bar{\varphi}\varphi)^2$  с точностью до следующих поправок по константе связи  $f$ . Подставляя в (21)  $fS_{\text{кл}} = 2\pi$ , приходим к хорошо известному выражению [11, 12] для вклада ненулевых мод:

$$S_{\text{ненул}} = \ln M_0^2. \quad (22)$$

Собирая все факторы вместе, имеем следующее выражение для инстантона плотности в  $O(3)$ -модели [11, 12]:

$$Z \sim \exp\left\{-\frac{2\pi}{f}\right\} M_0^4 d^2 z_0 d^2 \rho e^{-\ln M_0^2} \frac{1}{\rho^2}. \quad (23)$$

Здесь фактор  $\exp\{-2\pi/f\}$  связан с классическим действием;  $d^2 z_0 d^2 \rho$  отвечают интегрированию по четырем коллективным переменным (12);  $M_0^4$  — вклад регуляторов, соответствующий упомянутым выше четырем нулевым модам;  $1/\rho^2$  восстанавливается по размерности.

Для суперсимметричного варианта  $O(3)$ -модели имеются дополнительно две комплексные фермионные нулевые моды (20), так что соответствующая инстантонная плотность равна [9, 10]

$$Z(\text{SUSY}) \sim e^{-2\pi/f} M_0^4 d^2 z_0 d^2 \rho \frac{d^2 \varepsilon_1}{M_0} \frac{d^2 \varepsilon_2}{M_0}. \quad (24)$$

При получении (24) было учтено, что ненулевые вклады сокращаются между бозонами и фермионами. Кроме того, каждая комплексная нулевая фермионная мода сопровождается соответствующим коллективным интегралом  $d^2 \varepsilon$  и регуляторным вкладом  $M_0^{-1}$ . Как и следовало ожидать, в (24) возникает в точности ренормвариантная комбинация:

$$m^2 = M_0^2 e^{-2\pi/f(M_0)}. \quad (25)$$

Мы намеренно подробно остановились на анализе инстантон-



ных нулевых мод и требованиях, предъявляемых к ним. В следующих разделах соответствующие критерии помогут нам отобрать «правильные» нулевые моды в случае торона. Кроме того, разные формулировки  $O(3)$ -модели, описанные выше, помогут понять существенно различные аспекты торонного решения.

#### 4. ТОРОНЫ В $O(3)$ -МОДЕЛИ

Начнем с формулировки  $O(3)$ -модели, записанной через спинорные поля (8). В этом случае, как нетрудно убедиться, действие инвариантно не только относительно глобальных  $SU(2)$ -преобразований, но и относительно локальных  $U(1)$ -преобразований (9). Однако, как отмечалось в [5], группой преобразований будет не просто  $SU(2) \times U(1)$ , но  $G = SU(2) \times U(1)/Z_2$ , так что  $\pi_1(G) \sim Z_2$ . Последнее обстоятельство связано с тем, что одновременное преобразование из группы  $SU(2) \sim \exp\{i\alpha\sigma_3\}$  и поворот  $\exp\{i\pi\}$  на угол  $\pi$  из группы  $U(1)$  не изменяют вида полей. Тем самым соответствующие преобразования должны быть отождествлены с единичным. В свою очередь это означает [5], что в теории допустимы  $Q=1/2$  и вследствие этого (как будет видно ниже) возникают многозначные функции при описании классических решений. Геометрическая интерпретация этого факта дана в Приложении.

Прежде чем переходить к последовательному изложению торонного решения, отметим некоторые связи с другими работами. Впервые факт существования флуктуаций с дробным  $Q$  в  $2d$ -теориях был отмечен в [17] (см. также [18]) при решении  $U(1)$  калибровочной теории с фермионами фундаментального представления группы  $SU(N)$ . Так что, как и в описанном выше случае, для модели [17]  $G = SU(N) \times U(1)/Z_N$  и  $\pi_1(G) \sim Z_N$  [18], что является формальным аргументом в пользу существования  $Q \sim 1/N$ .

Другая аналогия является чисто технической<sup>\*)</sup> и связана с обсуждаемыми в последнее время твистованными состояниями в струнных моделях (см., например, [19, 20]). В этом случае в теории также возникают многозначные функции. Однозначность достигается введением накрывающих пространств, аналогично тому, как функция  $\sqrt{z}$  становится однозначной на двух римановых листах.

<sup>\*)</sup> Это не мешает, однако, интенсивно эксплуатировать указанную аналогию, см. Приложение.

Как легко убедиться, торонное решение с  $Q=1/2$ , к описанию которого переходим, является двузначной функцией. Действительно, из (8) легко усмотреть, что топологический заряд определяется фазой, приобретаемой спинором при обходе по кругу большого радиуса:

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \varepsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \oint_{|x| \rightarrow \infty} A_\mu dx_\mu = \frac{1}{2\pi} \oint d\varphi,$$

$$u(x \rightarrow \infty) = u_0 e^{i\varphi}, \quad u_0 = \text{const}, \quad A_\mu(x \rightarrow \infty) = \partial_\mu \varphi. \quad (26)$$

Стандартному инстантону с  $Q=1$  отвечает однозначная функция

$$u = \frac{1}{\sqrt{|a-z|^2 + |b-z|^2}} \begin{pmatrix} a-z \\ b-z \end{pmatrix}.$$

Действительно, так как  $u_2/u_1$  зависит лишь от  $z$ , то, согласно (11), уравнение дуальности выполнено. Кроме того, при обходе по большому контуру спинор приобретает фазу  $2\pi$ , что, в соответствии с (26), отвечает  $Q=1$ .

Как обсуждалось выше и подробнее в [5], мы допускаем более широкий класс решений. Именно, при обходе допускается появление общей фазы  $(-1)$ . Учитывая, что фактор  $(-1)$  возникает от аналитических функций типа  $\sqrt{z}$ , приходим к следующему виду торонного решения:

$$u = \lim_{a \rightarrow b} \frac{1}{\sqrt{|z-a|^2 + |z-b|^2}} \begin{pmatrix} \sqrt{z-a} \\ \sqrt{z-b} \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Это решение определено на двух листах Римана; реальному физическому пространству отвечает лишь один из них. Далее, легко убедиться, что уравнение дуальности  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{u_2}{u_1} \right) = 0$  выполнено автоматически; кроме того, при обходе по большому кругу физического пространства спинор приобретает фазу  $\pi$ , что, согласно (26), отвечает  $Q=1/2$ .

Отметим также, что решение (27) определено в смысле предела  $a \rightarrow b$ . Это обеспечивает появление общего для всего спинора фактора  $(-1)$  при обходе любой из точек  $a, b$ . В терминах поля  $\varphi = u_2/u_1$  (10) решению (27) отвечает функция  $\varphi = \lim_{a \rightarrow b} \sqrt{\frac{z-b}{z-a}}$  с разрезом, стремящимся к нулю при  $b \rightarrow a$ , т. е. в терминах поля  $\varphi$



взятие предела  $a \rightarrow b$  означает восстановление однозначности на одном физическом листе\*).

Если положить  $a = b$  изначально, то  $\varphi = 1$ , что отвечает пустому вакуумному решению. На первый взгляд это означает, что такое решение не может вызвать никаких физических эффектов. Проведенный ниже анализ показывает, однако, что это не так. Мы убедимся, что в суперсимметричной  $O(3)\sigma$ -модели решение (27) обеспечивает ненулевое значение кирального конденсата. Аналогичное явление фозникает при вычислении вклада торона в конденсат глюино в суперсимметричной глюодинамике. Хотя торонному решению [4] отвечает напряженность поле  $G_{\mu\nu}^a \sim 1/L^2$ , стремящаяся всюду к нулю при увеличении размеров системы,  $L \rightarrow \infty$ , конденсат оказывается конечным [6].

Вернемся к анализу решения (27). Для этого вместо  $\varphi = \lim_{a \rightarrow b} \sqrt{\frac{z-b}{z-a}}$ , отвечающего граничным условиям  $\varphi \rightarrow 1$  ( $n^1 \rightarrow 1$ ) при  $|z| \rightarrow \infty$ , рассмотрим решение  $\varphi = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\Delta}{z-a}}$ , удовлетворяющее стандартным граничным условиям  $\varphi(z \rightarrow \infty) = 0$ ,  $n^3 = 1$  и отличающееся от исходного, на общий поворот. Теперь вычисление действия (6) совсем простое:

$$\varphi = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\Delta}{z-a}}, \quad S_{\text{кл}} = \frac{2}{f} \int \frac{d^2x}{(1+\bar{\varphi}\varphi)^2} \left[ \left| \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial\varphi}{\partial \bar{z}} \right|^2 \right] =$$

$$= \frac{\Delta}{f2} \int \frac{d^2x}{|z-a|[\Delta+|z-a|]^2} = \frac{\pi\Delta}{f} \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{\rho(\Delta+\rho)^2} = \frac{\pi}{f}, \quad (28)$$

$$Q = \frac{1}{\pi} \int \frac{d^2x}{(1+\bar{\varphi}\varphi)^2} \left( \left| \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial\varphi}{\partial \bar{z}} \right|^2 \right) = \frac{1}{2}, \quad S_{\text{кл}} = \frac{2\pi}{f} Q.$$

Как и ожидалось, классическое действие уменьшилось по сравнению с инстантонным значением (21) в 2 раза. Следующий этап вычисления торонной плотности состоит, как обычно, в анализе квантовых флуктуаций. Однако, как объяснялось в разделе 3, результирующий вклад ненулевых мод с логарифмической точностью может быть выписан мгновенно, без детального анализа, см. (21):

\* Отметим, что геометрическая интерпретация предельного перехода ( $a \rightarrow b$ ) означает регуляризацию («blowing up») фиксированных точек орбифлекса, см. Приложение.

$$S = S_{\text{кл}} + \Delta S, \quad \Delta S_{\text{ненул}} = \frac{\ln M_0^2}{2\pi} (f \cdot S_{\text{кл}}) = \frac{1}{2} \ln M_0^2. \quad (29)$$

Итак, при переходе от инстантонного решения к торонному уменьшилось не только классическое действие (что естественно), но и вклад ненулевых мод оказался в 2 раза меньше.

Чтобы глубже понять этот важный\*) факт, требуется детальный анализ оператора (3), ответственного за квадратичные флуктуации. К этому вопросу мы сейчас и переходим.

## 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТОРОННОЙ МЕРЫ

Перейдем к анализу квантовых флуктуаций, окружающих классическое решение (28). Для этого требуется решить задачу на собственные значения (3). Как и в случае с инстантонами, без ограничения общности положим  $a = 0$ ,  $\Delta = 1$ . В окончательных формулах соответствующая зависимость может быть легко восстановлена по размерности.

Решающей для дальнейшего анализа является следующая замена переменных:

$$\tilde{\eta} = \frac{1-|z|}{1+|z|}, \quad \alpha = \arctg \frac{x_2}{x_1}, \quad -1 \leq \tilde{\eta} \leq 1, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi. \quad (30)$$

В переменных  $\tilde{\eta}$ ,  $\alpha$  интересующий нас оператор (3) приводится к хорошо изученному уравнению для полиномов Лежандра:

$$m^2 = L^2 - 2,$$

$$L^2 = -(1-\tilde{\eta}^2) \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\eta}^2} + 2\tilde{\eta} \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}} - \frac{4}{1-\tilde{\eta}^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}. \quad (31)$$

Отличие от инстантонного случая (14) двойное: во-первых, выражение для  $\tilde{\eta}$  через физические координаты  $x_1$ ,  $x_2$  в (30) иное, чем в (13); во-вторых, в (31) имеется дополнительный фактор 4 перед членом  $\partial^2/\partial \alpha^2$ . Последнее замечание является главным в объяснении дополнительного фактора 1/2, отмеченного в конце предыду-

\*) Важность отмеченного факта связана с тем, что именно дополнительный фактор 1/2 в (29) автоматически обеспечивает правильную ренормгрупповую зависимость (25), см. раздел 5.



шего раздела. Действительно, собственные значения оператора  $m^2$  (31), как и в случае с инстантоном, равны  $\lambda_l = l(l+1) - 2$ . Однако степень вырождения отличается от инстантонного случая. Именно, однозначность собственных функций фиксирует зависимость от полярного угла  $\sim \exp\{im\alpha\}$ <sup>\*</sup>). После этого задача на собственные значения сводится к анализу оператора  $L^2$ , в котором вместо стандартного целого числа стоит « $2m$ » ( $-l \leq 2m \leq l$ ). Грубо говоря, для больших  $l$  это уменьшает степень вырождения вдвое по сравнению с инстантонным случаем. Но  $\ln M_0^2$  возникает именно за счет суммирования по большим  $l$ . Поэтому уменьшение степени вырождения вдвое при  $l \gg 1$  приводит к появлению фактора  $1/2$  перед  $\ln M_0^2$ . Действительно, интегрирование по квадратичным флуктуациям приводит к следующему общему соотношению (вакуумный и регуляторный вклады подразумеваются):

$$(e^{-\Delta S})_{\text{ненул. моды}} \sim \prod_l \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_l}} \right)^{g_l}, \quad (32a)$$

$$(\Delta S)_{\text{ненул.}} \sim -\frac{1}{2} \sum_l g_l \ln \lambda_l. \quad (32b)$$

Так как  $\lambda_l$  для торона и инстантона совпадают, то из (32b) видно, что при уменьшении  $g_l$  вдвое логарифмическая часть  $\Delta S$  также уменьшается вдвое по сравнению с инстантонным расчетом. Тем самым подтверждается результат (29), полученный ранее более простым путем.

Наша задача, однако, состояла не в получении формулы (29) еще одним методом. Мы хотели продемонстрировать важный критерий отбора мод, которые необходимо учитывать в соотношениях типа (32). Именно, только однозначные моды  $\varphi_l$  необходимо учитывать в разложении вида  $\varphi = \varphi_{\text{кл}} + \sqrt{f} \sum_n C_n \varphi_n$ . Именно это требование обеспечивает правильный результат (29). В случае с инстантоном проблема не возникает — в однозначном классическом

<sup>\*</sup> Приводимое объяснение несколько упрощенное. Правильное требование состоит в однозначности физических мод (16), ортогональных классическому решению. Идейная сторона вопроса, однако, от этого упрощения не страдает, поэтому, опуская технические детали, приведем результат: торон:  $\lambda_l = l(l+1) - 2$ ,  $g_l = 2(l+1)$  при нечетных  $l$ ,  $g_l = 2l$  при четных  $l$ ; вакуум:  $\lambda_l = l(l+1)$ ,  $g_l = 2(l+1)$  при четных  $l$ ,  $g_l = 2l$  при нечетных  $l$ . Как объяснялось в тексте, при  $l \gg 1$   $g_l = 2l$  и в два раза меньше, чем для случая инстантона, где  $g_l = 2(2l+1)$ .

поле все моды автоматически однозначны. Для торона это не так. Если бы мы допустили функции типа  $\exp\{im\alpha/2\}$  в (31), то степень вырождения не изменилась бы по сравнению с инстантонным случаем, и мы получили бы неправильный ответ.

Как интерпретировать тот факт, что  $\varphi_{\text{кл}} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\Delta}{z}}$  неоднозначна на физическом листе, а от флуктуаций  $\varphi_n$  мы требуем однозначности? Дело в том, что  $\varphi_{\text{кл}}$  определена в смысле предела и мы «руками» делаем ее однозначной при  $\Delta \rightarrow 0$ . На квантовые флуктуации мы не можем влиять таким образом; они рождаются и уничтожаются с определенной вероятностью без ведома извне. Геометрическая трактовка описанного требования содержится в Приложении.

Перейдем к анализу нулевых мод. Они отвечают значению  $l=1$ , и их количество равно 4 (см. сноску на стр. 16) вместо 6 для инстантона. Так как в пустом пространстве имеется две нулевых моды, то количество нетривиальных мод для торона равно  $4 - 2 = 2$  (для инстантона  $6 - 2 = 4$ ). Воспользовавшись соотношением (18), запишем нулевые моды торона в терминах  $\varphi$ -поля:

$$\delta\varphi^0 \sim 1/z. \quad (33)$$

Хотя эта мода, как и для инстантона, логарифмически расходится при  $z \rightarrow \infty$ , этот факт не влияет на физическое содержание теории [15]. Инфракрасная регуляризация обычно достигается введением фактора  $\Omega = (1 + x^2/R^2)^{-1}$ ,  $R \rightarrow \infty$  [10] или обрезанием интеграла сверху [9]:

$$\int \frac{|\delta\varphi|^2}{(1 + \varphi_{\text{кл}} \bar{\varphi}_{\text{кл}})^2} \Omega^2 d^2x = 1, \quad \int_0^R \frac{|\delta\varphi|^2}{(1 + \varphi_{\text{кл}} \bar{\varphi}_{\text{кл}})^2} d^2x = 1. \quad (34)$$

В последующих формулах инфракрасная регуляризация подразумевается, хотя и не выписывается явно.

Если бы мы непосредственно в терминах  $\varphi$ -поля пытались найти нулевые моды, то, как и для инстантона, любая аналитическая функция удовлетворяет уравнению (7). Однако дополнительным требованиям, обсуждавшимся в разделе 3, удовлетворяет лишь одна, именно (33).

Перейдем к обсуждению суперсимметричного варианта  $O(3)\sigma$ -модели. Как известно, суперсимметричные модели выгодно отличаются от обычных, так как требуют анализа лишь нулевых



мод. В бозонном секторе мы нашли две моды, записанные в виде одной комплексной (33). В фермионном секторе любой спинор вида  $\psi_2^0=0$ ,  $\psi_1^0=f(z)$  автоматически удовлетворяет уравнению на нулевые моды [9]. Однако лишь одна комплексная фермионная нулевая мода удовлетворяет требованию (19), именно:

$$\begin{aligned} |\psi| &\leq |\varphi_{кл}|^2 = \frac{1}{z}, \quad z \rightarrow 0, \\ \delta\psi_2^0 &= 0, \quad \delta\psi_1^0 = \varepsilon f, \quad f = c/z, \\ \int \frac{|f|^2}{(1 + \varphi_{кл}\bar{\varphi}_{кл})^2} d^2x &= 1. \end{aligned} \quad (35)$$

Здесь  $\varepsilon$  — некоторое грассманоно число; индексы 1, 2 спинорные;  $c$  — константа.

С учетом вышеизложенного торонная мера принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} Z &\sim M_0^2 d^2a \frac{d^2\varepsilon}{M_0} e^{-\pi/f(M_0)} = m d^2a d^2\varepsilon, \\ m &= M_0 e^{-\pi/f(M_0)}. \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь фактор  $M_0^2 d^2a$  обусловлен одной комплексной бозонной нулевой модой;  $d^2a$  — соответствующий интеграл по коллективной переменной; фактор  $d^2\varepsilon/M_0$  связан с одной комплексной фермионной нулевой модой (35); наконец,  $\exp\{-\pi/f\}$  есть вклад классического действия торона.

Как и в случае с инстантоном (25), выражение для торонной меры (36) имеет точно ренормвариантный вид. Легко проследить это явление — вместе с уменьшением действия в два раза уменьшилось количество нулевых мод ровно вдвое, что точно восстановило правильное ренормгрупповое соотношение.

Теперь все подготовлено для вычисления кирального конденсата в  $O(3)\sigma$ -модели. Для этого, следуя [9, 10], введем подходящий оператор

$$O = \frac{\bar{\psi}\psi}{(1 + \varphi_{кл}\bar{\varphi}_{кл})^2}, \quad (37)$$

являющийся инвариантным относительно  $O(3)$ -вращений и неинвариантным относительно киральных поворотов. Подставляя вместо  $\psi$  их нулевые моды (35) и учитывая, что интегрирование по

коллективным фермионным переменным в точности равно  $\int \varepsilon \bar{\varepsilon} d\varepsilon d\bar{\varepsilon} = 1$ , убеждаемся, что

$$\langle O \rangle \sim m \int d^2a \frac{|f|^2}{(1 + \varphi_{кл}\bar{\varphi}_{кл})^2} = m. \quad (38)$$

На последнем этапе мы воспользовались значением нормировочного интеграла (35). Как известно [8—10], отличие от нуля конденсата (38) означает спонтанное нарушение дискретной киральной симметрии:  $\psi \rightarrow \pm \gamma_5 \psi$ , не возникающее ни в каком порядке теории возмущения. Отметим, что инстантон может обеспечить ненулевое значение лишь коррелятора  $\langle O(x), O(0) \rangle$  [9, 10] в соответствии с тем, что решение с  $Q=1$  меняет киральный заряд  $\Delta Q_5$  на четыре единицы (проявлением этого факта являются четыре нулевых моды (20)): Торонное решение с  $Q=1/2$  меняет киральный заряд на две единицы и имеет две нулевых моды (35). Так что соответствующий вакуумный переход обязательно сопровождается рождением пары  $\bar{\psi}\psi$ , что и продемонстрировано явным расчетом (38).

Этот расчет с идейной точки зрения аналогичен вычислению [6] конденсата глюино  $\langle \lambda^2 \rangle$  в суперсимметричной глюодинамике. В обоих случаях наличие конденсата отражает нарушение лишь дискретной симметрии. Различие же состоит в том, что в [6] присутствуют поля лишь присоединенного представления; в нашей формулировке (27) спинорные поля преобразуются по фундаментальному представлению группы  $SU(2)$ . Кроме того, при вычислении в работе [6] использовалось стандартное квазиклассическое приближение, которое несправедливо при увеличении размера ящика  $L$ :  $L \rightarrow \infty$ ,  $g(L) \rightarrow \infty$ . В нашем расчете характерные масштабы:  $z \sim \Delta \rightarrow 0$ ,  $g^2(z) \rightarrow 0$  и квазиклассическое вычисление находится под контролем.

Несколько слов о том, чем выделено значение  $Q=1/2$  по сравнению с другими дробными  $Q$ . Как уже объяснялось, в формулировке (8), включающей локальную калибровочную  $U(1)$ -инвариантность, значение  $Q=1/2$  выделено уже на классическом уровне. Именно, заметим, что суперпозиция преобразований из центра  $SU(2)$  и поворот на угол  $\exp(i\pi)$  из  $U(1)$  не изменяют полей. Тем самым соответствующие преобразования должны быть отождествлены с единичным, что и приводит к  $Q=1/2$  [5].

В терминах  $\varphi$ -,  $n^a$ -полей такой выделенности не видно так как любое решение  $(\Delta/z)^Q$  при  $\Delta \rightarrow 0$  становится однозначным при любых  $Q$ . Так что в терминах  $n^a$ -полей выделенность  $Q=1/2$  проявля-



ется лишь на квантовом уровне при решении задачи (3) на собственные значения. Именно, оказывается, что однозначная нулевая мода существует только при  $Q=1/2$ . В других случаях отсутствует как нулевая мода, удовлетворяющая критерию однозначности, так и интеграл по коллективной координате — местоположению торона.

В терминах поля  $\varphi$  выделенность  $Q=1/2$  не проявляется даже при решении уравнения (7) для нулевых мод. Любая аналитическая функция является решением (7) с  $\lambda=0$ . Лишь дополнительное требование типа (19) выделяет  $Q=1/2$  и обеспечивает при этом существование однозначной нулевой моды. В свою очередь это означает устойчивость решения лишь с  $Q=1/2$ . Для других дробных значений  $Q$  нулевая мода  $1/z$  изменяет топологический заряд системы, т. е. приводит к неустойчивости.

Отметим также, что только для  $Q=1/2$  восстанавливается правильная ренормгрупповая зависимость. Геометрическая трактовка выделенности  $Q=1/2$  описана в Приложении.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основная цель работы состояла в анализе физических следствий, связанных с существованием дробного топологического заряда  $Q=1/2$  в суперсимметричном варианте  $O(3)\sigma$ -модели. Как было показано, соответствующие флуктуации обеспечивают спонтанное нарушение дискретной киральной симметрии и дают ненулевой вклад в киральный конденсат. С нашей точки зрения, это новый независимый вклад, который должен учитываться наряду с инстантонными вычислениями [9, 10]. Такая точка зрения не противоречит старой идее о том, что вычисление любой величины требует суммирования по всем топологическим классам (правда, неясно, с каким весом). Возможна и альтернативная точка зрения, восходящая к работе [21], о том, что инстантон есть суперпозиция двух объектов с полуцелым топологическим зарядом. В [21] таким объектом с  $Q=1/2$  был мерон [22], имеющий бесконечное действие. В некотором смысле наше решение похоже на мерон — оба имеют нулевой размер. Есть и разница — торон имеет конечное действие, мерон — бесконечное. Отметим также, что предложенное в работе решение с  $Q=1/2$ , являющееся самодуальным и минимизирующее действие  $S=2\pi Q/f=\pi/f$ , допускает простое обобщение на  $CP^{N-1}$ -теории с  $Q=k/N$  и действием  $S=\frac{2\pi}{f} \frac{k}{N}$ .

Кроме того, оказывается, что соответствующая конструкция может быть обобщена и на калибровочные теории (будет опубликовано отдельно). Более того, для супесимметричного варианта ЯМ-теории может быть вычислен конденсат глюино в полной аналогии с обсуждавшимися выше вычислениями  $O(3)\sigma$ -модели.

В заключение автор выражает благодарность П. Вигману, А.И. Вайнштейну, А.Ю. Морозову, В.Л. Черняку и М.А. Шифману за полезные обсуждения и критические замечания.

## Приложение

### ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ДРОБНОГО ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ЗАРЯДА. ОРБИФОЛДЫ

Сразу оговоримся, что настоящее Приложение носит чисто вспомогательный характер и не содержит новых утверждений. Так что цель Приложения чисто иллюстративная, именно: геометрическое описание идей, изложенных в тексте.

Компактифицируем комплексную плоскость  $z$  в сферу  $S_2$  в соответствии с формулой (30):

$$\cos \tilde{\theta} \equiv \tilde{\eta} = \frac{1-|z|}{1+|z|}, \quad \alpha = \arctg\left(\frac{x_2}{x_1}\right). \quad (\text{П1})$$

Отметим (хотя это и несущественно с топологической точки зрения), что по сравнению со стандартным проективным преобразова-

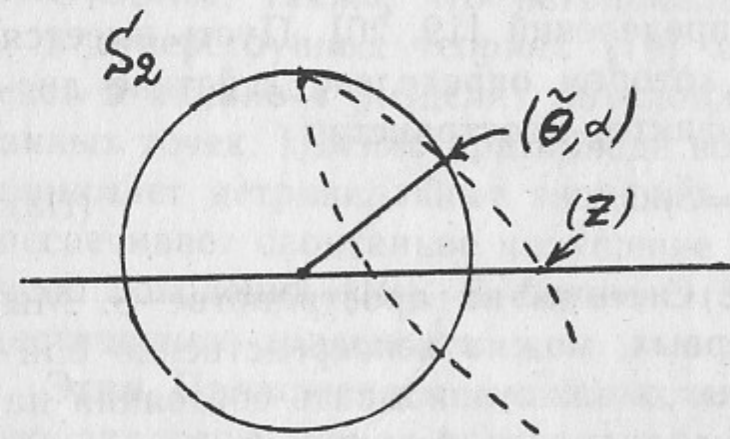


Рис. 2.

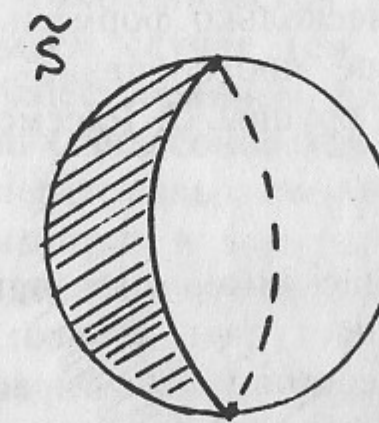


Рис. 3.

нием (13) величина  $|z|$  входит в первой степени, а не во второй, так что линии проектирования не являются прямыми (рис. 2). Смысл  $\tilde{\theta}, \alpha$  — координаты сферы  $S_2$ . Далее сделаем разрез в



плоскости  $z$  от 0 до  $\infty$  в соответствии с двузначностью нашего классического решения  $\sqrt{\Delta/z}$  (28). На сфере  $S_2$  этот разрез соединяет северный и южный полюсы. С помощью разреза откроем сферу и равномерно сожмем ее до полусферы. Далее подклеим к полусфере вторую копию, соответствующую второй римановой поверхности. Таким образом, мы сконструировали сферу  $\tilde{S}$  (рис. 3), которая может пониматься как компактификация двух листов Римана, или, другими словами, как компактификация комплексной плоскости  $\tilde{z}$ , где

$$z = \tilde{z}^2, \quad \tilde{\alpha} = \frac{1}{2}\alpha. \quad (\text{П2})$$

Теперь мы подготовлены дать геометрическую интерпретацию торонного  $\varphi_{\text{тор}} = 1/\sqrt{z}$  решения. Но вначале напомним ситуацию для инстантона, для которого  $\varphi_{\text{инст}} = 1/z$ . Если выразить это решение в терминах  $n^a$  (5), то инстантонное решение есть еж, для которого направления  $n^a(\theta, \alpha)$  задаются углами  $\theta, \alpha$ , полученными компактификацией (13) координатного пространства.

Торонное решение  $\varphi_{\text{тор}} = \sqrt{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\tilde{z}}$  в терминах  $n^a(\tilde{\theta}, \tilde{\alpha})$ -поля выглядит точно так же, как инстантонное, но в терминах другой сферы  $\tilde{S}(\tilde{\theta}, \tilde{\alpha})$ . Таким образом, торон — это еж, определенный на сконструированной выше сфере  $\tilde{S}$ .

Мы обсудили геометрию классического решения. Теперь обсудим геометрическую интерпретацию критерия однозначности квантовых флуктуаций (см. текст после формулы (32)). Но вначале дадим несколько формальных определений [19, 20]. Пусть имеется некоторое многообразие  $\tilde{S}$ , на котором определено действие дискретной группы  $G$ . Рассмотрим фактор-пространство

$$S = \tilde{S}/G. \quad (\text{П3})$$

Пусть нас интересует описание системы на пространстве  $S$ . Мы можем поступить двояко: во-первых, можно непосредственно описывать состояния на  $S$ ; во-вторых, можно описывать состояния на более широком пространстве  $\tilde{S}$ , однако от физических состояний потребовать инвариантности относительно преобразований  $G$ , т. е.:

$$G \left| \begin{array}{l} \text{физическое} \\ \text{состояние} \end{array} \right\rangle = \left| \begin{array}{l} \text{физическое} \\ \text{состояние} \end{array} \right\rangle \quad (\text{П4})$$

Тогда состояния, определенные на  $\tilde{S}$ , но удовлетворяющие требованию (П4), являются допустимыми состояниями на  $S$ .

Заметим, что критерий отбора однозначных мод в (32) означает, что собственные функции на обоих листах Римана совпадают. Тем самым совпадают значения функций на противоположных точках сферы  $\tilde{S}$  (рис. 3), т. е. при преобразовании

$$G: \tilde{z} \rightarrow -\tilde{z} \quad (\text{П5})$$

однозначные функции не меняются и удовлетворяют (П4). В частности, нулевые моды  $1/z = 1/\tilde{z}^2$  удовлетворяют требованию (П5) и поэтому являются допустимыми состояниями на  $S$ .

Отметим, что преобразование  $\tilde{z} \rightarrow -\tilde{z}$  имеет две фиксированные точки — северный и южный полюсы. Эти точки остаются на месте при  $\tilde{z} \rightarrow -\tilde{z}$ . Такие многообразия  $\tilde{S}/G$ , имеющие фиксированные точки, называются орбифолдами [19, 20].

В каждой фиксированной точке имеется коническая сингулярность с дефицитом угла, равным  $\pi$ . Это в точности угол (26), обеспечивший  $Q = \pi/2\pi = 1/2$ . Для этого значения угла две копии конуса точно накрывают плоскость, поэтому симметричные относительно (П5) состояния являются допустимыми состояниями на конусе. Именно в этом и состоит наш критерий отбора мод.

Таким образом, по-существу, многообразие, с которым мы имеем дело, есть орбифолд. Эти многообразия сингулярны в фиксированных точках. Для их регуляризации (в литературе «blowing up») обычно вводится свободный параметр (размер). В нашем случае эту роль выполняет параметр  $\Delta$  (28).

Отметим, также, что нетривиальность гомотопической группы  $\pi_1$  в суперструнных теориях [19] и в нашем случае (см. [5] и текст в начале 4 раздела) обусловлена существованием фиксированных точек. Именно при обходе вокруг них вильсоновская линия принимает нетривиальные значения. В суперструнных теориях это опеспечивает спонтанное нарушение  $E_6$ -симметрии и дает разумное число поколений [19]. В случае  $O(3)\sigma$ -модели это приводит к существованию конденсата.

Этим Приложением мы бы хотели обратить внимание на тесную аналогию между описанием решений с дробным топологическим зарядом и твистованными состояниями в струнных теориях.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Белавин А.А., Поляков А.М. Письма в ЖЭТФ, 1975, т.22, с.503.
2. Belavin A.A. et al. Phys. Lett., 1975, v.59, p.85.
3. 't Hooft G. Nucl. Phys., 1978, v.B138, p.1; 1979, v.B153, p.141.
4. 't Hooft G. Commun. Math. Phys., 1981, v.81, p.267.
5. Житницкий А.Р. ЯФ, 1987, т.46, с.238; ЯФ, 1988, т.47, вып.1, с.251.
6. Cohen E., Gomez G. Phys. Rev. Lett., 1984, v.52, p.237.
7. Novikov V.A. et al. Nucl. Phys., 1983, v.B229, p.407.
8. Witten E. Nucl. Phys., 1982, v.B202, p.253.
9. Novikov V.A. et al. Phys. Lett., 1984, v.139B, p.389; Phys. Rep., 1984, v.116, p.105.
10. Bohr H. et al. Nucl. Phys., 1984, v.B238, p.407.
11. Jevicki A. Nucl. Phys., 1977, v.B127, p.125.
12. Förster D. Nucl. Phys., 1977, v.B130, p.38.
13. D'Adda T.A. et al. Nucl. Phys., 1978, v.B146, p.63;  
Eichenherr H. Nucl. Phys., 1978, v.B146, p.215;  
Golo V.L., Perelomov A.M. Phys. Lett., 1978, v.B79, p.112.
14. Witten E. Nucl. Phys., 1979, v.B149, p.285.
15. Morozov A.Yu. and Perelomov A.M. Nucl. Phys., 1986, v.B271, p.620.
16. Вайнштейн А.И. и др. УФН, 1982, т.136, с.554.
17. Rothe K.D., Swieca J.A. Nucl. Phys., 1980, v.B168, p.454.
18. Житницкий А.Р. ЯФ, 1987, т.46, с.620.
19. Dixon L. et al. Nucl. Phys., 1985, v.B261, p.678; 1986, v.B274, p.285.
20. Hamidi S., Vafa C. Nucl. Phys., 1987, v.B279, p.465.
21. Callan C. Jr, Dashen R., Gross D.J. Phys. Rev., 1978, v.D17, p.2717.
22. De Alfaro V. et al. Phys. Lett., 1977, v.65B, p.1631.

А.Р. Житницкий

### Дробный топологический заряд, тороны и нарушение дискретной киральной симметрии в суперсимметричной $O(3)\sigma$ -модели

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

---

Работа поступила 23 декабря 1987 г.  
Подписано в печать 21.01. 1988 г. МН 08050  
Формат бумаги  $60 \times 90$  1/16 Объем 1,8 печ.л., 1,5 уч.-изд.л.  
Тираж 200 экз. Бесплатно. Заказ № 6

---

Набрано в автоматизированной системе на базе фото-наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и отпечатано на ротапинтере Института ядерной физики СО АН СССР,  
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.